

# CULEGERE DE PROBLEME

PENTRU  
ADMITEREA  
ÎN  
ÎNVĂȚĂMÎNTUL  
SUPERIOR



Editura Științifică și Enciclopedică



## COLECTIVUL DE COORDONARE

MATEMATICĂ	Octavian Stănășilă
FIZICĂ	Ion M. Popescu
CHIMIE	Felicia Cornea





Vasile BRÎNZĂNESCU  
Stere IANUȘ  
Bucur B. IONESCU  
Octavian STĂNĂȘILĂ

Ion M. POPESCU  
Dan IORDACHE  
Constantin CRISTESCU  
Paul STERIAN  
Ion CĂPLĂNUȘ

Felicia CORNEA  
Ion BACIU  
Cornel PADINA

# CULEGERE DE PROBLEME REZOLVATE

pentru admiterea în învățământul superior

**Matematică-Fizică-Chimie**

- Probleme date la concursurile  
de admitere în învățământul superior, 1984—1987
- ● Probleme propuse



EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ  
București, 1989



COPERTA DE GEORGE MĂLUȘEL

Redactori: Maria BORICEAN (Matematică)  
Virgil SPULBER (Fizică)  
Carmen ZGĂVÎRDICI (Chimie)

Tehnoredactor: Olimpiu Popa

ISBN 973-29-0059-8





## PREFATĂ

Lucrarea pe care o prezentăm cuprinde subiectele date la concursurile de admitere în învățământul superior, din anii 1984—1987, la probele de matematică, fizică și chimie. Toate problemele respective sunt însoțite de soluții, indicații sau răspunsuri, acestea fiind prezente inclusiv pentru întrebările sau subiectele cu aspect teoretic.

Pentru fiecare disciplină s-a adăugat cîte un breviar teoretic, precum și seturi de probleme propuse de autori, majoritatea originale, și pentru care sînt date — după caz — soluții, răspunsuri sau numai indicații asupra modului de rezolvare.

Breviarele teoretice sintetizează principalele noțiuni, legi, teoreme și formule învățate în școală, urmărind îndeaproape manualele de liceu și programele analitice pentru admitere. Astfel, la matematică sînt prezentate — în mod unitar, fără demonstrații — noțiunile esențiale și teoremele de bază de algebră, geometrie, trigonometrie și analiză matematică, cu exemple concrete de aplicare a acestora. La fizică sînt date definițiile mărimilor și unităților lor de măsură, legile, teoremele și formulele principale din mecanică, fizică moleculară, electricitate și magnetism, optică, fizică atomică și nucleară, cu accent pe explicarea și înțelegerea fenomenelor fizice, a semnificației fizice a mărimilor, precum și pe aplicațiile tehnice ale acestora. La chimie, odată cu prezentarea principalelor aspecte teoretice de chimie anorganică și organică, s-a insistat pe aprofundarea aplicațiilor în realizarea reacțiilor chimice, în rezolvarea problemelor de chimie.

Prezentarea unor soluții complete ale unor probleme, precum și tratarea integrală a subiectelor teoretice s-a făcut în ideea că este necesar ca orice candidat la concursul de admitere în învățământul superior să știe și cum să-și redacteze lucrările, cu atît mai mult cu cît acestea trebuie realizate într-un barem de timp. Mai mult, la un concurs cu probe de matematică, fizică sau chimie nu este suficient să se urmărească numai obținerea rezultatului unei probleme, ci contează foarte mult modul de prezentare logic, ordonat și justificat al raționamentului, pînă la concluziile finale. De asemenea, chestiunile teoretice trebuie să fie prezentate argumentat, cu explicații, cu justificarea semnificațiilor, cu interpretările și cu concluziile care se impun.

În anii trecuți, au mai apărut două lucrări similare, cu subiectele date la concursurile de admitere organizate pe plan central. Acelea se refereau la anii 1978—1979 și, respectiv, 1980—1983. Volumul de față are un conținut în întregime nou, păstrîndu-se numai modul de organizare a materialului, pe anii de concurs, cu respectarea structurii probelor pe discipline, specializări, profiluri sau grupe de profiluri. În acest fel, orice elev sau absolvent de liceu care dorește să devină student poate să realizeze o autoverificare a cunoștințelor sale, în condiții apropiate de cele din concurs.

Bineînțeles, există unele modificări în timp ale programelor analitice și cititorul trebuie să se situeze în condițiile cerințelor din anii corespunzători de concurs, cunoscîndu-se că sînt valabile acele manuale și programe după care au studiat, în



timpul liceului, absolvenții promoției din anul în care se organizează concursul de admitere.

Elaborarea celor mai multe probleme este de fapt rodul activității a numeroase cadre didactice din învățământul superior, care au contribuit la realizarea portofoliului larg de probleme utilizat la selecționarea și redactarea celor pentru probele de concurs. Soluțiile aparțin, cu precădere, autorilor prezentei lucrări, ca și problemele pe care le-au propus, în conformitate cu manualele și programele promoției de absolvenți din 1988.

Sperăm că această lucrare va constitui un sprijin real pentru elevii din toate clasele de liceu, cu deosebire pentru cei din clasele terminale și pentru absolvenții care se pregătesc pentru concursul de admitere în învățământul superior. Există și alte categorii de cititori interesați pentru care aprofundarea cunoștințelor în domeniul matematicii, fizicii și chimiei constituie o preocupare permanentă. De asemenea, lucrarea poate fi utilă profesorilor de specialitate, în vederea acțiunilor complexe de pregătire a elevilor pentru examenele de bacalaureat, pentru olimpiade și pentru concursurile de admitere în învățământul superior.

AUTORII



# MATEMATICĂ





## § 1. ALGEBRĂ

### 1. IDENTITĂȚI IMPORTANTE

Multe considerații de matematică se referă la numerele reale. Presupunem cunoscute proprietățile de calcul în mulțimea  $\mathbf{R}$  și în submulțimile sale  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ . În unele considerații se folosesc și numerele complexe ( $\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ).

Pentru orice  $a, b \in \mathbf{C}$  avem:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2; \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

și, pentru orice întreg  $n \geq 1$ :

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + b^n,$$

sau echivalent:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n T_{k+1}, \quad \text{unde } T_{k+1} = C_n^k a^{n-k}b^k.$$

Dacă  $a, b, c \in \mathbf{C}$  atunci:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca;$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a);$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

Pentru orice  $x \in \mathbf{C}$ ,  $x \neq 1$ , avem:  $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ .

Dacă  $a, b, c, x, y, z \in \mathbf{R}$ , atunci:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2.$$

(identitatea lui Lagrange)

De aici rezultă că:

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2).$$

Mai general,

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i x_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right).$$

(inegalitatea lui Cauchy)

Reamintim că  $(\forall)x \in \mathbf{R}$ ,  $x^2 \geq 0$ , și că dacă  $x, y \in \mathbf{R}$ ,  $x^2 + y^2 = 0$ , atunci  $x = y = 0$ .

Inegalitățile anterioare nu au loc și pentru numere complexe.

Notăm  $x_1 + x_2 = S$  și  $x_1 x_2 = P$ . Atunci:

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P; \\x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = S^3 - 3PS; \\x_1^4 + x_2^4 &= (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2;\end{aligned}$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{S^2 - 4P};$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P} \text{ etc.}$$

În mod similar, dacă  $x_1 + x_2 + x_3 = S_1$ ,  $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = S_2$ ,  $x_1 x_2 x_3 = S_3$ , atunci:

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= S_1^2 - 2S_2; \\x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= 3S_3 + S_1(S_1^2 - 3S_2); \\x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 &= (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)^2 - 2x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = S_2^2 - 2S_1 S_3; \\\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} &= \frac{S_2}{S_3} \text{ etc.}\end{aligned}$$

În general, orice polinom simetric  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se poate exprima polinomial în funcție de polinoamele simetrice fundamentale:  $S_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ;  $S_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$ ; ...;  $S_n = x_1 x_2 \dots x_n$ .

*Exemple.* 1) Presupunem că  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  și că suma  $a + b + c$  este divizibilă cu 6. Să se arate că numărul  $a^3 + b^3 + c^3$  este divizibil cu 6. Așadar  $a + b + c = 6k$  cu  $k \in \mathbb{Z}$  și rezultă că  $a^3 + b^3 + c^3 = M6 + 3abc$ . Este suficient să observăm că unul din numerele  $a, b, c$  este par, deci  $3abc = M6$ .

2) Să se arate că dacă  $a, b, c \in \mathbb{R}$  și  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , atunci  $|a + b + c| \leq \sqrt{3}$ . Folosim identitatea lui Lagrange pentru  $x = y = z = 1$ .

## 2. FUNCȚII ȘI ECUAȚII DE GRADUL I ȘI II

Funcțiile de gradul I sînt de forma  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$  cu  $a, b$  constante reale. Semnul lui  $f$  este constant dacă și numai dacă  $a = 0$ . Dacă  $a \neq 0$ ,  $f(x)$  are semn contrar semnelui lui  $a$  pentru  $x < -\frac{b}{a}$  și același semn cu  $a$  pentru  $x > -\frac{b}{a}$ . Funcția  $f$  este strict crescătoare  $\leftrightarrow a > 0$  și strict descrescătoare  $\leftrightarrow a < 0$ .

Funcțiile de gradul II sînt de forma  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$  cu  $a, b, c$  constante reale și  $a \neq 0$ .

Evident,

$$f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right],$$

unde  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Atunci:

$$f(x) = 0 \leftrightarrow \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a},$$

adică  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ . Reamintim relațiile lui Viète:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$



Reamintim că o ecuație de gradul II cu soluțiile  $\alpha, \beta$  date este  $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ , adică  $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ . De asemenea, remarcăm că ecuațiile  $ax^2 + bx + c = 0$  și  $a'x^2 + b'x + c' = 0$  au aceleași soluții dacă și numai dacă  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ .

O funcție  $f$  ca mai sus este strict monotonă pe fiecare din intervalele  $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ ,  $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ . Dacă  $a > 0$ , atunci  $f$  admite un minim în punctul  $-\frac{b}{2a}$  și  $f(x) \geq f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . Dacă  $a < 0$ , atunci  $f$  admite un maxim în punctul  $-\frac{b}{2a}$  și  $(\forall)x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$ .

Graficul lui  $f$  este o parabolă cu axa paralelă cu  $Oy$ , avînd vîrfurile  $V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ .

Dacă  $\Delta \leq 0$ , atunci:

$$f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right] = a \cdot „+”,$$

deci  $f(x)$  are semn constant (semnul lui  $a$ ); dacă  $\Delta > 0$ , atunci ecuația  $f(x) = 0$  are rădăcini reale și distincte  $x_1 < x_2$  și  $f(x)$  are semnul lui  $a$  pe intervalele  $(-\infty, x_1)$  și  $(x_2, \infty)$  și semn contrar lui  $a$  pe intervalul  $(x_1, x_2)$ .

*Exemple.* 1) Să se afle parametrul real  $m$  astfel încît  $\frac{mx^2 + x + 2}{x^2 + 1} > 1$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . Echivalent,  $(\forall)x \in \mathbb{R}, (m-1)x^2 + x + 1 > 0$ . Condițiile sînt:  $m-1 > 0, \Delta < 0$ ; rezultă  $m > \frac{5}{4}$ .

2) Să se afle  $m$  astfel încît ecuațiile  $x^2 + x + m = 0, x^2 + mx + 1 = 0$  să aibă cel puțin o soluție comună. Fie  $\alpha$  o soluție comună, deci  $\alpha^2 + \alpha + m = 0, \alpha^2 + m\alpha + 1 = 0$ ; prin scădere,  $(m-1)(\alpha-1) = 0$ . Pentru  $m=1$  cele două ecuații au aceleași soluții; pentru  $\alpha=1$  se obține  $m=-2$ . Valorile cîrute sînt  $m=1, m=-2$ .

### 3. REZOLVAREA UNOR SISTEME DE ECUAȚII

Prin soluție a unui sistem de forma:

$$\begin{cases} P(x, y) = 0; \\ Q(x, y) = 0, \end{cases}$$

se înțelege orice pereche de numere din  $\mathbb{R}$  (sau din  $\mathbb{C}$ ) verificînd cele două ecuații. Așadar, mulțimea soluțiilor este o submulțime a lui  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (sau, eventual,  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ); ecuațiile sau sistemele de tip polinomial se rezolvă în cadrul complex.

a) Fie un sistem de forma:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0; \\ a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c_0 = 0, \end{cases}$$

cu coeficienți reali sau complecși. Se rezolvă prima ecuație în raport cu  $y$  (presupunînd  $b \neq 0$ ); înlocuind în ecuația secundă, se obține o ecuație de gradul II în  $x$ : care admite în general soluțiile  $x_1, x_2$ . Determinînd valorile  $y_1, y_2$  corespunzătoare, soluțiile sistemului vor fi  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ .



În mod similar se rezolvă sisteme de forma:

$$ax + by + c = 0, \quad P(x, y) = 0.$$

b) Fie un sistem omogen:

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 = a_3; \\ b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{22}y^2 = b_3, \end{cases}$$

punând  $y = tx$ , ecuațiile vor deveni  $x^2P(t) = a_3$ ,  $x^2Q(t) = b_3$  cu  $P, Q$  polinoame de grad cel mult doi. Se obține o ecuație în  $t$  (anume  $a_3Q(t) - b_3P(t) = 0$ ) având în general două soluții  $t_1, t_2$ . Înlocuind  $y = t_1x$  într-una din ecuațiile inițiale, se obțin două soluții ale sistemului; alte două se obțin înlocuind  $y = t_2x$ . Trebuie atenție pentru a nu se pierde eventual soluția  $x = 0$ .

c) Sistemele simetrice polinomiale de forma:

$$\begin{cases} P(x, y) = 0; \\ Q(x, y) = 0, \end{cases}$$

unde  $P(x, y) = P(y, x)$ ,  $Q(x, y) = Q(y, x)$  pentru orice  $x, y$ , se rezolvă notînd  $x + y = u$ ,  $xy = v$ , transformîndu-le în sisteme de forma  $P_1(u, v) = 0$ ,  $Q_1(u, v) = 0$ . În general, polinoamele  $P_1, Q_1$  au forme mai simple decît  $P$  și  $Q$ . Pentru orice soluție  $(u_0, v_0)$  se formează ecuația de gradul doi  $z^2 - u_0z + v_0 = 0$  și dacă  $z_1, z_2$  sînt soluțiile ei, rezultă soluțiile  $(z_1, z_2)$  și  $(z_2, z_1)$  ale sistemului inițial.

d) Soluțiile sistemelor de forma:  $f(x, y, z) = 0$ ,  $g(x, y, z) = 0$ ,  $h(x, y, z) = 0$ , sînt triplete de numere reale (sau complexe). Dacă primele două ecuații sînt de gradul I, atunci se „scot”  $x$  și  $y$  în funcție de  $z$ , iar ecuația a treia devine o ecuație în  $z$ . Un caz special îl constituie sistemele de forma:

$$\begin{cases} \frac{x-a_1}{b_1} = \frac{y-a_2}{b_2} = \frac{z-a_3}{b_3}; \\ h(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

egalînd cu  $t$  rapoartele egale, rezultă  $x = a_1 + tb_1$ ,  $y = a_2 + tb_2$ ,  $z = a_3 + tb_3$  și ultima ecuație devine o ecuație în  $t$ .

Nu discutăm aici sistemele care se rezolvă cu „artificii”.

#### 4. NUMERE COMPLEXE

Orice  $z \in \mathbb{C}$  se scrie sub forma  $z = a + bi$  cu  $a, b$  reali („forma algebrică”); remarcăm că egalitatea a două numere complexe revine la două egalități în  $\mathbb{R}$ :

$$a + bi = a' + b'i \iff a = a' \text{ și } b = b' \quad (a, b, a', b' \in \mathbb{R}).$$

Adunarea, scăderea și înmulțirea numerelor complexe se fac după regulile obișnuite, adăugînd  $i^2 = -1$ . Reamintim că orice număr real  $x$  se identifică prin numărul complex  $x + 0i$ . Cîtul  $\frac{a+bi}{c+di}$  se calculează prin amplificarea cu conjugatul numitorului:  $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$ .

Conjugatul complex al unui număr complex  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) este  $\bar{z} = a - bi$ . Avem:  $z_1 \pm z_2 = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ ;  $z_1 z_2 = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ ;  $z_1/z_2 = \bar{z}_1/\bar{z}_2$  (pentru  $z_2 \neq 0$ ). În plus,  $z \in \mathbb{C}$  este real dacă și numai dacă  $z = \bar{z}$ .

Dacă  $P$  este un polinom cu coeficienți reali, atunci  $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$ . Se observă atunci că dacă  $a + bi$  este o rădăcină a lui  $P$ , atunci  $a - bi$  este de asemenea o rădăcină.



Orice număr complex  $z = a + bi$  se identifică prin punctul  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Fixăm un sistem ortogonal de axe  $xOy$  (fig. M.A.1). Modulul  $r = |z|$  este bine determinat și  $r \geq 0$ . Dacă  $z \neq 0$ , atunci  $r > 0$  și argumentul  $\theta = \arg z$  este determinat până la un multiplu întreg de  $2\pi$ ; valoarea din  $[0, 2\pi)$  a argumentului se numește *determinarea principală*. Din relațiile  $a = r \cos \theta$ ,  $b = r \sin \theta$ , rezultă:

$$z = a + bi = r \cos \theta + i r \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

(„forma trigonometrică”).

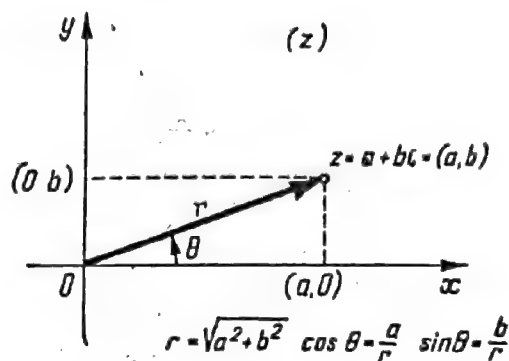


Fig. M.A.1

*Exemple.* Avem  $1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ ,  $-1 - i\sqrt{3} = 2 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$ ,  $-2i = 2 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$  și  $7 = 7(\cos 0 + i \sin 0)$ .

Pentru orice  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  avem  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ,  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$  și dacă  $z_2 \neq 0$ ,  $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ . Dacă  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , atunci:

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \bmod 2\pi; \arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2 \bmod 2\pi.$$

[Prin convenție,  $a = b \bmod 2\pi$  înseamnă că există  $k \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $a - b = 2k\pi$ ].

Un rezultat important îl constituie *formula lui Moivre*: pentru orice  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha.$$

Ecuția binomă  $z^n = A$  cu  $A = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  nenul admite  $n$  soluții distincte, anume:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \\ k = 0, 1, \dots, n-1;$$

aici  $\sqrt[n]{r}$  este radicalul aritmetic, deci unicul număr real și pozitiv  $u$  astfel încât  $u^n = r$ . Numerele complexe  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  sunt virfurile unui poligon convex regulat cu  $n$  laturi, înscris în cercul cu centrul în origine de rază  $\sqrt[n]{r}$ .

*Exemple.* 1) Determinăm  $n \in \mathbb{Z}$  astfel încât numărul complex  $z = \left( \frac{1+i}{1-i} \right)^n$  să fie real. Avem  $1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$  și  $1 - i = \sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right)$ , deci:

$$z = \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^n = \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2},$$

$z$  este real  $\iff \sin \frac{n\pi}{2} = 0 \iff \frac{n\pi}{2} = k\pi$  cu  $k \in \mathbb{Z} \iff n$  este par.

2) Câte soluții ale ecuației  $z^{1988} = -i$  sînt situate în primul cadran? Ecuația se scrie  $z^{1988} = 1 \cdot \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$  și are soluțiile:

$$z_k = \cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{1988} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{1988},$$

$0 \leq k \leq 1987$ ; dintre acestea, sînt situate în primul cadran cele pentru care

$$0 < \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{1988} < \frac{\pi}{2} \text{ și sînt în număr de 497.}$$

## 5. INEGALITĂȚI, INECUAȚII

De la început trebuie spus că inegalitățile se consideră numai între numere reale (și nu complexe). Reamintim că dacă  $a, b \in \mathbb{R}$ , atunci:

$a < b \iff$  există  $m > 0$  astfel încît  $a + m = b$ ;

$a \leq b \iff$  există  $m \geq 0$  astfel încît  $a + m = b$ .

Deoarece inegalitățile trebuie minuite cu atenție și pun în dificultate pe candidați, reamintim proprietățile lor de bază.

1) Dacă  $a < b$ , atunci  $a - b = -m$ , deci  $a - b < 0$  (trecerea dintr-un membru în altul cu semn schimbat).

2) Dacă  $a < b$ , atunci  $-a > -b$  (într-adevăr, există  $m > 0$  astfel încît  $a + m = b$ , deci  $-b + m = -a$ , adică  $-b < -a$ ).

3) Inegalitățile de același sens se pot aduna membru cu membru:

$$a_1 \leq b_1, \quad a_2 \leq b_2 \Rightarrow a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2.$$

4) Inegalitățile între numere pozitive se pot înmulți:

$$0 \leq a_1 \leq b_1, \quad 0 \leq a_2 \leq b_2 \Rightarrow 0 \leq a_1 a_2 \leq b_1 b_2.$$

Inegalitățile între numere pozitive se pot ridica la pătrat iar cele între numere negative se înmulțesc în prealabil cu  $-1$  (cu schimbarea semnului).

5) Pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ , avem:

$$|x + y| \leq |x| + |y|; \quad |x - y| \geq |x| - |y|.$$

Dacă  $\varepsilon > 0$ , atunci relația  $|x - a| < \varepsilon$  este echivalentă cu  $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$ , adică  $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ; iar relația  $|x - a| > \varepsilon$  este echivalentă cu  $x \in (-\infty, a - \varepsilon) \cup (a + \varepsilon, \infty)$ .

Dacă  $\varepsilon < 0$ , inegalitatea  $|x - a| < \varepsilon$  este falsă oricare ar fi  $x, a \in \mathbb{R}$  iar  $|x - a| > \varepsilon$  este adevărată oricare ar fi  $x, a \in \mathbb{R}$ .

Semnul numerelor  $7, \sqrt{3} - \sqrt{2}, a^2 + 1 (a \in \mathbb{R})$  este evident „+”. Dar semnul expresiei  $x - 1 (x \in \mathbb{R})$  nu este constant, depinzînd de  $x$ . Rezolvarea inecuațiilor revine la stabilirea semnului anumitor expresii (adică la precizarea cazurilor cînd expresiile respective au valori pozitive sau negative). În rezolvarea inecuațiilor se produc uneori greșeli care pot fi evitate. Astfel, o inegalitate de forma  $\frac{a}{b} < c$  nu este echivalentă cu  $a < bc$  (corect:  $\frac{a}{b} - c < 0, \frac{a - bc}{b} < 0$ ), după cum din ipoteza că  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  este greșit să se deducă  $ad < bc$  (corect:  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} < 0, \frac{ad - bc}{bd} < 0$ , studiind și semnul numitorului). Este util să reamintim că semnul unui cît  $\frac{a}{b}$  este același cu semnul produsului  $ab$  (deoarece  $\frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2}$  și  $b^2 > 0$ ).



(O inecuație de forma  $\frac{E_1 E_2}{E_3} > 0$  este echivalentă cu  $E_1 E_2 E_3 > 0$ , după cum  $\frac{E_1}{E_2 E_3} \leq 0$  este echivalentă cu  $E_1 E_2 E_3 \leq 0$  punind însă condiția  $E_2 \neq 0, E_3 \neq 0$ ).

*Exemple.* 1) Aflăm  $x \in \mathbb{R}$  astfel încît  $x^2 \leq \frac{2}{x}$ . Așadar,  $x^2 - \frac{2}{x} \leq 0, \frac{x^3 - 2}{x} \leq 0$  și  $x(x^3 - 2) \leq 0$  cu  $x \neq 0$  (era greșit  $x^3 \leq 2$ ). Rezultă  $x(x - \sqrt[3]{2})(x^2 + x\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) \leq 0$  și trinomialul de gradul II fiind pozitiv, rezultă  $x(x - \sqrt[3]{2}) \leq 0$  cu  $x \neq 0$ . În concluzie,  $x \in (0, \sqrt[3]{2}]$ .

2) Rezolvăm inecuația cu parametrul real  $m \neq -1: \frac{x-1}{x+1} \leq \frac{m-1}{m+1}$ . Trebuie făcută totodată discuție după  $m$ . Inecuația se scrie echivalent:

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{m-1}{m+1} \leq 0; \quad \frac{(m+1)(x-1) - (m-1)(x+1)}{(m+1)(x+1)} \leq 0,$$

adică  $\frac{2x-2m}{(m+1)(x+1)} \leq 0$ .

Dacă  $m+1 > 0$ , atunci inecuația este echivalentă cu  $(x-m)(x+1) \leq 0$ ,  $x \neq -1$  și rezultă  $x \in (-1, m]$ .

Dacă  $m+1 < 0$ , inecuația este echivalentă cu  $(x-m)(x+1) \geq 0$ ,  $x \neq -1$  și rezultă  $x \in (-\infty, m] \cup (-1, \infty)$ .

3) Inecuațiile exponențiale, logaritmice și trigonometrice au unele particularități care țin de înțelegerea de fond a funcțiilor respective. De exemplu, pentru a rezolva:

$$(\sqrt{2}-1)^x + (3-2\sqrt{2})^x < 6,$$

se pune  $u = (\sqrt{2}-1)^x$ ; deoarece  $3-2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2$ , rezultă  $u + u^2 < 6$ , deci  $-3 < u < 2$ . Dar  $u > 0$ , deci rezultă  $(\sqrt{2}-1)^x < 2$  și logaritmiind în baza  $e$ , rezultă  $x \ln(\sqrt{2}-1) < \ln 2$ . Ținînd cont că  $\ln(\sqrt{2}-1)$  este negativ, rezultă  $x > \frac{\ln 2}{\ln(\sqrt{2}-1)}$ .

Este util să reamintim de asemenea cîteva inegalități clasice.

1°. *Inegalitatea lui Cauchy*: pentru orice  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ ,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

2°. *Inegalitatea mediilor*: dacă  $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ , atunci

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}; \quad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

și, mai general, pentru orice numere reale pozitive  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ,

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Acestea pot fi aplicate fără demonstrație (alte inegalități mai puțin cunoscute trebuie nu numai afirmate, ci și demonstrate la eventualele examene).

## 6. RADICALI, PUTERI, LOGARITMI

Fixăm un întreg  $n \geq 2$ . Dacă  $n$  este par și  $a \geq 0$ , atunci se definește radicalul aritmetic  $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$  ca fiind unicul număr real și pozitiv  $u$  astfel încît  $u^n = a$ . Dacă  $n$  este par și  $a < 0$ , atunci  $\sqrt[n]{a}$  nu există (în cadrul numerelor reale). Pentru

orice  $n$  impar și  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\sqrt[n]{a}$  este unicul număr real  $u$  (avînd același semn cu  $a$ ) astfel încît  $u^n = a$ . Reamintim că:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{dacă } n \text{ este impar,} \\ |a| & \text{dacă } n \text{ este par.} \end{cases}$$

Dacă  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , atunci  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$  și pentru  $b > 0$ ,  $\sqrt[n]{a/b} = (\sqrt[n]{a})/(\sqrt[n]{b})$ . De asemenea,  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$  și, în particular,  $\sqrt[n]{a^2} = \sqrt{|a|}$  (aceasta din urmă pentru orice  $a \in \mathbb{R}$ ).

Reamintim de asemenea *formula radicalilor dubli*: dacă  $A, B$  sînt numere reale, atunci:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}, \text{ unde } C = \sqrt{A^2 - B}$$

(presupunînd că radicalii există).

*Exemplu.* Ne propunem să simplificăm expresia:

$$E = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}, \quad x \geq 1.$$

Pentru primul radical avem  $A = x$ ,  $B = 4(x-1)$ , deci  $C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$ . Atunci  $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{x + |x-2|}{2}} + \sqrt{\frac{x - |x-2|}{2}}$ ; în mod similar se prelucurează al doilea termen și ca atare:

$$E = 2 \sqrt{\frac{x + |x-2|}{2}} = \begin{cases} 2\sqrt{x-1} & \text{dacă } x > 2, \\ 2 & \text{dacă } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Se putea raționa și astfel: se observă că

$$E^2 = x + 2\sqrt{x-1} + x - 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2 - 4(x-1)} = 2x + 2|x-2|$$

și deoarece  $E \geq 0$ , avem  $E = \sqrt{E^2} = \sqrt{2x + 2|x-2|}$ .

Prin convenție, un număr real  $a$  se numește *bază* (de logaritmi) dacă  $a > 0$  și  $a \neq 1$ . În acest caz se definește, oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ , *exponențiala*  $a^x$  în baza  $a$ . Anume:

$$a^x = \begin{cases} \underbrace{a \dots a}_{n \text{ ori}} & \text{dacă } x = n \in \mathbb{N}^*, \\ 1 & \text{dacă } x = 0, \\ \frac{1}{a^n} & \text{dacă } x = -n \text{ cu } n \in \mathbb{N}^*, \\ \sqrt[q]{a^p} & \text{dacă } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ (} q \geq 2 \text{ întreg).} \end{cases}$$

(În cazul cînd  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $a^x$  se definește cu ajutorul noțiunii de limită. De exemplu,  $3^{\sqrt{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{r_n}$ , unde  $r_n$  este un șir de numere raționale convergent către  $\sqrt{2}$ .)

Reamintim proprietățile principale ale funcției exponențiale în baza  $a$ ,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x.$$



1)  $a^x > 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ; de exemplu,  $a^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} > 0$ .

2)  $f$  este injectivă (dacă  $a^x = a^y$ , atunci  $x = y$ ; aceasta se folosește la ecuații exponențiale, care se reduc astfel la ecuațiile studiate anterior). Menționăm că din relația  $a^x = a^y$  rezultă în general  $x = y$  sau  $a = 1$ ; cazul  $a = 1$  fusese exclus prin convenția făcută asupra bazei  $a$ .

3) Pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad a^{x-y} = a^x / a^y, \quad a^{xy} = (a^x)^y.$$

4) Dacă  $a > 1$ , atunci funcția exponențială în baza  $a$  este strict crescătoare, deci

$$x_1 < x_2 \iff a^{x_1} < a^{x_2}.$$

Dacă  $0 < a < 1$ , atunci

$$x_1 < x_2 \iff a^{x_1} > a^{x_2}.$$

Acest fapt stă la baza rezolvării inecuațiilor exponențiale.

Dacă  $a > 1$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$  (se mai scrie simbolic  $a^\infty = \infty$ ,  $a^{-\infty} = 0$ ). Dacă  $0 < a < 1$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$ . Dacă  $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$  ( $a_0 \neq 0$ ) este o funcție polinomială și  $a > 1$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)a^x = 0$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x)a^x = +\infty$  (dacă  $a_0 > 0$ ) și  $-\infty$  (dacă  $a_0 < 0$ ); în particular,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0$ .

Funcția exponențială

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), \quad f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1 \text{ fixat})$$

este bijectivă și inversa ei este

$$f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \log_a y.$$

Egalitatea  $\log_a x = r$  este echivalentă cu  $\{x > 0, a^r = x\}$ .

Reținem că numărul  $\log_a v$  este definit dacă

$$u > 0, \quad u \neq 1, \quad v > 0.$$

Proprietățile principale ale logaritmulor sînt următoarele:

1)  $\log_a 1 = 0$ ,  $\log_a a = 1$  pentru orice  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

2)  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$  și  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ , pentru orice  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ;  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

3) Dacă  $\alpha \in \mathbb{R}$ , atunci  $\log_a (x^\alpha) = \alpha \log_a x$  pentru orice  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x > 0$ ; de remarcat că  $\log_a x^2 = 2 \log_a |x|$  pentru orice  $x \neq 0$ .

4) Schimbarea bazei:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

pentru orice  $a, b$  strict pozitive și diferite de 1 și pentru orice  $x > 0$ .

Reamintim notațiile uzuale:  $\log_{10} = \lg$ ;  $\log_e = \ln$ .

$$\text{Exemplu. } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}; \quad \log_2 7 = \frac{\lg 7}{\lg 2}.$$

5) Dacă  $a > 1$ , atunci funcția  $h: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \log_a x$ , este strict crescătoare (deci  $x_1 < x_2 \iff \log_a x_1 < \log_a x_2$ ). Iar dacă  $0 < a < 1$ , funcția  $h$  este strict descrescătoare. Acest fapt este folosit la rezolvarea inecuațiilor logaritmice.

*Exemple.* 1) Rezolvăm inecuația  $x^{\lg x} \leq 10$ . Condiția inițială este  $x > 0$ . Logaritmind în baza 10, inecuația devine  $\lg(x^{\lg x}) \leq \lg 10 = 1$ , adică  $(\lg x)^2 \leq 1$ , de unde  $-1 \leq \lg x \leq 1$  și, în final,  $x \in [10^{-1}, 10]$ .

2) Fie  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  un parametru. Discutăm și rezolvăm inecuația  $\log_x ax \leq \log_a x + 1$ . Se recomandă folosirea bazelor constante, deci trecem în baza  $a$ :  $\frac{\log_a(ax)}{\log_a x} \leq \log_a x + 1$ . Notînd  $\log_a x = y$ , rezultă  $\frac{1+y}{y} \leq y+1$ , de unde  $y \in [-1, 0) \cup [1, \infty)$ . Dacă  $a > 1$ , atunci  $x \in \left[\frac{1}{a}, 1\right) \cup [a, \infty)$  și dacă  $0 < a < 1$ , atunci  $x \in (0, a] \cup \left(1, \frac{1}{a}\right]$ .

## 7. ANALIZĂ COMBINATORIE

Pentru orice întreg  $n \geq 1$  notăm  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ , care este un prototip al mulțimilor cu  $n$  elemente. Se numește *permutare* a mulțimii  $I_n$  orice aplicație bijectivă  $f: I_n \rightarrow I_n$ . Numărul  $P_n$  al acestora este  $n!$  (prin convenție, se pune de asemenea  $0! = 1$ ).

Dacă  $1 \leq m \leq n$ , orice aplicație injectivă  $I_m \rightarrow I_n$  se numește o *aranjare* a numerelor  $1, 2, \dots, n$  luate câte  $m$ . Numărul  $A_n^m$  al lor este dat de formula:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \underbrace{n(n-1) \dots (n-m+1)}_{m \text{ factori}}.$$

Evident,  $P_n = A_n^n$ .

Se numește *combinație* a numerelor  $1, 2, \dots, n$  luate câte  $m$  ( $0 \leq m \leq n$ ) orice submulțime a lui  $I_n$ , avînd  $m$  elemente distincte. Numărul  $C_n^m$  al acestora este dat de formula:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Reținem:

$$C_x^0 = 1, \quad C_x^1 = x, \quad C_x^2 = \frac{x(x-1)}{2}, \quad C_x^3 = \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \text{ etc.}$$

Reamintim de asemenea formulele:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \quad (0 \leq m \leq n); \quad C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1} \quad (1 \leq m \leq n-1).$$

O formulă extrem de utilă o constituie *formula lui Newton* a binomului:

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}y + \dots + C_n^m x^{n-m}y^m + \dots + C_n^1 xy^{n-1} + y^n,$$

pentru orice  $x, y \in \mathbb{C}$  și  $n \geq 1$  întreg. Mai concis, ea se scrie sub forma:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n T_{k+1}, \text{ unde } T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} y^k.$$

Bineînțeles,

$$(x-y)^n = [x+(-y)]^n = \sum_{k=0}^n T_{k+1}, \text{ unde } T_{k+1} = (-1)^k C_n^k x^{n-k} y^k.$$

Reținem că dezvoltarea binomială  $(x+y)^n$  admite  $n+1$  termeni, coeficienții binomiali fiind:  $1, C_n^1, \dots, C_n^m, \dots, C_n^{n-1} = C_n^1, C_n^n = 1$ . Suma acestor coeficienți este  $2^n$ .



Exemple. 1) Să se descompună în factori expresia:

$$E = (x + y)^5 - x^5 - y^5. \text{ Avem } C_5^1 = 5, \quad C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10, \quad C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10,$$

$$C_5^4 = C_5^1 = 5, \text{ deci: } E = 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 = \\ = 5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3) = 5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2).$$

2) Pentru ce  $n \in \mathbb{N}$  dezvoltarea  $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2}\right)^n$  conține termeni independenți de  $x$ ?

Termenul general este:

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot (\sqrt[3]{x})^{n-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = C_n^k \cdot x^{\frac{n-k}{3} - 2k} = C_n^k x^{\frac{n-7k}{3}} \quad (0 \leq k \leq n).$$

Termenii independenți de  $x$  sînt cei care conțin  $x^0$ , deci  $\frac{n-7k}{3} = 0$ , adică  $n$  este divizibil cu 7.

## 8. ELEMENTE DE TEORIA NUMERELOR

Cadrul numeric al teoriei numerelor îl constituie mulțimea  $\mathbb{Z}$ . Reamintim că se spune că  $a$  este divizibil cu  $b$  ( $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ ) dacă există  $c \in \mathbb{Z}$  astfel încît  $a = bc$ . Se mai scrie  $a:b$  sau  $b|a$ . Dacă  $a$  este divizibil cu  $b$  și  $b$  este divizibil cu  $c$ , atunci  $a$  este divizibil cu  $c$  (tranzitivitate). Dacă  $a$  este divizibil cu  $b$  și  $b$  este divizibil cu  $a$ , atunci  $b = \pm a$ .

Dacă  $a, b \in \mathbb{N}$  și  $b \neq 0$ , atunci există și sînt unice numerele naturale  $q, r$  astfel încît  $a = bq + r$  și  $0 \leq r < b$  (teorema împărțirii cu rest). De exemplu, pentru  $b = 2$  rezultă că orice  $a \in \mathbb{N}$  este de forma  $2q$  sau  $2q + 1$ ; similar, pentru  $b = 3$  rezultă că orice număr natural este de forma  $3q, 3q + 1$  sau  $3q + 2$  etc. Un număr întreg  $p, p \geq 2$  se numește *prim* dacă singurele numere naturale divizori ai săi sînt 1 și  $p$ . Se știe că orice  $a \in \mathbb{N}$  se descompune în factori primi,  $a = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$  cu  $r_i \geq 1$ .

Dacă  $a, b \in \mathbb{N}^*$ , cel mai mare divizor comun al lor este acel unic  $d \in \mathbb{N}$  astfel  $a:d, b:d$  și dacă  $d_1 \in \mathbb{N}, a:d_1, b:d_1$ , atunci  $d:d_1$ . În mod dual se definește cel mai mic multiplu comun  $m$ . Avem  $m = \frac{a \cdot b}{d}$ . Dacă descompunerile în factori

primi sînt  $a = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$  și  $b = p_1^{s_1} \dots p_k^{s_k}$  ( $r_i \geq 0, s_i \geq 0$ ), atunci  $d = p_1^{\min(r_1, s_1)} \dots p_k^{\min(r_k, s_k)}$  și  $m = p_1^{\max(r_1, s_1)} \dots p_k^{\max(r_k, s_k)}$ . Se poate arăta că există  $u, v \in \mathbb{Z}$  astfel încît  $d = ua + vb$ ; în particular, dacă  $a, b$  sînt prime între ele (adică  $d = 1$ ), atunci  $1 = ua + vb$  cu  $u, v \in \mathbb{Z}$ .

Dacă  $a \in \mathbb{Z}$ , orice multiplu al lui  $a$  se notează simbolic  $Ma$ . Conform formulei binomului lui Newton rezultă că  $(Ma + b)^n = Ma + b^n$  pentru orice  $a, b \in \mathbb{Z}$  și  $n \geq 1$  natural. De exemplu,  $102^5 = (M100 + 2)^5 = M100 + 2^5 = M100 + 32$ ; în particular, ultimele două cifre ale lui  $102^5$  sînt 32.

Un rezultat clasic îl constituie mica teoremă a lui Fermat: pentru orice  $a \in \mathbb{Z}$  și pentru orice  $p \geq 2$  prim,  $a^p - a$  este divizibil cu  $p$ . De exemplu,  $3^{11} - 3 : 11$  și  $4^7 - 4 : 7$ .

Fie  $q \geq 2$  un întreg fixat, numit *ad-hoc bază de numerație*. Numerele  $0, 1, \dots, q-1$  se numesc atunci cifre în baza  $q$ ; notăm mulțimea lor cu  $C_q = \{0, 1, \dots, q-1\}$ . De exemplu, cifrele binare sînt  $C_2 = \{0, 1\}$  iar cifrele octale,  $C_8 = \{0, 1, \dots, 7\}$ .

Dacă  $a \in \mathbb{N}$  și  $a = a_1 \cdot q^{p-1} + a_2 \cdot q^{p-2} + \dots + a_p$ , cu  $a_1, \dots, a_p \in C_q$ , atunci se scrie  $a = a_1 \dots a_p$  (reprezentarea lui  $a$  în baza  $q$ ).

De exemplu, pentru  $q = 2$ ,  $a = 27$  și  $b = 141$  putem scrie:

$$a = 2^4 + 2^3 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \overline{11011} \text{ (baza 2);}$$

$$b = 2^7 + 2^3 + 2^2 + 1 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = \overline{10001101} \text{ (baza 2).}$$

Pentru  $q = 8$  avem:  $141 = 2 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 5 = \overline{215} \text{ (baza 8).}$

## 9. PROGRESII

Reamintim că un șir  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  de numere reale (sau complexe) se numește *progresie aritmetică* de rație  $r$  dacă pentru orice  $n \geq 2$ ,  $a_n = a_{n-1} + r$ . Rezultă  $a_n = a_1 + (n-1)r$ . A determina o progresie revine la a afla  $a_1, r$ . Notînd  $S_n = a_1 + \dots + a_n$ , rezultă  $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ , pentru orice întreg  $n \geq 1$ .

Progresia (în cadrul real) este crescătoare dacă  $r \geq 0$  și descrescătoare dacă  $r \leq 0$ . Orice termen este medie aritmetică între termenul precedent și cel următor, ceea ce justifică denumirea. Trei numere  $a, b, c$  sînt în progresie aritmetică dacă  $b = \frac{a+c}{2}$ , iar patru numere  $a, b, c, d$  formează o progresie aritmetică dacă și numai

dacă  $b = \frac{a+c}{2}$ ,  $c = \frac{b+d}{2}$  (condiția  $a+d = b+c$  este doar necesară). Trei numere necunoscute în progresie aritmetică se pot scrie  $a-r, a, a+r$  iar patru  $a-3r, a-r, a+r, a+3r$ .

Un șir  $(a_n)_{n \geq 1}$  este o *progresie geometrică* de rație  $q$  dacă  $a_n = a_{n-1} \cdot q$  pentru orice  $n \geq 2$ . Rezultă  $a_n = a_1 q^{n-1}$  și pentru  $q \neq 1$ ,  $S_n = a_1 + \dots + a_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1} = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$  (în cazul  $q = 1$ , rezultă  $S_n = na_1$ ). În particular,

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \text{ pentru } q \neq 1.$$

Dacă  $-1 < q < 1$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$ .  
De exemplu:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Trei numere  $a, b, c$  sînt în progresie geometrică dacă  $b^2 = ac$ ; trei numere necunoscute aflate în progresie geometrică pot fi reprezentate astfel:  $a, aq, aq^2$ .

Un exemplu tipic de progresie aritmetică se obține astfel: se consideră un interval  $[a, b]$ ,  $a < b$ , care se împarte în  $n$  subintervale congruente, de lungime  $h = \frac{b-a}{n}$ . Notînd  $x_0 = a$ ,  $x_1 = a + h$ , ..., rezultă  $x_{n+1} = a + n \cdot \frac{b-a}{n} = b$ , deci  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  formează o diviziune echidistantă a intervalului considerat (progresie aritmetică de rație  $h$ ).

Să considerăm acum un interval de lungime 1 cm. Considerînd progresia geometrică cu  $a_1 = 1$  și rație  $q = 2$  (deci dublînd succesiv lungimea intervalului), după 60 de pași se depășesc dimensiunile universului observabil, al cărui diametru este mai mic decît  $2^{60}$  cm; în mod similar, considerînd progresia geometrică cu  $a_1 = 1$ ,  $q = \frac{1}{2}$  (înjumătățind succesiv lungimea intervalului inițial), după 30 de pași se „coboară” sub dimensiunile particulelor elementare!



*Exemple. 1) Să se determine termenii comuni ai progresiilor 2, 5, 8, ...; 3, 7, 11, ...*  
 În primul caz  $a_1 = 2$ ,  $r = 3$ , deci  $a_m = a_1 + (m - 1)r = 3m - 1$ ; pentru cea de a doua progresie,  $b_1 = 3$  și  $r = 4$ , deci  $b_n = b_1 + (n - 1)r = 4n - 1$ . Punem condiția  $a_m = b_n$ , deci  $3m - 1 = 4n - 1$ , de unde rezultă că  $m$  este divizibil cu 4, adică termenii comuni sînt  $a_{4k} = 12k - 1$ , adică 11, 23, 35, ...

2) Să se calculeze suma  $S_n = 1 + \overline{11} + \overline{111} + \dots + \underbrace{\overline{11\dots1}}_{n \text{ ori}}$ . Deci:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + (10 + 1) + (10^2 + 10 + 1) + \dots + (10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 1) = \\ &= (1 + 10 + \dots + 10^{n-1}) + (1 + 10 + \dots + 10^{n-2}) + \dots + (1 + 10) + 1 = \\ &= \frac{10^n - 1}{10 - 1} + \frac{10^{n-1} - 1}{10 - 1} + \dots + \frac{10^2 - 1}{10 - 1} + \frac{10 - 1}{10 - 1} = \\ &= \frac{(10^n + 10^{n-1} + \dots + 10) - n}{9} = \frac{10^{n+1} - 10}{9} - n = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}. \end{aligned}$$

## 10. POLINOAME ȘI ECUAȚII ALGEBRICE

Un polinom de grad  $n$  ( $n \geq 1$ ) cu coeficienți complecși este de forma:

$$P(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n, \text{ cu } a_0 \neq 0.$$

Se consideră și polinomul nul (avînd toți coeficienții nuli). Polinoamele de grad zero sînt, prin convenție, constantele. A determina un polinom de grad  $n$  înseamnă a determina cei  $n + 1$  coeficienți ai lui. Mulțimea (inelul) polinoamelor cu coeficienți complecși se notează  $\mathbb{C}[X]$ . În mod similar se definesc  $\mathbb{R}[X]$  sau  $\mathbb{Z}[X]$ .

Dacă  $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ , atunci există, și sînt unice, polinoame  $C, R$  cu coeficienți complecși astfel încît  $P(X) = C(X) \cdot Q(X) + R(X)$  și  $\{R = 0 \text{ sau } \text{gr } R < \text{gr } Q\}$ . În cazul cînd  $Q(X) = X - a$  ( $a \in \mathbb{C}$ ), rezultă  $P(X) = (X - a)C(X) + R$ , deci  $R = P(a)$ . Cîtul  $C(X)$  se poate obține prin schema lui Horner.

Un număr  $a \in \mathbb{C}$  se numește *rădăcină* a lui  $P$  dacă  $P(a) = 0$ ; în acest caz, restul împărțirii lui  $P$  cu  $X - a$  este nul, deci  $P$  este divizibil cu  $X - a$ .

Un polinom de grad  $n \geq 1$  cu coeficienții într-un inel comutativ  $A$  se numește *irreductibil* dacă el nu se poate descompune într-un produs de polinoame de grad strict mai mic decît  $n$ . De exemplu,  $X^2 - 2$  este irreductibil în  $\mathbb{Z}[X]$ , iar  $X + 5$ ,  $X^2 + 4$  sînt irreductibile în  $\mathbb{R}[X]$ . *Teorema fundamentală a algebrei* afirmă că orice polinom din  $\mathbb{C}[X]$  de grad  $n \geq 1$  admite cel puțin o rădăcină  $a \in \mathbb{C}$ . De aici rezultă că polinoamele irreductibile din  $\mathbb{C}[X]$  sînt exact cele de gradul I. Polinoamele irreductibile din  $\mathbb{R}[X]$  sînt polinoamele de gradul I și cele de gradul II care au rădăcini complexe nerezale (de forma  $a \pm bi$  cu  $b \neq 0$ ).

Presupunem  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $P = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$  identificat, bineînțeles, cu funcția reală  $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ .

Un număr  $\alpha$  se numește *rădăcină simplă* pentru  $P$  dacă  $P$  este divizibil cu  $X - \alpha$  și  $P$  nu este divizibil cu  $(X - \alpha)^2$ ; aceasta revine la faptul că  $P(\alpha) = 0$ ,  $P'(\alpha) \neq 0$ . Similar,  $\alpha$  este *rădăcină dublă* pentru  $P$  dacă  $P$  este divizibil cu  $(X - \alpha)^2$  dar nu cu  $(X - \alpha)^3$ ; ceea ce este echivalent cu  $P(\alpha) = 0$ ,  $P'(\alpha) = 0$ ,  $P''(\alpha) \neq 0$ . Numărul  $\alpha$  este *rădăcină multiplă* dacă  $P$  este divizibil cu  $(X - \alpha)^k$ , adică  $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ ,  $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$ . În general,  $\alpha$  este rădăcină de ordin  $k$  ( $k \geq 1$ ) dacă  $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ ,  $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$ . În cele de mai sus,  $P^{(k)}$  este derivata de ordin  $k$  a funcției reale polinomiale  $P$ .

Se cunosc relațiile lui Viète între rădăcinile unui polinom  $P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n$  din  $\mathbb{C}[X]$ ,  $a_0 \neq 0$ , și rădăcinile  $x_1, \dots, x_n$  ale lui  $P$ :

$$S_1 = x_1 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}; \quad S_2 = x_1 \cdot x_2 + \dots + x_{n-1} \cdot x_n = \frac{a_2}{a_0};$$

$$S_n = x_1 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Pentru  $n = 3$ ,  $P(X) = a_0X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3$ , ( $a_0 \neq 0$ ), avem:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0}; \quad S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_2}{a_0};$$

$$S_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{a_3}{a_0}. \text{ Rezultă:}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2 = \frac{a_1^2}{a_0^2} - 2\frac{a_2}{a_0};$$

$$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = (S_2)^2 - 2S_1S_3.$$

Scriind că  $x_1, x_2, x_3$  sint efectiv rădăcini, rezultă:

$$a_0x_1^3 + a_1x_1^2 + a_2x_1 + a_3 = 0; \quad a_0x_2^3 + a_1x_2^2 + a_2x_2 + a_3 = 0;$$

$$a_0x_3^3 + a_1x_3^2 + a_2x_3 + a_3 = 0;$$

adunînd aceste relații, se obține suma  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$  în funcție de coeficienți. Înmulțind cu  $X$ , scriind că  $x_1, x_2, x_3$  sint rădăcini pentru  $XP(X)$  și adunînd relațiile obținute, se obține suma  $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$  etc.

Pentru  $n = 4$ ,  $P(X) = a_0X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X + a_4$  ( $a_0 \neq 0$ ), relațiile lui Viète se pot scrie astfel:

$$S_1 = (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = -\frac{a_1}{a_0};$$

$$S_2 = (x_1 + x_2) \cdot (x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = \frac{a_2}{a_0};$$

$$S_3 = x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -\frac{a_3}{a_0};$$

$$S_4 = (x_1x_2)(x_3x_4) = \frac{a_4}{a_0} \text{ etc.}$$

Dacă  $P$  este un polinom din  $\mathbb{R}[X]$  și admite rădăcina complexă  $\alpha + \beta i$  de ordin  $k$ , atunci el admite și rădăcina  $\alpha - \beta i$  (tot de ordin  $k$ ). Dacă  $P$  are toți coeficienții raționali și rădăcina  $\alpha + \sqrt{\beta}$  (cu  $\alpha, \beta$  raționali și  $\sqrt{\beta}$  irațional), atunci  $P$  are și rădăcina  $\alpha - \sqrt{\beta}$ . În fine, reamintim că dacă  $P = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n$  are toți coeficienții întregi (deci  $P \in \mathbb{Z}[X]$ ), atunci toate rădăcinile întregi eventuale ale lui  $P$  sint printre divizorii termenului liber  $a_n$ . Dacă  $a_0 = 1$  (se spune atunci că  $P$  este monic) și dacă  $P$  nu are rădăcini întregi, atunci el nu are nici rădăcini raționale.

*Exemple.* 1) Să se determine parametrul  $m \in \mathbb{R}$  dacă polinomul  $P(X) = X^3 + 6X^2 + m$  admite rădăcini multiple. Dacă  $\alpha \in \mathbb{C}$  este o astfel de rădăcină, atunci  $P(\alpha) = 0$  și  $P'(\alpha) = 0$ , adică  $\alpha^3 + 6\alpha^2 + m = 0$ ,  $3\alpha^2 + 12\alpha = 0$ ; rezultă  $\alpha_1 = 0$ , deci  $m_1 = 0$  și  $\alpha_2 = -4$ ,  $m_2 = -32$ .



2) Pentru ce  $m \in \mathbb{Z}$  polinomul  $X^3 + mX + 2$  admite rădăcini întregi? Rădăcinile întregi posibile sînt  $\pm 1, \pm 2$ . Scriind că acestea sînt efectiv rădăcini, se obțin trei valori posibile ale lui  $m$ .

3) Fie  $x_1, x_2, x_3$  rădăcinile polinomului  $P(X) = X^3 + X^2 + 2$ . Calculăm suma  $S_5 = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$ . Notăm  $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$  ( $k \geq 1$ ). Avem  $x_1 + x_2 + x_3 = -1$ ,  $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$ ,  $x_1x_2x_3 = -2$ , deci  $S_1 = -1$ ,  $S_2 = 1$ . Scriind că  $x_1, x_2, x_3$  sînt rădăcini și adunînd relațiile obținute, rezultă:

$S_3 + S_2 + 6 = 0$ , deci  $S_3 = -7$ . Apoi,  $x_1, x_2, x_3$  sînt și rădăcini pentru  $X^4 + X^3 + 2X$ , de unde  $S_4 + S_3 + 2S_1 = 0$ , deci  $S_4 = -S_3 - 2S_1 = 9$ . Similar,  $S_5 + S_4 + 2S_2 = 0$ , de unde  $S_5 = -11$ .

4) Aflăm  $m \in \mathbb{C}$  dacă polinomul  $X^3 + X + m$  are rădăcina  $x_1 = 3 - i$ . Este greșit să considerăm că  $x_2 = 3 + i$  (coeficienții polinomului nu sînt reali). Corect este să punem condiția că  $x_1$  este efectiv rădăcină, deci  $(3 - i)^3 + 3 - i + m = 0$ ; se află  $m$  și celelalte rădăcini se obțin împărțind polinomul cu  $X - 3 + i$ .

## 11. MATRICI ȘI DETERMINANȚI

O matrice cu  $m$  linii și  $n$  coloane ( $m \geq 1, n \geq 1$ ) este de forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}; \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Mulțimea acestor matrici se notează cu  $M_{m,n}(\mathbb{R})$ . Dacă  $m = n$  se obțin matricile pătratice de ordin  $n$ . Se pot considera matrici cu coeficienți complecși, întregi etc.

Două matrici  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ;  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  se consideră, prin convenție, egale dacă  $a_{ij} = b_{ij}$  pentru orice  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Egalitatea de matrici  $A = B$  revine la  $mn$  egalități de numere reale. Pentru orice  $\lambda \in \mathbb{R}$  se definesc  $A + B$  și  $\lambda A$  cu proprietățile cunoscute. Dacă  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ , deci numărul coloanelor lui  $A$  coincide cu numărul liniilor lui  $B$ , atunci se definește produsul  $C = A \cdot B \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ ,  $C = (c_{ik})$ , unde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}; \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq k \leq p.$$

(Elementul de pe linia  $i$  și coloana  $k$  din matricea  $C$  se obține făcînd suma produselor dintre elementele liniei  $i$  din  $A$  și coloanei  $k$  din  $B$ ). Reamintim că înmulțirea matricilor este asociativă și distributivă în raport cu adunarea, dar nu și comutativă. De asemenea, dacă  $A, B, C$  sînt matrici și  $AB = AC$  (sau  $BA = CA$ ), nu rezultă  $B = C$ , chiar dacă  $A \neq 0$ .

Mulțimea  $M_n(\mathbb{R})$  a matricilor pătratice de ordin  $n$  cu coeficienți reali are o structură de inel în care matricea  $0_n = \text{diag}(\overbrace{0, \dots, 0}^{n \text{ ori}})$  este elementul neutru pentru adunare, iar  $I_n = \text{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^{n \text{ ori}})$  este elementul neutru pentru înmulțire. Pentru  $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$  am notat:

$$\text{diag}(d_1, \dots, d_n) = \text{matricea diagonală} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Exemple. 1) Dacă  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  și  $AB = BA$ , atunci:

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k A^{n-k} B^k = A^n + C_n^1 A^{n-1} B + \dots + C_n^{n-1} A B^{n-1} + B^n;$$

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1}),$$

pentru orice întreg  $n \geq 1$ . Verificarea se face prin inducție după  $n$ .

2) Fie  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ . Determinăm toate matricile  $X \in M_2(\mathbb{R})$  astfel încât  $AX = XA$ . Punem  $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  și rezultă:

$$AX = \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 2x+4z & 2y+4t \end{pmatrix} \text{ și } XA = \begin{pmatrix} x+2y & 2x+4y \\ z+2t & 2z+4t \end{pmatrix}.$$

Atunci  $x+2z = x+2y$ ,  $y+2t = 2x+4y$ ,  $2x+4z = z+2t$ ,  $2y+4t = 2z+4t$ , de unde  $y = z$ ,  $2x+3y = 2t$ , deci  $z = y$ ,  $t = \frac{2x+3y}{2}$ , cu  $x, y$  numere reale arbitrare.

Dacă  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  este o matrice pătratică, atunci se definește determinantul ei:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^I a_{1i_1} \dots a_{ni_n},$$

unde suma are  $n!$  termeni și se face după toate permutările  $(i_1, \dots, i_n)$  ale numerelor  $(1, \dots, n)$  având  $I$  inversiuni; fiecare termen este un produs de  $n$  factori. Reținem că  $A \in M_n(\mathbb{R})$  și  $\det A \in \mathbb{R}$ .

Dacă  $A = (a) \in M_1(\mathbb{R})$ , atunci  $\det A = a$ ; iar dacă  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , atunci  $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ; în acest caz, dacă  $\det A = 0$ , atunci  $A^2 = (a+d)I_2$ .

Proprietățile principale ale determinantilor sînt următoarele:

- 1)  $\det A = \det(A^T)$ ,  $A^T$  fiind transpusa matricii pătratică  $A$ .
- 2) Dacă se schimbă între ele două linii (resp. două coloane), atunci determinantul își schimbă semnul.
- 3) Dacă o linie (sau o coloană) are toate elementele nule, atunci determinantul este nul; dacă două linii (sau coloane) sînt identice sau „proportionale”, atunci determinantul este nul.
- 4) Dacă o linie (sau coloană) se înmulțește cu un număr real  $\lambda$ ,  $\lambda \neq 0$ , atunci determinantul se înmulțește cu  $\lambda$ . Dar înmulțind o linie (sau coloană) cu un număr nenul și adunînd la altă linie (resp. coloană), atunci determinantul nu își modifică valoarea.
- 5) Se cunoaște dezvoltarea unui determinant după o linie (sau coloană). Aceasta permite calculul determinantilor prin reducerea succesivă la determinanți de ordin mai mic.

În cazul  $n = 3$ , și numai în acest caz, are loc regula lui Sarrus.

6) Dacă  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , atunci  $\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B)$ ; dar, în general,  $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ . Reținem de asemenea că  $\det A^k = (\det A)^k$  pentru orice întreg  $k \geq 1$  și că  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$  pentru orice  $\lambda \in \mathbb{R}$ .



7) Un determinant este nul dacă și numai dacă una din linii (resp. coloane) este combinație liniară a celorlalte, adică liniile (resp. coloanele) sînt liniar dependente ca vectori în  $\mathbb{R}^n$ .

Dacă  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  este o matrice nenulă, rangul lui  $A$  este acel unic număr întreg  $p \geq 1$  astfel încît  $A$  să admită un minor nenul de ordin  $p$  și toți minorii de ordin  $p + 1$  să fie nuli. Rangul lui  $A$  este numărul maxim de linii liniar independente (ca vectori din  $\mathbb{R}^n$ ) sau numărul maxim de coloane liniar independente (ca vectori din  $\mathbb{R}^m$ ).

O matrice pătratică  $A \in M_n(\mathbb{R})$  se numește *nesingulară* dacă  $\det A \neq 0$ ; în acest caz, există, și este unică, o matrice  $B \in M_n(\mathbb{R})$  astfel încît  $AB = I_n$  și  $BA = I_n$ ; matricea  $B$  se numește *inversa* lui  $A$  și se notează  $B = A^{-1}$ . Se știe că:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

unde  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ , unde  $M_{ij}$  este minorul corespunzînd locului de pe linia  $i$  și coloana  $j$  din matricea  $A$ .

Exemple. 1) Calculăm determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Schimbînd între ele primele două coloane, rezultă:

$$D = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Înmulțind prima coloană cu  $-2$  și adunînd la a doua coloană, determinantul nu se modifică:

$$D = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Înmulțind prima coloană, respectiv, cu  $-4$  și  $-5$  și adunînd la coloanele a treia, a patra, rezultă:

$$D = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & -11 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -9 & -6 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltînd  $D$  după prima linie, rezultă:

$$D = - \begin{vmatrix} -3 & -5 & -11 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -9 & -6 \end{vmatrix}.$$

Înmulțind aici prima coloană cu  $-9$  și apoi cu  $-6$ , adăunind la coloanele a doua și respectiv a treia, se obține:

$$D = - \begin{vmatrix} -3 & 22 & 7 \\ 2 & -16 & -9 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltînd  $D$  după linia a treia, rezultă:

$$D = -(-1) \begin{vmatrix} 22 & 7 \\ -16 & -9 \end{vmatrix} = -198 + 112 = -86.$$

2) Determinăm rangul matricii

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ b & 1 & b \end{pmatrix}; \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Mai întâi, se observă că  $\det A = (a - 1)(1 - ab)$ . Dacă  $a \neq 1$  sau  $ab \neq 1$ , atunci  $\det A \neq 0$  și  $\text{rang } A = 3$ . Dacă  $a = 1$  și  $b = 1$ , atunci  $\text{rang } A = 1$ ; iar dacă  $a = 1$  și  $b \neq 1$ , atunci  $\text{rang } A = 2$  și un determinant principal este cel indicat punctat.

3) Determinăm inversa matricii  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  cu  $ad - bc \neq 0$  și a matricii

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}. \text{ În primul caz: } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}; \text{ în cazul secund}$$

avem:

$$\det B = 36, \quad B_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 10, \quad B_{12} = - \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$B_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 20, \quad B_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad B_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$B_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10, \quad B_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2, \quad B_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 8,$$

$$B_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4, \text{ deci } B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 8 \\ 20 & -10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{2}{9} \\ \frac{5}{9} & -\frac{5}{18} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

## 12. SISTEME LINIARE DE ECUAȚII

**Forma generală a unui sistem liniar cu  $m$  ecuații și  $n$  necunoscute este:**

[illegible]



unde  $a_i, b_i$  sînt numere reale (sau complexe) date. Notînd

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

sistemul anterior se scrie echivalent sub formă matricială:  $AX = B$ .

Dacă  $m = n$  și  $\det A \neq 0$ , atunci matricea  $A$  admite inversă. Din relația  $AX = B$ , rezultă că vectorul  $n$ -dimensional  $X$  al necunoscutelor este unic determinat și  $X = A^{-1}B$ ; aceasta este practic *regula lui Cramer*:  $x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , unde  $\Delta_i$  este determinantul obținut din  $\det A$  prin înlocuirea coloanei  $i$  cu coloana  $B$  a termenilor liberi.

În cazul general al sistemelor liniare cu  $m$  ecuații și  $n$  necunoscute, se aplică *regula lui Rouché*: se notează cu  $p$  rangul matricii  $A$  și se fixează un determinant principal  $\Delta_p$ . Se calculează cei  $m - p$  determinanți caracteristici, prin bordarea lui  $\Delta_p$  cu termeni liberi. Dacă toți determinanții caracteristici sînt nuli sau aceștia nu există (adică  $m = p$ ), atunci sistemul este compatibil și  $n - p$  necunoscute rămîn nedeterminate. Mai precis, dacă  $n = p$ , atunci sistemul este compatibil determinat; dacă  $n - p = 1$ , sistemul este compatibil simplu nedeterminat, iar dacă  $n - p = 2$ , atunci este compatibil dublu nedeterminat etc. Dacă unul (cel puțin) din determinanții caracteristici este nenul, atunci sistemul este imposibil (incompatibil). Acesta este modul de aplicare a teoremei lui Rouché (care se enunță

succint astfel: un sistem linear  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, 1 \leq i \leq m$ , este compatibil dacă și numai dacă toți determinanții caracteristici sînt nuli).

Reamintim de asemenea *teorema lui Kronecker-Capelli*: un sistem liniar  $AX = B$  este compatibil dacă și numai dacă  $\text{rang } A = \text{rang } (A | B)$ .

Un sistem liniar de forma  $AX=0$  (cu  $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$  și  $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ ) se numește *omogen*. Un astfel de sistem are întotdeauna soluția *nulă* (numită și *banală*):

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg\} n \text{ linii.}$$

Se pune problema de a decide dacă sistemul admite și soluții nebanale. Dacă  $m = n$ , sistemul  $AX = 0$  admite soluții nebanale dacă și numai dacă  $\det A = 0$ . În cazul general, sistemul  $AX = 0$  are soluții nebanale dacă și numai dacă  $\text{rang } A < n$ , unde  $n$  este numărul necunoscutele (dacă  $\text{rang } A = n$ , atunci  $X = 0$ ).

Pentru un sistem liniar și omogen cu  $n - 1$  ecuații și  $n$  ( $n \geq 2$ ) necunoscute:

[illegible]

notând cu  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  determinanții obținuți „ștergind” coloanele întâi, a doua, ..., a  $n$ -a din matricea  $A$  (presupuși nu toți nuli), rezultă:

$$\frac{x_1}{\Delta_1} = -\frac{x_2}{\Delta_2} = \frac{x_3}{\Delta_3} = \dots = (-1)^{(n+1)} \frac{x_n}{\Delta_n},$$

și sistemul are soluțiile  $(\Delta_1 \cdot t, -\Delta_2 \cdot t, \dots, (-1)^{n+1} \Delta_n \cdot t)$ , cu  $t \in \mathbb{R}$  arbitrar.

Exemple. 1) Aflăm parametrul  $m$  astfel încît sistemul:

$$\begin{cases} 2x + y - mz = 0; \\ x - 2y + z = 0; \\ 5x + 5y - 4z = 0, \end{cases}$$

să admită soluții nebanale; apoi rezolvăm sistemul. Condiția impusă este:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -m \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 0, \text{ deci } m = 1.$$

Din prima ecuație rezultă  $y = z - 2x$ ; înlocuind în celelalte două ecuații, se obține  $x - 2z + 4x + z = 0$ ,  $5x + 5z - 10x - 4z = 0$ , deci  $5x - z = 0$ ; rezultă  $z = 5x$  și  $y = 5x - 2x = 3x$  și soluțiile sistemului sînt triplete  $(x, 3x, 5x)$  cu  $x \in \mathbb{C}$  arbitrar.

2) Discutăm și rezolvăm, aplicînd teorema lui Rouché, sistemul:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z + t = 1; \\ x + my - z = 2; \\ 3x - y + 3z + 2t = n, \end{cases}$$

unde  $m$  și  $n$  sînt parametri reali. Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & m & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dacă  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ , adică  $m \neq 5$  (după calcule), atunci  $\text{rang } A = 3$ .

În acest caz, fixînd  $\Delta$  ca determinant principal, se observă că nu există determinanți caracteristici și sistemul este compatibil simplu nedeterminat; el se scrie:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 - t; \\ x + my - z = 2; \\ 3x - y + 3z = n - 2t, \end{cases}$$

și se rezolvă, de exemplu, cu regula lui Cramer ( $m \neq 5$ ,  $n$  și  $t$  sînt arbitrare).

Dacă  $\Delta = 0$ , deci  $m = 5$ , se observă că toți determinanții de ordin III extrași din matricea  $A$  sînt nuli și ca atare  $\text{rang } A = 2$ . Alegem ca determinant principal

$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ . Avem atunci un singur determinant caracteristic:

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & n \end{vmatrix} = 8n.$$

Dacă  $n \neq 0$ , atunci sistemul este imposibil, iar dacă  $n = 0$  el este compatibil dublu nedeterminat; în acest ultim caz, pentru rezolvare folosim numai ecuațiile principale:

$\begin{cases} 2x + 2y = 1 - z - t; \\ x + 5y = 2 + z, \end{cases}$  și rezultă:  $x = \frac{1 - 7z - 5t}{8}$ ,  $y = \frac{3 + 3z + t}{8}$

(cu  $z, t$  nedeterminați).



### 13. LEGI DE COMPOZIȚIE; GRUPURI

Dacă  $M$  este o mulțime nevidă, se spune că pe  $M$  este definită o *lege de compoziție internă* (echivalent, o *operație algebrică*) dacă oricărei perechi ordonate  $(x, y)$  de elemente din  $M$  i se asociază un element bine determinat din  $M$ , adică este definită o funcție  $\varphi: M \times M \rightarrow M$ . Se notează  $x * y = \varphi(x, y)$  și se spune că operația este notată cu eticheta  $*$ .

De exemplu, adunarea și înmulțirea sînt legi de compoziție interne pe  $\mathbb{R}$ , pe  $\mathbb{Z}$  și la fel pe  $M_n(\mathbb{R})$  sau pe  $\mathbb{R}[X]$ .

O operație  $*$  pe o mulțime  $M$  se numește:

— *comutativă* dacă pentru orice  $x, y \in M$ ,  $x * y = y * x$ ;

— *asociativă* dacă pentru orice  $x, y, z \in M$ ,  $x * (y * z) = (x * y) * z$ ;

— *cu element neutru* dacă există  $e \in M$  astfel încît  $x * e = x$  și  $e * x = x$

pentru orice  $x \in M$ .

O submulțime  $S \subset M$  se numește *stabilă* relativ la operația  $*$  pe  $M$  dacă pentru orice  $u, v \in S$  rezultă  $u * v \in S$ . De exemplu, mulțimea numerelor întregi pare este stabilă relativ la adunarea pe  $\mathbb{Z}$  (deoarece suma a două numere pare este un număr par).

O pereche  $(M, *)$  formată dintr-o mulțime nevidă  $M$  și o operație algebrică pe  $M$  se numește *monoid* dacă operația este asociativă și admite un element neutru  $e \in M$ . Un monoid  $(M, *, e)$  se numește *grup* dacă pentru orice  $x \in M$  există  $y \in M$  astfel încît  $x * y = e$  și  $y * x = e$  (acest element  $y$  este unic, se numește *inversul* lui  $x$  și se notează  $x^{-1}$ ); dacă operația  $*$  este în plus comutativă, grupul se numește *comutativ* (sau *abelian*).

Dacă  $(G, *, e)$  este un grup, o submulțime  $H \subset G$  este *subgrup* dacă, relativ la operația  $*$ ,  $H$  este un grup; aceasta revine la faptul că pentru orice  $x, y \in H$ ,  $xy^{-1}$  aparține lui  $H$ . De exemplu,  $\mathbb{Z}$  este subgrup al lui  $\mathbb{R}$  relativ la adunare.

Dacă  $(G, *, e)$  și  $(G', \circ, e')$  sînt două grupuri, atunci o funcție  $f: G \rightarrow G'$  se numește *morfism* de grupuri dacă pentru orice  $x, y \in G$ , rezultă  $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$  (de aici se obține că  $f(e) = e'$ ). Dacă în plus  $f$  este bijectivă, se spune că  $f$  este un *izomorfism*. Două grupuri se numesc *izomorfe* dacă între ele poate fi definit un izomorfism. Relația de izomorfism este o relație de echivalență (reflexivă, simetrică și tranzitivă).

*Exemple.* 1)  $(M_2(\mathbb{R}), +, O_2)$  este un grup abelian;  $(M_2(\mathbb{R}), \cdot, I_2)$  este un monoid necomutativ care nu este grup.

2)  $(G, \cdot, 1)$  și  $(\mathbb{R}, +, 0)$ , unde  $G$  este intervalul  $(0, \infty)$ , sînt grupuri izomorfe, deoarece există izomorfismul  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$ .

3) Fie  $(G, \cdot; e)$  un grup astfel încît pentru orice  $x \in G$ ,  $x^2 = e$ . Să se arate că  $G$  este abelian și că pentru orice funcție  $f: G \rightarrow G$ , funcția  $h: G \rightarrow G$ ,  $h(x) = f(x) \cdot f(ax)$  (unde  $a \in G$ ,  $a \neq e$  este un element fixat) nu este injectivă. Mai întîi să observăm că pentru orice  $x, y \in G$  avem  $(xy)^2 = e$ , deci  $xy \cdot xy = e$  și înmulțind la stînga cu  $x$  și apoi cu  $y$ , rezultă  $xyx = x$  și  $xy = yx$ . Așadar, operația  $\cdot$  (notată și prin simplă juxtaapunere) este comutativă. Apoi să observăm că  $h(ax) = f(ax) \cdot f(a^2x) = f(ax) \cdot f(x) = f(x)f(ax) = h(x)$ . Dacă  $h$  ar fi injectivă, atunci ar rezulta  $ax = x$ , deci  $a = e$ , ceea ce este absurd.

### 14. INELE ȘI CORPURI

Să presupunem că pe o mulțime nevidă  $A$  sînt fixate două operații algebrice, notate  $+$  și  $\cdot$  (numite adunare și înmulțire) și că  $(A, +, 0)$  este un grup abelian iar  $(A, \cdot, 1)$  este un monoid. Dacă în plus înmulțirea este distributivă în raport cu adunarea, atunci se spune că  $A$  admite o structură de *inel* (pe scurt,  $A$  este un inel).

Un inel  $A$  se numește *inelu* (sau *domeniu de integritate*) dacă este comutativ și dacă din ipoteza că  $x, y \in A$ ,  $xy = 0$  și  $x \neq 0$ , rezultă  $y = 0$ .

Dacă  $A$  este un inel și orice element  $x \in A$ ,  $x \neq 0$ , admite invers relativ la înmulțire, atunci  $A$  se numește un *corp*. Dacă înmulțirea este comutativă, inelul se numește comutativ. Corpurile comutative se mai numesc *câmpuri*.

Dacă  $A, B$  sînt inele, atunci orice funcție  $f: A \rightarrow B$  astfel încît  $(\forall)x, y \in A$ ,  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ,  $f(xy) = f(x)f(y)$  și  $f(1) = 1$  se numește *morfism* de inele (în acest caz rezultă  $f(0) = 0$ ). Un morfism bijectiv de inele este numit *izomorfism*.

*Exemple.* 1)  $\mathbb{Z}$  și  $\mathbb{R}[X]$  sînt inele și chiar domenii de integritate, dar nu sînt corpuri.  $M_2(\mathbb{R})$  este un inel necomutativ.

Dacă  $n \geq 2$  este un întreg, neprim, atunci  $\mathbb{Z}_n$  este un inel comutativ care nu este domeniu de integritate (de exemplu, în  $\mathbb{Z}_6$  avem  $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{0}$ ).

2)  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  și  $\mathbb{C}$  sînt corpuri comutative. La fel este  $\mathbb{Z}_p$  ( $p \geq 2$  prim).

3) Fie  $f: K \rightarrow L$  un morfism de corpuri comutative. Arătăm că  $f$  este injectiv (deci  $K$  se poate considera ca un subcorp al lui  $L$ , deoarece este izomorf cu corpul  $f(K)$ ). Într-adevăr, dacă  $f(x) = f(y)$ , atunci  $f(x - y) = 0$ . Dacă  $x - y \neq 0$ , atunci există  $z \in K$  astfel încît  $(x - y)z = 1$ , deci  $f(x - y) \cdot f(z) = 1$  și rezultă  $0 = 1$ ; deci  $x - y = 0$ , adică  $x = y$ .

## § 2. GEOMETRIE PLANĂ

Anumite entități geometrice se consideră primare — punctul, dreapta, planul, cu ajutorul cărora se construiesc alte entități ca segmentele, semiplanele, unghiurile etc. În cele ce urmează vom reaminti cîteva rezultate mai importante de geometrie, care pot fi folosite fără demonstrație, deoarece sînt teoreme cuprinse în manuale. Nu vom adopta punctul de vedere axiomatic, ci unul, neformal, suficient pentru succes la examenele de admitere.

### 1. ELEMENTE DE GEOMETRIA TRIUNGHIELUI

Se cunosc cazurile principale de congruență a triunghiurilor (notate sugestiv LUL, ULU, LLL). Evidențierea unor triunghiuri congruente în anumite configurații geometrice reprezintă o resursă importantă pentru obținerea unor proprietăți ale acelor configurații și pentru rezolvarea de probleme.

Se cunosc de asemenea proprietățile triunghiurilor isoscele. De exemplu, dacă într-un triunghi  $ABC$  mediana dintr-unul din vîrfuri este și înălțime, atunci triunghiul este isoscel.

Să considerăm un triunghi oarecare  $ABC$ . Dacă  $M$  este mijlocul laturii  $[AB]$  iar  $N$  este mijlocul lui  $[AC]$ , atunci segmentul  $[MN]$  este paralel cu latura  $[BC]$  și are lungimea egală cu jumătatea din lungimea lui  $[BC]$  (*proprietatea liniei mijlocii*). Aceasta se extinde la un trapez, unde linia mijlocie este paralelă cu bazele și are lungimea egală cu semisuma lungimilor bazelor.

*Mediana* din vîrfurile  $A$  este segmentul care unește  $A$  cu mijlocul  $A'$  al laturii  $[BC]$ . Atragem atenția că trebuie făcută distincție între mediana ca segment  $[AA']$ , dreapta  $AA'$  și mediana ca lungimea  $m_a$  a segmentului respectiv (acest lucru este valabil și pentru alte linii în triunghi). Cele trei mediane ale triunghiului  $ABC$  sînt concurente într-un punct  $G$  (*centrul de greutate* al triunghiului) situat pe fiecare mediană la două treimi de vîrf și o treime de bază (în sensul că  $AG = \frac{2}{3} m_a$ ,



$GA' = \frac{1}{3} m_a$  etc.). Este util de știut modul de calcul al lui  $m_a$  în funcție de lungimile laturilor triunghiului:

$$m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}; m_b = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}} \text{ etc.}$$

Este utilă și următoarea variantă, cunoscută ca *teorema medianei*:

$$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{1}{2} BC^2,$$

care dă suma pătratelor distanțelor de la un punct la alte două puncte (v. fig. M.A.2).

Dacă  $m(\hat{A}) = 90^\circ$  (sau, cum se mai spune, măsura unghiului  $\widehat{BAC}$  este de  $90^\circ$ ), atunci  $m_a = \frac{1}{2} a$  și reciproc dacă în triunghiul  $ABC$  mediana dintr-un vîrf este jumătate a laturii pe care „cade”, atunci triunghiul este dreptunghic. Acest fapt este des folosit în probleme.

Înălțimea din vîrf  $A$  al triunghiului  $ABC$  este segmentul  $[AA_1]$  astfel încît  $AA_1 \perp BC$  și  $A_1 \in [BC]$ . Înălțimile  $[AA_1]$ ,  $[BB_1]$ ,  $[CC_1]$  sînt concurente într-un punct  $H$  (numit *ortocentrul* triunghiului). Se pot calcula diversele elemente  $AH$ ,  $HA_1$ ,  $AA_1$  etc. în funcție de laturile (și unghiurile) triunghiului. De exemplu:  $AB_1 = c |\cos A|$ ;  $\widehat{AHB_1} = \widehat{ACB}$  și  $AH = \frac{AB_1}{\sin C} = \frac{c}{\sin C} |\cos A| = 2R |\cos A|$ .

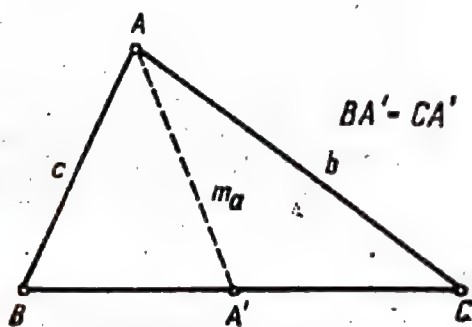


Fig. M.A.2

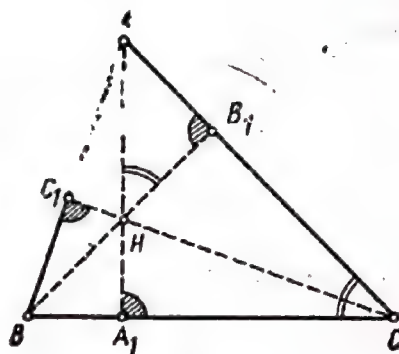


Fig. M.A.3

Apoi:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  (formula lui Heron) și  $h_a = \frac{2S}{a}$ ; în mod similar,  $h_b = \frac{2S}{b}$ ,  $h_c = \frac{2S}{c}$  ( $S = \sigma(ABC)$  este aria triunghiului); v. fig. M.A.3.

Mediatoarele unui triunghi  $ABC$  sînt concurente într-un punct  $O$  care este egal depărtat de punctele  $A, B, C$ , deci  $O$  este centrul cercului circumscris triunghiului:  $OA = OB = OC = R$ . Se știe că  $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$ .

Remarcăm că dacă triunghiul  $ABC$  este obtuzunghic, atunci punctele  $O$  și  $H$  nu mai sînt interioare triunghiului; iar dacă  $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ , atunci  $O$  este tocmai mijlocul ipotenuzei  $[BC]$  și  $H \equiv A$ .

Bisectoarele interioare ale unui triunghi sînt concurente într-un punct interior  $I$  care este evident egal depărtat de laturile triunghiului, deci este centrul cercului înscris triunghiului. Raza acestui cerc este  $r = \frac{S}{p}$ . Se observă că

$$m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - m\left(\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right) = 90^\circ + \frac{1}{2} m(\hat{A}).$$

Un rezultat mult utilizat îl constituie *teorema bisectoarei interioare*:  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ ; dacă  $AD_1$  este bisectoarea exterioară ( $D_1 \in BC$ ), atunci  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD_1}{D_1C}$ . De aici rezultă  $\frac{BD}{BD + DC} = \frac{AB}{AB + AC}$ , deci  $BD = \frac{ac}{b+c}$ , ceea ce permite calculul lungimii bisectoarei  $AD$  în funcție de laturi (aplicind teorema cosinusului în triunghiul  $ABD$ ); v. fig. M.A.4.

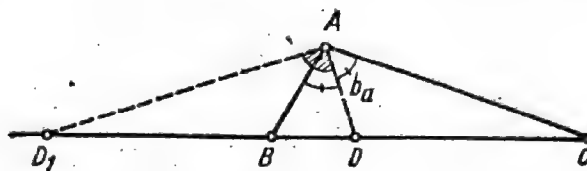


Fig. M.A.4

Pentru a arăta că două drepte sînt paralele există (după caz) două modalități principale: sau se observă unghiurile făcute cu o anumită secantă sau se aplică reciproca teoremei lui Thales. Teorema lui Thales are două variante: dacă  $M \in [AB]$ ,  $N \in [AC]$  și  $MN \parallel BC$ , atunci

$$1^\circ. \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC};$$

$$2^\circ. \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

În probleme se folosește mult tehnica triunghiurilor asemenea. Două triunghiuri  $ABC$  și  $A_1B_1C_1$  se numesc *asemenea* dacă între virfurile lor se stabilește o bijecție (de exemplu,  $A \mapsto A_1$ ,  $B \mapsto B_1$ ,  $C \mapsto C_1$ ) astfel încît  $\hat{A} \equiv \hat{A}_1$ ,  $\hat{B} \equiv \hat{B}_1$ ,  $\hat{C} \equiv \hat{C}_1$  și  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$ . În practică nu trebuie verificate toate aceste cinci condiții, aplicîndu-se cazurile de asemănare; cel mai utilizat este cazul UU (adică  $\hat{A} \equiv \hat{A}_1$ ,  $\hat{B} \equiv \hat{B}_1$ ). Celelalte două cazuri sînt: cite un unghi congruent cuprins între laturi corespunzătoare congruente; laturile proporționale.

Relațiile metrice principale într-un triunghi dreptunghic  $ABC$  ( $m(\hat{A}) = 90^\circ$ ) sînt:

$$AB^2 = BD \cdot BC; \quad AC^2 = DC \cdot BC \quad (AD \perp BC, D \in BC); \quad AD^2 = BD \cdot CD$$

și  $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$ . Adunînd primele două relații se obține *teorema lui Pitagora*:  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ .

*Exemple.* 1) Fie  $A, B$  două puncte distincte fixe,  $AB = a$ . Aflăm locul geometric al punctului  $M$  astfel încît  $MA^2 + MB^2 = k^2$  ( $k > 0$  dat). Pentru aceasta se aplică teorema medianei: notînd cu  $C$  mijlocul segmentului  $[AB]$ , avem  $MA^2 + MB^2 = 2MC^2 + \frac{1}{2}AB^2$ , deci  $k^2 = 2MC^2 + \frac{a^2}{2}$ . Atunci  $MC^2 = \frac{2k^2 - a^2}{4}$ . Dacă  $2k^2 - a^2 > 0$ , atunci locul cerut este cercul de centru  $C$  și rază  $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2}$ ; dacă  $2k^2 - a^2 = 0$ , atunci locul este redus la punctul  $C$  și dacă  $2k^2 - a^2 < 0$ , atunci locul cerut este mulțimea vidă.



2) Fie triunghiul  $ABC$  cu  $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$ ,  $A'$  mijlocul laturii  $[BC]$  și  $BB_1 \perp AC$ ,  $CC_1 \perp AB$ . Să se arate că triunghiul  $A'B_1C_1$  este echilateral. Este suficient să observăm că  $B_1A' = \frac{1}{2} BC$  (ca mediană în triunghiul  $B_1BC$ ) și la fel  $C_1A' = \frac{1}{2} BC$ , deci triunghiul  $A'B_1C_1$  este isoscel. Rămâne să arătăm că el are un

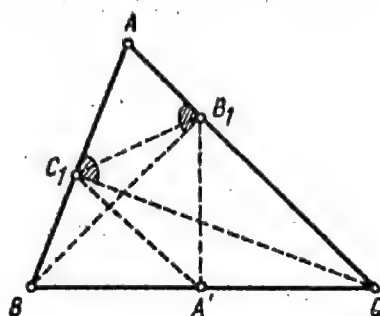


Fig. M.A.5

unghi de  $60^\circ$ . Dar  $m(\widehat{BA'C_1}) = 180^\circ - 2m(\widehat{B})$  și  $m(\widehat{CA'B_1}) = 180^\circ - 2m(\widehat{C})$ , deci  $m(\widehat{B_1A'C_1}) = 180^\circ - (180^\circ - 2m(\widehat{B}) + 180^\circ - 2m(\widehat{C})) = 2m(\widehat{B}) + 2m(\widehat{C}) - 180^\circ = 60^\circ$ . O altă soluție se obține observind că cercul de diametru  $[BC]$  trece prin  $B_1$  și  $C_1$ ,  $m(\widehat{ABB_1}) = 30^\circ$ , deci  $m(\widehat{B_1C}) = 60^\circ$ ; v. fig. M.A.5.

## 2. CERCUL

Cercul  $\mathcal{C}(O, R)$  de centru  $O$  și rază  $R(R > 0)$  este mulțimea punctelor  $M$  (dintr-un plan subînțeles fixat) astfel încît  $OM = R$ . Discul deschis este mulțimea punctelor  $M$  astfel încît  $OM < R$ .

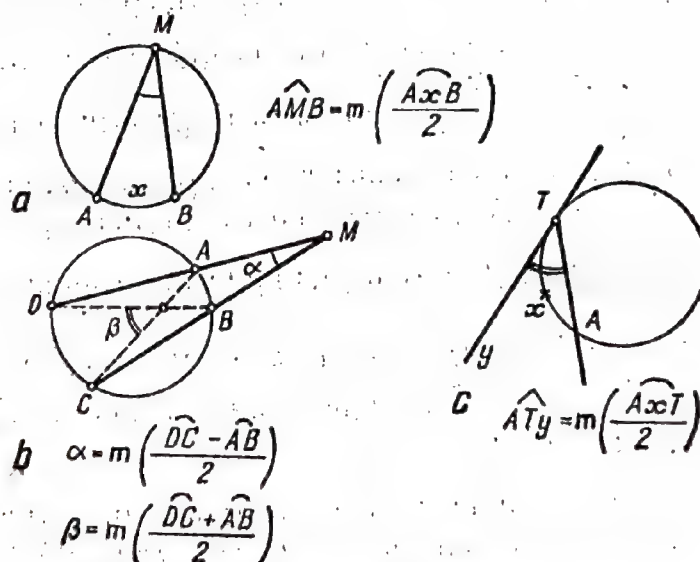


Fig. M.A.6

Măsura întregului cerc este, prin convenție, de  $360^\circ$  (arcul de  $1^\circ$  fiind a 360-a parte dintr-un cerc, numărul 360 fiind ales și pentru că are mulți divizori). Măsura unui arc de cerc este egală cu măsura unghiului la centru corespunzător. În multe probleme se folosesc regulile de evaluare a măsurii unghiurilor ale căror laturi intersectează un cerc dat sau sint tangente la acesta. În figura M.A.6 indicăm aceste reguli.

Fie  $\odot(O, R)$  un cerc și  $M$  un punct fixat. Se numește *putere* a punctului  $M$  expresia  $\rho(M) = OM^2 - R^2$  (măsurată în unități pătratice, avînd dimensionalitatea unei arii). Dacă  $M$  este interior (resp. exterior) cercului, atunci  $\rho(M) < 0$  (resp.  $\rho(M) > 0$ ). Punctele de pe cerc sînt exact cele avînd puterea nulă.

În probleme se folosește mult *proprietatea puterii*:

a) Dacă  $M$  este un punct interior, atunci pentru orice două coarde  $[PQ]$  și  $[P'Q']$  trecînd prin  $M$  avem  $PM \cdot MQ = P'M \cdot MQ' = R^2 - OM^2 = -\rho(M)$ .

b) Dacă  $M$  este un punct exterior, atunci pentru orice două secante  $MPQ$  și  $MP'Q'$  avem  $MP \cdot MQ = MP' \cdot MQ' = \rho(M) = OM^2 - R^2 = MT^2$  (v. fig. M.A.7).

Reamintim că tangentele  $[AT_1], [AT_2]$  dintr-un punct  $A$  exterior la un cerc  $\odot(O, R)$  sînt congruente ( $[AT_1] \equiv [AT_2]$ ) iar  $[OA]$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{T_1AT_2}$ .

Dacă  $A, B$  sînt puncte fixe, atunci locul geometric al punctelor  $M$  astfel încît  $m(\widehat{AMB}) = 90^\circ$  este cercul de diametru  $[AB]$ ; dacă  $m(\widehat{AMB}) = \alpha$ , atunci locul geometric al lui  $M$  este alcătuit din reuniunea a două arce de cerc simetrice față de dreapta  $AB$  (arcele construite pe  $AB$ , capabile de unghiul  $\alpha$ ).

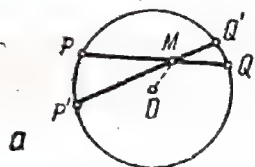


Fig. M.A.7

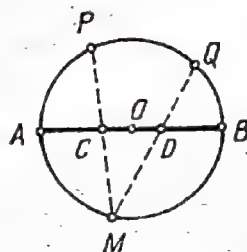


Fig. M.A.8

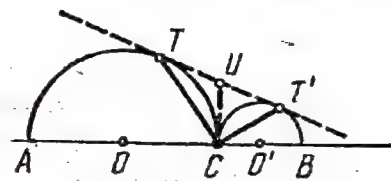


Fig. M.A.9

*Exemple. 1) Fie un cerc  $\odot(O, R)$  și un diametru  $[AB]$ . Fixăm două puncte  $C$  și  $D$  pe  $[AB]$  astfel încît  $O$  să fie mijlocul lui  $[CD]$ . Dacă  $M$  este un punct oarecare pe cerc și dreptele  $MC, MD$  rețaiu cercul în  $P$  și  $Q$ , să se arate că raportul  $\frac{CP \cdot DQ}{\sqrt{CM^2 + DM^2}}$  este constant (v. fig. M.A.8).*

Notăm  $OC = OD = a$ . Avem  $CP \cdot CM = R^2 - a^2$  și  $QD \cdot DM = R^2 - a^2$  (proprietatea puterii). Atunci  $CP = \frac{R^2 - a^2}{CM}$ ,  $DQ = \frac{R^2 - a^2}{DM}$  și raportul din enunț devine  $\frac{R^2 - a^2}{\sqrt{CM^2 + DM^2}}$ . Este suficient să aplicăm teorema medianei și se obține:

$$CM^2 + DM^2 = 2MO^2 + \frac{1}{2}CD^2 = 2R^2 + 2a^2.$$

2) Fie  $C$  un punct luat pe un segment  $[AB]$ . Se duc semicercurile de diametre  $[AC], [CB]$ , de aceeași parte a lui  $AB$ , și tangenta comună  $[TT']$ . Să se arate că  $TC \perp T'C$  (v. fig. M.A.9).

Ducem tangenta comună  $[CU]$  ( $U \in TT'$ ). Atunci  $UC = UT$ ,  $UC = UT'$ , deci  $[CU]$  este mediană în  $\triangle CTT'$  și avem  $CU = \frac{1}{2}TT'$ . Deci  $m(\widehat{TCT'}) = 90^\circ$ .



### 3. PATRULATERE; POLIGOANE. ARII

Suma unghiurilor unui poligon convex cu  $n$  ( $n \geq 3$ ) laturi este  $180^\circ(n - 2)$ . Într-un patrulater convex  $ABCD$  suma unghiurilor este  $360^\circ$ .

Reamintim că un patrulater convex  $ABCD$  este *paralelogram* dacă laturile opuse sînt paralele; aceasta este echivalent cu faptul că o pereche de laturi opuse sînt paralele și congruente, sau cu faptul că diagonalele se taie în părți congruente (În general, diagonalele nu sînt congruente.) *Dreptunghiul* este un paralelogram cu un unghi drept; toate unghiurile rezultă drepte, iar diagonalele congruente. *Rombul* este paralelogramul cu toate laturile congruente; în acest caz, diagonalele sînt ortogonale și bisectează unghiurile rombului. Pentru a arăta că un patrulater convex  $ABCD$  este pătrat trebuie arătat că este un dreptunghi, cu toate laturile congruente (sau cu diagonalele perpendiculare).

*Trapezul* este un patrulater cu două laturi opuse paralele și celelalte două laturi opuse neparalele.

Un patrulater convex  $ABCD$  se numește *inscriptibil* dacă cercul  $ABC$  trece și prin  $D$ ; raza cercului circumscris se calculează cu formula  $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$  aplicată de exemplu triunghiului  $ABC$ . Există trei teoreme importante de caracterizare a patrulaterelor inscriptibile. Un patrulater convex  $ABCD$  este inscriptibil dacă și numai dacă:

1. Două unghiuri opuse sînt suplementare; sau
2. Unghiul făcut de o latură cu o diagonală este congruent cu unghiul făcut de cealaltă diagonală cu latura opusă; sau
3. Produsul lungimilor diagonalelor este egal cu suma produselor lungimilor laturilor opuse:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC \text{ (teorema lui Ptolemeu).}$$

Un patrulater convex  $ABCD$  are proprietatea că în el se înscrie un cerc dacă și numai dacă există un punct interior egal depărtat de cele patru laturi sau, echivalent, suma lungimilor a două laturi opuse este egală cu suma lungimilor celorlalte două laturi opuse ( $AB + CD = AD + BC$ ).

Pentru a arăta că două patrulatere sînt asemenea trebuie arătat că au unghiurile congruente și laturile corespunzătoare proporționale.

Aria unui dreptunghi de dimensiuni  $a, b$  este  $a \cdot b$ . Dacă  $ABCD$  este un paralelogram și  $AA' \perp DC$  ( $A' \in DC$ ), atunci  $\sigma(ABCD) = DC \cdot AA'$ . Dacă  $AB = a$ ,

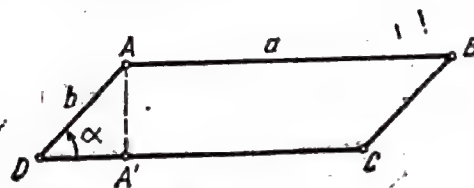


Fig. M.A.10

$AD = b$ ,  $m(\widehat{ADA'}) = \alpha$ , atunci  $\sigma(ABCD) = ab \sin \alpha$  (v. fig. M.A.10). Se cunosc formulele pentru aria unui triunghi  $ABC$ :

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bc \sin A}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Pentru orice patrulater convex  $ABCD$  avînd unghiul ascuțit dintre diagonale  $\theta$ , aria este egală cu  $\frac{AC \cdot BD}{2} \sin \theta$ .

Aria sectorului de cerc  $AOB$ , cu  $OA = OB = R$ ,  $m(\widehat{AOB}) = \theta^\circ$ , este  $\frac{\pi R^2 \theta^\circ}{360^\circ}$

și dacă  $\theta_r$  este măsura unghiului  $\widehat{AOB}$  în radiani, această arie este  $\frac{R^2 \theta_r}{2}$  (v. fig. M.A.11).

Reamintim că lungimea arcului  $\widehat{AB}$  este egală cu  $\frac{\pi R \theta^\circ}{180^\circ} = R \cdot \theta_r$ . Vom utiliza frecvent notația simplă  $\theta$  pentru  $\theta^\circ$  sau  $\theta_r$ , semnificația rezultând din context.

Reamintim că pentru un poligon convex regulat cu  $n$  laturi ( $n \geq 3$ ) înscris într-un cerc de rază  $R$ , latura și apotema au respectiv lungimile:  $l_n = 2R \sin \frac{\pi}{n}$ ,

$$a_n = R \cos \frac{\pi}{n}.$$

Aria poligonului este:  $S_n = n \cdot R^2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}$ .

În cazul  $n = 3$  al triunghiului echilateral, rezultă  $l_3 = R\sqrt{3}$ ,  $a_3 = \frac{R}{2}$ ;

pentru  $n = 4$ ,  $l_4 = R\sqrt{2}$ ,  $a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$  și pentru  $n = 6$  avem  $l_6 = R$ ,  $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ .

*Exemple. 1) Fie un cerc de diametru  $[AB] = 2R$ . Pe tangenta în  $A$  la cerc se consideră de o parte și de alta punctele  $P$  și  $Q$  astfel încât  $AP = a$ ,  $AQ = b$ . Dreptele  $BP$ ,  $BQ$  reține cercul în  $P'$  și  $Q'$  respectiv. Să se arate că patrulaterul  $PP'Q'Q$  este înscritibil și să se calculeze aria lui. Avem (v. fig. M.A.12):*

$$\widehat{AQQ'} = \frac{m(\widehat{AP'B}) - m(\widehat{AQ'})}{2} = \frac{180^\circ - m(\widehat{AQ'})}{2} = \frac{m(\widehat{BQ'})}{2} = m(\widehat{BP'Q'}).$$

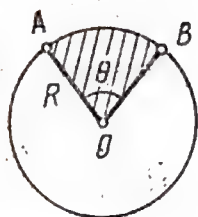


Fig. M.A.11

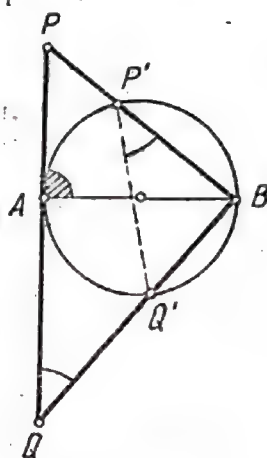


Fig. M.A.12

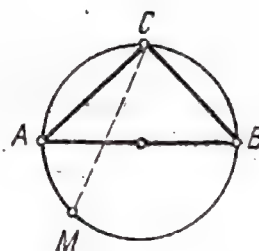


Fig. M.A.13

Atunci  $m(\widehat{AQQ'}) + m(\widehat{PP'Q'}) = 180^\circ$ , deci patrulaterul  $PP'Q'Q$  este înscritibil. Apoi  $\sigma(BPQ) = \sigma(BAP) + \sigma(BAQ) = Ra + Rb = R(a + b)$ . Triunghiul  $BP'Q'$  este evident asemenea cu  $BPQ$ , cu raportul de asemănare  $k = \frac{BP'}{BQ} = \frac{AB^2}{BP \cdot BQ} = \frac{4R^2}{\sqrt{4R^2 + a^2} \sqrt{4R^2 + b^2}}$  și  $\sigma(PP'Q'Q) = \sigma(BPQ) - \sigma(BP'Q') = \sigma(BPQ) - k^2 \cdot \sigma(BPQ)$  etc.

2) Se consideră un cerc de diametru  $[AB]$  de lungime  $2R$ . Fie  $C$  mijlocul semicercului superior. Să se arate că dacă  $M$  este un punct oarecare pe semicercul inferior, atunci  $MA + MB = \sqrt{2} MC$  și să se determine poziția lui  $M$  astfel încât în patrulaterul  $ACBM$  să se poată înscrie un cerc (fig. M.A.13).



Pentru aflarea soluției, aplicăm teorema lui Ptolomeu în patrulaterul inscribit  $ACBM$ :  $AC \cdot BM + BC \cdot AM = AB \cdot CM$ , deci  $R\sqrt{2} \cdot BM + R\sqrt{2} \cdot AM = 2R \cdot CM$ . Apoi condiția ca în patrulaterul  $ACBM$  să se înscrie un cerc este  $AC + MB = BC + AM$  și rezultă  $AM = BM$ , deci  $M$  este mijlocul semicercului inferior.

### § 3. TRIGONOMETRIE

#### 1. DEFINIȚIA FUNCȚIILOR TRIGONOMETRICE

Să considerăm un unghi ascuțit  $xOy$  de măsură  $\alpha$ . Fie  $B$  un punct pe  $Oy$  și  $B'$  proiecția lui  $B$  pe  $Ox$  (v. fig. M.A.14). Raportul  $\frac{BB'}{OB}$  este independent de alegerea lui  $B$  și depinde numai de unghiul  $\alpha$ ; el se numește *sinusul* lui  $\alpha$  și se notează  $\sin \alpha$ ; în mod similar,  $\cos \alpha = \frac{OB'}{OB}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BB'}{OB'}$  etc. Evident, pentru orice  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ,  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  sînt adimensionale și au valori pozitive. Direct, din definiție, se vede că:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \quad \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},$$

iar teorema lui Pitagora arată că  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

Fie un triunghi  $ABC$  dreptunghic în  $A$ . Pentru rezolvarea triunghiului (adică determinarea elementelor lui principale) este suficient, de exemplu, să cunoaștem ipotenuza  $[BC]$  și un unghi ascuțit sau o catetă și un unghi ascuțit.

Mișcările de rotație și, în general, studiul fenomenelor periodice au impus necesitatea extinderii funcțiilor trigonometrice la unghiuri oarecare. Pentru aceasta s-a considerat *cercul trigonometric*, care este un cerc de rază 1, cu centrul în originea unui sistem ortogonal de coordonate  $xOy$ . Se fixează o origine de măsură a arcelor, anume punctul  $A(1, 0)$ , o orientare pozitivă (în sens invers arcelor unui ceasornic) și se face convenția ca unghiurile care se consideră să aibă una din laturi  $OA$ . Pentru orice unghi  $\alpha$  există un singur punct  $M$  pe cercul trigonometric astfel încît  $m(\widehat{AOM}) = \alpha$  (fig. M.A.15).

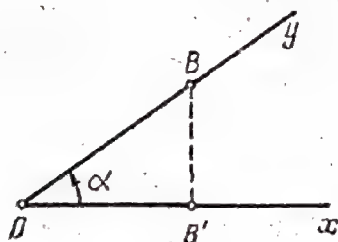


Fig. M.A.14

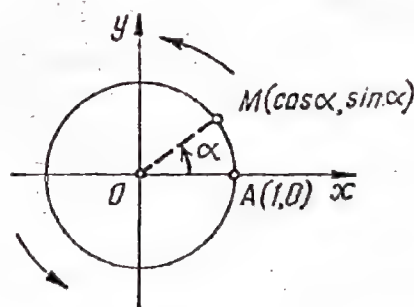


Fig. M.A.15

Prin definiție,  $\cos \alpha = x_M$  și  $\sin \alpha = y_M$ , deci  $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$ . Rezultă imediat de aici semnele lui  $\sin \alpha$  și  $\cos \alpha$  pe diverse cadrane. Pentru ca funcțiile trigonometrice să devină funcții reale, unghiurile se măsoară în radiani; atunci sînt definite două funcții  $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (cu domeniul strict de valori  $[-1, 1]$ ), care extind funcțiile  $\sin$  și  $\cos$  definite anterior doar pentru unghiuri ascuțite

$\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Ele sînt funcții periodice de perioadă principală  $2\pi$ . Se definesc

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0) \quad \text{și} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0).$$

Reamintim că

$$\sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \text{ etc.}$$

Se cunosc relațiile de reducere la primul cadran: dacă  $\alpha$  este în cadranul II (adică  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ), atunci

$$\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha), \quad \cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha), \quad \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha);$$

dacă  $\alpha$  este în cadranul III, atunci

$$\sin \alpha = -\sin(\alpha - \pi), \quad \cos \alpha = -\cos(\alpha - \pi), \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha - \pi),$$

iar dacă  $\alpha$  este în cadranul IV, atunci

$$\sin \alpha = -\sin(2\pi - \alpha), \quad \cos \alpha = \cos(2\pi - \alpha), \quad \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(2\pi - \alpha).$$

De exemplu,

$$\sin 150^\circ = \sin \frac{5\pi}{6} = \sin \left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} = -\operatorname{tg} \left(2\pi - \frac{7\pi}{4}\right) = -1.$$

Deoarece

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

(pentru valorile admisibile), rezultă că esențiale sînt „sin“, „cos“, „tg“.

Dacă  $\alpha$  este un unghi oarecare ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ), atunci există un singur număr  $r \in [0, 2\pi)$  astfel încît  $\alpha - r$  este un multiplu întreg de  $2\pi$  și avem

$$\sin \alpha = \sin r, \quad \cos \alpha = \cos r, \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} r;$$

de exemplu, pentru  $\alpha = \frac{13\pi}{2}$ , luăm  $r = \frac{\pi}{2}$  și  $\sin \frac{13\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ ,  $\cos \frac{13\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ . În mod similar, pentru a calcula  $\sin 11820^\circ$ , luăm  $r =$  restul împărțirii lui 11820 cu 360, deci  $r = 300$ , și atunci  $\sin 11820^\circ = \sin 300^\circ = -\sin(360^\circ - 300^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Reamintim de asemenea că dacă  $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$ , atunci simetricul lui față de  $Ox$  va fi  $M'(\cos \alpha, -\sin \alpha)$  și acesta corespunde unghiului  $-\alpha$ . Deci:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

## 2. RELAȚII ÎNTRE VALORILE FUNCȚIILOR TRIGONOMETRICE ALE ACELUIAȘI UNGHI

Pentru orice  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ . De aici rezultă că dacă se cunoaște  $\sin \alpha = m$ , atunci se pot determina (pînă la semn) valorile celorlalte cinci funcții trigonometrice:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - m^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}} \text{ etc.}$$



Dacă se cunoaște  $\operatorname{tg} \alpha = m$ , atunci  $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = m^2$ , deci  $\sin^2 \alpha = m^2(1 - \sin^2 \alpha)$ ;  
 rezultă  $\sin^2 \alpha = \frac{m^2}{1 + m^2}$ , adică

$$\sin \alpha = \pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}};$$

în mod similar,

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

### 3. FUNCȚIILE SUMEI ȘI DIFERENȚEI DE UNGHIIURI

Pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x;$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y.$$

Înlocuind  $y$  cu  $-y$  rezultă

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x;$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y.$$

Apoi,

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y},$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

### 4. TRANSFORMAREA SUMELOR ÎN PRODUSE ȘI A PRODUSELOR ÎN SUME

Pentru orice  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  avem:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha;$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta.$$

„Citite” de la stînga la dreapta și înlocuind  $\alpha + \beta = x$ ,  $\alpha - \beta = y$ , aceste formule devin

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2},$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}.$$

„Citind“ formulele anterioare de la dreapta la stnga și împărțind cu 2, rezultă

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)],$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Adăugăm formulele:

$$\operatorname{tg} y \pm \operatorname{tg} \hat{y} = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}; \quad \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x + y)}{\sin x \sin y},$$

pentru orice  $x, y$  admisibili.

## 5. FUNCȚIILE UNGHIULUI DUBLU, TRIPLU ȘI SEMIUNGHIULUI

Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

$$\text{Apoi, } \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \quad (\text{pentru } \cos x \neq 0, \cos 2x \neq 0).$$

De asemenea,

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x,$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x,$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}.$$

Reținem două formule:

$$1 + \cos \alpha = \left( \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) + \left( \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

pentru orice  $\alpha \in \mathbb{R}$ , de unde

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

Două formule des utilizate sînt următoarele:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

(valabile pentru  $\cos \frac{x}{2} \neq 0$ ).



## 6. CITEVA ECUAȚII TRIGONOMETRICE

Ecuția  $\sin x = 0$  admite o infinitate de soluții:  $x = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), care corespund tuturor unghiurilor pentru care ordonata punctului corespunzător de pe cercul trigonometric este nulă. În mod similar, ecuația  $\cos x = 0$  are soluție generală  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  cu  $k \in \mathbb{Z}$ .

Ecuția  $\sin x = a$ , cu  $-1 \leq a \leq 1$  se rezolvă astfel: se alege cea unică soluție  $x_0$  situată în  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  și rezultă

$$x = (-1)^k x_0 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dacă  $a \notin [-1, 1]$ , ecuația  $\sin x = a$  nu admite soluții.

Ecuția  $\cos x = a$ ,  $-1 \leq a \leq 1$  admite soluția generală:

$$x = \pm x_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

unde  $x_0$  este cea unică soluție care aparține intervalului  $[0, \pi]$ . Dacă  $\operatorname{tg} x = b$  și  $b \in \mathbb{R}$  arbitrar, notînd cu  $x_0$  soluția din  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , rezultă  $x = x_0 + k\pi$  cu  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Exemple.* 1) Din ecuația  $\cos 3x = -\frac{1}{2}$ , rezultă  $3x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ , deci  $x = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

2) Ecuția  $4 \sin^2 x + 4 \cos x = 5$  se rezolvă notînd  $\cos x = t$ ; rezultă  $4(1 - t^2) + 4t = 5$ , deci  $4t^2 - 4t + 1 = 0$ , de unde  $t = \frac{1}{2}$ . Așadar,  $\cos x = \frac{1}{2}$  și  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Ecuția  $a \sin x + b \cos x = c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$  date) se poate rezolva punînd  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ ; rezultă ecuația algebrică  $a \cdot \frac{2t}{1+t^2} + b \frac{1-t^2}{1+t^2} = c$  etc. Trebuie analizat separat cazul  $\cos \frac{x}{2} = 0$  cînd  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  nu este definit. Aceeași ecuație poate fi rezolvată

introducînd un unghi auxiliar; anume, dacă  $a \neq 0$ , atunci se poate nota  $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$  și ecuația devine  $\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x = \frac{c}{a}$ , de unde  $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi$  etc.

Ecuția  $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) se poate rezolva astfel: presupunînd  $\cos x \neq 0$ , se împarte ecuația cu  $\cos^2 x$  și, notînd  $\operatorname{tg} x = t$ , rezultă  $at^2 + bt + c = 0$  etc. Trebuie analizat separat cazul cînd  $\cos x = 0$ ; dacă  $a \neq 0$  se obține  $\sin x = 0$ , ceea ce nu conduce la soluții (deoarece  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ).

Ecuția  $a \sin^2 \alpha x + b \sin \alpha x \cos \alpha x + c \cos^2 \alpha x = d$  se poate rezolva înlocuind  $d = d(\sin^2 \alpha x + \cos^2 \alpha x)$  și împărțind cu  $\cos^2 \alpha x$ .

Ecuțiile de forma  $f(\sin x \pm \cos x, \sin x \cos x) = 0$  se pot rezolva prin substituția  $\sin x \pm \cos x = u$ , de unde  $1 \pm 2 \sin x \cos x = u^2$ .

*Exemple.* 1) Rezolvăm ecuația  $2 \cos^2 5x + 3 \cos 5x \sin 5x - 5 \sin^2 5x = 0$ ; dacă  $\cos 5x = 0$ , rezultă și  $\sin 5x = 0$ , ceea ce nu este posibil. Așadar,  $\cos 5x \neq 0$

și putem împărți ecuația cu  $\cos^2 5x$ , punind  $\operatorname{tg} 5x = t$ . Rezultă,  $2 + 3t - 5t^2 = 0$ , de unde  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = -\frac{2}{5}$ . Atunci  $5x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  și  $5x = -\operatorname{arctg} \frac{2}{5} + p\pi$  cu  $p \in \mathbb{Z}$ .

2) Aflăm valorile lui  $m \in \mathbb{R}$  pentru care ecuația  $\sin x - \cos x + 2 \sin x \cos x = m$  admite cel mai multe soluții. Notăm  $u = \sin x - \cos x$ , deci  $u^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$ . Ecuația se scrie  $u + 1 - u^2 = m$ , deci  $u^2 - u + m - 1 = 0$ . Deoarece  $u = \sin x - \cos x = \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ , rezultă  $-\sqrt{2} \leq u \leq \sqrt{2}$ . Problema se reduce la una de algebră, anume aflarea valorilor lui  $m$  pentru care ecuația  $f(u) = u^2 - u + m - 1 = 0$  admite ambele rădăcini situate între  $-\sqrt{2}$  și  $\sqrt{2}$ ; condiția este  $\Delta \geq 0$ ,  $-\sqrt{2} \leq \frac{u_1 + u_2}{2} \leq \sqrt{2}$ ,  $1 \cdot f(\sqrt{2}) \geq 0$  etc.

## 7. FUNCȚII TRIGONOMETRICE INVERSE

Reamintim că dacă  $f: A \rightarrow B$  este o funcție bijectivă, atunci se poate considera inversa ei  $f^{-1}: B \rightarrow A$ , care asociază oricărui  $y \in B$  acel unic  $x \in A$  astfel încît  $f(x) = y$ .

Funcția  $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$  este bijectivă și inversa ei este

$$\arcsin = \sin^{-1}: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

care asociază oricărui  $x \in [-1, 1]$  acel unic  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  astfel încît  $\sin \alpha = x$ .

Funcția  $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  este bijectivă și inversa ei este  $\arccos = \cos^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  și asociază oricărui  $x \in [-1, 1]$  acel unic  $\beta \in [0, \pi]$  astfel încît  $\cos \beta = x$ .

În mod similar,  $\operatorname{tg}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  este bijectivă și  $\operatorname{tg}^{-1} = \operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  asociază oricărui  $x \in \mathbb{R}$  acel unic  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  astfel încît  $\operatorname{tg} \alpha = x$ . În fine,  $\operatorname{ctg}: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  este bijectivă și  $\operatorname{arctg} = \operatorname{ctg}^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ .

*Exemple:* 1) Avem:  $\arcsin 0 = 0$ ;  $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ ;  $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ ;  $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ ;  $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ ;  $\arccos(-1) = \pi$ ;  $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ .

2) Pentru orice  $x \in [-1, 1]$  avem:  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ . Într-adevăr, să notăm  $\arcsin x = \alpha$ ,  $\arccos x = \beta$ ; avem de arătat că  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ . Dar  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\beta \in [0, \pi]$ ,  $x = \sin \alpha$ ,  $x = \cos \beta$ , deci  $\sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$  cu  $\alpha$  și  $\frac{\pi}{2} - \beta$  cuprinse între  $-\frac{\pi}{2}$  și  $\frac{\pi}{2}$ . Atunci  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ , deci  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ .

În mod similar se arată că pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ .

Rezultă de aici că esențiale sînt „arcsin” și „arctg”, deoarece  $\arccos f(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin f(x)$  (pentru  $-1 \leq f(x) \leq 1$ ) și la fel  $\operatorname{arctg} f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} f(x)$ .



## 8. ELEMENTE DE TRIGONOMETRIA TRIUNGHIULUI

Fie un triunghi  $ABC$ . Pentru simplificare, convenim să notăm:  $m(\hat{A}) = A$ ,  $m(\hat{B}) = B$ ,  $m(\hat{C}) = C$ . Deoarece  $A + B + C = \pi$ , rezultă  $B + C = \pi - A$ , deci  $\sin(B + C) = \sin A$ ,  $\cos(B + C) = -\cos A$  și alte relații similare. De aici,  $\operatorname{tg}(B + C) = -\operatorname{tg} A$ , adică  $\frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{1 - \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C} = -\operatorname{tg} A$  ca atare  $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$ . De asemenea,  $\frac{B + C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$ , deci:

$$\sin \frac{B + C}{2} = \cos \frac{A}{2}; \quad \cos \frac{B + C}{2} = \sin \frac{A}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{B + C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \text{ etc.}$$

Un rezultat de bază îl constituie *teorema sinusurilor*; în forma:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R = \frac{a + b + c}{\sin A + \sin B + \sin C},$$

ea se folosește la rezolvarea triunghiurilor. În relații „mixte” unghiuri-laturi, înlocuind  $a = 2R \sin A$ ,  $b = 2R \sin B$ ,  $c = 2R \sin C$ , rezultă o relație exclusiv între unghiuri.

Un alt rezultat de bază îl constituie *teorema cosinusului*; în forma:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ , ea permite calculul unei laturi a triunghiului cunoscând lungimile a două laturi și măsura unghiului cuprins între ele. Pe de altă parte, în forma:  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$  ea permite calculul unghiurilor dacă se cunosc lungimile laturilor.

Reținem de asemenea formulele:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$S = \sigma(ABC) = \frac{bc \sin A}{2} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \text{ etc.}$$

*Exemple.* 1) Să se rezolve un triunghi  $ABC$ , cunoscând  $\hat{A}$ ,  $a$  și  $h = h_a$ . Mai întâi, să observăm că  $B + C = \pi - A$  și  $\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a}{h}$ . Notînd  $u = \operatorname{tg} B$ ,  $v = \operatorname{tg} C$ , rezultă  $\operatorname{tg}(B + C) = \frac{u + v}{1 - uv} = -\operatorname{tg} A$  și  $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{a}{h}$ . Se obține un sistem simetric în  $u, v$  etc.

2) În ce triunghi  $ABC$  are loc relația  $h_a = \sqrt{bc} \cdot \cos \frac{A}{2}$ ? Folosim numai relații valabile în triunghiuri oarecare: deoarece  $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{bc \sin A}{a}$ , rezultă  $\frac{bc \sin A}{a} = \sqrt{bc} \cdot \cos \frac{A}{2}$ , adică  $\sqrt{bc} \cdot \sin A = a \cos \frac{A}{2}$  sau  $\sqrt{bc} \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = a \cos \frac{A}{2}$ . De aici se obține  $\sin \frac{A}{2} = \frac{a}{2\sqrt{bc}}$ , adică  $\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} = \frac{a}{2\sqrt{bc}}$  sau, echivalent,  $a = \sqrt{4(p-b)(p-c)}$ . Așadar,  $a^2 = (a+c-b)(a+b-c)$ , deci  $a^2 = a^2 - (b-c)^2$  și, în final,  $b = c$ .

3) Fie triunghiul  $ABC$  și  $M, N$  puncte pe latura  $[AB]$  astfel încât  $\widehat{ACM} \equiv \widehat{MCN} \equiv \widehat{NCB}$ . Presupunind că  $m(\widehat{ACB}) = 3\alpha$  și  $[BC] = 3[AC]$  să se calculeze raportul  $\frac{CM}{CN}$  în funcție numai de  $\alpha$ . Aplicând teorema sinusurilor în  $\triangle ABC$ , rezultă

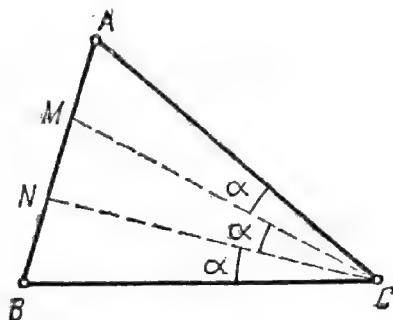


Fig. M.A.16

$\frac{3b}{\sin(B + 3\alpha)} = \frac{b}{\sin B}$ , deci  $3 \sin B = \sin(B + 3\alpha)$ . Atunci  $3 \sin B = \sin B \cos 3\alpha + \sin 3\alpha \cos B$  și, împărțind cu  $\cos B$ , se obține  $\operatorname{tg} B = \frac{\sin 3\alpha}{3 - \cos 3\alpha}$ . Aplicăm apoi teorema sinusurilor în triunghiul  $CMN$  (v. fig. M.A.16):

$$\frac{CM}{\sin(B + \alpha)} = \frac{CN}{\sin(B + 2\alpha)}, \text{ deci:}$$

$$\frac{CM}{CN} = \frac{\sin(B + \alpha)}{\sin(B + 2\alpha)} = \frac{\sin B \cos \alpha + \sin \alpha \cos B}{\sin B \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos B} = \frac{\operatorname{tg} B \cos \alpha + \sin \alpha}{\operatorname{tg} B \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$$

și înlocuim  $\operatorname{tg} B = \frac{\sin 3\alpha}{3 - \cos 3\alpha}$ .

## § 4. GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

### 1. PUNCTE, DREPTE, PLANE; POZIȚII RELATIVE

Noțiunile primare ale geometriei în spațiu sînt: punctele, dreptele, planele. Se cunosc proprietățile care exprimă relațiile dintre ele.

O dreaptă în spațiu  $d$  este bine determinată dacă se cunosc două puncte distincte ale ei sau dacă se cunoaște un punct pe  $d$  și este indicat un vector nenul cu suportul paralel cu  $d$  (numit și vector *director*); un plan  $\alpha$  în spațiu poate fi determinat dacă se cunosc trei puncte necoliniare din  $\alpha$  sau un punct din  $\alpha$  și o dreaptă  $d \subset \alpha$  care nu conține punctul sau două drepte concurente din  $\alpha$  sau două drepte paralele distincte din  $\alpha$ .

Două drepte în spațiu  $d_1, d_2$  pot fi coplanare (deci paralele sau concurente), dar pot fi și necoplanare, deci nesituate într-un același plan.

O dreaptă  $d$  și un plan  $\alpha$  pot avea trei poziții relative posibile:  $d \subset \alpha$  (conținută în  $\alpha$ ),  $d$  „întepă” planul într-un punct  $A$  (adică  $d \cap \alpha = \{A\}$ ) sau  $d$  este paralelă cu  $\alpha$  ( $d \cap \alpha = \emptyset$ ).

Două plane  $\alpha$  și  $\beta$  pot fi paralele ( $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ), confundate ( $\alpha = \beta$ ) sau pot să se intersecteze după o dreaptă.



Trei plane distincte  $\alpha, \beta, \gamma$  se pot afla în următoarele poziții:  $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$ ;  $\alpha \parallel \beta$  iar  $\gamma$  intersectează  $\alpha, \beta$  după două drepte paralele;  $\alpha$  și  $\beta$  se intersectează după o dreaptă  $d$  și  $d$  înțeapă  $\gamma$  într-un punct  $A$  (atunci cele trei plane au  $A$  ca unic punct comun);  $\alpha, \beta, \gamma$  trec prin aceeași dreaptă și, în fine,  $\alpha \cap \beta = d$  și  $d \parallel \gamma$  (se spune atunci că planele determină o prismă).

## 2. PARALELISM ÎN SPAȚIU

Reamintim că o dreaptă  $d$  este paralelă cu un plan  $\alpha$  dacă  $d \cap \alpha = \emptyset$  și că două plane  $\alpha, \beta$  sînt paralele dacă  $\alpha \cap \beta = \emptyset$ . Au loc următoarele teoreme care se aplică des:

— Dacă o dreaptă este paralelă cu o dreaptă dintr-un plan, atunci este paralelă cu planul.

— Dacă dreapta  $d$  este paralelă cu planul  $\alpha$  și dacă prin  $d$  este dus un plan  $\beta$ , atunci  $d$  este paralelă cu dreapta  $d_1 = \alpha \cap \beta$  (v. fig. M.A.17).

— Dacă planele  $\alpha$  și  $\beta$  sînt paralele și  $\gamma$  este un plan neparalel cu  $\alpha$ , atunci dreptele  $\gamma \cap \alpha$  și  $\gamma \cap \beta$  sînt paralele (v. fig. M.A.18).

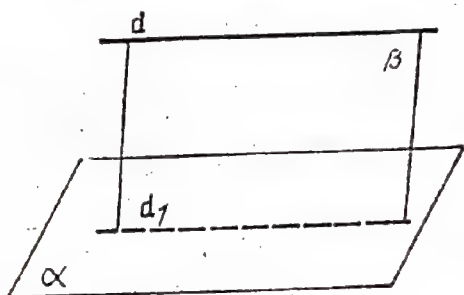


Fig. M.A.17

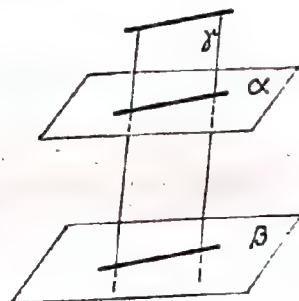


Fig. M.A.18

— Relația de paralelism între drepte și relația de paralelism între plane sînt transitive.

— Dacă două drepte concurente sînt paralele cu un plan  $\alpha$ , planul determinat de ele este paralel cu  $\alpha$ .

— Dacă dreptele  $d_1, d_2$  sînt concurente și  $d'_1, d'_2$  sînt concurente iar  $d_1 \parallel d'_1, d_2 \parallel d'_2$ , atunci planele determinate de  $(d_1, d_2)$  și respectiv  $(d'_1, d'_2)$  sînt paralele.

## 3. UNGHIURI ÎN SPAȚIU

Dacă două drepte sînt coplanare, situate în același plan  $\alpha$ , atunci unghiul lor este, prin definiție, unghiul definit în geometria plană (din planul  $\alpha$ ). Dacă dreptele

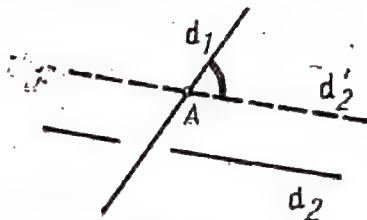


Fig. M.A.19

$d_1$  și  $d_2$  sînt necoplanare, atunci se alege un punct  $A \in d_1$  și se duce prin  $A$  paralela  $d'_2$  la  $d_2$ ; unghiul dreptelor  $d_1, d_2$  este unghiul făcut de dreptele coplanare  $d_1$  și  $d'_2$ , notat  $(\widehat{d_1, d_2})$ ; v. fig. M.A.19. Evident,  $(\widehat{d_1, d_2})$  este independent de alegerea lui  $A$ .

Fiind date o dreaptă  $d$  și un plan  $\alpha$ , în cazul cînd  $d$  este situată în  $\alpha$  sau  $d \parallel \alpha$ , se consideră că unghiul între  $d$  și  $\alpha$  este nul. Dacă  $d$  înțeapă planul  $\alpha$  în punctul  $A$ , atunci se alege un punct  $M \in d$  și se consideră proiecția  $M'$  a lui  $M$  pe  $\alpha$ ; prin definiție,  $(d, \alpha) = \widehat{MAM'}$  (independent de  $M$ ). Așadar, unghiul unei drepte cu un plan este unghiul făcut de dreaptă cu proiecția ei pe plan. (v. fig. M.A.20)

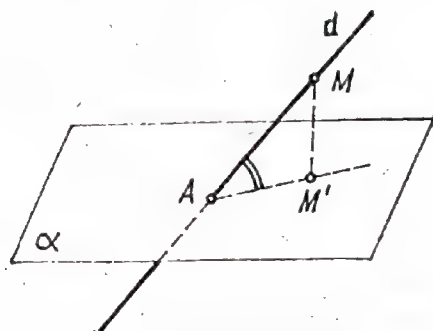


Fig. M.A.20

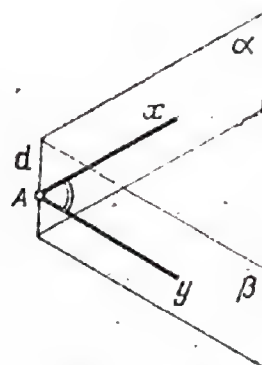


Fig. M.A.21

Dacă  $\alpha$  și  $\beta$  sînt două plane paralele, se consideră că ele fac unghiul nul. Dar dacă  $\alpha$  și  $\beta$  se intersectează după o dreaptă  $d$ , atunci se formează un unghi diedru; alegînd un punct  $A \in d$  și ridicînd perpendiculare pe  $d$  situate în cele două plane  $\alpha$ ,  $\beta$  ( $Ax \subset \alpha$ ,  $Ay \subset \beta$  și  $Ax \perp d$ ,  $Ay \perp d$ ) măsura unghiului plan  $xAy$  este independentă de alegerea lui  $A$  și se numește *măsura unghiului diedru*  $(\alpha, \beta)$  (pentru precizare se poate alege unghiul ascuțit); v. fig. M.A.21.

#### 4. PERPENDICULARITATE ÎN SPAȚIU

Două drepte  $d_1$ ,  $d_2$  se numesc *perpendiculare* dacă  $m(\widehat{d_1, d_2}) = 90^\circ$  (ele pot fi coplanare sau necoplanare); două plane  $\alpha$ ,  $\beta$  se numesc *perpendiculare* dacă  $m(\alpha, \beta) = 90^\circ$ , adică măsura unghiului diedru este cea a unui unghi drept.

O dreaptă  $d$  se spune că este *perpendiculară pe un plan  $\alpha$*  dacă ea este perpendiculară pe *orice* dreaptă conținută în  $\alpha$ .

Au loc următoarele teoreme importante:

— Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente conținute într-un plan, atunci ea este perpendiculară pe plan;

— Dacă o dreaptă  $d$  este perpendiculară pe un plan  $\alpha$ , atunci orice plan trecînd prin  $d$  este perpendicular pe  $\alpha$ .

— Dacă planele  $\alpha$  și  $\beta$  sînt perpendiculare, orice dreaptă conținută în  $\alpha$  și perpendiculară pe  $\alpha \cap \beta$  este perpendiculară pe  $\beta$ .

— Două plane perpendiculare pe aceeași dreaptă sînt paralele; două drepte perpendiculare pe același plan sînt paralele.

— Dacă o dreaptă  $d$  nu este perpendiculară pe un plan  $\alpha$ , atunci există un plan unic, care trece prin  $d$  și este perpendicular pe  $\alpha$  (planul *proiectant* al lui  $d$  pe  $\alpha$ );

— *Teorema celor trei perpendiculare*: dacă o dreaptă  $d$  este perpendiculară pe un plan  $\alpha$  și din punctul  $A = d \cap \alpha$  se duce o perpendiculară  $AB$  pe o dreaptă  $d_1$



conținută în  $\alpha$ , atunci pentru orice punct  $M \in d$ , dreapta  $MB$  este perpendiculară pe  $d_1$  (v. fig. M.A.22). Există unele reciproce, de asemenea adevărate, care trebuie demonstrate *ad-hoc*, pentru că demonstrația este aproape imediată.

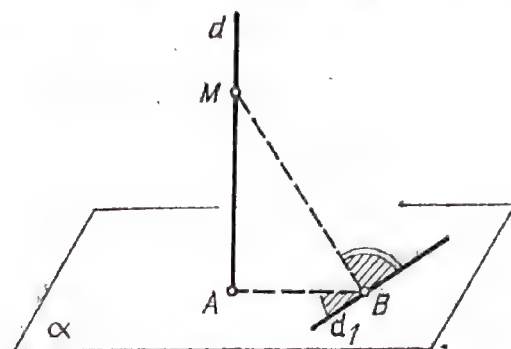


Fig. M.A.22

Orice vector nenul perpendicular pe un plan se mai numește un vector *normal* la plan. Unghiul a două plane este egal cu unghiul făcut de doi vectori normali la acele plane; iar unghiul format de o dreaptă și un plan este complementul unghiului dintre dreaptă și un vector normal la plan.

## 5. PROIECȚII

Fie  $\alpha$  un plan.

Dacă  $A$  și  $B$  sînt două puncte în spațiu și  $A'$ ,  $B'$  sînt proiecțiile ortogonale ale lui  $A$ ,  $B$  respectiv pe  $\alpha$ , atunci  $A'B' = AB \cdot \cos \theta$ , unde  $\theta$  este unghiul făcut de dreapta  $AB$  cu planul  $\alpha$ ; așadar, prin proiecție, segmentele nu își măresc lungimea.

Dacă  $d$  este o dreaptă și  $A'$ ,  $B'$  sînt proiecțiile punctelor  $A$ ,  $B$  de pe  $d$ , atunci  $A'B' = AB \cdot \cos \theta_1$ , unde  $\theta_1$  este unghiul dintre dreptele  $d$  și  $AB$ .

Dacă  $T$  este un triunghi și  $T'$  este proiecția lui  $T$  pe planul  $\alpha$ , atunci  $\sigma(T') = \sigma(T) \cdot \cos \theta$ , unde  $\theta$  este măsura unghiului dintre planul triunghiului  $T$  și planul  $\alpha$ . Acest rezultat se extinde la poligoane (și chiar la mulțimi măsurabile mai generale).

## 6. CORPURI ÎN SPAȚIU

**Prisma.** Aria laterală  $A$  a unei prisme oarecare este suma ariilor fețelor laterale. În cazul unei prisme regulate (în care baza este un poligon regulat și muchia laterală este perpendiculară pe planul bazei) avem  $A = \text{perimetrul bazei} \times \text{înălțimea}$ .

Volumul unei prisme oarecare este  $V = \text{aria bazei} \times \text{înălțimea}$ .

**Cilindrul drept.** Aria laterală:  $A = 2\pi RI$  și volumul:  $V = \pi R^2 I$  ( $R = \text{raza bazei}$ ,  $I = \text{înălțimea}$ ).

**Piramida.** Volumul piramidei:  $V = \frac{1}{3} \text{aria bazei} \times \text{înălțimea}$ . În cazul unei piramide regulate (baza poligon regulat și vârful piramidei se proiectează în centrul bazei), aria laterală este:

$A = \frac{1}{2} \text{perimetrul bazei} \times \text{apotema piramidei}$ ,  
apotema fiind înălțimea unei fețe laterale coborîte din vârful piramidei.

**Conul circular drept.** Aria laterală:  $A = \pi RG$  și volumul:  $V = \frac{1}{3} \pi R^2 I$  ( $R = \text{raza bazei conului}$ ,  $I = \text{înălțimea}$  și  $G = \text{generatoarea conului}$ ).

**Trunchiul de piramidă.** Volumul  $= \frac{1}{3}$  înălțimea  $\times (S + s + \sqrt{Ss})$ , unde  $S$  = aria bazei mari iar  $s$  = aria bazei mici. Pentru un trunchi regulat, aria laterală este  $\frac{1}{2}$  apotema  $\times (P + p)$ , unde  $P$  = perimetrul bazei mari, iar  $p$  = perimetrul bazei mici.

**Trunchiul de con circular drept.** Aria laterală:  $A = \pi G(R + r)$ ; Volumul  $= \frac{\pi I}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$ ;  $G$  = generatoarea trunchiului,  $I$  înălțimea,  $R$  = raza bazei mari și  $r$  = raza bazei mici a trunchiului.

Dacă  $R = r$  se regăsesc formulele din cazul cilindrului circular drept, iar în cazul  $r = 0$ , formulele conului circular drept.

**Sfera.** Sfera de centru  $O$  și rază  $R$  este mulțimea punctelor  $M$  din spațiu astfel încît  $OM = R$ . Uneori prin sferă se înțelege sfera plină (sau bila), adică mulțimea acelor puncte  $M$  astfel încît  $OM < R$ .

Aria sferei de rază  $R$  este:  $A = 4\pi R^2$ , iar volumul sferei:  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ .

Aria calotei sferice cu înălțimea  $I$  este  $2\pi RI$ , iar volumul calotei (numită și segment sferic cu o bază) este  $V = \frac{\pi I^2}{3} (3R - I)$ .

Aria zonei este  $2\pi RI$  ( $I$  fiind distanța dintre planele care o delimitează), iar volumul se obține scăzînd din volumul sferei volumul a două calote.

Raza sferei înscrise într-o piramidă (în ipoteza că există o astfel de sferă) este  $r = \frac{3V}{A_t}$ , unde  $V$  = volumul piramidei și  $A_t$  = aria totală. Demonstrația se obține notînd cu  $I$  centrul sferei înscrise și cu  $r$  raza sferei, scriînd că volumul  $V$  se obține ca suma volumelor piramidelor avînd  $I$  ca vîrf și fețele piramidei inițiale ca baze.

Raza sferei circumscrise unei piramide regulate este  $R = \frac{M^2}{2I}$ , unde  $M$  = mînia laterală și  $I$  = înălțimea piramidei (pentru demonstrație se consideră punctul diametral opus vîrfului piramidei și se aplică teorema catetei).

Pentru raza sferei înscrise și raza sferei circumscrise unui con circular drept, se pot aplica formulele  $r = \frac{S}{p}$ ,  $R = \frac{abc}{4S}$  din geometria plană.

Într-un trunchi de con se poate înscrie o sferă dacă și numai dacă  $G = R + r$ ; în acest caz, raza  $\rho$  a sferei va fi dată de relația  $4\rho^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2$ , deci  $\rho = \sqrt{Rr}$ .

## § 5. GEOMETRIE ANALITICĂ

### 1. GEOMETRIE PE O AXĂ

Se numește *axă* o dreaptă pe care se fixează originea, unitatea de măsură și un sens (mai sugestiv, se fixează punctele care corespund lui 0, 1 și respectiv  $+\infty$ ). Dacă se consideră o axă de versor  $\vec{u}$ , atunci oricărui punct  $M$  al axei i se asociază acel unic număr real  $x_M$  astfel încît  $\vec{OM} = x_M \vec{u}$ ; numărul  $x_M$  se numește *abscisa* lui  $M$ . Dacă  $M, N$  sînt două puncte pe axă, atunci vectorul  $\vec{MN}$  este dat de  $\vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM} = (x_N - x_M)\vec{u}$ . Distanța între  $M$  și  $N$  este  $|x_M - x_N|$  iar abscisa mijlocului segmentului  $MN$  este  $\frac{1}{2}(x_M + x_N)$ .



*Exemplu.* Fie o axă  $Ox$  de versor  $\vec{u}$  și  $A, B$  două puncte fixate de abscise  $a, b$  pe axă. Să se determine coordonatele punctelor  $M_1$  și  $M_2$  de pe axă care împart segmentul  $[AB]$  în rapoarte  $k, -k$ , respectiv ( $k \neq \pm 1$ ). Așadar,  $\vec{AM}_1 = k\vec{M}_1B$ ,

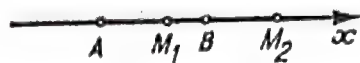


Fig. M.A.23

$\vec{AM}_2 = -k\vec{M}_2B$ . (v. fig. M.A.23). Notînd cu  $x_1, x_2$  abscisele lui  $M_1, M_2$  respectiv, rezultă  $x_1 - a = k(b - x_1)$  și  $x_2 - a = -k(b - x_2)$ , deci  $x_1 = \frac{a + kb}{1 + k}$ ,  $x_2 = \frac{a - kb}{1 - k}$ . Se spune că  $A, B, M_1, M_2$  formează o *diviziune armonică* (sau că  $M_2$  este *conjugatul armonic al lui  $M_1$  față de  $A$  și  $B$* ). Între  $a, b, x_1, x_2$  există o relație independentă de  $k$ , anume:  $2(ab + x_1x_2) = (a + b)(x_1 + x_2)$ . Dacă  $x_1 = 0$ , atunci  $\frac{2}{x_2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ .

## 2. PUNCTE ȘI DIRECȚII ÎN PLAN

Se consideră un reper în plan, determinat de un sistem ortogonal de axe  $xOy$ , avînd o origină comună și aceeași unitate de măsură; dacă  $\vec{i}$  și  $\vec{j}$  sînt versorii axelor  $Ox, Oy$ , pentru orice punct  $M$  (din plan) există, și sînt unice, două numere reale  $x_M, y_M$  astfel încît  $\vec{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j}$ . Se spune că  $M$  are coordonatele carteziene  $(x_M, y_M)$  relativ la reperul  $xOy$  și se stabilește astfel o corespondență bijectivă între punctele planului și mulțimea  $\mathbb{R}^2$  (bijecția lui Descartes).

Dacă  $M_1(x_1, y_1)$  și  $M_2(x_2, y_2)$ , atunci *distanța* dintre punctele  $M_1$  și  $M_2$  este numărul real nenegativ:

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

A da o *direcție* în plan revine la a indica un versor  $\vec{v}$  paralel cu acea direcție. Dacă  $\vec{v}$  face unghiul  $\alpha$  cu versorul  $\vec{i}$  al axei  $Ox$ , atunci  $\alpha$  se numește *panta* direcției,

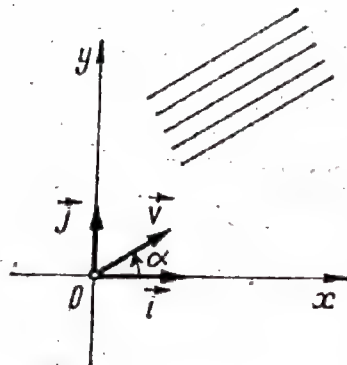


Fig. M.A.24

iar numărul real  $m = \operatorname{tg} \alpha$  (în ipoteza  $\cos \alpha \neq 0$ ) se numește *coeficientul unghiular* al direcției; evident,  $\vec{v} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$  (fig. M.A.24). Se consideră „tangenta” și nu altă funcție trigonometrică deoarece pantele  $\alpha$  și  $\alpha + \pi$  determină aceeași direcție și „tangenta” este periodică de perioada principală  $\pi$ .

Două direcții de coeficienți unghiulari  $m_1, m_2$  sînt paralele (resp. perpendiculare) dacă  $m_1 = m_2$  (resp.  $m_1 m_2 + 1 = 0$ ). Fiind date două direcții de coeficienți unghiulari  $m_1, m_2$ , unghiul  $\theta$  a două drepte avînd aceste direcții satisface relația:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

### 3. DREPTE ÎN PLAN

Reținem că punctele au coordonate, direcțiile au pantă (sau coeficient unghiular); dreptele, cercurile, elipsele și, în general, curbele au ecuații, iar regiunile din plan sînt date prin inecuații. Ecuația unei figuri plane  $F$  este, în termeni sugestivi, dar nu foarte riguroși, legătura (algebrică) între coordonatele  $x, y$  ale unui punct  $M$  din plan relativ la un reper fixat, care rezultă din condiția geometrică pusă ca  $M$  să aparțină figurii  $F$ . De exemplu, un punct  $M(x, y)$  aparține axei (resp.  $Oy$ ) dacă și numai dacă  $y = 0$  (resp.  $x = 0$ ); ecuația dreptei trecînd prin origine cu coeficientul unghiular  $m$  este  $y = mx$ . Ecuația unei drepte oarecare cu coeficientul unghiular  $m$  este  $y = mx + \alpha$ , intersecția acesteia cu axa  $Oy$  fiind punctul  $(0, \alpha)$ ; în acest caz sînt excluse dreptele verticale, care au ecuațiile de forma:  $x = x_0$ , cu  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Ecuația generală a unei drepte este  $Ax + By + C = 0$  (cu  $A^2 + B^2 \neq 0$ ); dacă  $B \neq 0$  (adică dreapta nu este verticală), rezultă  $m = -\frac{A}{B}$ .

Ecuația dreptei trecînd prin punctul  $M_0(x_0, y_0)$  cu coeficient unghiular  $m$  este:  $y - y_0 = m(x - x_0)$ , iar ecuația dreptei trecînd prin punctele  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  este:

$y - y_1 = m(x - x_1)$ , unde  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  (dacă  $x_1 \neq x_2$ ) și  $x = x_1$  (dacă  $x_2 = x_1$ ); în mod unificat,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

A intersecția două drepte neparalele  $D_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ,  $D_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$  revine la a afla punctul comun, adică a afla punctul ale cărui coordonate verifică simultan ambele ecuații. Dreptele  $D_1$  și  $D_2$  sînt paralele (și distincte) dacă și numai dacă  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ .

Trei drepte de ecuații  $A_i x + B_i y + C_i = 0$ ,  $1 \leq i \leq 3$  sînt concurente (sau paralele între ele) dacă și numai dacă:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Distanța de la un punct  $M_0(x_0, y_0)$  la o dreaptă  $D: Ax + By + C = 0$  este:

$$d(M_0, D) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

*Exemple 1)* Se consideră punctele  $A(1, 2)$ ,  $B(4, 1)$ . Să se afle punctul de pe bisectoarea întii a axelor egal depărtat de  $A$  și  $B$ . Un punct oarecare pe bisectoarea întii are coordonatele  $M(\lambda, \lambda)$  și punem condiția ca  $d(A, M) = d(B, M)$ , deci  $(\lambda - 1)^2 + (\lambda - 2)^2 = (\lambda - 4)^2 + (\lambda - 1)^2$  și rezultă  $\lambda = 3$ , deci  $M(3, 3)$ . O altă metodă constă în a intersecța mediatoarea segmentului  $AB$  cu dreapta  $y = x$ .



2) Fie  $A(2, 0)$  și  $P$  un punct oarecare pe axa  $Oy$ . Să se afle ecuația locului geometric al intersecției  $M$  dintre paralela prin  $P$  la  $Ox$  cu perpendiculara în  $A$  pe  $AP$ . Fie  $P(0, \lambda)$ . Atunci coeficientul unghiular al dreptei  $AP$  este  $m = \frac{\lambda - 0}{0 - 2} = -\frac{\lambda}{2}$ .

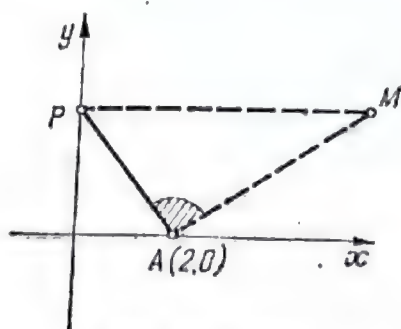


Fig. M.A.25

Ecuația perpendicularei în  $A$  pe  $AP$  va fi:  $y - 0 = \frac{2}{\lambda}(x - 2)$ . Trebuie deci aflată ecuația locului intersecției dreptelor  $y = \lambda$ ,  $y = \frac{2}{\lambda}(x - 2)$ , ceea ce se obține eliminând  $\lambda$ ; se obține  $y^2 = 2(x - 2)$  și recunoaștem ecuația unei parabole (v. fig. M.A.25).

#### 4. CERCUL ÎN PLAN

Se subînțelege fixat un reper ortogonal  $xOy$ . Ecuația cercului cu centrul  $M_0(x_0, y_0)$  și rază  $R > 0$  este:  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ , obținându-se din condiția ca un punct curent  $M(x, y)$  din plan să aparțină cercului, adică  $d(M_0, M) = R$ .

În particular, ecuația cercului  $\mathcal{C}(O, R)$  este  $x^2 + y^2 = R^2$ ; semicercul superior este  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$  iar cel inferior  $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ .

Ecuația generală a unui cerc este  $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$  cu  $m, n, p \in \mathbb{R}$ . Centrul acestui cerc are coordonatele  $\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right)$  și raza este:  $R = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p}$  (în ipoteza că  $\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p \geq 0$ ).

Fiind date trei puncte necoliniare  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3)$ , ecuația cercului circumscris triunghiului  $M_1M_2M_3$  este

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Exemple.* 1) Ecuația cercurilor tangente în origine la  $Oy$  se obține observând că centrul este situat pe  $Ox$ , deci  $M_0(\lambda, 0)$  iar raza este  $|\lambda|$ ; ecuația căutată va fi:  $(x - \lambda)^2 + (y - 0)^2 = \lambda^2$ , adică  $x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0$ ; în mod similar, ecuația cercurilor tangente în origine la  $Ox$  este:  $x^2 + y^2 - 2\lambda y = 0$ .

2) Cercul  $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$  are centrul în  $(2, -2)$  și raza egală cu 3.

3) Ecuația cercului de diametru  $M_1M_2$ , unde  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  este:  $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$ .

Ecuația tangentei la un cerc într-un punct al cercului se obține prin dedublarea ecuației cercului.

Ecuatia comună celor două tangente la cercul  $x^2 + y^2 = R^2$ , paralele cu direcția de coeficient unghiular  $m$  este:  $y = mx \pm R\sqrt{1+m^2}$ .

Un punct oarecare pe cercul  $x^2 + y^2 = R^2$  are coordonatele  $(\alpha, \beta)$ , unde  $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$  sau, echivalent, coordonatele  $(R \cos t, R \sin t)$ , unde  $t \in [0, 2\pi)$ ; pentru  $t = 0$  se obține punctul  $(R, 0)$ . În mod similar, un punct oarecare pe cercul  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$  are coordonatele:  $x = x_0 + R \cos t$ ;  $y = y_0 + R \sin t$ , cu  $t \in [0, 2\pi)$ . Aceste relații se mai numesc și *ecuațiile parametrice* ale cercului respectiv.

## 5. CONICE ÎN PLAN

Fie  $F, F'$  două puncte la distanța  $2c$  ( $c > 0$ ). Se numește *elipsă de focare*  $F, F'$  având și lungimea axei mari  $2a$  ( $a > c$ ) mulțimea punctelor  $M$  astfel încît:

$$d(M, F) + d(M, F') = 2a.$$

Alegînd dreapta  $FF'$  ca axă  $Ox$  și mediatoarea segmentului  $[FF']$  ca  $Oy$  (fig. M.A.26), ecuația elipsei va fi:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ , unde  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$  (deci  $b < a$ ). Dacă  $b = a$ , adică  $F$  și  $F'$  coincid cu  $O$ , elipsa devine cerc; raportul  $\frac{c}{a}$  se numește *excentricitate* și măsoară „abaterea elipsei de la cerc” (acest raport este nul cînd elipsa este un cerc).

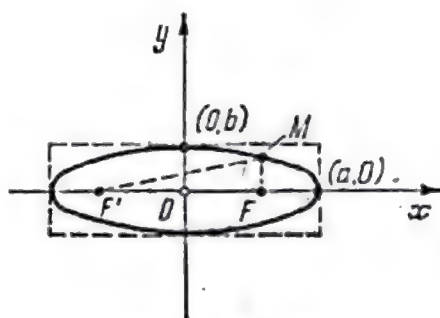


Fig. M.A.26

Dacă  $b > a$ , atunci focarele elipsei  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$  sînt situate pe axa  $Oy$  la distanța  $2c$ , unde  $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ .

Presupunînd că focarele sînt pe axa  $Ox$  (deci  $b < a$ ), dreptele  $x = \frac{a^2}{c}$  și  $x = -\frac{a^2}{c}$  se numesc *directoarele* elipsei.

Un punct oarecare de pe elipsa  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$  are coordonatele  $(a \cos t, b \sin t)$ , cu  $t \in [0, 2\pi)$ . Tangenta într-un punct  $M_0(x_0, y_0)$  de pe elipsă are ecuația:  $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$  (obținută prin dedublare).

Ecuatia comună a celor două tangente la elipsa  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ , paralele cu direcția de coeficient unghiular  $m$  este:  $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ . Este remarcabilă *proprietatea optică* a elipsei, conform căreia pentru orice punct  $M_0$  de pe elipsă, bisectoarea unghiului  $\widehat{FM_0F'}$  este normală în  $M_0$  la elipsă (adică perpendiculară pe tangenta în  $M_0$  la elipsă). Această proprietate are diverse utilizări prac-



tice. Reamintim că una din legile lui Kepler afirmă că, în mișcarea sa în jurul Soarelui, Pământul descrie o elipsă având Soarele într-unul din focare; același lucru are loc pentru mișcarea unui satelit artificial în jurul Pământului.

Dacă  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$  sunt două puncte fixe, hiperbola de focare  $F, F'$  și lungimi ale axelor  $a, b$  ( $c > a$ ,  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ ) este mulțimea punctelor  $M$  din plan astfel încît:

$$|MF - MF'| = 2a.$$

Dacă  $MF - MF' = 2a$  se obține ramura din stînga a hiperbolei. Directoarele hiperbolei sînt  $x = \pm \frac{a^2}{c}$ , iar dreptele  $y = \frac{b}{a}x$ ,  $y = -\frac{b}{a}x$  sînt asimptotele hiperbolei.

Dacă  $a = b$ , se spune că hiperbola este echilateră. Dacă se iau ca axe asimptotele unei hiperbole echilaterale, ecuația acesteia va fi de forma  $xy = k$  ( $k \in \mathbb{R}$  dat).

Fiind dată o hiperbolă (H)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ , hiperbola  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$  se numește conjugată lui H.

Un punct oarecare pe hiperbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$  are coordonatele  $M_0(a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t)$ ; reamintim că  $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$  și  $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ . Se obține astfel și o justificare a denumirii de „funcții hiperbolice“.

Ecuația tangentei într-un punct  $M_0(x_0, y_0)$  al hiperbolei  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$  este:  $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$ ; dacă  $|m| > \frac{b}{a}$ , atunci există două tangente la hiperbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ , paralele cu direcția de coeficient unghiular  $m$ , și acestea au ecuația comună:  $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$ .

Fie  $F$  un punct fixat și  $D$  o dreaptă fixată astfel încît  $F \notin D$ . Se numește parabolă de focar  $F$  și directoare  $D$  mulțimea punctelor  $M$  din plan pentru care  $d(M, F) = d(M, D)$ . Alegînd ca axă perpendiculară  $FG$  din  $F$  pe  $D$  ( $G \in D$ ) și

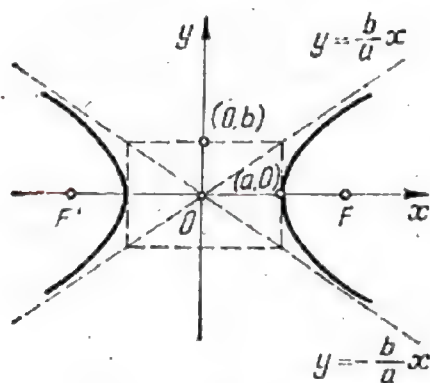


Fig. M.A.27

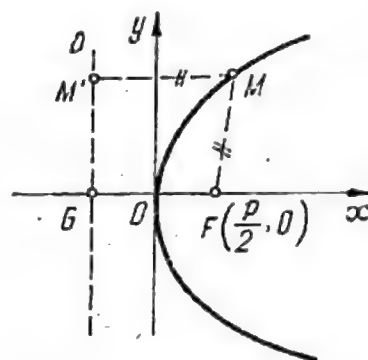


Fig. M.A.28

ca axă  $Oy$  mediatoarea lui  $FG$ , ecuația parabolei va fi:  $y^2 = 2px$  dacă  $F(\frac{p}{2}, 0)$ .

Directoarea  $D$  va avea ecuația  $x = -\frac{p}{2}$ . Ecuația tangentei la parabola  $y^2 = 2px$  într-un punct  $(x_0, y_0)$  al ei va fi:  $yy_0 = p(x + x_0)$  și pentru o direcție de coeficient unghiular  $m$  există o singură tangentă paralelă cu acea direcție, anume  $y = mx + \frac{p}{2m}$ .

Pentru a construi puncte pe parabolă se procedează astfel: se alege un punct  $M'$  pe directoare și se duc paralela prin  $M'$  la  $Ox$  și mediatoarea lui  $[M'F]$ .

*Exemple.* 1) Pentru a reprezenta grafic elipsa  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ , se consideră dreptunghiul definit de punctele  $A(a, 0)$ ,  $A'(-a, 0)$ ,  $B(0, b)$ ,  $B'(0, -b)$  și elipsa este „înscrisă” în acest dreptunghi. Pentru a reprezenta grafic hiperbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ , se consideră dreptunghiul ei  $AA'BB'$ , ca mai sus, ale cărei diagonale sînt tocmai asimptotele hiperbolei, iar  $A$ ,  $A'$  sînt virfurile hiperbolei (fig. M.A.27).

2) Arătăm că pentru orice punct situat pe directoarea unei parabole, tangentele duse la parabolă sînt perpendiculare. Fie  $A\left(-\frac{p}{2}, q\right)$  un punct oarecare de pe directoarea parabolei  $y^2 = 2px$ . Orice dreaptă trecînd prin  $A$  are ecuația de forma  $y - q = \lambda\left(x + \frac{p}{2}\right)$ ; punem condiția ca ea să fie tangentă la parabolă, deci intersecția cu parabola „să se facă în două puncte confundate”; aceasta revine la faptul că ecuația  $\left[q + \lambda\left(x + \frac{p}{2}\right)\right]^2 = 2px$  are rădăcini egale. Scriind că  $\Delta = 0$  rezultă că  $\lambda$  verifică o ecuație de gradul II cu soluțiile  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  astfel încît  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ . Ele corespund celor două tangente duse din  $A$  la parabolă, care se dovedesc a fi perpendiculare. (v. fig. M.A.28).

3) Reamintim, de asemenea, proprietatea optică a parabolei: pentru orice punct  $M$  al unei parabole de focar  $F$ , raza vectoare și paralela prin  $M$  la axa parabolei formează un unghi a cărei bisectoare interioară este tocmai normala în  $M$  la parabolă

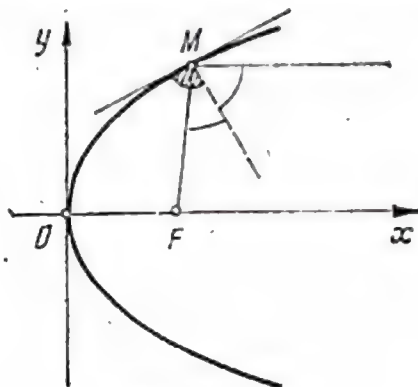


Fig. M.A.29

(fig. M.A.29). Aceasta este folosită masiv în tehnică: farurile de automobil sînt paraboloidzi cu becul în focar; unele captatoare solare au formă parabolică pentru ca razele solare paralele cu axa să fie concentrate după reflexie în focar etc.

Elipsele, hiperbolele și parabolele au primit denumirea comună de *conice*, deoarece considerînd un con circular drept și secționîndu-l cu diverse plane se obțin tocmai elipse, hiperbole sau parabole.

## § 6. ANALIZĂ MATEMATICĂ

Analiza matematică studiază în principal conceptul de limită. Derivata unei funcții într-un punct și integrala unei funcții pe un interval sînt exemple specifice de limite. Pentru a înțelege aceste concepte trebuie înțelese „retro” limitele de funcții, limitele de șiruri, șirurile de numere reale și funcțiile reale.



## 1. ȘIRURI DE NUMERE REALE; MĂRGINIRE, MONOTONIE

Analiza matematică elementară își trage denumirea de la analiza, adică studiul funcțiilor reale de o variabilă reală  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D \subset \mathbb{R}$ ). Un caz special îl constituie cazul șirurilor de numere reale  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ; notînd  $a_n = f(n)$  pentru  $n \in \mathbb{N}$ , acest șir se notează pe scurt  $(a_n)_{n \geq 0}$ .

Un șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  de numere reale (reprezentat și astfel:  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ) se numește *mărginit* dacă se pot indica două numere  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  independente de  $n$  astfel încît  $\alpha \leq a_n \leq \beta$  pentru orice  $n \geq 0$ . Aceasta este echivalent cu existența unui număr real  $M > 0$  astfel încît  $|a_n| \leq M$  pentru orice  $n \geq 0$ .

*Exemple.* Șirul  $a_n = \frac{\sin n}{n}$ ,  $n \geq 1$ , este mărginit deoarece  $|a_n| = \left| \frac{\sin n}{n} \right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n} \leq 1$  pentru orice  $n \geq 1$ .

În mod similar, șirul  $a_n = \frac{1}{n^2 + 1}$ ,  $n \geq 0$ , este mărginit deoarece  $0 \leq a_n \leq 1$  pentru orice  $n \geq 0$ . Dar șirul  $b_n = \frac{n^2}{n+1}$ ,  $n \geq 0$ , nu este mărginit deoarece  $b_n \geq n-1$  pentru orice  $n=0, 1, 2, 3, \dots$  (de exemplu,  $b_{1000} \geq 999$  iar  $b_{10000} \geq 9999$ ).

Un șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  este *monoton* dacă diferența  $\Delta_n = a_{n+1} - a_n$  are un semn constant începînd de la un anumit rang; dacă acest semn este „+” (resp. „-”), se spune că șirul este *monoton crescător* (resp. *monoton descrescător*). Șirurile care nu sînt monotone se numesc *oscilante*.

*Exemple.* 1) Șirul  $a_n = \frac{2n+1}{3n+4}$  este monoton crescător, deoarece

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{3n+7} - \frac{2n+1}{3n+4} = \frac{5}{(3n+7)(3n+4)} > 0 \text{ pentru orice } n \geq 0.$$

2) Șirul  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ ,  $n \geq 1$ , este oscilant, deoarece termenii sînt  $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  și  $a_{n+1} - a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} - (-1)^n \frac{1}{n} = (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right) = (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$  nu are semn constant.

## 2. ȘIRURI CONVERGENTE; LIMITE DE ȘIRURI

Pentru înțelegerea conceptelor de bază ale analizei este esențială înțelegerea „tinderii la zero”. Începem cu o discuție euristică. Ce înseamnă că un volum  $V > 0$  tinde la zero? Simțul fizic ne spune că  $V$  nu este constant și „devine din ce în ce mai mic”. A trecut mult timp pînă ce s-a dat un sens matematic acestui fapt de experiență umană. Observăm că dacă se consideră un cub de latură 1 cm și dacă  $V$  tinde la zero, trebuie ca  $V < 1$  (de la un „moment” dat); iar dacă latura este de 1 micron trebuie ca  $V < 1\mu^3$  (începînd de la un alt „moment”). În general, pentru orice  $\epsilon > 0$  trebuie să avem  $V < \epsilon$  (începînd de la un „moment” ce depinde de  $\epsilon$ ). Raționînd similar, trebuie considerat că o temperatură  $T$  tinde la zero dacă pentru orice  $\epsilon > 0$ , avem  $|T| < \epsilon$  (începînd de la un „moment” dat). Lipsa de rigoare este legată de faptul că nu putem preciza ce este acela moment.

Doar în cazul șirurilor putem da o definiție riguroasă. Reamintim că distanța între două numere reale  $a, b$  este  $d(a, b) = |a - b|$ . Un șir de  $n$  numere reale se numește *convergent* către  $a \in \mathbb{R}$  dacă  $d(a_n, a) \rightarrow 0$  cînd  $n \rightarrow \infty$ , adică  $\forall \epsilon > 0$  există un rang  $N(\epsilon)$  (acesta fiind „momentul”) astfel încît  $d(a_n, a) < \epsilon$ , adică  $|a_n - a| < \epsilon$  pentru orice  $n \geq N(\epsilon)$ .

Aceasta înseamnă că  $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  pentru orice  $n \geq N(\varepsilon)$ , adică în afara intervalului  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  se află eventual doar termenii  $a_n$ , cu  $n < N(\varepsilon)$ , adică un număr finit de termeni ai șirului.

O vecinătate a unui punct  $a \in \mathbb{R}$  este o mulțime de numere reale care conține un interval deschis centrat în  $a$ . Vecinătățile lui  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) sînt mulțimi care conțin intervale de forma  $(b, \infty)$  și respectiv  $(-\infty, b)$ , cu  $b \in \mathbb{R}$ .

Reamintim că un șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  de numere reale are *limita*  $a \in \bar{\mathbb{R}}$  dacă în orice vecinătate  $V$  a lui  $a$  sînt situați toți termenii șirului începînd de la un anumit rang (rang care depinde de  $V$ ); se scrie  $a_n \rightarrow a$  sau  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . În acest caz, orice subșir al lui  $(a_n)_{n \geq 0}$  are limita  $a$ . Șirurile convergente sînt exact cele care au limită finită.

Pentru rezolvarea de exerciții și probleme este importantă cu noșterea următoarelor rezultate teoretice:

1) Orice șir convergent este mărginit. Orice șir mărginit admite un subșir convergent.

2) Orice șir mărginit și monoton este convergent.

3) Dacă  $|a_n - a| \leq b_n$  (începînd de la un anumit rang  $N$ , adică pentru orice  $n \geq N$ ) cu  $a \in \mathbb{R}$  și dacă  $b_n \rightarrow 0$ , atunci  $a_n \rightarrow a$ .

4) Dacă  $a_n \geq b_n$  pentru orice  $n \geq N$  ( $N$  natural fixat) și dacă  $b_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $a_n \rightarrow +\infty$ ; iar dacă  $a_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $b_n \rightarrow -\infty$ .

5) Dacă  $a_n \rightarrow \infty$  (sau dacă  $a_n \rightarrow -\infty$ ), atunci  $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ .

6) Dacă șirul  $(a_n)_{n \geq 0}$  este mărginit și  $b_n \rightarrow 0$ , atunci  $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$ .

7) Dacă șirul  $(a_n)$  este mărginit și  $b_n \rightarrow +\infty$ ,  $c_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $a_n + b_n \rightarrow +\infty$  și  $a_n + c_n \rightarrow -\infty$ .

8) Dacă șirurile  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  au limită și  $a_n < b_n$ , atunci pentru orice  $n \geq N$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

9) Dacă șirurile  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  sînt convergente, atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right);$$

iar dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ , atunci  $b_n \neq 0$  pentru  $n \geq N$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ .

10) Dacă  $|a| < 1$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a + \dots + a^n) = \frac{1}{1 - a}$ .

11) Șirul  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $n \geq 1$ , este monoton crescător și are toți termenii cuprinși între 2 și 3;  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$  (numărul lui Euler;  $e \simeq 2,71828183$ ). Șirul  $b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$ ,  $n \geq 1$ , este de asemenea convergent, cu limita  $e$ .

12) Dacă șirurile  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  sînt convergente și  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$ , atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Există unele operații cu șiruri care conduc la nedeterminări  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$ . De exemplu, faptul că  $\frac{0}{0}$  este o nedeterminare revine la aceea că pentru orice  $a \in \bar{\mathbb{R}}$  există șiruri  $a_n \rightarrow 0$ ,  $b_n \rightarrow 0$  și  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow a$ . În cazul  $\infty^0$  se recomandă formula:  $\lim u^v = e^{\lim v \ln u}$ , iar în cazul  $1^\infty$  se scrie:  $u^v = (1 + u - 1)^{\frac{1}{u-1} v(u-1)}$  și  $\lim u^v = e^{\lim v(u-1)}$ .



Exemple. 1) Avem  $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$ , deoarece şirul  $a_n = \sin n$  este mărginit, iar  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

2) Arătăm că şirul  $x_n = (-1)^n \frac{1}{n} \rightarrow 0$ , iar şirul  $y_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$  nu este convergent. Într-adevăr, avem  $|x_n - 0| = \frac{1}{n}$ , deci  $x_n \rightarrow 0$ . Apoi  $y_{2n} \rightarrow 1$ ,  $y_{2n+1} \rightarrow -1$  şi dacă şirul  $y_n$  ar tinde către  $l$ , ar rezulta  $l = 1$  şi  $l = -1$  simultan, ceea ce ar fi o contradicţie.

3) Scriem  $x_n \sim y_n$  dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$ . Astfel:  $(n+2) \sim (n-2)$ ;  $\sqrt[n]{n+2} \sim \sqrt[n]{n+7}$ ;  $n \sin \frac{1}{n} \sim 1$ . Dacă  $P(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k$  ( $a_0 \neq 0$ ), atunci  $P(n) \sim a_0 n^k$ , iar dacă

$$x_n = \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k}{b_0 n^p + b_1 n^{p-1} + \dots + b_p}, \quad (a_0 \neq 0, b_0 \neq 0),$$

atunci  $x_n \sim \frac{a_0}{b_0} n^{k-p}$ .

4) Calculăm  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n-1})$ . Avem:

$$x_n = n^\alpha (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n-1}) = n^\alpha \cdot \frac{(n+1) - (n-1)}{\sqrt[n]{(n+1)^2} + \sqrt[n]{n^2-1} + \sqrt[n]{(n-1)^2}} \sim \frac{2n^\alpha}{3\sqrt[n]{n^2}} = \frac{2}{3} n^{\alpha - \frac{2}{3}}.$$

Avem  $L = +\infty$  dacă  $\alpha > \frac{2}{3}$ ,  $L = \frac{2}{3}$  dacă  $\alpha = \frac{2}{3}$  şi  $L = 0$  dacă  $\alpha < \frac{2}{3}$ .

### 3. LIMITE DE FUNCȚII

Fie  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție reală şi  $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$  un punct de acumulare pentru  $D$  (deci există un şir de puncte din  $D \setminus \{\alpha\}$ , convergent către  $\alpha$ ). Se scrie că  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$ , cu  $l \in \bar{\mathbb{R}}$ , dacă pentru orice vecinătate  $V$  a lui  $l$  există o vecinătate  $U$  a lui  $\alpha$  astfel încît  $(\forall) x \in D \cap U$ ,  $x \neq \alpha$ , să avem  $f(x) \in V$ . Aceasta echivalează cu faptul că pentru orice şir  $x_n \rightarrow \alpha$ ,  $x_n \in D \setminus \{\alpha\}$ , avem  $f(x_n) \rightarrow l$ .

Presupunem cunoscută definiția limitelor laterale ale lui  $f$  într-un punct  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dacă  $f(\alpha-0) = l_s$  există, atunci  $l_s = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)$ ; în mod similar,  $l_d = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)$ . În probleme se folosesc în principal următoarele rezultate teoretice:

1) Dacă  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$  şi  $\alpha \in \mathbb{R}$ , atunci  $l_s = l_d = l$ ; reciproc, dacă  $l_s$  şi  $l_d$  există în punctul  $\alpha$  şi sînt egale, atunci  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l_s$ .

2) Dacă  $D$  conține un interval de forma  $(-\infty, b)$ , cu  $a, b \in \mathbb{R}$ , şi dacă există  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = L$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ ; rezultă un mod de calcul al limitelor spre  $-\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{z \rightarrow +\infty} f(-z) \quad (\text{punînd } x = -z).$$

3) Se cunosc principalele operații cu limite de funcții; de exemplu, dacă există și sînt finite  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l_1$  și  $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = l_2$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$ . Dacă  $l_1 = l_2 = \infty$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) + g(x)] = \infty$ , iar dacă  $l_1 = l_2 = -\infty$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) + g(x)] = -\infty$ . În schimb, dacă  $l_1 = \infty$  și  $l_2 = -\infty$  (sau  $l_1 = -\infty$ ,  $l_2 = \infty$ ), nu se poate spune nimic despre limita  $\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) + g(x)]$  și avem o nedeterminare de tipul  $\infty - \infty$ , care trebuie studiată prin prelucrare convenabilă a funcției de sub limită.

În mod similar se consideră celelalte cazuri de nedeterminare.

Reamintim de asemenea că dacă inegalitatea  $f(x) < g(x)$  are loc în toate punctele unei vecinătăți  $U$  ale lui  $\alpha \in \mathbb{R}$  și dacă există  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$ ; inegalitățile se păstrează prin trecere la limită (se transformă în inegalități de același sens și eventual nu mai rămîn stricte).

4) Prezintă acum o listă de limite remarcabile.

a) Avem  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$  pentru orice funcție  $f$  elementară și pentru orice punct  $\alpha$  interior domeniului de definiție.

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_0 x^n = \begin{cases} \infty & \text{dacă } a_0 > 0, \\ -\infty & \text{dacă } a_0 < 0. \end{cases}$$

și pentru  $a \neq 0, b \neq 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n < m, \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{dacă } n = m, \\ \frac{a_0}{b_0} \infty & \text{dacă } n > m. \end{cases}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r \quad (r \in \mathbb{R}).$$

Pentru o limită  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$  care conduce la o nedeterminare de tipul  $\frac{0}{0}$  se recomandă, după caz, simplificarea cu  $x - \alpha$  sau efectuarea schimbării de variabilă  $x - \alpha = y$  sau amplificarea cu conjugata etc. În cazul  $\frac{\infty}{\infty}$  se recomandă eventual scoaterea unui factor comun forțat. În cazul  $1^\infty$  (adică  $u \rightarrow 1, v \rightarrow \infty$ ) se recomandă formula:

$$\lim u^v = e^{\lim v(u-1)}.$$

În cazurile  $0^0, \infty^0$  se recomandă formula:  $\lim u^v = e^{\lim (v \ln u)}$  etc. Reamintim că pentru calculele limitelor laterale în punctul  $\alpha \in \mathbb{R}$  se pot folosi șirurile  $\alpha - \frac{1}{n}$ ,  $\alpha + \frac{1}{n}$  ( $n \geq 1$ ) iar o limită spre  $-\infty$  se calculează prin substituția  $x = -z$ ,



transformind-o într-o limită spre  $+\infty$ ; în acest caz, este util să reamintim că pentru orice funcție polinomială  $P(x)$  avem:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [P(x) + e^{kx}] = \infty \text{ și } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{e^{kx}} = 0 \quad (k > 0).$$

De asemenea.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0 \text{ și } \lim_{x \rightarrow \infty} [P(x) + \ln x] = \lim_{x \rightarrow \infty} P(x).$$

Pentru a arăta că  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$  nu există, este suficient să indicăm două șiruri  $x'_n \rightarrow \alpha$ ,  $x''_n \rightarrow \alpha$  astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n)$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n)$  să nu existe sau să existe dar să nu fie egale.

*Exemple.* 1) Să se afle  $a, b \in \mathbb{R}$  dacă limita  $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + \sqrt{4x^2 + bx})$  există și este egală cu  $-3$ . Se observă că în mod necesar avem  $a > 0$  (în cazul  $a \leq 0$  limita este  $+\infty$ ). Se obține o nedeterminare de tipul  $\infty - \infty$  și avem:

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^2 x^2 - (4x^2 + bx)}{ax - \sqrt{4x^2 + bx}} \stackrel{x=-z}{=} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(a^2 - 4)z^2 + bz}{-az - \sqrt{4z^2 - bz}};$$

în mod necesar  $a^2 - 4 = 0$  și se acceptă doar  $a = 2$ . În final,

$$L = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{bz}{-2z - \sqrt{4z^2 - bz}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{bz}{z \left( -2 - \sqrt{4 - \frac{b}{z}} \right)} = -\frac{b}{4}.$$

Deoarece  $L = -3$ , rezultă  $b = 12$ .

2) Să se arate că limita  $\lim_{x \rightarrow 1} \cos \frac{1}{x-1}$  nu există. Considerăm funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos \frac{1}{x-1}$  și construim șirurile  $x'_n, x''_n$  astfel încât  $f(x'_n) = 1$  și  $f(x''_n) = 0$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ; anume:  $x'_n = 1 + \frac{1}{2n\pi}$ ,  $x''_n = 1 + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$

și rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n)$ .

3) Să se calculeze  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt{x^2 + x})$ . Scriem:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x} - x + x - \sqrt{x^2 + x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x} - x) + \\ &+ \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 + x)^2 + x} \sqrt[3]{x^3 + x} + x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x + \sqrt{x^2 + x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 \left( \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{x^3}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} + 1 \right)} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

#### 4. CONTINUITATE

Considerăm o funcție reală  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  și un punct  $a \in D$ . Reamintim că  $f$  este *continuă în  $a$*  dacă pentru orice vecinătate  $V$  a lui  $f(a)$  există o vecinătate  $U$  a lui  $a$  astfel încât pentru orice  $x \in U \cap D$  să rezulte  $f(x) \in V$ . Se spune că  $f$  este *continuă pe  $D$*  dacă este continuă în orice punct din  $D$ . Dacă  $a$  este izolat

(adică există o vecinătate  $U$  a lui  $a$  astfel încît  $U \cap D = \{a\}$ ), atunci  $f$  este în mod automat continuă în  $a$ . Dacă  $a$  este punct de acumulare pentru  $D$  (cazul cel mai des întîlnit), continuitatea lui  $f$  în punctul  $a$  este echivalentă cu faptul că limita  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  există și este egală cu  $f(a)$ , sau cu faptul că pentru orice șir  $x_n \rightarrow a$ ,  $x_n \in D$ , rezultă  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

Sintetizăm acum câteva rezultate teoretice.

1) Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  și  $a \in D$  astfel încît să existe  $l_s = f(a-0)$  și  $l_d = f(a+0)$ . Funcția  $f$  admite limită în  $a \iff l_s = l_d$ ;  $f$  este continuă în  $a \iff l_s = l_d = f(a)$ . În figura M.A.30 sînt indicate sugestiv câteva situații posibile.

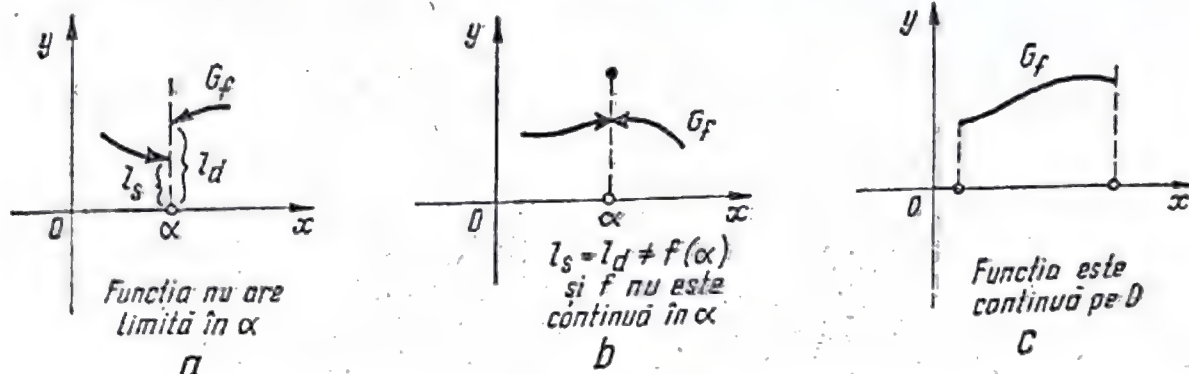


Fig. M.A. 30

2) Orice funcție elementară este continuă în orice interval deschis conținut în domeniul de definiție.

3) Dacă  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă într-un punct  $a \in D$  care este punct de acumulare și dacă  $f(a) > 0$  (resp.  $f(a) < 0$ ), atunci există o vecinătate  $U$  a lui  $a$  astfel încît  $f > 0$  pe  $U$ , adică  $(\forall)x \in U, f(x) > 0$  (resp.  $f < 0$  pe  $U$ ); aceasta se mai numește *proprietatea de inerție* a funcțiilor continue.

4) Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă, atunci  $f$  este mărginită și își atinge marginile.

5) Dacă  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă și  $\varphi(a) \cdot \varphi(b) < 0$ , atunci există cel puțin un punct  $c \in (a, b)$  astfel încît  $\varphi(c) = 0$  (*lema lui Bolzano*).

6) Dacă  $I$  este un interval, orice funcție continuă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  are *proprietatea lui Darboux*, adică pentru orice  $x_1 < x_2$  din  $I$  și pentru orice  $c$  situat între  $f(x_1)$  și  $f(x_2)$  există  $u$  situat între  $x_1$  și  $x_2$  astfel încît  $f(u) = c$  [adică ecuația  $f(x) = c$  admite cel puțin o soluție  $u \in (x_1, x_2)$ ]. Faptul că o funcție  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  are proprietatea Darboux este echivalent cu faptul că pentru orice interval  $J \subset \mathbb{R}$ ,  $f(J)$  este un interval.

7) Dacă  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  sînt continue pe  $D$ , atunci  $f + g, f - g, f \cdot g, f^2, \max(f, g), \min(f, g)$  sînt de asemenea continue pe  $D$ .

8) Dacă  $f : D \rightarrow D_1$  și  $g : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$  sînt funcții continue, atunci funcția compusă  $g \circ f$  este continuă pe  $D$ ; dacă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă pe un interval, strict monotonă și  $J = f(I)$ , atunci aplicația  $f : I \rightarrow J$  este bijectivă și  $f^{-1} : J \rightarrow I$  este de asemenea continuă și strict monotonă.

9) Pentru a stabili semnul unei funcții continue  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  pe un interval  $I$  se poate proceda astfel: se determină soluțiile ecuației  $f(x) = 0$  situate în  $I$ ; pe intervalul dintre două soluții consecutive, semnul lui  $f$  este constant, conform lemei lui Bolzano 5) (și este suficient de aflat semnul într-un punct).

Pentru a înțelege mai bine sensul unora din proprietățile anterioare, să presupunem că viteza unui automobil este o funcție continuă  $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \rightarrow v(t)$  într-un interval de timp  $I$ . Proprietatea de inerție 3) arată că dacă  $v(t_0) > 0$ , adică automobilul nu este în repaus la un moment  $t_0 \in I$ , el nu va fi în repaus în punctele unei vecinătăți a lui  $t_0$ . Proprietatea 4) arată că dacă  $I = [a, b]$  este compact,



atunci există două valori  $v_m \leq v_M$  ale vitezei astfel încît  $v_m \leq v(t) \leq v_M$  pentru orice  $t \in I$ ; în plus, există momente în  $I$  în care sînt atinse efectiv viteza minimă și viteza maximă. Proprietatea lui Darboux arată că pentru orice  $t_1, t_2 \in I, t_1 < t_2$ , o dată cu valorile  $v(t_1), v(t_2)$  este atinsă orice valoare intermediară, adică pentru orice valoare  $v^*$  situată între  $v(t_1)$  și  $v(t_2)$  există un moment  $\tau \in (t_1, t_2)$  astfel încît viteza la momentul  $\tau$  să fie tocmai  $v^*$ .

*Exemple.* 1) Să se afle  $m \in \mathbb{R}$  dacă funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + m, & x \leq -2 \\ \cos \pi x, & x > -2 \end{cases} \text{ este continuă pe } \mathbb{R}. \text{ Pe fiecare din intervalele } (-\infty, -2)$$

și  $(-2, \infty)$  funcția  $f$  este elementară, deci este continuă. Rămîne de pus condiția ca  $f$  să fie continuă în punctul  $\alpha = -2$ . Dar  $l_s = f(-2-0) = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + m) = 4 + m$ .

$l_d = f(-2+0) = \lim_{x \rightarrow -2} \cos \pi x = \cos(-2\pi) = 1$  și  $f(-2) = 4 + m$ . Funcția  $f$  este continuă  $\Leftrightarrow m + 4 = 1$ , adică  $m = -3$ .

2) Studiem semnul funcției  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 4x + 3)(\ln^2 x - \ln x)$ . Funcția este elementară, deci este continuă pe intervalul  $(0, \infty)$ . Ecuația  $f(x) = 0$  are soluțiile 1, e, 3. Pe intervalele  $(0, 1), (1, e), (3, \infty)$  funcția este pozitivă, iar pe  $(e, 3)$  este negativă.

## 5. DERIVATE

Fie  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție reală ( $D \subset \mathbb{R}$ ),  $x_0$  un punct de acumulare pentru  $D$ , aparținînd lui  $D$ . Reamintim că  $f$  are derivată în  $x_0$  dacă există limita:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ (eventual egală cu } +\infty \text{ sau } -\infty), \text{ numită derivata lui } f \text{ în } x_0 \text{ și notată } f'(x_0) \text{ sau } \frac{df}{dx}(x_0).$$

Dacă această limită în plus este finită, atunci se spune că  $f$  este derivabilă în  $x_0$ .

Reamintim rezultatele teoretice mai des utilizate.

1) Dacă  $f$  este derivabilă în  $x_0$ , atunci  $f$  este continuă în  $x_0$  (deci dacă  $f$  nu este continuă într-un punct, ea nu este nici derivabilă).

2) Funcția  $f$  are derivată în  $x_0$  dacă și numai dacă derivatele ei laterale  $f'_s(x_0)$  și  $f'_d(x_0)$  există și sînt egale.

3) Dacă  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă și  $x_0 \in (a, b)$ , atunci  $f$  este derivabilă în  $x_0$  dacă și numai dacă graficul lui  $f$  admite tangentă (neverticală) în  $x_0$ ; în acest caz, ecuația tangentei respective la graficul  $y = f(x)$  în punctul  $(x_0, f(x_0))$  este  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ .

4) Fără a mai da precizări, să reamintim cîteva reguli de derivare:

$$c' = 0; (u^r)' = r \cdot u^{r-1} \cdot u'; (\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u}}; (f \pm g)' = f' \pm g';$$

$$(fg)' = f'g + fg'; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}; \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2};$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}; (a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a; (e^u)' = e^u \cdot u';$$

$$(\sin u)' = (\cos u) \cdot u'; (\cos u)' = -(\sin u) \cdot u';$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}; (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u};$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}; (u^v)' = u^v \cdot \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u}\right).$$

5) Pentru a determina punctele de extrem și intervalele de creștere sau descreștere ale unei funcții derivabile, se recomandă completarea tabloului de variație folosind prima derivată; pentru punctele de inflexiune și intervalele de convexitate sau concavitate, se utilizează derivata a doua.

6) *Teorema lui Rolle*. Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă pe  $[a, b]$ , derivabilă pe  $(a, b)$  și în plus  $f(a) = f(b)$ , atunci există cel puțin un punct  $c \in (a, b)$  astfel încât  $f'(c) = 0$ .

7) *Formula creșterilor finite (Lagrange)*. Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă pe  $[a, b]$  și derivabilă pe  $(a, b)$ , atunci există cel puțin un punct  $c \in (a, b)$  astfel încât  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ .

Dacă  $f' = 0$  pe un interval, atunci  $f$  este constantă pe acel interval. Apoi, dacă  $f$  este continuă pe o vecinătate  $V$  a lui  $a$  și derivabilă în  $V \setminus \{a\}$ , atunci  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ ; similar pentru derivate laterale.

Fără a intra în detalii, reamintim existența *regulii lui l'Hôpital* pentru calculul limitelor (care trebuie aplicată o dată cu prelucrarea funcției de sub limită), utilizarea *șirului lui Rolle* pentru a decide numărul și poziția soluțiilor reale ale unor ecuații, ca și posibilitatea *demonstrării unor inegalități*, folosind tabloul de variație ale unor funcții convenabil alese. Vom ilustra aceste rezultate în exemplele următoare.

*Exemple.* 1) Să se calculeze  $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}}$  și  $L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}$ . Punind

$$x = \frac{1}{y}, \text{ avem } L_1 = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y} \stackrel{\text{Hôp.}}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{1} = \infty. \text{ Apoi:}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2 \sin x \cos x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x}{12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{12x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{12x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 2x}{12} = \frac{4}{3}.$$

2) Să se studieze numărul soluțiilor reale ale ecuației  $x^3 - 3 \ln x + m = 0$ , unde  $m$  este un parametru real. Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3 \ln x + m$ . Evident,  $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x}$  și ecuația  $f'(x) = 0$  admite o singură soluție reală, anume  $x = 1$ . Se alcătuieste tabloul:

$x$	0	1	$\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$\infty$	$1 + m$	$\infty$

Șirul Rolle este șirul finit de valori  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ ,  $f(1) = 1 + m$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

Dacă  $m + 1 < 0$ , atunci ecuația are exact două soluții reale  $x_1 \in (0, 1)$  și  $x_2 \in (1, \infty)$ ; dacă  $m + 1 > 0$  ecuația nu are soluții reale; iar dacă  $m = -1$ , atunci  $x = 1$  este rădăcină multiplă (de fapt dublă, deoarece  $f''(1) \neq 0$ ).

3) Să se arate că pentru orice  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  avem  $\tan \frac{x}{2} \leq x$ . Pentru aceasta se consideră funcția  $g : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x - \tan \frac{x}{2}$ . Evident,  $g'(x) = 1 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$

$$= \frac{\cos x}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \geq 0 \text{ pentru orice } x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \text{ Atunci } g \text{ este monoton crescătoare,}$$

deci pentru orice  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  avem  $g(x) \geq g(0) = 0$ , adică  $x - \tan \frac{x}{2} \geq 0$ .



## 6. REPRESENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR

Fiind dată o funcție reală  $f$ , etapele principale ale trasării (oricum aproximative) a graficului lui  $f$  sînt următoarele:

- a) Se determină domeniul maxim de definiție  $D$ , reprezentat ca reuniune de intervale;
- b) Se calculează limitele la capete și se determină asimptotele graficului;
- c) Se calculează derivata lui  $f$  (în domeniul  $D_1 \subset D$  de derivabilitate) și se rezolvă ecuația  $f'(x) = 0$ ;
- d) Se alcătuiește tabloul de variație a lui  $f$  care cuprinde semnele lui  $f'$  pe diverse intervale, completat eventual și cu studiul derivatei a doua.
- e) Se trasează graficul, adăugînd eventualele intersecții cu axele de coordonate.

Reamintim că *asimptotele verticale* ale graficului lui  $f$  sînt acele drepte  $x = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) pentru care cel puțin una din limitele laterale  $f(\alpha - 0)$ ,  $f(\alpha + 0)$  este  $\pm \infty$ . De exemplu, funcția  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$  admite ca asimptote verticale toate dreptele  $x = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Dacă  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  (finită), atunci dreapta  $y = L$  este *asimptotă orizontală spre  $+\infty$* , iar dacă  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L_1$ , atunci  $y = L_1$  este *asimptotă orizontală spre  $-\infty$* .

În cazul cînd există și sînt finite  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  și  $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$ , dreapta  $y = mx + n$  este *asimptotă oblică spre  $+\infty$* ; similar se procedează pentru  $-\infty$ . Un grafic nu poate avea asimptote orizontală și oblică „de aceeași parte”.

Graficele de funcții permit „vizualizarea comportării” acelor funcții. Ele sînt de asemenea utilizate în studiul unor ecuații  $f(x) = m$ , care revin la determinarea absciselor punctelor de intersecție ale graficului  $y = f(x)$  cu drepte  $y = m$  paralele cu  $Ox$ ; de asemenea în studiul unor inecuații  $f(x) > m$ ,  $f(x) \leq m$  etc.

## 7. PRIMITIVE ȘI INTEGRALE NEDEFINITE

Dacă  $I$  este un interval și  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție, reamintim că prin *primitivă a lui  $f$  pe  $I$*  se înțelege o funcție  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă pe  $I$  astfel încît  $F' = f$ .

De exemplu,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  are primitiva  $F(x) = \frac{x^3}{3}$  pe  $\mathbb{R}$ .

Se știe că orice funcție continuă pe un interval admite primitivă pe acel interval și că dacă o funcție nu are proprietatea lui Darboux, ea nu admite primitivă.

Dacă o funcție  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  admite primitiva  $F$  pe  $I$ , atunci mulțimea tuturor primitivelor lui  $f$  este  $F + C$  (cu  $C$  constantă arbitrară, privită ca o funcție constantă pe  $I$ ); această mulțime este numită *integrala nedefinită a lui  $f$*  și se notează  $\int f(x) dx$ .

Pentru calculul explicit al primitivelor, ceea ce revine la exprimarea lor prin funcții elementare (aceasta este posibil doar în anumite cazuri), sînt recomandate următoarele metode principale: folosirea tabloului de primitive, integrarea prin părți și schimbarea de variabilă.

*Exemple. 1).* Calculăm  $\int \left( x^{\frac{4}{3}} + \cos 7x + \frac{1}{x-3} \right) dx$  pe intervalul  $I = (3, \infty)$ . Folosind direct tabloul de primitive, rezultatul este

$$\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + \frac{\sin 7x}{7} + \ln |x-3| + C.$$

2) Integralele nedefinite de forma

$$\int P(x) \sin \alpha x \, dx, \int P(x) \cos \alpha x \, dx, \int P(x) e^{\alpha x} \, dx,$$

cu  $P$  funcție polinomială și  $\alpha$  constantă reală, se calculează succesiv prin părți, obținându-se în membrul secund polinoame de grad mai mic.

3) Dacă  $P, Q$  sînt funcții polinomiale, integralele de forma  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  se numesc *raționale*. Dacă  $\text{gr } P \geq \text{gr } Q$ , atunci  $P = C \cdot Q + R$  cu  $\text{gr } R < \text{gr } Q$ , deci  $\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}$ ; atunci  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$ . Se poate de aceea presupune de la început că  $\text{gr } P < \text{gr } Q$  și se recomandă descompunerea în fracții simple impusă de rădăcinile lui  $Q$ . Trebuie reținute citeva integrale raționale:

$$\int \frac{1}{x-\alpha} dx = \ln |x-\alpha| + C; \int \frac{1}{x^2+\alpha^2} dx = \frac{1}{\alpha} \arctg \frac{x}{\alpha} + C \quad (\alpha \neq 0);$$

$$\int \frac{1}{x^2-\alpha^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{x-\alpha}{x+\alpha} \right| + C \quad (\alpha \neq 0); \int \frac{1}{(x-\alpha)^2} dx = -\frac{1}{x-\alpha} + C;$$

$$\int \frac{x+p}{x+q} dx = \int \frac{x+q+p-q}{x+q} dx = \int \left( 1 + \frac{p-q}{x+q} \right) dx = x + (p-q) \ln |x+q| + C;$$

$$\int \frac{x^2}{x-\alpha} dx = \int \frac{x^2 - \alpha^2 + \alpha^2}{x-\alpha} dx = \int \left( x + \alpha + \frac{\alpha^2}{x-\alpha} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \alpha x + \alpha^2 \ln |x-\alpha| + C;$$

dacă  $\beta \neq 0$ , atunci punind  $x-\alpha = \beta t$  avem:

$$\int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2} dx = \int \frac{A(\alpha+\beta t)+B}{\beta^2(t^2+1)} \beta dt = \frac{1}{\beta} \int \frac{A\beta t + A\alpha + B}{t^2+1} dt = A \int \frac{t}{t^2+1} dt + \frac{A\alpha+B}{\beta} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{A}{2} \ln(t^2+1) + \frac{A\alpha+B}{\beta} \arctg t + C$$

și înlocuim aici  $t = \frac{x-\alpha}{\beta}$ .

## 8. INTEGRALE DEFINITE

Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , este o funcție mărginită, atunci pentru orice diviziune  $\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  a intervalului  $[a, b]$  și pentru orice puncte intermediare  $\xi_1 \in [a, x_1]$ ,  $\xi_2 \in [x_1, x_2]$ , ...,  $\xi_n \in [x_{n-1}, b]$  se poate forma suma Riemann

$$\sigma_{\Delta}(f; \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Reamintim că, prin definiție,  $f$  este *integrabilă Riemann* dacă există un număr real  $I$  (numit *integrala lui  $f$*  pe intervalul compact  $[a, b]$  și notat  $I = \int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f$ ) astfel încît să fie îndeplinită următoarea condiție: pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel încît oricare ar fi diviziunea  $\Delta$  de normă cel mult  $\delta(\varepsilon)$  și oricare ar fi punctele  $\xi_i$  intermediare să avem  $|\sigma_{\Delta}(f, \xi_i) - I| < \varepsilon$ .



Dăm o sinteză a principalelor rezultate teoretice:

1) Funcțiile continue, funcțiile monotone și funcțiile continue pe porțiuni (definite pe un interval compact) sînt integrabile.

2) *Liniaritatea integralei*: dacă  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sînt funcții integrabile și  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  sînt constante, atunci  $\alpha f + \beta g$  este integrabilă și în plus:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

3) *Monotonia integralei*: dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă și  $f \geq 0$  (adică  $f(x) \geq 0$  pentru orice  $x \in [a, b]$ ), atunci  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ . Dacă  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sînt integrabile și  $f \geq g$ , atunci  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ .

4) *Aditivitatea integralei*: dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă și  $c \in [a, b]$ , atunci  $f$  este integrabilă pe  $[a, c]$  și pe  $[c, b]$  și în plus:

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \left( \text{prin convenție, } \int_a^a f(x) dx = 0 \right).$$

5) *Teorema de medie*: dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă, atunci există cel puțin un punct  $\xi \in (a, b)$  astfel încît  $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$ .

6) Pentru calculul explicit al unor integrale definite se poate folosi *formula Leibniz-Newton*: dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă, atunci:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

unde  $F$  este o primitivă oarecare a lui  $f$  pe intervalul  $[a, b]$ .

7) În calcule aproximative, se poate folosi definiția, aproximînd integrala cu o sumă Riemann corespunzătoare unei diviziuni echidistante, cu o alegere convenabilă a punctelor intermediare; de exemplu, notînd  $h = \frac{b-a}{n}$ , putem considera diviziunea:

$$\Delta : a = x_0 < x_1 = a + h < x_2 = a + 2h < \dots < x_n = a + nh = b$$

și luăm  $\xi_1 = x_0, \xi_2 = x_1, \dots, \xi_n = x_{n-1}$ . Atunci  $x_i - x_{i-1} = h$  și suma Riemann corespunzătoare este  $\sigma_\Delta(f; \xi_i) = h \sum_{i=1}^n f(\xi_i)$ , deci

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{n} [f(a) + f(a+h) + \dots + f(a+(n-1)h)],$$

cu  $n \geq 1$  ales convenabil (de exemplu,  $n = 5, n = 20$  etc. în funcție de precizia urmărită).

8) Dacă  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sînt funcții derivabile cu derivată continuă, atunci:

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

(integrarea prin părți).

9) Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă și  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  este derivabilă cu derivata continuă și dacă  $\varphi(c) = a, \varphi(d) = b$ , atunci:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \quad (\text{s-a pus } x = \varphi(t)).$$

10) Dacă  $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  este strict monotonă, derivabilă cu derivata continuă și dacă  $\psi(\alpha) = a$ ,  $\psi(\beta) = b$  (sau  $\psi(\alpha) = b$ ,  $\psi(\beta) = a$ ), atunci pentru orice funcție integrabilă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , avem:

$$\int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt.$$

11) Fie  $[-a, a]$  un interval simetric și  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție integrabilă.

Dacă  $f$  este pară, atunci  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ , iar dacă  $f$  este impară, atunci

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

12) Dacă  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție periodică de perioadă  $T$  și integrabilă pe orice interval compact, atunci:

$$\int_0^T f(x) dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx = \int_a^{a+T} f(x) dx,$$

pentru orice  $a \in \mathbb{R}$ ; așadar, contează numai lungimea  $T$  a intervalului de integrare.

*Exemple.*

$$1) \int_0^{\pi} (x + \sin x) dx = \left( \frac{x^2}{2} - \cos x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - \cos \pi - 0 + \cos 0 = \frac{\pi^2}{2} + 2.$$

$$2) \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \stackrel{x=\sin t}{=} 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \\ = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

În general, pentru integrale care conțin  $\sqrt{a^2 - x^2}$  se recomandă  $x = a \sin t$ , iar pentru  $\sqrt{a^2 + x^2}$ ,  $x = a \operatorname{tg} t$ .

## 9. APLICAȚII ALE INTEGRALELOR DEFINITE

Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă și pozitivă (cu graficul deasupra lui  $Ox$ ). Se notează cu  $\Gamma_f$  subgraficul lui  $f$ , adică submulțimea lui  $\mathbb{R}^2$  cuprinsă între axa  $Ox$ , curba  $y = f(x)$  și dreptele  $x = a$ ,  $x = b$ . Atunci:

$$1) \text{ Aria lui } \Gamma_f \text{ este } A = \int_a^b f(x) dx;$$

$$2) \text{ Volumul corpului născut prin rotirea lui } \Gamma_f \text{ în jurul axei } Ox \text{ este } \pi \int_a^b f(x)^2 dx;$$

3) Asimilind o placă materială omogenă cu mulțimea  $\Gamma_f$ , centrul de greutate  $G$  al plăcii are coordonatele:

$$x_G = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{A}; \quad y_G = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f(x)^2 dx}{A}.$$



Formulele anterioare se extind la mulțimi plane care se reprezintă ca reuniuni de mulțimi de tipul  $\Gamma_f$ , folosind aditivitatea integralei. De exemplu, dacă  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sînt funcții continue, atunci aria mulțimii plane dintre graficele lor (limitate de dreptele  $x = a, x = b$ ) este  $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ ; v. fig. M.A.31.

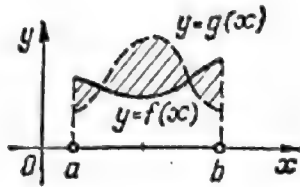


Fig. M.A.31

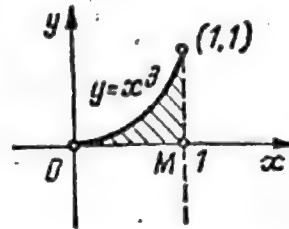


Fig. M.A.32

*Exemple.* 1) Calculăm aria  $A$  dintre curbele de ecuații  $y = \sin x, y = \cos x$ ,  $x \in [0, \pi]$ . Avem:

$$A = \int_0^{\pi} |\sin x - \cos x| dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx \text{ etc.}$$

2) Se consideră placa omogenă definită prin  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^3\}$ . Aria lui  $M$  este  $A = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$  și volumul obținut prin rotația lui  $M$  în jurul axei  $Ox$  este  $V = \pi \int_0^1 x^6 dx = \frac{\pi}{7}$ . Coordonatele centrului de greutate al plăcii  $M$  sînt  $x_G = 4 \int_0^1 x^4 dx = \frac{4}{5}$  și  $y_G = 2 \int_0^1 x^6 dx = \frac{2}{7}$ ; v. fig. M.A.32.

Derivatele și integralele au multe alte aplicații geometrice sau fizice.

## B. PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR

### ENUNȚURI

1984

#### I. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC

$\alpha$ . PROFILUL: ELECTRIC, ENERGETIC, MECANIC (numai specializarea *Aeronave*), GEOLOGIE (ingineri zi).

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

I. 1°. Să se rezolve ecuațiile:

$$\begin{aligned}x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 11x^2 - 6x - 4 &= 0; \\x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 12x + 8 &= 0,\end{aligned}$$

știind că admit rădăcini comune.

2°. Se dă matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze matricea  $A^n$ ,  $n$  fiind număr natural,  $n \geq 2$ .

3°. Fie  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$f(x) = \frac{ax^4}{(b+cx)^3},$$

$a, b, c \neq 0$ , fiind numere reale, iar  $E$  domeniul maxim de definiție al lui  $f$ . Ce relații satisfac  $a, b, c$  astfel încât graficul funcției  $f$  să admită ca asimptotă dreapta  $y = x - 3$ ? În acest caz să se studieze variația funcției  $f$  și să se reprezinte grafic.

4°. Fie  $(a_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale care verifică, pentru orice  $n \geq 0$ , relația:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{10} a_n.$$

Să se calculeze  $a_n$  în funcție de  $a_0$  și să se afle  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

5°. Să se calculeze:  $\int_0^\pi x \cos^2 x \, dx$ .

#### b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

II. 1°. Fie  $ABC$  un triunghi și  $M \in [AC]$ . Bisectoarele unghiurilor  $AMB$ ,  $CMB$  intersectează laturile  $[AB]$ , respectiv  $[BC]$  în  $P$ ,  $Q$ . Să se arate că dreapta  $PQ$  este paralelă cu dreapta  $AC$  dacă și numai dacă  $M$  este mijlocul segmentului  $[AC]$ .

2°. Fie  $O$  centrul cercului circumscris unui triunghi  $ABC$  și  $I$  centrul cercului înscris în același triunghi. Să se calculeze lungimea segmentului  $[OI]$  în funcție de lungimile  $R$  și  $r$  ale razelor celor două cercuri.





3°. Pe muchiile  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  și  $[DA]$  ale tetraedrului regulat  $ABCD$  se iau punctele  $M$ ,  $N$ ,  $P$  și respectiv  $Q$ , astfel încît să avem  $[AM] \equiv [BN] \equiv [CP] \equiv [DQ]$ . Notăm cu  $O$  mijlocul segmentului  $[NQ]$ . Să se arate că planul  $MOP$  este perpendicular pe dreapta  $NQ$ .

4°. Să se arate că volumul trunchiului de con circumscris unei sfere este strict mai mare decît  $\frac{3}{2}$  din volumul sferei.

5°. Să se discute și să se rezolve ecuația:

$$2 \cos^2 x - \cos x = m + 1, \quad m \in \mathbb{R}.$$

**β. PROFILUL: MECANIC (fără specializarea Aeronave), CONSTRUCȚII, GEODEZIE (ingineri zi).**

**a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ**

**III. 1°.** Să se studieze variația funcției  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:

$$f(x) = \ln \left( x + \frac{1}{x} \right) + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1},$$

și să se reprezinte grafic.

2°. Să se determine  $a$  astfel încît ecuația:

$$\begin{vmatrix} 2-a & a-x & x-1 \\ 1-x^2 & x^2 & -1 \\ 2-a-2x & x+a & x-2 \end{vmatrix} = 0$$

să admită o rădăcină dublă număr întreg.

3°. Să se calculeze:  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$ .

4°. Să se calculeze:  $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$ .

5°. Fie  $\varepsilon$  o rădăcină a ecuației  $x^2 + x + 1 = 0$ . Să se calculeze  $A^n$ ,  $n = 2, 3, 4$ , unde  $A$  este matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

**b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE**

**IV. 1°.** Bisectoarea unghiului cu vîrf în  $A$  al triunghiului  $ABC$  taie cercul circumscris acestuia în  $D$ . Să se arate că dacă laturile  $[AC]$  și  $[AB]$  au lungimile  $b$ , respectiv  $c$ , atunci distanța  $d$  dintre punctele  $A$  și  $D$  verifică inegalitatea:

$$d > \frac{1}{2} (b + c).$$

2°. Se consideră figura formată din segmentul  $[AB]$  și un semicerc cu acest diametru. Să se determine dreptunghiul de arie maximă inseris în această figură.

3°. Fie două plane perpendiculare  $p$  și  $q$ , iar  $A$  și  $B$  două puncte pe intersecția celor două plane. Fie  $C \in p$  și  $D \in q$  astfel încît  $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ADB}) = \frac{\pi}{2}$ . Cunoscînd lungimile  $a$  și  $b$  ale segmentelor  $[AB]$  și respectiv  $[BC]$ , să se calculeze volumul sferei determinată de punctele  $A, B, C, D$ .

4°. Se consideră un con circular drept circumscris sferei de rază  $r$ . Unghiul format de o generatoare a conului cu înălțimea are măsura  $x$ . Să se calculeze aria laterală a conului în funcție de  $r$  și  $x$ . Să se determine  $x$  astfel încât aria bazei conului să fie egală cu aria sferei.

5°. Să se discute și să se rezolve ecuația:

$$m(\sin x - \cos x)^2 - \cos 4x - 1 = 0,$$

$m$  fiind un parametru real.

γ. PROFILUL: METALURGIC, ARHITECTURĂ ȘI SISTEMATIZARE, MINE, CHIMIE (ingineri și școlari, toate profilurile).

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

V. 1°. Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 0; \\ x + ay + z = 0; \\ 2x + 2y + az = 0. \end{cases}$$

a) Pentru ce valori ale lui  $a$  sistemul are soluție unică?

b) Să se rezolve sistemul pentru  $a = 1$ .

2°. Să se determine parametrul real  $m$  astfel încât ecuația:

$$x^6 + x^5 + 3x^4 + 3x^2 + mx + 1 = 0$$

să admită rădăcina  $i$ .

3°. Să se studieze variația funcției  $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:  $f(x) = x - \ln(x + 1)$ .

4°. Să se calculeze:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctg x \right)^{\frac{1}{\ln x}}$ .

5°. Să se calculeze:  $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx, x > 0$ .

b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

VI. 1°. Fie  $ABC, DBC$  două triunghiuri echilaterale, simetrice în raport cu dreapta  $BC$  și  $P$  un punct pe cercul de centru  $D$  și rază  $DB$ . Notăm cu  $a, b, c$  lungimile segmentelor  $[PA], [PB]$  și, respectiv,  $[PC]$ . Să se arate că:  $a^2 = b^2 + c^2$ .

2°. În triunghiul  $ABC$  laturile  $[AB]$  și  $[AC]$  sunt congruente și au lungimea 11,5 dm, iar baza  $[BC]$  are lungimea 3 dm. Se consideră punctele  $M \in [BC], E \in [AC]$  astfel ca  $[BM] \equiv [MC]$  și  $ME$  este bisectoarea unghiului  $AMC$ . Să se calculeze distanța de la  $A$  la  $E$ .

3°. Distanța  $AB$  de la punctul  $A$  la planul  $p$  este  $a$ . Din punctul  $A$  ducem oblicele  $AC, AD$  care fac cu planul  $p$  unghiuri de  $45^\circ$  și  $30^\circ$ , iar între ele un unghi drept ( $C, D \in p$ ). Să se afle distanța de la  $C$  la  $D$  și aria totală a piramidei  $ABCD$ .

4°. Să se afle volumul și aria laterală ale conului circular drept înscris într-o sferă de rază  $r$ , știind că raza bazei, înălțimea și generatoarea conului au lungimile, în această ordine, în progresie aritmetică.

5°. Punctele  $M, N, P, Q$  au, respectiv, afixele  $z_M = 5 + 6i, z_N = 5i, z_P = 1, z_Q = 6 + i$ . Să se verifice că  $MNPQ$  este un pătrat și să se calculeze:  $\left| \frac{z_M}{z_Q} \right|$ .



## 2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL UNIVERSITAR

$\alpha$ . PROFILUL MATEMATICĂ (Specializările: *Matematică*, învățămînt de zi și fără frecvență; *Informatică*, *Matematică-Mecanică*, învățămînt de zi și seral).

### a. ALGEBRĂ

VII. 1°. Fie  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ . Să se calculeze:  $A^n$ , ( $n \geq 1$ ).

2°. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} xy + x + y = 11; \\ x^2y + y^2x = 30. \end{cases}$$

3°. Să se determine mulțimea:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^3 - 3x + 2}{2x + 1} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4°. Pentru orice  $m, n \in \mathbb{R}$ , se consideră funcția  $f_{mn}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:

$$f_{mn}(x) = \begin{cases} x - m & \text{pentru } x \leq 0; \\ nx + m & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

Să se determine valorile lui  $m$  și  $n$  pentru care  $f_{mn}$  este funcție:

a) surjectivă; b) injectivă; c) bijectivă.

5°. Determinați elementele inversabile din inelul  $\mathbb{Z}_{12}$  și inversul fiecăruia.

### b. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

VIII. 1°. Să se arate că dacă  $(a_n)_{n \geq 1}$  este un șir de numere reale, convergent către un număr real, diferit de zero, atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

2°. Să se studieze continuitatea funcțiilor compuse  $g \circ f$  și  $f \circ g$ , unde  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sint definite prin:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } x < 0; \\ 0 & \text{pentru } x = 0; \\ 1 & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

și  $g(x) = x^2 - 4x + 4$ .

3°. Să se reprezinte grafic funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-1} & \text{pentru } x < 1; \\ x & \text{pentru } x \geq 1. \end{cases}$$

4°. Să se calculeze:  $\int_0^1 \sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} dx$ .

5°. Să se arate că oricare ar fi numerele naturale  $n \geq 1$  și  $p \geq 1$  are loc egalitatea:

$$\int_0^1 x^n(1-x)^p dx = \int_0^1 x^p(1-x)^n dx.$$

## c. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU, TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE ANALITICĂ

IX. 1°. Pe un cerc de diametru  $[AB]$  se consideră un punct  $C$ . Se duce tangenta  $(\tau)$  la cerc în  $B$  și se consideră cercul  $(\gamma)$ , avînd centrul în  $A$  și raza egală cu  $AB$ . Semidreapta  $|AC$  intersectează  $(\gamma)$  în  $D$  și  $(\tau)$  în  $E$ . Să se determine măsura unghiului  $\widehat{BAC}$  astfel încît:  $\widehat{ABC} = \widehat{CBD} = \widehat{DBE}$ .

2°. Se consideră un trapez  $ABCD$  în care  $AB \parallel DC$ ,  $AD \perp DC$  și diagonalele  $[AC]$ ,  $[BD]$  sînt perpendiculare. Să se calculeze raportul  $\frac{AC}{BD}$ , știind că  $\frac{AB}{CD} = k$ .

3°. Să se arate că, în orice tetraedru, cele șase plane, determinate de cite o muchie și mijlocul muchiei opuse acesteia, au un punct comun.

4°. Să se determine valorile  $x \in \mathbb{R}$  pentru care:

$$\sin 2x - \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 1.$$

5°. Se consideră hiperbola  $(H)$ :

$$x^2 - y^2 = a^2, \quad (a > 0),$$

raportată la un reper cartezian  $xOy$ , avînd focarele  $F, F'$ . Se ia un punct variabil  $P \in (H)$  astfel încît triunghiul  $PFF'$  să fie ascuțitunghic. Să se determine locul geometric al centrului de greutate al triunghiului  $PFF'$ .

**β. PROFILUL MATEMATICĂ** (Specializarea *Matematică-Fizică*, 3 ani, învățămînt de zi).

**ALGEBRĂ** (clasele IX–X), **GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU**  
**ȘI TRIGONOMETRIE**

X. 1°. Lungimile  $a, b, c$  ( $a \neq b \neq c \neq a$ ) a trei muchii ale unui paralelipiped dreptunghic sînt rădăcinile ecuației:

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0.$$

Să se determine volumul, aria totală și lungimea diagonalei paralelipipedului.

2°. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{3x-2}.$$

3°. Să se demonstreze că dacă:

$$A + B + C = \pi,$$

atunci:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

4°. Fie  $ABC$  un triunghi dreptunghic,  $M$  și  $N$  mijloacele catetelor  $[AB]$  și  $[AC]$ . Se notează cu  $D$  proiecția punctului  $A$  pe ipotenuza  $[BC]$ . Să se demonstreze că  $MD \perp ND$ .



### 3. ALTE PROFILURI

#### $\alpha$ . PROFILUL PETROL

#### a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XI. 1°. Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$$

$a, b, c$  fiind numere reale.

2°. Să se verifice că ecuația cu coeficienți întregi:

$$x^3 + (2m - 5)x^2 + (9 - 5m)x + 2(m - 3) = 0$$

admite o rădăcină independentă de  $m$ ; să se rezolve ecuația.

3°. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:

$$f(x) = 3x^4 - 4mx^3 - 2nx^2 + 24x + 24,$$

$m$  și  $n$  fiind numere reale. Să se determine  $m$  și  $n$  astfel încât graficul funcției să treacă prin punctul  $(-1, 5)$  iar în acest punct tangenta la grafic să fie paralelă cu axa  $Ox$ .

4°. a) Să se calculeze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - x^2 + 6}{x^{2n} + x^2 + 4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

b) Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - x^2 + 6}{x^{2n} + x^2 + 4}.$$

Să se studieze variația funcției  $f$  și să se reprezinte grafic.

5°. Să se calculeze:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \cos x + 3}.$$

#### b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

XII. 1°. Pe laturile unui patrulater  $ABCD$ , ca diametre, se descriu cercuri. Să se arate că coarda comună cercurilor descrise pe  $[AB]$  și  $[BC]$  este paralelă cu coarda comună cercurilor descrise pe  $[AD]$  și  $[CD]$ .

2°. Pe un cerc cu centrul în  $O$  se consideră două puncte fixe  $A$  și  $B$  și două puncte mobile  $M$  și  $N$  astfel încât  $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{MON}) = \frac{\pi}{2}$ . Să se afle locul geometric al punctului de intersecție a dreptelor  $AM$  și  $BN$ .

3°. Fie paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A'B'C'D'$  în care  $AB = a$ ,  $AD = b$ ,  $AA' = c$ . Să se afle aria patrulaterului care are vîrfurile în mijloacele muchiilor  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[A'D']$  și  $[C'D']$ .

4°. Se consideră o piramidă patrulateră regulată și un cub astfel încît patru dintre vîrfurile cubului se află în planul bazei piramidei, iar celelalte patru vîrfuri

se găsească pe muchiile laterale ale piramidei. Să se calculeze lungimea muchiilor cubului, știind că laturile bazei piramidei au lungimea  $a$  și înălțimea piramidei este  $h$ .

5°. Să se determine  $x$  astfel încît:  $\sin x = \sin^3 \frac{x}{2}$ .

**β. PROFILUL ELECTRIC** (subingineri seral).

ALGEBRĂ, GEOMETRIE PLANĂ ȘI TRIGONOMETRIE

XIII. 1°. a) Să se arate că ecuația:

$$8mx^2 - 2(m^2 + 2m + 1)x + m^2 + 1 = 0$$

are rădăcini reale, oricare ar fi  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

b) Să se determine valorile lui  $m$  astfel încît:  $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \leq 4$ .

2°. Să se rezolve ecuația:  $2\sqrt[3]{2(\log_{16} x)^2} - \sqrt[3]{\log_2 x} - 6 = 0$ .

3°. Să se rezolve ecuația:  $\cos 2x - 13 \sin x - 7 = 0$ .

4°. Fie  $ABC$  un triunghi oarecare și  $M$  mijlocul lui  $[BC]$ . Bisectoarea unghiului  $AMB$  taie pe  $[AB]$  în  $P$  și bisectoarea unghiului  $AMC$  taie pe  $[AC]$  în  $Q$ . Să se arate că:

a)  $PQ$  este paralelă cu  $BC$ ;

b)  $2RM = PQ$ ,

( $R$  fiind punctul unde  $AM$  taie pe  $PQ$ ).

**γ. PROFILUL METALURGIC** (Specializările: *Furnale și oțelării, Turnătorie și Deformări plastice și tratamente termice*, subingineri seral).

ALGEBRĂ, GEOMETRIE PLANĂ ȘI TRIGONOMETRIE

XIV. 1°. Se dă ecuația:

$$x^2 + px + q = 0$$

ale cărei rădăcini sînt  $x_1$  și  $x_2$ . Să se formeze ecuația de gradul II în  $y$ , cu rădăcinile:

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}, \quad y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}.$$

2°. Primul termen al unei progresii geometrice este 5 și suma primilor patru termeni este 75. Să se determine progresia.

3°. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$\sin 2x + m \sin x = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

4°. Într-un hexagon regulat  $H_1$ , se unesc mijloacele laturilor consecutive și se formează un nou hexagon  $H_2$ . Să se determine raportul ariilor celor două hexagoane:  $\left( \frac{\text{Aria } H_1}{\text{Aria } H_2} \right)$ .

**δ. PROFILUL CHIMIE** (subingineri seral).

ALGEBRĂ

XV. 1°. Se dă ecuația:

$$(1 + m^2)x^2 - (1 + m)x + m(1 - m) = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Să se determine parametrul  $m$  pentru care au loc inegalitățile:

$$-1 \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1 x_2} \leq 0.$$



2°. Să se arate că:

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$$

și să se demonstreze prin inducție că egalitatea este adevărată pentru orice  $n \in \mathbb{N}$

3°. Să se rezolve ecuația:  $5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}$ .

4°. Fie:

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ . Să se verifice că:

$$A^2 - (x+t)A + (xt - yz)I_2 = O_2$$

și apoi să se determine  $x, y, z, t$  astfel ca  $A^2 = I_2$ .

ε. PROFILUL TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA PRODUSELOR ALIMENTARE ȘI TEHNICĂ PISCICOLĂ (Specializarea *Tehnologia și chimia produselor alimentare*).

## ALGEBRĂ ȘI TRIGONOMETRIE

XVI. 1°. Să se rezolve inecuația:

$$\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) \leq 1 + \lg(2^{x-2} - 1).$$

2°. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \log_a x + \log_a 2y = \frac{3}{2}; \\ \log_{a^2} x + \log_a y = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

3°. Să se arate că următoarele numere sînt în progresie aritmetică:

$$\frac{a}{x+1}; \quad \frac{x+a-1}{2x}; \quad \frac{x^2+a-1}{x(x+1)},$$

cu  $x \neq -1$  și  $x \neq 0$  și să se determine valorile lui  $x$ , astfel încît rația să aparțină intervalului  $[1, 2]$ , pentru  $a = 2$ .

4°. Să se rezolve în  $\mathbb{C}$  ecuația:

$$\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^3 + \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^2 + \frac{x+i}{x-i} + 1 = 0.$$

5°. Să se rezolve ecuația:

$$\sin x + 2 \cos^2 x + \frac{1}{\sin x} = 2, \quad (\sin x \neq 0).$$

## ALGEBRĂ ȘI TRIGONOMETRIE

XVII. 1°. Să se arate că numerele următoare:

$$\frac{1}{1-x}; \frac{m}{x(1-x)}; \frac{2m-x}{x(1-x)},$$

cu  $x \neq 0$ ,  $x \neq 1$  și  $m \in \mathbb{R}$ , sînt în progresie aritmetică și să se determine  $x$  pentru care rația este 3 și  $m = -7$ .

2°. Să se determine valorile reale ale lui  $x$  astfel încît:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{3^x + 1}{9^x + 1} \leq \frac{1}{2}.$$

3°. Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încît ecuația:

$$z^4 - 4z^3 + 6z^2 + az + 5 = 0$$

să admită rădăcina  $z = 2 - i$ . Să se rezolve ecuația.

4°. Să se calculeze  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  știind că:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5} \text{ pentru } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

φ. PROFILUL FORESTIER (Specializarea *Silvicultură și exploatare forestiere*).

## ALGEBRĂ

XVIII. 1°. Să se determine  $a \in \mathbb{R}$ , pentru care există  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$  nu toți nuli, astfel încît:

$$x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2°. Să se determine  $x \in A \subset \mathbb{R}$ , dacă:  $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{2x^2 - x}{x^2 + x + 1} \right| < 2 \right\}$ .

3°. Să se rezolve ecuația:  $\log_{x^2}(x+2) + \log_x(x^2+2x) = 4$ .

4°. Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  a numerelor reale definim legea de compoziție prin:  $x * y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1)$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ . Să se arate că mulțimea  $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{1\}$  este o parte stabilă față de legea  $*$ , iar  $\mathbb{R}_1$  cu operația indusă este un grup comutativ.

5°. Fie polinomul:  $f = X^4 + 2X^3 + mX^2 + nX + p$ . Să se determine  $m, n, p \in \mathbb{R}$  astfel ca  $f$  împărțit la  $X - 1$ : să dea restul  $-15$ , iar ecuația  $f(x) = 0$  să aibă o rădăcină egală cu  $-1 + i$ . Pentru  $m, n, p$  determinați mai sus, să se rezolve ecuația  $f(x) = 0$ .



ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XIX. 1°. Să se discute și să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, sistemul:

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3; \\ x + by + b^2z = b^3; \\ x + cy + c^2z = c^3. \end{cases}$$

2°. Să se găsească numerele  $a$  și  $b$ , știind că polinomul  $aX^4 + bX^3 + 1$  se divide prin  $X^2 - 2X + 1$ . Pentru  $a$  și  $b$  astfel determinați, să se rezolve ecuația:  $ax^4 + bx^3 + 1 = 0$ .

3°. Fie  $a_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ . Să se calculeze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \text{ unde } b_n = a_1 a_2 \dots a_n.$$

4°. Să se găsească punctele de extrem ale funcției  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:

$$f(x) = e^{-\frac{3x}{4}} \sqrt{x^3 + 1}.$$

5°. Să se calculeze:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$ .

PROFILUL ECONOMIC (Specializările: *Comerț, Economia serviciilor de alimentație publică*).

ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XX. 1°. Se consideră ecuația:  $x^4 + 2x^3 + mx^2 + 2x + 1 = 0$ . Să se determine  $m$  astfel încât suma a două rădăcini să fie egală cu suma celorlalte două: pentru  $m$  astfel determinat, să se rezolve ecuația.

2°. Să se calculeze:  $\int_{-2}^5 (x+1) e^{-|x|} \, dx$ .

3°. Să se studieze variația funcției  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

și să se reprezinte grafic.

4°. Să se calculeze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a\sqrt{n+a} + b\sqrt{n+b} + c\sqrt{n+c})$$

$a, b, c$  fiind numere reale, astfel încât:  $a + b + c = 0$ .

5°. Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 i & a_1 i - b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 i & a_2 i - b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 i & a_3 i - b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

## 1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILUL: ELECTRIC, MECANIC, CONSTRUCȚII (ingineri zi).

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXI. 1°. Fie  $a, b$  numere reale, fixate și  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir astfel încît:  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = an^2 + bn$ , pentru orice întreg,  $n \geq 1$ . Să se arate că șirul este o progresie aritmetică și să se determine rația acesteia.

2°. Să se arate că dacă  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție polinomială de grad  $n \geq 2$ , atunci funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)$ , este polinomială, de grad  $n-2$ . Să se determine coeficienții polinomului  $f$  în cazul particular cînd  $g(x) = 6x + 24$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(0) = 5$  și  $f(1) = 23$ .

3°. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:

$$f(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x^2}.$$

Să se calculeze valoarea  $f\left(\frac{1}{e}\right)$ , cu două zecimale exacte și să se determine numărul de soluții reale ale ecuației  $f(x) = m$ ,  $m$  fiind un parametru real.

4°. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \cos f(x)$ . Să se arate că funcția  $g$  este continuă și că dacă  $g(x) = 1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , atunci  $f$  este constantă.

5°. Să se calculeze:  $\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx$ .

b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

XXII. 1°. Fie  $ABC$  un triunghi ascuțitunghic și  $A', B', C'$  triunghiul său ortic ( $A', B', C'$  picioarele înălțimilor). Să se calculeze lungimile segmentelor  $[A'B]$ ,  $[A'C]$ ,  $[B'A]$  etc., lungimile laturilor triunghiului ortic și aria acestuia, în funcție de lungimile laturilor și măsurile unghiurilor triunghiului.

2°. Într-un cerc de centru  $O$  se duc diametrele perpendiculare  $[AB]$  și  $[CD]$ . O dreaptă variabilă prin  $B$  intersectează raza  $[OC]$  în  $N (N \in [OC])$  și cercul în  $M$ . Fie  $I$  și  $P$  punctele de intersecție ale paralelei dusă prin  $N$  la  $AB$  cu raza  $[OM]$  și, respectiv, cu tangenta în  $M$  la cerc. Să se arate că triunghiul  $MIN$  este isoscel, că patrulaterul  $ONMP$  este un trapez isoscel și să se determine locul geometric al punctului  $P$  cînd  $N$  parcurge raza  $[OC]$ .

3°. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} = 2 \sin x.$$

unde  $x \in [-\pi, \pi]$ .

4°. Dîndu-se un cub  $ABCD A'B'C'D'$ , să se afle distanța de la o diagonală a cubului la o diagonală a unei fețe, cu care nu se intersectează, în funcție de lungimea  $a$  a unei muchii.

5°. O piramidă patrulateră  $VABCD$  (cu baza pătratul  $ABCD$  și vîrfurile  $V$ ) regulată, are lungimea laturii bazei  $a$  și lungimile muchiilor din  $V$ ,  $a\sqrt{2}$ . Prin mijlocul unei muchii din  $V$  se duc un plan perpendicular pe muchia opusă (ce trece tot prin  $V$ ), care determină o secțiune în piramidă. Să se calculeze perimetrul și aria patrulaterului de secțiune, precum și raportul volumelor celor două corpuri în care este divizată piramida.



### β. PROFILUL: ELECTRIC, MECANIC, CONSTRUCȚII (ingineri seral).

#### a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXIII. 1°. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:  $f(x) = mx$ . Să se determine valorile parametrului real  $m$  în fiecare din situațiile următoare:

a)  $f$  este strict crescătoare;

b)  $f \circ f = f$ .

2°. Să se rezolve ecuația:  $(x^2 - 2x)(e^{x-2} - 1) = 0$  și inecuația:  $\frac{e^{x-2} - 1}{x^2 - 2x} < 0$ .

3°. Să se afle constantele reale  $p$  și  $q$  dacă matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  satisface relația:  $A^3 = pA^2 + q \cdot A$ .

4°. Fie funcția  $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:

$f(x) = \frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x$ . Să se determine  $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ , cu două zecimale exacte și să se calculeze:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ .

5°. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:

$$f(x) = 2x + ax \ln x.$$

Să se afle constanta reală  $a$ , dacă  $f'(1) = 1$  și, în acest caz, să se calculeze aria mulțimii mărginite de curba  $y = f(x)$ , axa  $Ox$  și dreptele  $x = 1$ ,  $x = e$ .

#### b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

XXIV. 1°. Într-un triunghi  $ABC$ , cu unghiurile având măsura cel mult  $90^\circ$ , se consideră înălțimea  $[AD]$  și diametrul  $[AE]$  al cercului circumscris ( $D$  pe  $[BC]$  între  $B$  și  $C$ ,  $E$  pe cerc). Să se arate că:

a)  $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{AEC})$ ;

b)  $AD$  și  $AE$  sînt egal inclinate față de laturi, adică  $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{EAC})$ ;

c) Dacă înălțimea și mediana prin  $A$  împart unghiul  $\widehat{BAC}$  în trei părți, avînd aceeași măsură, atunci  $\widehat{BAC}$  este unghi drept.

2°. Să se verifice că dacă într-un patrulater  $ABCD$  putem înscrie un cerc (patrulaterul este circumscriptibil), atunci  $AB + CD = BC + AD$ . Utilizînd acest fapt, să se arate că aria unui trapez dreptunghic circumscriptibil este egală cu produsul lungimilor bazelor.

3°. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x(1 + \operatorname{tg} x)} - \frac{\cos^2 x}{\sin x(1 + \operatorname{ctg} x)} = \sqrt{2}.$$

4°. Se consideră piramida hexagonală regulată  $VABCDEF$ , cu  $VA = 10$  cm și înălțimea  $[VO]$ , cu  $VO = 8$  cm ( $O$  centrul hexagonului de bază). Se cere aria laterală și măsura unghiului diedru a două fețe laterale alăturate.

5°. Într-un con circular drept, cu lungimea înălțimii  $h$  și măsura unghiului de la vîrf al secțiunii axiale (secțiune ce conține axa  $VO$ ,  $V$  vîrf,  $O$  centrul bazei)  $2\alpha$ , se duce un plan  $(P)$ , paralel cu baza, prin centrul sferei înscrise în con. Să se calculeze, în funcție de  $h$  și  $\alpha$ , raza  $R$  a cercului de bază, raza  $r$  a sferei înscrise, raza  $\rho$  a cercului de tangență a sferei cu conul și să se determine  $\alpha$  astfel ca planul  $(P)$  să împartă conul în două corpuri cu volume egale.

## 2. ÎNVĂȚĂMÎNT UNIVERSITAR

$\alpha$ . PROFILUL MATEMATICĂ (Specializările: *Matematică*, învățămînt de zi și fără frecvență; *Informatică*, *Matematică-Mecanică*, învățămînt de zi și seral).

### a. ALGEBRĂ

XXV. 1°. Să se rezolve ecuația:  $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt{9+x} = 8$ .

2°. Să se discute, după parametri reali  $a$ ,  $b$  și  $c$ , compatibilitatea sistemului și apoi să se rezolve:

$$\begin{cases} ax + (a+1)y + (a+2)z = a+3; \\ bx + (b+1)y + (b+2)z = b+3; \\ x + cy + c^2z = c^3. \end{cases}$$

3°. Polinomul  $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$  are trei rădăcini întregi care dau resturi distincte prin împărțire la 3. Să se arate că, pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f(n)$  este divizibil cu 3.

4°. Fie  $a$  o rădăcină a ecuației  $x^3 - x - 1 = 0$ . Să se găsească un polinom nenul, cu coeficienți întregi, care să admită rădăcina  $b = 2a^2 - a$ .

5°. În grupul  $S_5$ , al permutărilor de grad 5, să se rezolve ecuația:  $\sigma x = x\sigma$ , unde:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Găsiți toate soluțiile ecuației respective.

### b. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXVI. 1°. Fie  $a$  și  $x_0$  două numere reale. Șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  este definit astfel:

$$x_n = \frac{2ax_{n-1}}{x_{n-1} + a} \text{ oricare ar fi } n \geq 1.$$

Să se studieze convergența șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$  în cazul în care  $a > 0$  și  $x_0 > 0$ .

2°. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dată prin:

$$f(x) = \max(\sin x, \lambda + \cos x) \text{ pentru } x \in \mathbb{R},$$

unde  $\lambda$  este un parametru real. Să se determine valorile lui  $\lambda$  pentru care funcția  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$ .

3°. Să se calculeze:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} \right)^x$ .



4°. Să se reprezinte grafic funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dată prin:

$$f(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}} \text{ pentru } x > 0.$$

5°. Să se arate că:

$$2\sqrt{e} \leq \int_0^1 e^{x^2} dx + \int_0^1 e^{1-x^2} dx \leq 1 + e.$$

c. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU, TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE ANALITICĂ

XXVII. 1°. Fie  $ABM$  un triunghi înscris în cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ . Se notează cu  $H$  punctul de intersecție al înălțimilor și cu  $G$  punctul de intersecție al medianelor triunghiului  $ABM$ . Știind că punctele  $A$  și  $B$  sînt fixe, iar punctul  $M$  este mobil pe cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ , să se determine locurile geometrice descrise de punctele  $H$  și  $G$ .

2°. Să se arate că, pentru orice punct  $O$  care nu este situat în planul triunghiului  $ABC$ , avem:

$$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{AOC}) > m(\widehat{BOC}).$$

3°. Un triunghi are aria egală cu 1. Să se arate că, în acest caz, cel puțin două din laturile triunghiului au lungimile mai mari sau egale cu  $\sqrt{2}$ .

4°. Să se rezolve ecuația:  $\cos^n x - \sin^n x = 1$ , unde  $n$  este un număr natural, nenul.

5°. Să se scrie ecuația hiperbolei raportată la axele sale, știind că trece prin punctul de coordonate  $(1, 0)$  și are ca asimptote dreptele de ecuații:

$$(d_1) : 2x - y = 0; \quad (d_2) : 2x + y = 0.$$

β. PROFILUL MATEMATICĂ (Specializarea *Matematică-Fizică*, 3 ani, învățămînt de zi).

ALGEBRĂ (clasele IX–X), GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

XXVIII 1°. Există termeni independenți de  $x$  în dezvoltarea binomului:

$$\left( \sqrt{x} \sqrt{x + \frac{2}{\sqrt{x}}} \right)^{1989} ?$$

Justificați răspunsul și precizați acești termeni, în caz că există!

2°. Fie  $a > 0$  un număr real. Să se arate că funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:

$$f(x) = x^3 + \frac{x}{a},$$

este bijectivă.

3°. Fie  $ABCD$  un trapez cu baza mare  $[AB]$ . Să se arate că bisectoarele unghiurilor  $\widehat{BCD}$  și  $\widehat{ADC}$  se intersectează într-un punct situat pe  $[AB]$  dacă și numai dacă are loc egalitatea:

$$(1) \quad AB = AD + BC.$$

Dacă este satisfăcută egalitatea (1) și trapezul  $ABCD$  este inscriptibil, să se calculeze lungimile diagonalelor în funcție de lungimile bazelor trapezului.

4°. Să se arate că, în orice triunghi  $ABC$ , avem:

$$2(\sin B + \sin C) \leq 3 + 2 \cos A.$$

Cind inegalitatea respectivă devine egalitate?

### 3. ALTE PROFILURI

α. PROFILUL ECONOMIC (Specializarea *Economia industriei construcțiilor și transporturilor*).

#### ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXIX. 1°. Să se determine numerele reale  $a, b, c$  astfel încât ecuația  $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$  să admită rădăcinile  $a, b, c$ .

2°. Să se afle constantele reale  $a$  și  $b$  știind că polinomul  $2X^3 - X^2 + aX + b$  admite rădăcina  $x_1 = 1 + i$ ; pentru valorile găsite, să se determine celelalte rădăcini  $x_2, x_3$  și să se calculeze suma  $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$ .

3°. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:  $f(x) = \ln(1 + |\sin x|)$ . Să se calculeze:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln x}$  și să se arate că limită  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  nu există.

4°. Să se reprezinte grafic funcția:  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:

$$f(x) = x \sqrt{\frac{x}{1-x}}.$$

5°. Să se calculeze integrala:  $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1}$

PROFILUL ECONOMIC (Specializările: *Comerț, Economia serviciilor de alimentație publică și turism*).

#### ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXX. 1°. Se consideră funcția  $f: [-3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:

$$f(x) = \sqrt{x+3} - x - 1.$$

Să se rezolve ecuația  $f(x) = 0$  și inecuația  $\log_2 f(x) \leq 0$ .

2°. Să se determine cel mai mic număr natural  $n$  pentru care:

$$\frac{2^{n+1} + 10}{2^n + 2} < \frac{101}{50}.$$

3°. Se consideră matricile:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & p \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & p & 4 \\ 3 & -1 & 1 & q \end{pmatrix}.$$

Să se afle numerele reale  $p$  și  $q$  astfel încât cele două matrici să aibă același rang.

4°. Să se determine funcția polinomială  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de gradul III, avind ca puncte de extrem local  $A(1, 1)$  și  $B(0, 3)$ . Apoi să se traseze graficul lui  $f$ .

5°. Să se calculeze:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^0 (2x - 3) \cdot e^x dx$ .



ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXXI. 1°. Să se rezolve ecuația:  $4^x + 2^{x+1} \cdot 3^x = 3 \cdot 9^x$ .

2°. Fie  $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Să se determine toate tripletele  $(x, y, z)$  de numere complexe care satisfac simultan relațiile:

$$x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z = 0, \quad \varepsilon^2 x + y + \varepsilon z = 0, \quad \varepsilon x + \varepsilon^2 y + z = 0.$$

3°. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Să se determine toate matricile  $X$  astfel încît  $A^2 \cdot X = X \cdot A^2$  și să se arate că nu există nici o matrice  $Y$  astfel încît:

$$A^2 \cdot Y - Y \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4°. Să se rezolve ecuația  $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$  și să se reprezinte grafic funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$ , folosind și derivata a doua.

5°. Să se calculeze integrala:  $I = \int_0^1 x e^{1-x} dx$ .

β. PROFILUL GEODEZIE (subingineri seral).

ALGEBRĂ, GEOMETRIE PLANĂ ȘI TRIGONOMETRIE

XXXII. 1°. Să se rezolve ecuația:  $x^{\log x^{(x-1)}} = 8$ .

2°. Folosind metoda inducției matematice, să se demonstreze că, pentru orice număr natural  $n$ , are loc egalitatea:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

3°. Să se arate că într-un patrulater convex, bisectoarele a două unghiuri consecutive formează între ele un unghi egal cu semisuma celorlalte două unghiuri ale patrulaterului.

4°. Fie ecuația:  $2(m+1) \cos 2x + 4m \sin x - 3m - 1 = 0$ . Să se rezolve ecuația dată și să se discute după valorile parametrului  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

γ. PROFILUL FORESTIER (Specializarea *Silvicultură și exploatare forestiere*, ingineri zi și seral).

ALGEBRĂ

XXXIII. 1°. Fie ecuația:

$$2mx^3 + (2 - 7m)x^2 - (2 - 7m)x - 2m = 0, \quad m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Să se discute natura și semnele rădăcinilor ecuației, după valorile parametrului  $m$ .

2°. Să se rezolve inecuația:  $\log_2(9 - 2^x) > 3 - x$ .

3°. Fie polinomul:

$$f = X^4 + aX + b, \quad a, b \in \mathbb{Q}.$$

Să se determine valorile parametrilor  $a$  și  $b$  pentru care  $f$  are rădăcina  $x_1 = 1 + \sqrt{3}$  și apoi să se rezolve ecuația  $f = 0$ .

4°. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 1; \\ x + y - z = -1; \\ 2x - y + z = 1. \end{cases}$$

5°. Fie mulțimea:

$$M_2 = \left\{ M(x, y) \mid M(x, y) = \begin{pmatrix} x + y & 4y \\ -y & x - y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Să se arate că  $(M_2, +)$  este grup abelian.

8. PROFILUL TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA PRODUSELOR ALIMENTARE ȘI TEHNICA PISCICOLĂ (Specializarea *Tehnologia și chimia produselor alimentare*, subingineri seral).

## ALGEBRĂ

XXXIV. 1°. Să se rezolve ecuația:

$$x^6 - 9x^3 + 8 = 0.$$

2°. Să se determine  $x \in \mathbb{R}$  pentru care:  $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1$ .

3°. Să se rezolve inecuația:  $x^{\sqrt{x}} < \sqrt{x^x}$ .

4°. Fie ecuația:

$$x^3 + mx^2 - 16x + 48 = 0, m \in \mathbb{R}.$$

Să se determine valoarea lui  $m$  și să se rezolve ecuația, știind că suma a două rădăcini ale acesteia este nulă.

## ENUNȚURI

1986

### 1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILUL: ELECTRIC, MECANIC, CONSTRUCȚII

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXXV. 1°. Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația:

$$(\log_x 6)^2 + \left( \log_{\frac{1}{6}} \left( \frac{1}{x} \right) \right)^2 + \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} \left( \frac{1}{6} \right) + \log_{\sqrt{6}} x + \frac{3}{4} = 0.$$

2°. Să se determine parametrul real  $m$  și să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația:  $2x^3 + mx^2 + 4x + 4 = 0$ , știind că are o rădăcină dublă.

3°. Să se calculeze, pentru  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( a^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \left( \sqrt[n]{n-1} - \sqrt[n]{n+1} \right).$$



4°. a) Să se determine funcția polinomială  $P(x)$  astfel încât funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{dacă } |x| < 1, \\ P(x) & \text{dacă } |x| \geq 1, \end{cases}$$

să fie indefinit derivabilă pe  $\mathbb{R}$ .

b) Să se reprezinte grafic funcția:

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right) & \text{dacă } |x| > 1, \\ x^2 - 1 & \text{dacă } |x| \leq 1. \end{cases}$$

5°. Să se calculeze:  $\int_1^3 |(x-1)(x-2)(x-3)| dx$ .

## B. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

XXXVI. 1°. Triunghiul  $MAB$  înscris în cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  are vîrfurile  $A$  și  $B$  fixe, iar vîrfurile  $M$  variabil pe cerc. Să se afle:

a) Locul geometric descris de ortocentrul triunghiului  $MAB$ ;

b) Locul geometric descris de centrul de greutate al triunghiului  $MAB$ .

2°. Fie  $[AA_1, A_1 \in [BC]$ , bisectoarea unghiului  $\hat{A}$  în triunghiul  $ABC$ . Cercul circumscris triunghiului  $AA_1B$  intersectează dreapta  $AC$  a doua oară în punctul  $N \in [AC]$ , iar cercul circumscris triunghiului  $AA_1C$  intersectează dreapta  $AB$  a doua oară în punctul  $M \in [AB]$ . Să se arate că  $[BM] = [CN]$ .

3°. Să se discute și să se rezolve ecuația:

$$3m \sin 2x + (m-1) \cos 2x = 1,$$

unde  $m$  este un parametru real.

4°. Într-un con circular drept se înscrie o sferă astfel încît cercul de tangentă dintre ele este baza unui cilindru înscris în sferă. Raportul dintre aria sferei și aria totală a conului este  $\frac{4}{9}$ . Să se determine raportul dintre volumul cilindrului și volumul conului.

5°. Să se determine măsura unghiurilor unui triunghi  $ABC$  știind că are loc relația:  $8 \sin A \sin B \cos C + 1 = 0$ .

## β. PROFILUL: MECANIC, CONSTRUCȚII, ARHITECTURĂ ȘI SISTEMATIZARE, MINE, PETROL, GEOLOGIE

### a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXXVII. 1°. Să se afle soluțiile reale ale sistemului:

$$x^{\sqrt{y}} = y^x; \quad y^{\sqrt{x}} = x^y.$$

2°. Să se determine polinoamele de gradul al doilea cu coeficienți reali care verifică  $P(X^3) = (P(X))^3$ .

3°. Să se calculeze:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n - (\sin x)^n}{x^{n+2}}$ , pentru  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ .

4°. Se consideră mulțimile:

$$K = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \mid A \in M_2(\mathbb{Q}) \right\} \text{ și } L = \{ c + d\sqrt{5} \mid c, d \in \mathbb{Q} \}.$$

a) Să se arate că  $L$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu operațiile de adunare și înmulțire și  $K$  este parte stabilă a lui  $M_2(\mathbb{Q})$  în raport cu adunarea și înmulțirea.

b) Să se arate că mulțimile  $L$  și  $K$  formează corpuri în raport cu operațiile induse.

c) Să se stabilească un izomorfism de corpuri de la  $L$  la  $K$ .

5°. Se consideră funcția  $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (0, \infty)$ ,

$$f(x) = \int_0^x \frac{(\sin t + \cos t) \sin t}{\cos^2 t} dt.$$

Să se calculeze integrala și să se arate că funcția  $f$  este bijectivă.

## b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

XXXVIII. 1°. Fie  $ABCD$  un paralelogram cu diagonalele  $[AC]$  și  $[BD]$ .

a) Să se arate că  $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$ .

b) Presupunând că  $AC^2 \cdot BD^2 = AB^4 + AD^4$ , să se calculeze măsura unghiului obtuz al paralelogramului.

2°. Două cercuri de raze  $a$ , respectiv  $x$ ,  $x > a$ , sînt tangente exterioare.

a) Să se calculeze în funcție de  $a$  și  $x$  lungimile laturilor triunghiului  $ABC$  format de cele trei tangente comune la cele două cercuri.

b) Păstrînd  $a$  fix să se determine  $x$  astfel încît volumul corpului generat prin rotirea triunghiului  $ABC$  în jurul liniei centrelor să aibă valoarea  $\frac{8\pi a^3}{3}$ .

3°. Se consideră punctul  $M$  aparținînd interiorului unui triedru tridreptunghic de vîrf  $O$ . Să se ducă prin  $M$  un plan care să intersecteze muchiile triedrului în punctele  $A, B, C$  astfel ca  $M$  să fie ortocentrul triunghiului  $ABC$ .

4°. Să se rezolve ecuația:  $(\sin x + \cos x) \sqrt{2} = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ .

5°. Să se demonstreze că triunghiul  $ABC$  în care are loc relația:  
 $1 + \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - B \right) = \frac{2}{1 - \operatorname{ctg} C}$ , este dreptunghic.

## γ. PROFILUL: METALURGIC, CHIMIE

### a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXXIX. 1°. Să se determine numerele naturale  $x$  și  $y$  astfel încît numerele  $C_{x-1}^y, C_{x-1}^{y-1}, C_x^y$  să fie în progresie aritmetică, iar numerele  $A_x^y, A_{x+1}^y, A_{x+1}^{y+1}$  să fie în progresie geometrică ( $A_n^k$  și  $C_n^k$  reprezintă numărul aranjamentelor și, respectiv, al combinațiilor de  $n$  elemente luate câte  $k$ ).

2°. Să se scrie tabla înmulțirii în inelul claselor de resturi modulo 7 și să se determine cel mai mare divizor comun al polinoamelor  $f$  și  $g$  din  $\mathbb{Z}_7[X]$ , unde:

$$f = X^4 + 6X^3 + 5X^2 + 3X + 3 \text{ și } g = 3X^2 + 1.$$

3°. Se consideră șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  definit de relațiile:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + n \cdot x_n^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_0 > 0.$$

Să se studieze convergența șirurilor  $(x_n)_{n \geq 0}$  și  $(nx_n)_{n \geq 0}$ ; dacă sint convergente, să se calculeze limitele celor două șiruri.

4°. Să se calculeze:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2 - \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{ctg} x})^{\frac{1}{\sin x - \cos x}}.$$

5°. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ ,  $g(x) = \ln(1 + x^2)$ .

a) Să se determine funcția  $h(x) = \max(f(x), g(x))$ , pentru  $x \in [0, 1]$ .

b) Să se calculeze aria mulțimii cuprinse între graficele funcțiilor  $f$  și  $g$  și dreptele  $x = 0$ ,  $x = 1$ .

## b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

XL. 1°. Fie două puncte fixe  $A, B$  situate pe diametrul unui semicerc și egal depărtate de centru, iar  $M, N$  două puncte variabile pe semicerc astfel ca  $AM \parallel BN$ . Să se demonstreze că produsul  $AM \cdot BN$  este constant.

2°. În triunghiul  $ABC$ ,  $[AB] = [AC]$  și  $m(\widehat{BAC}) = 80^\circ$ . Fie  $M$  un punct în interiorul triunghiului  $ABC$  astfel încît  $m(\widehat{MBC}) = 30^\circ$  și  $m(\widehat{MCB}) = 10^\circ$ . Fie  $N$  punctul de intersecție al dreptei  $MB$  cu bisectoarea unghiului  $\widehat{BAC}$ . Să se determine  $m(\widehat{BNC})$  și  $m(\widehat{AMC})$ .

3°. Să se rezolve ecuația:  $\cos^2 x + 3 \sin x \cos x + 1 = 0$ .

4°. Se dă un tetraedru regulat  $ABCD$ . Să se ducă prin punctul  $A$  un plan paralel cu dreapta  $BD$  astfel încît cele două corpuri în care acest plan împarte tetraedrul să aibă volume egale.

5°. Să se arate că triunghiul  $ABC$  în care are loc relația:  $\sin B \operatorname{tg} B = \frac{b^2}{a \cdot c}$ , este dreptunghic.

## d. PROFILUL: ELECTRIC, ENERGETIC, MECANIC

### a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XLL. 1°. Să se determine valorile parametrului real  $m$  astfel încît matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$$

să fie inversabilă pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

2°. Să se afle valorile parametrului real  $a$  pentru care rădăcinile  $x_1, x_2, x_3$  ale ecuației  $x^3 - x - a = 0$  verifică inegalitatea:  $x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 \geq x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$ .

3°. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^3 - 3x + 2}$ . Să se determine limita șirului  $(a_n)_{n \geq 0}$  cu termenul general:

$$a_n = n^2 \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(n+3).$$

4°. Să se calculeze parametrii reali  $a$  și  $b$  astfel încît graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{ax^3 + bx^2}$ , să admită dreapta  $y = 2x - \frac{1}{3}$  ca asimptotă.



5°. Să se reprezinte grafic funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (1+x)e^{-|x-1|}$  și să se calculeze aria mulțimii cuprinse între graficul funcției  $f$ , axele de coordonate și dreapta  $x = 2$ .

## b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

XLII. 1°. Fie  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor unui trapez. Să se arate că dreapta determinată de punctul  $O$  și de punctul de intersecție a laturilor neparalele ale trapezului trece prin mijloacele bazelor trapezului.

2°. În triunghiul  $ABC$  se consideră punctele  $M \in [AC]$  și  $N \in [BC]$ . Dreptele  $AN$  și  $BM$  se intersectează în punctul  $O$ . Să se determine ariile triunghiurilor  $OMN$  și  $CMN$  în funcție de ariile  $S_1, S_2, S_3$  ale triunghiurilor  $OMA, OAB, ONB$ .

3°. Să se rezolve ecuația:  $\cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = 2$ .

4°. Se dă un tetraedru regulat  $ABCD$  cu muchia de lungime  $a$ . Se secționează tetraedrul cu un plan variabil paralel cu muchiile opuse  $[AB]$  și  $[CD]$ . Să se determine aria maximă a secțiunilor obținute.

5°. Să se demonstreze că suma distanțelor unui punct variabil, din interiorul unui tetraedru regulat, la fețele tetraedrului este constantă.

## 2. ÎNVĂȚĂMÎNT UNIVERSITAR

α. PROFILUL MATEMATIC (Specializările: *Matematică*, învățămînt de zi și fără frecvență; *Informatică*, *Matematică-Mecanică*, învățămînt de zi și seral).

### a. ALGEBRĂ

XLIII. 1°. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = mx^2 + (2m+1)x + 2m - 1$ . Să se discute după parametrul real  $m$  natura și semnul rădăcinilor ecuației  $f(x) = 0$ .

2°. Se consideră funcția  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(n) = 3n + 1$ . Să se construiască o funcție  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  astfel încît  $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$ . Arătați că, pentru orice asemenea funcție  $g$  are loc afirmația:  $f \circ g \neq 1_{\mathbb{N}}$ .

3°. Să se discute după parametrii reali  $a, b, c$  și să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = 1; \\ ax + by + (a+b)z = c; \\ a^2x + b^2y + (a^2+b^2)z = c^2. \end{cases}$$

4°. Se definește pe mulțimea  $\mathbb{R}$  a numerelor reale legea de compoziție:  $x * y = xy - ax + by$ . Să se determine numerele reale  $a$  și  $b$  astfel încît  $(\mathbb{R}, *)$  să devină un monoid. Pentru fiecare din monoizii astfel obținuți să se determine elementele inversabile.

5°. Să se demonstreze că pentru orice număr natural  $n > 0$  este adevărată egalitatea:

$$1 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} = 2^{n-1}(n+2).$$

### b. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XLIV. 1°. Să se calculeze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \dots + \frac{1}{n \ln n} \right).$$

2°. Să se arate că, pentru orice număr natural  $k \geq 2$ , avem:

$$0 < \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k) < \frac{1}{k \ln k}.$$

3°. Să se calculeze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 (2x) + \dots + \operatorname{tg}^2 (nx))^{\frac{1}{n^3 x^2}} \right).$$

4°. Să se reprezinte grafic funcția:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dată prin:

$$f(x) = (x - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 1}}.$$

5°. Să se calculeze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b (x - a)^n (b - x)^n dx \right)^{\frac{1}{n}} \text{ dacă } a < b.$$

### c. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU, TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE ANALITICĂ

**XIV. 1°.** Se dă cercul  $\mathcal{C}(O, R)$  și se consideră  $A \in \mathcal{C}(O, R)$ ,  $B \in \mathcal{C}(O, R)$  astfel încât  $AB < 2R$ . Fie  $C$  punctul diametral opus lui  $B$  iar  $D$  punctul de intersecție al tangențelor în  $A$  și  $B$  la cercul dat. Dreptele  $AC$  și  $AO$  intersectează tangenta  $BD$ , respectiv, în  $E$  și  $F$ . Dreapta  $OB$  intersectează tangenta  $AD$  în  $G$ . Să se arate că:

- $D$  este mijlocul segmentului  $[EB]$ ;
- Dreptele  $FC$  și  $EG$  sint perpendiculare.

2°. Se consideră în plan triunghiurile  $ABC$  cu vîrfurile  $B$  și  $C$  fixe și cu unghiul  $\widehat{BAC}$  de măsură dată. Care dintre aceste triunghiuri are perimetrul maxim?

3°. Se consideră piramida regulată  $SABCD$ , cu vîrfurile  $S$  și cu baza pătratul  $ABCD$ . Fie  $O$  piciorul înălțimii piramidei și  $M$  mijlocul segmentului  $[SO]$ . Distanța punctului  $M$  la planul  $(ASB)$  este  $p$ , iar distanța lui  $M$  la dreapta  $SA$  este  $q$ .

- Să se arate că  $p < q < p\sqrt{2}$ .
- Să se determine volumul piramidei în funcție de  $p$  și  $q$ .

4°. Se dau  $A$  și  $B$  punctele distincte în plan și  $C \in (AB)$ . Să se găsească locul geometric al punctelor  $M$  din plan cu proprietatea că cercul înscris în triunghiul  $MAB$  este tangent dreptei  $AB$  în  $C$ .

5°. Să se discute și să se rezolve ecuația:

$$\arcsin ax = \arccos bx, \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

### β. PROFILUL MATEMATICĂ (Specializarea Matematică-Fizică, 3 ani, învățămînt de zi).

#### ALGEBRĂ (clasele IX - X), GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

**XLVI. 1°.** Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6; \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2} = 8. \end{cases}$$

2°. Să se rezolve ecuația:  $x^3 + ax^2 + x + 1 = 0$ , știind că rădăcinile sale  $x_1, x_2, x_3$  satisfac relațiile:  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$  și  $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 4a - 1$ .

3°. Se dau în spațiu dreptele  $d$  și  $d'$ . Să se arate că prin fiecare punct al spațiului trece o dreaptă perpendiculară pe  $d$  și  $d'$ .

4°. Să se determine unghiurile triunghiului dreptunghic ale cărui laturi formează o progresie aritmetică.

### 3. ALTE PROFILURI

α. PROFILUL GEODEZIE (Specializarea *Cadastru funciar, subingineri seral*).

ALGEBRĂ, GEOMETRIE PLANĂ ȘI TRIGONOMETRIE

XLVII. 1°. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{65}{36}, \\ xy - x + y = 118. \end{cases}$$

2°. Să se scrie primii cinci termeni ai unei progresii geometrice  $(a_n)$  dacă:

$$\begin{cases} a_5 - a_1 = 15; \\ a_4 - a_2 = 6. \end{cases}$$

3°. Să se rezolve ecuația:  $\sin 3x - \cos 2x - \sin x = 0$ .

4°. Tangentele în punctele  $A$  și  $B$ , la un cerc de centru  $O$ , se întâlnesc într-un punct  $C$ . Prin  $A$  se duce paralela la  $BC$  care intersectează din nou cercul în  $D$ , iar dreapta  $CD$  intersectează a doua oară cercul în  $E$ . În sfârșit,  $AE$  intersectează pe  $BC$  în  $F$ .

1. Să se arate că:

a) unghiurile  $\widehat{CAE}$ ,  $\widehat{BCE}$  au aceeași măsură;

b)  $FC^2 = FE \cdot FA$ .

2. La ce distanță de centrul  $O$  trebuie să fie punctul  $C$  ca patrulaterul  $ADBC$  să fie romb?

β. PROFILUL CHIMIE (subingineri seral).

ALGEBRĂ

XLVIII. 1°. Să se rezolve ecuația:  $(\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x + (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x = 4$ .

2°. Să se rezolve ecuațiile:

$$\begin{cases} x^4 - 2x^3 - x + 2 = 0; \\ x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0, \end{cases}$$

știind că au rădăcini comune.

3°. Fie:

$$f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m-1, \quad m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Să se determine  $m$  astfel încât  $f_m(x) \geq 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

4°. În corpul claselor de resturi modulo 11, să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \hat{2}x + \hat{10}y + z = \hat{4}; \\ x + 3z = \hat{2}; \\ \hat{10}x + \hat{2}y + \hat{2}z = \hat{1}. \end{cases}$$



**Ț. PROFILUL FORESTIER** (Specializarea *Silvicultură și exploatare forestiere, ingineri zi și seral*).

**ALGEBRĂ**

**XLIX. 1°.** Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = 4; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14; \\ x^3 + y^3 + z^3 = 34. \end{cases}$$

**2°.** Folosind metoda inducției matematice, să se calculeze suma:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

**3°.** a) Să se determine cel mai mare divizor comun al polinoamelor:

$$X^5 - 5X^4 - 6X^3 - 6X^2 - 7X - 1; \quad 2X^4 - 16X^3 + 23X^2 - 2X - 1.$$

b) Să se rezolve ecuația:  $2x^4 - 16x^3 + 23x^2 - 2x - 1 = 0$ .

**4°.** Să se rezolve ecuația:

$$\log_x \sqrt[3]{4} + 3 \log_x (x \sqrt[3]{4}) + 6 \log_x^2 \sqrt[3]{4} = 5.$$

**5°.** a) Să se arate că, pe intervalul  $(-1, 1)$ , legea de compoziție:  $x \top y = \frac{x+y}{1+xy}$ , determină o structură de grup comutativ.

b) Să se arate că între grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive și grupul de la punctul a există un izomorfism  $f: (0, \infty) \rightarrow (-1, 1)$ , de forma:  $f(x) = \frac{mx-1}{x+1}$ , unde  $m \in \mathbb{R}$ , care trebuie determinat corespunzător.

**ENUNȚURI**  
**1987**

**1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC**

**α. PROFILUL: ELECTRIC, ENERGETIC, MECANIC, CONSTRUCȚII**

**a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ**

**L. 1°.** Să se determine termenul care îl conține pe  $b^2$  din dezvoltarea  $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{b})^n$ , știind că  $n$  este cel mai mare număr natural ce verifică inecuația:

$$\log_{\frac{1}{3}} n + \log_{\frac{n}{3}} n > 0.$$

**2°.** Fie sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = 1; \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 1; \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z = 1. \end{cases}$$

Să se discute sistemul după valorile parametrilor reali  $\alpha, \beta, \gamma$  și, în cazul cînd este compatibil determinat, să se rezolve.

3°. Să se determine un polinom  $f \in \mathbb{R}[X]$ , de grad minim, astfel încât funcția polinomială asociată să aibă un maxim egal cu 6 pentru  $x = 1$  și un minim egal cu 2 pentru  $x = 3$ .

4°. Fie  $a_0, a_1, \dots, a_k$  numere reale astfel încât  $a_0 + a_1 + \dots + a_k = 0$ . Să se calculeze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 \sqrt[n]{n} + a_1 \sqrt[n]{n+1} + \dots + a_k \sqrt[n]{n+k}).$$

5°. Să se calculeze:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1 + \cos x} dx$

## b. GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

II. 1°. Se notează cu  $M, N$  și  $P$  respectiv mijloacele laturilor  $[BC], [CA]$  și  $[AB]$  ale triunghiului oarecare  $ABC$ . Dreptele  $AM, BN$  și  $CP$  intersectează cercul circumscris triunghiului  $ABC$  respectiv în  $Q, S$  și  $T$ . Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{AM}{MQ} + \frac{BN}{NS} + \frac{CP}{PT} \geq 9.$$

2°. Latura  $[BC]$  a triunghiului  $ABC$  este fixă, iar vârful  $A$  este mobil astfel încât suma  $\lg B + \lg C$  este aceeași pentru orice poziție a lui  $A$ . Să se afle locul geometric al ortocentrului triunghiului  $ABC$ .

3°. Se consideră tetraedrul  $ABCD$  în care se cunosc:  $m(\widehat{BAC}) = \alpha, m(\widehat{CAD}) = \beta$  și  $m(\widehat{DAB}) = \gamma$ . Să se calculeze măsura unghiului diedru format de fețele  $ABC$  și  $ABD$  în funcție de  $\alpha, \beta, \gamma$ .

4°. Să se determine  $x \in [0, \pi]$  astfel încât:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1 \text{ și } \cos 2x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

5°. Se dă triunghiul oarecare  $ABC$  și se consideră punctul  $D \in [BC]$  astfel încât  $BC = 3DC$ . Se notează cu  $E$  mijlocul medianei  $[CC']$ . Să se arate că punctele  $A, D$  și  $E$  sînt coliniare.

## β. PROFILUL: ELECTRIC, MECANIC, CONSTRUCȚII

### a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

LII. 1°. Să se arate că pentru orice întreg  $n \geq 2$ ,

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

2°. Știind că rădăcinile  $x_1, x_2, x_3$  ale ecuației  $x^3 + x^2 + ax + b = 0; a, b \in \mathbb{R}$  sînt reale, să se arate că acestea sînt egale dacă și numai dacă:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Să se rezolve în acest caz ecuația dată și să se determine  $a$  și  $b$ .

3°. Fie  $A$  un inel astfel încît  $x^6 = x$ , pentru orice  $x \in A$ . Să se arate că  $x^2 = x$ , pentru orice  $x \in A$ .

4°. Să se calculeze:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \lg \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$ .

5°. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-x} & \text{dacă } x \in (-\infty, 1), \\ \frac{\ln^2 x}{x} & \text{dacă } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Să se arate că  $f$  are primitive și să se calculeze o primitivă a sa.

## b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

LIII. 1°. Pe diametrul  $(AB)$  al cercului  $\mathcal{C}$  se consideră un punct fix  $D$  și fie  $M$  un punct mobil pe cerc. Perpendiculara în  $M$  pe  $MD$  intersectează tangentele în  $A$  și  $B$  la cerc respectiv în  $E$  și  $F$ . Să se arate că produsul  $AE \cdot BF$  nu depinde de poziția punctului  $M$  pe cerc.

2°. Se dau punctele  $A$  și  $B$  de afixe  $a = 1 + i$  și respectiv  $b = \sqrt{3} + 1 + 2i$ .

Să se determine afixele punctelor  $M$  astfel încît  $m(\widehat{BAM}) = 45^\circ$  și  $AB = AM$ .

3°. Diagonala  $[AC']$  a paralelipipedului dreptunghic  $ABCD A'B'C'D'$  formează cu muchiile  $[AB]$ ,  $[AD]$  și  $[AA']$  respectiv unghiurile  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$ . Să se arate că:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \gamma} \geq 9.$$

4°. Se dau două cercuri secante  $\mathcal{C}_1$  și  $\mathcal{C}_2$ . Prin unul din punctele lor de intersecție se duce o dreaptă variabilă care intersectează a doua oară cercurile  $\mathcal{C}_1$  și  $\mathcal{C}_2$  în  $M_1$  și, respectiv,  $M_2$ . Să se afle locul geometric al punctului  $M \in (M_1 M_2)$  astfel încît  $MM_1 = 2MM_2$ .

5°. Se notează cu  $a$ ,  $b$  și  $c$ , aria totală a unui con circular drept, volumul conului și respectiv aria sferei înscrise în acest con. Să se demonstreze egalitatea:  $a^2 \cdot c = 36\pi b^2$ .

## γ. PROFILUL: METALURGIE, CHIMIE, ARHITECTURĂ ȘI SISTEMATIZARE, MINE, PETROL, GEOLOGIE

### a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

LIV. 1°. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow (1, \infty)$ ,  $f(x) = 4^x + 2^x + 1$ . Să se arate că  $f$  este bijectivă, să se determine  $g = f^{-1}$  și să se calculeze  $g'(3)$ .

2°. Să se arate că oricare ar fi  $a, b, c, \in \mathbb{Z}$  sistemul:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x = ax + by + cz; \\ \frac{1}{2}y = cx + ay + bz; \\ \frac{1}{2}z = bx + cy + az, \end{cases}$$

admite numai soluția  $x = y = z = 0$ .



3°. Fie  $\mathcal{M} = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid {}^t A \circ A = E\}$ , unde  ${}^t A$  este transpusa matricei  $A$ , iar  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Să se arate că:

- Pentru orice  $A \in \mathcal{M}$ ,  $\det A = \pm 1$ ;
- Operația de înmulțire a matricelor determină pe  $\mathcal{M}$  o structură de grup.

4°. Știind că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ , este convergent și are limita  $\frac{\pi^2}{6}$ .

să se arate că șirul  $(b_n)_{n \geq 1}$ ,  $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2}$  este convergent și să se calculeze limita.

5°. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln \left( 1 + \frac{1}{|x-1|} \right)$ . Să se calculeze aria mulțimii mărginite de graficul funcției, cele două axe de coordonate și dreapta  $x = \frac{1}{2}$ .

## b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

LV. 1°. Fie  $[AB]$  un diametru fix al cercului  $\mathcal{C}(O, r)$  și  $M$  un punct mobil pe cerc. Tangenta în  $M$  la cerc intersectează dreapta  $AB$  în  $N$ . Să se afle locul geometric al centrului cercului înscris în triunghiul  $ONM$ .

2°. Se dă triunghiul  $ABC$  în care  $\operatorname{tg} A = 3$  și  $\operatorname{tg} B = 2$ . Să se arate că ortocentrul triunghiului coincide cu mijlocul înălțimii  $[AA']$ .

3°. Se consideră piramida  $SABCD$  avind ca bază dreptunghiul  $ABCD$  cu  $AB = 2a$ ,  $BC = a$  și a cărei înălțime este  $SD = 2a$ . Să se determine un punct  $P \in (SB)$  astfel încât triunghiul  $APC$  să fie dreptunghic în  $P$ .

4°. Se dă funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos 3x + \cos 5x - \cos x$ , și se cere să se calculeze  $f\left(\frac{\pi}{24}\right)$ .

5°. Fie  $O$  centrul cercului  $\mathcal{C}$  circumscris triunghiului oarecare  $ABC$ . Tangenta în  $B$  la  $\mathcal{C}$  intersectează dreapta  $AC$  în  $D$ . Cercul circumscris triunghiului  $BCD$  intersectează a doua oară dreapta  $AB$  în  $E$ . Să se arate că:

- Dreapta  $DE$  este tangentă cercului circumscris triunghiului  $ACE$ ;
- Dreptele  $AO$  și  $DE$  sunt perpendiculare.

## 8. PROFILUL MECANIC

### a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

LVI. 1°. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} C_x^3 t^3 \cdot 2^{x-3} - C_x^4 t^4 \cdot 2^{x-4} < 0; \\ C_x^5 t^5 \cdot 2^{x-5} - C_x^4 t^4 \cdot 2^{x-4} < 0. \end{cases}$$

2°. Să se arate că ecuația  $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$  admite o singură rădăcină reală. Fie aceasta  $x_1$ . Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_2^n + x_3^n)$ , unde  $x_2$  și  $x_3$  sunt celelalte două rădăcini ale ecuației date.

3°. Să se determine  $a$  astfel încât polinomul:  $\hat{2}X^3 + (a + \hat{2})X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$  să fie ireductibil peste  $\mathbb{Z}_3$ .

4°. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2+x}}, & x \in (-1, 0); \\ 0 & , x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 0). \end{cases}$$

Să se studieze derivabilitatea funcției  $f$  pe  $\mathbb{R}$ .

5°. Să se traseze graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|} - x$  și să se afle aria mulțimii mărginite de graficul funcției, axa  $Ox$  și dreptele  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $x = \frac{1}{2}$ .

## b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

LVII. 1°. În cercul  $\mathcal{C}$  se înscrie triunghiul  $ABC$  avînd vîrfurile  $A$  fix, iar vîrfurile  $B$  și  $C$  variabile pe cerc astfel încît  $AB^2 + AC^2 = k$ , unde  $k$  este un număr pozitiv dat. Să se afle locul geometric al mijlocului  $M$  al laturii  $[BC]$ .

2°. Să se arate că dacă în triunghiul  $ABC$  are loc egalitatea  $BC = \sqrt{2}AC$ , atunci mediana  $[AA']$  formează cu latura  $[BC]$  un unghi congruent cu unghiul  $A$ .

3°. Se consideră o piramidă triunghiulară regulată  $ABCD$  cu baza  $BCD$ . Pe muchia  $[AB]$  se ia un punct  $M$  astfel încît  $AB = 4AM$  și se notează cu  $N$  mijlocul muchiei  $[CD]$ . Să se arate că  $MN$  trece prin mijlocul înălțimii  $[AO]$  a piramidei.

4°. Să se demonstreze egalitatea:

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \frac{1}{2} = 0.$$

5°. Două plane perpendiculare intersectează o sferă după cercurile de raze  $a$  și  $b$ . Se cunoaște distanța  $c$  de la centrul sferei la dreapta de intersecție a planelor. Să se calculeze raza sferei în funcție de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

## 2. ÎNVĂȚĂMÎNT UNIVERSITAR

α. PROFILUL MATEMATICĂ (Specializările: *Matematică*, învățămînt de zi și fără frecvență; *Informatică*, *Matematică-Mecanică*, învățămînt de zi și seral).

### a. ALGEBRĂ

LVIII. 1°. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \sqrt{3x+y} + \sqrt{x-y} = 6; \\ 3x + \sqrt{x-y} = 17, \end{cases}$$

unde  $x, y \in \mathbb{R}$ .

2°. Să se reprezinte în plan imaginile geometrice ale numerelor complexe  $z$  care îndeplinesc condiția:  $\left| \frac{z^2 + i}{z^2 - 3i} \right| = 1$ .

3°. Să se arate că dacă  $n$  și  $k$  sînt numere naturale cu  $n \geq k + 3$ , atunci coeficienții binomiali:  $C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2}, C_n^{k+3}$ , nu pot fi termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

4°. Să se demonstreze că polinomul:  $P(X) = (X-1)^2(X-2)^2 + 1$ , nu se poate descompune în produs de două polinoame cu coeficienți numere întregi.

5°. Fie  $G$  mulțimea matricilor din  $M_3(\mathbb{R})$  de forma:

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & a & a \end{pmatrix}$$

și având proprietatea  $\det(M_{a,b}) = 1$ . Să se arate că  $G$  este un grup în raport cu înmulțirea matricilor.

## b. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

LIX. 1°. Fie  $(X_n)_{n \geq 1}$  un șir de numere reale pozitive astfel încît

$$(n+1)X_{n+1} - nX_n < 0$$

pentru orice  $n \geq 1$ . Să se arate că șirul  $(X_n)_{n \geq 1}$  este convergent și să se calculeze limita sa.

2°. Să se reprezinte grafic funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}},$$

unde  $D$  este domeniul maxim de definiție.

3°. Să se arate că pentru orice  $a \in (0, 1]$  există  $n \in \mathbb{N}$  și  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  astfel

încît:  $\sin^{2n} x + \cos^{2n} x = a$ .

4°. Să se arate că pentru orice  $x \geq 2$  are loc inegalitatea:

$$(x+1) \cos \frac{\pi}{x+1} - x \cos \frac{\pi}{x} > 1.$$

5°. Să se calculeze:  $\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\arcsin x}{x^2} dx$ .

## c. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU, TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE ANALITICĂ

LX. 1°. Fie  $A$  în interiorul cercului  $\mathcal{C}(O, R)$ ,  $A \neq O$  și  $(BC)$  coarda ce trece prin  $A$  și este perpendiculară pe  $OA$ . Să se arate că pentru orice punct  $M \in \mathcal{C}(O, R)$  avem  $m(\widehat{AMO}) \leq m(\widehat{ABO})$ .

2°. Fie  $[AB]$  și  $[CD]$  diametri perpendiculari în cercul  $\mathcal{C}(O, R)$  și  $M \in (OA)$ . Dreapta  $CM$  intersectează iar cercul în  $N$ . Tangenta în  $N$  la cerc se intersectează cu paralela prin  $M$  la  $CD$  în  $P$ .

i) Să se arate că patrulaterul  $OMNP$  este un trapez isoscel.

ii) Să se afle locul geometric al punctului  $Q = ON \cap MP$  cînd  $M$  parcurge segmentul  $(OA)$ .

3°. Să se arate că pentru orice con circular drept raportul dintre aria sa totală și aria sferei înscrise este mai mare sau egal cu 2.

4°. Se consideră în plan două drepte perpendiculare. Să se determine mulțimea punctelor  $M$  din plan cu proprietatea că suma distanțelor lui  $M$  la dreptele date este egală cu suma inverselor distanțelor lui  $M$  la cele două drepte date.

5°. Să se discute și să se rezolve ecuația:

$$m^2 \sin^2 3x = \sin^2 x, \quad m \in \mathbb{R}, \quad m > 0.$$



β. PROFILUL MATEMATICĂ (Specializarea *Matematică-Fizică*, 3 ani învățământ de zi).

ALGEBRĂ (clasele IX-X), GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

LXI. 1°. Să se determine numerele naturale distincte  $m, p, n, q$  pentru care polinomul  $X^m + X^n + X^p + X^q$  este divizibil cu  $X^3 + X^2 + X + 1$ .

2°. Există termeni independenți de  $x$  în dezvoltarea binomului

$$\left(\sqrt{x} \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{1988}?$$

Să se scrie acești termeni în caz că există.

3°. În triunghiul  $ABC$  ( $m(\hat{A}) = 90^\circ$ ) se duce înălțimea  $[AD]$ ,  $D \in (BC)$  și se consideră  $F \in (AD)$ . Perpendiculara în  $F$  pe  $FC$  intersectează pe  $AB$  în  $G$ . Paralela prin  $A$  la  $FG$  intersectează pe  $BC$  în  $H$ . Să se arate că patrulaterul  $AGFH$  este paralelogram.

4°. Să se rezolve ecuația:  $\arccos x = \operatorname{arctg} x$ .

### 3. ALTE PROFILURI

α. PROFILUL: FORESTIER (Specializarea *Silvicultură și exploatare forestiere*, ingineri zi), TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA PRODUSELOR ALIMENTARE ȘI TEHNICA PISCICOLĂ (ingineri zi și, după caz, seral).

ALGEBRĂ

LXII. 1°. Să se studieze în raport cu  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  și să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2^{\frac{x}{y}} = \alpha^{\frac{y}{x}}; \\ x^2 = y^2. \end{cases}$$

2°. Cum trebuie alese numerele naturale  $m, n, p$  astfel încît polinomul  $P = X^{3m} - X^{3n+1} + X^{3p+2}$  să fie divizibil cu  $X^3 - X + 1$ .

3°. Să se determine permutarea  $\sigma \in S_7$  dacă:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \circ \sigma \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

4°. Fie matricea  $X \in M_4(\mathbb{N})$ :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că matricile  $X, X^2, X^3, \dots$  formează un grup multiplicativ abelian. Cite elemente are acest grup?

5°. Fie  $z_1 = a + bi$  și  $z_2 = \frac{1 - \bar{z}_1}{1 + \bar{z}_1}$  două numere complexe. Cum trebuie ales  $z_1$  astfel încît  $z_1 - z_2$  și  $z_2^2$  să fie numere reale?

β. TOATE PROFILURILE (subingineri seral).

ALGEBRĂ, GEOMETRIE PLANĂ ȘI TRIGONOMETRIE

LXIII. 1°. Să se rezolve ecuația:

$$2 \cos^6 x - 2 \sin^6 x = \sin 4x.$$

2°. Să se rezolve inecuația:  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-6x+10-x^2} < \frac{27}{64}$ .

3°. Să se găsească patru numere întregi, consecutive, așa fel încît cubul celui mai mare să fie egal cu suma cuburilor celorlalte trei.

4°. Să se arate că un triunghi este dreptunghic dacă și numai dacă are loc egalitatea:  $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$ .

LXIV. 1°. Să se rezolve ecuația:  $\sin^4 x + 5 \cos 2x + 4 = 0$ .

2°. Să se rezolve inecuația:

$$\frac{1}{5 - \log_a x} + \frac{2}{1 + \log_a x} < 1; \quad 0 < a < 1.$$

3°. Să se rezolve ecuația:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = 0.$$

4°. În ce fel de triunghi are loc egalitatea:

$$\sin B + \cos B = \sin C + \cos C.$$

γ. PROFILUL: CHIMIE, TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA PRODUSELOR ALIMENTARE ȘI TEHNICĂ PISCICOLĂ (subingineri seral).

ALGEBRĂ

LXV. 1°. Să se rezolve ecuația:

$$\log_{\sqrt{x}} (x + |x - 2|) = \log_x (5x - 6 + 5|x - 2|).$$

2°. Să se afle matricea  $X$  dacă:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3°. Să se demonstreze că pentru  $(\forall)n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ , are loc inegalitatea:

$$2^n > 2n + 1.$$

4°. Să se determine parametrul real  $a$  și să se rezolve ecuația:  $x^3 - 3x^2 + ax + 8 = 0$ , știind că produsul a două rădăcini este egal cu 2.

## 8 PROFILUL ECONOMIC

### ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

**LXVI. 1°.** Să se demonstreze egalitatea:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

și să se calculeze suma:

$$1 + 2(1+2) + 3(1+2+3) + \dots + n(1+2+3+\dots+n).$$

**2°.** Să se rezolve în corpul numerelor complexe sistemul:

$$\begin{cases} (x+1)^2(y+1)^2 = 15xy; \\ (x^2+1)(y^2+1) = 3xy. \end{cases}$$

**3°.** Fie în  $M_2(\mathbb{R})$  egalitatea matricială:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că dacă  $a_1, a_2, a_3, a_4$  sînt în progresie aritmetică, atunci  $b_2 - b_1, b_3 - b_2, b_4 - b_3$  sînt tot în progresie aritmetică.

$$4^\circ. \text{ Fie funcția } f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{25x}{x^2+1} - 1, & x \in [1, 2], \\ \frac{(x+1)^2}{x-1}, & x \in (2, 3]. \end{cases}$$

Să se verifice dacă este aplicabilă teorema lui Lagrange și să se determine punctele  $x = c$  corespunzătoare.

**5°.** Să se găsească parametrul real  $\alpha$  astfel încît graficul funcției  $f, f(x) = \frac{-x}{\sqrt{\alpha-x^3}}$ , să admită un punct de inflexiune în  $x = -1$ . Pentru  $\alpha = \frac{1}{8}$  să se reprezinte grafic funcția obținută și să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de  $f$  pentru  $x \in [-1, 0]$ .

**LXVII. 1°.** Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

știind că  $x_1, x_2, x_3$  sînt soluțiile ecuației  $x^3 - x^2 + 5x + 2 = 0$ .

**2°.** Fie  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  termenii unei progresii aritmetice cu rația  $r \neq 0$ . Să se găsească suma:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

în funcție de  $a_1, r$  și  $n$ . Să se verifice rezultatul folosind metoda inducției complete.

**3°.** Să se rezolve în  $\mathbb{C}$  sistemul:

$$\begin{cases} xy^2 + x^2y = 6; \\ x^2y^3 + x^3y^2 = 36, \end{cases}$$

$\mathbb{C}$  fiind corpul numerelor complexe.

**4°.** Fie funcția  $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln \sqrt[4]{x}$ . Să se calculeze aria suprafeței de rotație determinată de funcția  $f$ .



5°. Să se reprezinte grafic familia de funcții  $f : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, k) = x^2 \sqrt{x+k}$ , unde  $k$  este un număr real pozitiv, negativ sau nul.

LXVIII. 1°. Fie ecuația:

$$x^2 - (a+b)x + ab = -\sqrt{[(a+b)x - ab]^2 - x^2}.$$

Cum trebuie aleși parametrii reali  $0 \leq a < b$  astfel încât ecuația să admită rădăcini reale?

2°. Folosind metoda inducției complete să se arate că dacă  $x, y \geq 0$ , atunci:

$$(x+y)^n \leq 2^{n-1} (x^n + y^n), \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

3°. Să se rezolve ecuația matricială:

$$X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

4°. Fie funcția  $f : [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2\alpha}, \alpha \geq 0$ . Să se afle aria suprafeței de rotație determinată de  $f$ .

5°. Să se studieze continuitatea, derivabilitatea și să se reprezinte grafic funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \max(x, x^2, x^3), & x \leq 0, \\ \min(1+x, \frac{1}{x}, e^x), & x \geq 0. \end{cases}$$

LXIX. 1°. Să se rezolve ecuația:  $\left[ \frac{x+2}{3} \right] = \frac{x}{2}$  și să se arate că soluțiile ei sînt în progresie aritmetică (s-a notat cu  $[\alpha]$  partea întreagă a numărului real  $\alpha$ ).

2°. Să se rezolve, în inelul claselor de resturi modulo 6, sistemul:

$$\begin{cases} \hat{5}x + \hat{2}y = \hat{3}, \\ \hat{4}x + \hat{3}y = \hat{1}. \end{cases}$$

3°. Să se arate că polinomul:  $P = X^{4n} + X^3 - X - 1, n \in \mathbb{N}^*$ , este divizibil cu  $(X^2 + X + 1)(X^2 - 1)$ .

4°. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x < 0, \\ (ax)^x, & x > 0, \end{cases}$  unde  $a \in \mathbb{R}_+$ . Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției  $f$  în punctul  $x=0$ . Să se calculeze:  $\int_{-a}^0 x^2 f(x) dx$ .

5°. Să se reprezinte grafic  $f(x) = \sqrt{\frac{x-5}{x+2}}$  și apoi să se studieze soluția ecuației  $f(x) = m, m \in \mathbb{R}$ .

## REZOLVĂRI

I. 1°. Rădăcinile comune ale celor două ecuații polinomiale vor fi rădăcinile celui mai mare divizor comun al polinoamelor. Notăm:

$$P(X) = X^5 - 5X^4 + 6X^3 + 2X^2 - 12X + 8;$$

$$Q(X) = X^5 - 5X^4 + 3X^3 + 11X^2 - 6X - 4,$$

și aflăm cel mai mare divizor comun  $D(X)$  prin algoritmul lui Euclid. Avem:

$$P(X) = Q(X) \cdot 1 + 3(X^3 - 3X^2 - 2X + 4);$$

$$Q(X) = (X^3 - 3X^2 - 2X + 4)(X^2 - 2X - 1),$$

deci  $D(X) = X^3 - 3X^2 - 2X + 4$ . Obținem apoi:

$$P(X) = (X^3 - 3X^2 - 2X + 4)(X^2 - 2X + 2).$$

Aflăm mai întâi rădăcinile comune ale celor două polinoame. Observăm că  $D(X)$  are rădăcina  $x_1 = 1$  și, prin schema lui Horner, obținem descompunerea:  $D(X) = (X - 1)(X^2 - 2X - 4)$ . Rezultă că rădăcinile comune sînt  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1 + \sqrt{5}$ ,  $X_3 = 1 - \sqrt{5}$ . Polinomul  $P(X)$  mai are și rădăcinile  $x_4 = 1 + i$ ,  $X_5 = 1 - i$ , iar polinomul  $Q(X)$  mai are și rădăcinile  $x'_4 = 1 + \sqrt{2}$ ,  $x'_5 = 1 - \sqrt{2}$ .

2°. Metoda I. Calculăm  $A^2$ ,  $A^3$ :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Presupunem că  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & a_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și calculăm:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & a_n + n \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezultă că  $a_{n+1} = a_n + n$ ,  $(\forall) n \geq 1$ . Deducem:

$$\begin{aligned} a_n &= (n-1) + a_{n-1} = (n-1) + (n-2) + a_{n-2} = \dots = \\ &= (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 + a_1 = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}. \end{aligned}$$

Deci

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Metoda II. Putem scrie matricea  $A$  astfel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + B.$$

Deoarece matricile  $I_3$  și  $B$  comută la înmulțire (adică  $I_3 B = B I_3$ ) putem scrie formula (care se demonstrează prin inducție):

$$A^n = (I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k I_3^{n-k} \cdot B^k = \sum_{k=0}^n C_n^k B^k. \text{ Dar}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci avem:

$$\begin{aligned} A^n &= C_n^0 \cdot I_3 + C_n^1 \cdot B + C_n^2 \cdot B^2 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3°. Asimptota oblică  $y = x - 3$  are  $m = 1$  și  $n = -3$ . Avem:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3}{(b+cx)^3} = \frac{a}{c^3} = 1,$$

deci  $a = c^3$ . Apoi:

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{c^3 x^4}{(b+cx)^3} - x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3bc^3 x^3 - 3b^2 c x^2 - b^3 x}{c^3 x^3 + 2c^2 b x^2 + 3cb^3 x + b^3} = -3 \frac{b}{c} = -3, \end{aligned}$$

deci  $b = c$ . În acest caz funcția se scrie:  $f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}$  și  $E = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Avem:

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$  și  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ . Apoi:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty \quad \text{și} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty.$$



Graficul are asimptota verticală  $x = 1$  și asimptota oblică  $y = x - 3$  (la ambele ramuri  $\pm\infty$ ). Calculăm:  $f'(x) = \frac{x^3(x+4)}{(x+1)^4}$ . Rezultă tabloul de variație:

$x$	$-\infty$	$-4$	$-1$	$0$	$+\infty$					
$f'(x)$	$\begin{array}{ccc} + & 0 & - \end{array}$			$\begin{array}{ccc} - & 0 & + \end{array}$						
$(f(x))$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{256}{27}$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$	$+\infty$

și graficul corespunzător (v. fig. M.B.1).

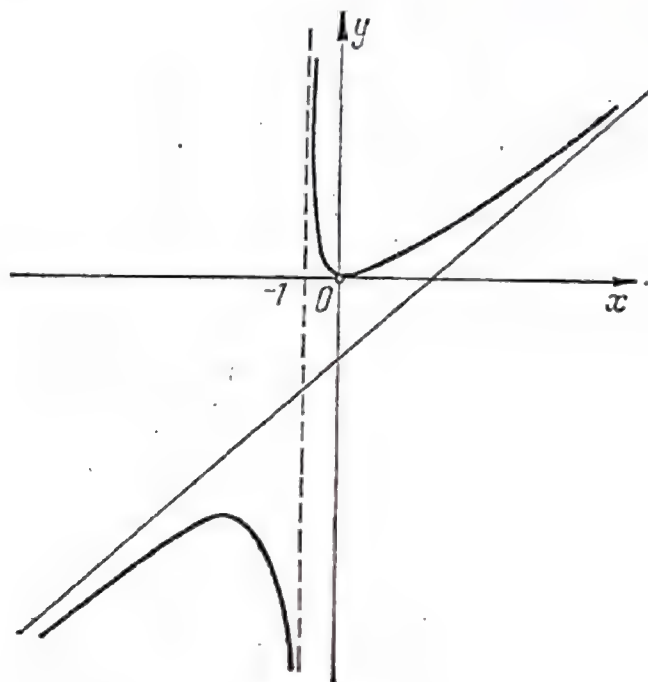


Fig. M.B.1

4°. Se obține imediat că  $a_{n+1} = \frac{11}{10} a_n$ , deci  $(a_n)_{n \geq 0}$  este o progresie geometrică cu rația  $q = \frac{11}{10}$ . Rezultă  $a_n = a_0 \cdot q^n = a_0 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^n$ . Atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{dacă } a_0 > 0, \\ 0 & \text{dacă } a_0 = 0, \\ -\infty & \text{dacă } a_0 < 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5^\circ. \text{ Avem: } \int_0^\pi x \cos^2 x \, dx &= \int_0^\pi x \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi x \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi x \cos 2x \, dx = \\ &= \frac{x^2}{4} \Big|_0^\pi + \frac{1}{2} \left[ x \cdot \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin 2x}{2} \, dx \right] = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\cos 2x}{8} \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

II. 1°. Teorema bisectoarei în triunghiul  $AMB$  ne dă relația  $\frac{AP}{BP} = \frac{AM}{BM}$ .

Teorema bisectoarei în triunghiul  $BMC$  dă relația  $\frac{CQ}{BQ} = \frac{CM}{BM}$  (v. fig. M.B.2).

Dreapta  $PQ$  este paralelă cu dreapta  $AC$  dacă și numai dacă  $\frac{AP}{BP} = \frac{CQ}{BQ}$  (Thales).

Din relațiile anterioare rezultă că  $PQ$  este paralelă cu  $AC$  dacă și numai dacă  $\frac{AM}{BM} = \frac{CM}{BM}$ , adică dacă și numai dacă  $[AM] = [CM]$  ( $M$  mijlocul lui  $[AC]$ ).

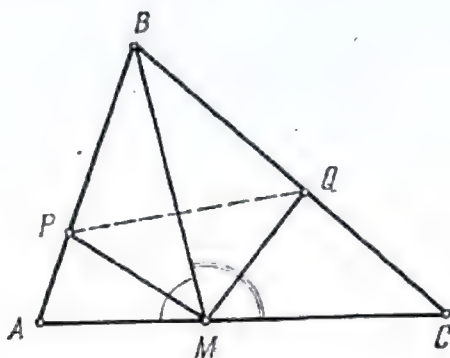


Fig. M.B.2

2°. Bisectoarele din  $A$  și  $B$  intersectează cercul circumscris triunghiului în mijlocul  $A'$  al arcului  $BC$ , respectiv în mijlocul  $B'$  al arcului  $AC$  (v. fig. M.B.3). Ducem  $ID \perp AB$ ; în triunghiul  $AID$  avem  $AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}$ . Apoi:

$$m(\widehat{IBA'}) = \frac{m(\widehat{A'B'})}{2} = \frac{m(\widehat{BC}) + m(\widehat{AC})}{4};$$

$$m(\widehat{BIA'}) = \frac{m(\widehat{BA'}) + m(\widehat{AB'})}{2} = \frac{m(\widehat{BC}) + m(\widehat{AC})}{4}.$$

Deci  $\widehat{IBA'} = \widehat{BIA'}$ , adică  $\triangle BIA'$  este isoscel. Teorema sinusurilor în triunghiul  $ABA'$  dă:  $IA' = BA' = 2R \sin \frac{A}{2}$ . Puterea punctului  $I$  față de cercul  $O$  dă egalitatea:  $AI \cdot IA' = R^2 - OI^2$ , de unde obținem:  $OI^2 = R^2 - 2Rr = R(R - 2r)$ .

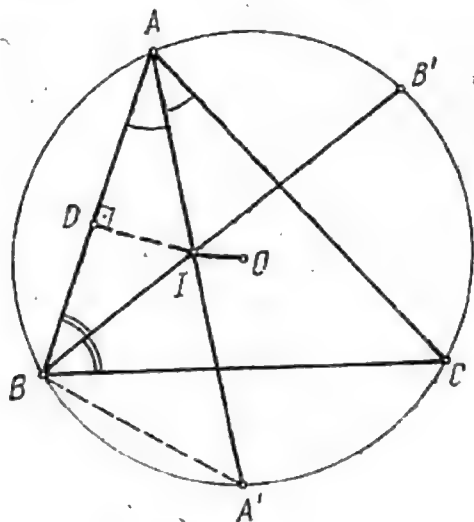


Fig. M.B.3

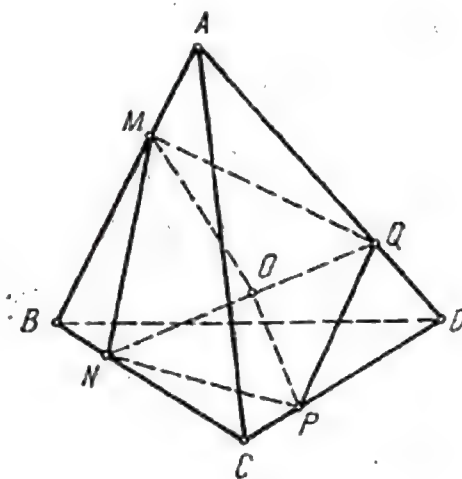


Fig. M.B.4

3°. Fie  $a$  lungimea unei muchii a tetraedrului și fie  $x = AM$ . Triunghiurile  $AMQ$  și  $BMN$  sint congruente, deoarece  $[AM] = [BN]$ ,  $[AQ] = [BM]$  (de lungime  $a - x$ ) și  $m(\widehat{MAQ}) = m(\widehat{MBN}) = 60^\circ$ . Rezultă  $[MN] = [MQ]$ , deci triunghiul  $MNQ$

este isoscel. Atunci obținem  $NQ \perp OM$ . Analog, triunghiurile  $CPN$  și  $DPQ$  sînt congruente, deoarece  $[CP] = [DQ]$ ,  $[CN] = [DP]$  (de lungime  $a - x$ ) și  $m(\widehat{PCN}) = m(\widehat{PDQ}) = 60^\circ$ . Rezultă  $[NP] = [QP]$ , deci triunghiul  $NPQ$  este isoscel. Obținem  $NQ \perp OP$ . Deoarece  $NQ$  este perpendiculară pe două drepte din planul  $MOP$  ( $OM$  și  $OP$ ) este perpendiculară pe  $MOP$ . (v. fig. M.B.4).

4°. Notînd cu  $R_1$  raza mică a trunchiului de con, cu  $R_2$  raza mare a trunchiului de con și cu  $R$  raza sferei, o secțiune prin figură arată ca în fig. M.B.5.

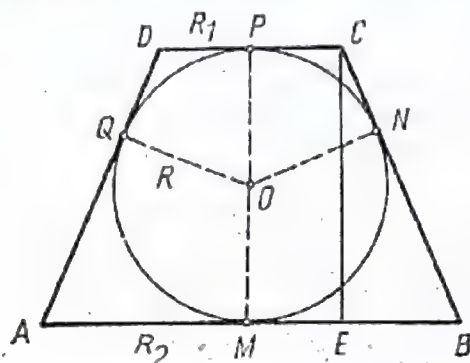


Fig. M.B.5

Avem  $[BM] = [BN] = [AM] = [AQ]$  (de lungime  $R_2$ ) și  $[CP] = [CN] = [DP] = [DQ]$  (de lungime  $R_1$ ). Ducem  $CE \perp AB$  și avem:  $BC = R_2 + R_1$ ,  $BE = R_2 - R_1$  și  $CE = 2R$ . Teorema lui Pitagora aplicată în triunghiul  $CEB$  ne dă relația:  $(R_2 - R_1)^2 + 4R^2 = (R_2 + R_1)^2$ , adică  $R^2 = R_1 R_2$ . Volumul sferei este  $V_{sf} = \frac{4\pi R^3}{3}$ , iar volumul trunchiului de con este  $V_{tr\ con} = \frac{\pi \cdot 2R}{3} (R_2^2 + R_1^2 + R_2 R_1)$ .

Inegalitatea  $V_{tr\ con} > \frac{3}{2} V_{sf}$  devine:  $R_2^2 + R_1^2 + R_2 R_1 > 3R^2$ , adică  $R_2^2 + R_1^2 + R_2 R_1 > 3R_1 R_2$ , sau  $(R_2 - R_1)^2 > 0$ ; evident.

5°. Notăm  $\cos x = y$  și ecuația devine:  $2y^2 - y - (m + 1) = 0$ , cu soluțiile  $y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{8m + 9}}{4}$ , care sînt reale dacă  $\Delta = 8m + 9 \geq 0$ . Rezultă  $m \in \left[-\frac{9}{8}, +\infty\right)$ . Pentru ca ecuația inițială să aibă soluții trebuie ca  $y_1$  sau  $y_2 \in [-1, 1]$ . Discuția se poate face prin mai multe metode.

Metoda I. Notăm cu  $P(y)$  trinomialul  $2y^2 - y - (m + 1)$ . Apar mai multe cazuri.

Cazul a. Avem  $y_1, y_2 \in [-1, 1]$ . Folosind semnul trinomialului se impun condițiile:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ P(-1) \geq 0, \\ P(1) \geq 0, \\ -1 \leq \frac{y_1 + y_2}{2} \leq 1, \end{cases} \quad \text{adică} \quad \begin{cases} 8m + 9 \geq 0, \\ 2 - m \geq 0, \\ -m \geq 0, \\ -1 \leq \frac{1}{4} \leq 1, \end{cases}$$

cu soluțiile  $m \in \left[-\frac{9}{8}, 0\right]$ . Deci pentru  $m \in \left[-\frac{9}{8}, 0\right]$  avem  $y_1, y_2 \in [-1, 1]$

și ecuațiile  $\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{8m + 9}}{4}$  au soluțiile  $x = 2k\pi \pm \arccos \frac{1 \pm \sqrt{8m + 9}}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .



*Cazul b.* Avem  $y_1 \in [-1, 1]$ ,  $y_2 > 1$ . Folosind, din nou, semnul trinomului se impun condițiile:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ P(-1) \geq 0, \\ P(1) \leq 0, \end{cases} \text{ adică } \begin{cases} 8m + 9 \geq 0, \\ 2 - m \geq 0, \\ -m \leq 0, \end{cases}$$

cu soluțiile  $m \in [0, 2]$ . De fapt, pentru  $m = 0$  avem  $y_1, y_2 \in [-1, 1]$ . Deci pentru  $m \in (0, 2]$  avem  $y_1 = \frac{1 - \sqrt{8m+9}}{4} \in [-1, 1]$  ( $y_2 > y_1$ ) și ecuația  $\cos x = \frac{1 - \sqrt{8m+9}}{4}$  are soluțiile  $x = 2k\pi \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{8m+9}}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Cazul c.* Avem  $y_1 < -1$ ,  $y_2 \in [-1, 1]$ . Se impun condițiile:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ P(-1) \leq 0, \\ P(1) \geq 0, \end{cases} \text{ adică } \begin{cases} 8m + 9 \geq 0, \\ 2 - m \leq 0, \\ -m \geq 0, \end{cases}$$

de unde rezultă  $m \in \emptyset$ . Celelalte cazuri nu convin deoarece ambele rădăcini  $y_1, y_2 \notin [-1, 1]$ .

*Metoda II.* Notăm  $P(y) = 2y^2 - y - (m+1)$  și facem substituția  $t = \frac{1-y}{1+y}$ .

Obținem trinomul în variabila  $t$ :  $Q(t) = (2-m)t^2 - 2(m+3)t - m$ . Analizăm separat cazul cînd o rădăcină este  $-1$ . Avem:  $P(-1) = 0$ , deci  $2 - m = 0$ , adică  $m = 2$  și  $y_1, y_2 = \frac{1 \pm 5}{4}$ ;  $y_1 = -1$ ,  $y_2 = \frac{3}{2} \notin [-1, 1]$ . Obținem din  $\cos x = -1$ , soluțiile  $x = 2k\pi \pm \pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Condiția  $y \in (-1, 1]$  este echivalentă cu  $t \in [0, \infty)$ .

*Cazul a.* Avem  $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ . Se impun condițiile asupra trinomului în  $t$ :

$$\begin{cases} \Delta_1 \geq 0, \\ P \geq 0, \\ S \geq 0, \end{cases} \text{ adică } \begin{cases} 8m + 9 \geq 0, \\ \frac{-m}{2-m} \geq 0, \\ \frac{2(m+3)}{2-m} \geq 0, \end{cases}$$

cu soluțiile  $m \in \left[-\frac{9}{8}, 0\right]$ . Soluțiile sînt aceleași  $x = 2k\pi \pm \arccos \frac{1 \pm \sqrt{8m+9}}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Cazul b.* Avem  $t_1 \in [0, \infty)$ ,  $t_2 < 0$ . Se impun condițiile:

$$\begin{cases} \Delta_1 \geq 0, \\ P \leq 0, \end{cases} \text{ adică } \begin{cases} 8m + 9 \geq 0, \\ \frac{-m}{2-m} \leq 0, \end{cases}$$

cu soluțiile  $m \in [0, 2]$ . Scoțînd pe  $m=0$  care apare în cazul a) și adăugînd pe  $m=2$  (tratat separat), obținem  $m \in (0, 2]$  și soluțiile  $x = 2k\pi \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{8m+9}}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . În celelalte cazuri nu obținem soluții convenabile.

*Metoda III.* După ce am aflat  $y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{8m+9}}{4}$  impunem direct condițiile:  $\Delta \geq 0$ ,  $-1 \leq y_1 \leq 1$ ,  $-1 \leq y_2 \leq 1$  etc. și rezolvînd inecuațiile iraționale (adică cu radicali) care apar se obține aceeași discuție pe cazuri. Deși prin această metodă condițiile care se impun sînt mai simple, rezolvarea inecuațiilor iraționale poate fi

dificilă și, de aceea, această metodă poate fi mai complicată decât celelalte două metode prezentate anterior.

III. 1°. Avem:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ . Graficul are o singură asimptotă (verticală)  $x = 0$ . Apoi:  $f'(x) = \frac{x^4 + 4x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2}$  și  $f'(x) = 0$  pentru  $x = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$ . Calculăm:  $f''(x) = \frac{(1 - x^2)(x^4 + 10x^2 + 1)}{x^3(x^2 + 1)^3}$  și  $f''(x) = 0$  pentru  $x = 1$ .  
Tabloul de variație este următorul:

$x$	0	$\sqrt{\sqrt{5}-2}$	1	$\infty$			
$f'(x)$	—	—	0	+	+	+	
$f(x)$	$ ^{+\infty}$	$\searrow$	$f(\sqrt{\sqrt{5}-2})$	$\nearrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		+	+	0	—	—	—

și graficul (fig. M.B.6).

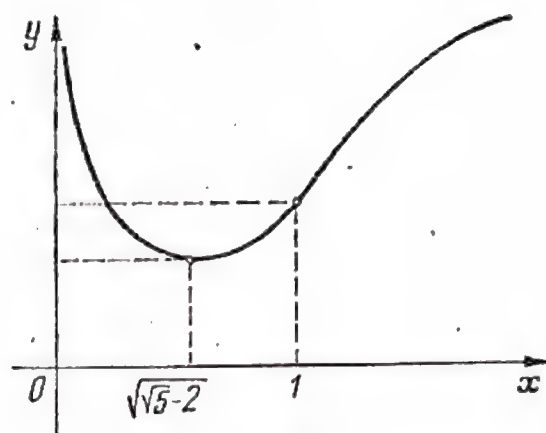


Fig. M.B.6

2°. Notăm cu  $P(x)$  determinantul și îl calculăm astfel: adunăm coloana a doua la prima coloană și obținem:

$$P(x) = \begin{vmatrix} 2-x & a-x & x-1 \\ 1 & x^2 & -1 \\ 2-x & x+a & x-2 \end{vmatrix}.$$

Adunăm acum coloana întâi la coloana a treia și rezultă:

$$P(x) = \begin{vmatrix} 2-x & a-x & 1 \\ 1 & x^2 & 0 \\ 2-x & x+a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ 2-x & x+a \end{vmatrix} = x^3 - 2x^2 + x + a.$$

Rădăcina dublă a lui  $P(x)$  se află printre rădăcinile lui  $P'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ . Obținem  $x'_1 = 1$  și  $x'_2 = \frac{1}{3}$ . Din enunț rezultă că rădăcina dublă este  $x_1 = x_2 = 1$  și din condiția  $P(1) = 0$  rezultă  $a = 0$ . Obținem (pentru  $a = 0$ ) descompunerea  $P(x) = x(x-1)^2$ , deci  $x = 1$  este rădăcină dublă.

3°. Caz de nedeterminare de tipul  $1^\infty$ . Procedăm astfel:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [1 + (\sin x - 1)]^{\frac{1}{\sin x - 1} \cdot \frac{\sin x - 1}{2x - \pi}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{2x - \pi}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{2}}{2x - \pi}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{4 \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}} = e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = 1. \end{aligned}$$

4°. Descompunem mai întâi în fracții simple:  $\frac{1}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$ .

Obținem:  $A = \frac{1}{5}$ ,  $B = -\frac{1}{5}$ ,  $C = \frac{1}{5}$ . Atunci avem:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{1}{5} \int_0^1 \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{5} \int_0^1 \frac{x dx}{x^2+4} + \frac{1}{5} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4} = \\ &= \frac{1}{5} \ln |x+1| \Big|_0^1 - \frac{1}{10} \ln(x^2+4) \Big|_0^1 + \frac{1}{10} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{10} \left( \ln \frac{16}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

5°. Deoarece  $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$  rezultă că  $\varepsilon^3 = 1$ . Avem:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1+\varepsilon+\varepsilon^2 & 1+\varepsilon^2+\varepsilon \\ 1+\varepsilon+\varepsilon^2 & 1+\varepsilon^2+\varepsilon & 3 \\ 1+\varepsilon^2+\varepsilon & 3 & 1+\varepsilon+\varepsilon^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad A^4 = A^2 \cdot A^2 = 9 \cdot I_3.$$

IV. 1°. *Metoda I.* Avem:  $m(\widehat{DBC}) = m\left(\frac{\widehat{DC}}{2}\right) = m\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)$  și  $m(\widehat{DCB}) = m\left(\frac{\widehat{BD}}{2}\right) = m\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)$ . Teorema sinusurilor în  $\triangle ABD$  ne dă:  $d = 2R \sin\left(B + \frac{A}{2}\right)$ , iar teorema

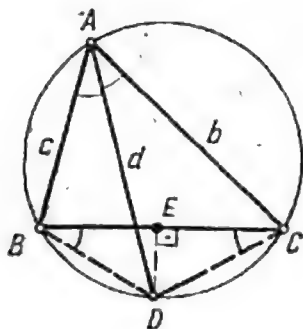


Fig. M.B.7

sinusurilor în  $\triangle ACD$  ne dă:  $d = 2R \sin\left(C + \frac{A}{2}\right)$  (v. fig. M.B.7). Adunând cele două relații, obținem:  $2d = 2R \left( \sin\left(B + \frac{A}{2}\right) + \sin\left(C + \frac{A}{2}\right) \right)$ . Din teorema sinusurilor în



triunghiul  $ABC$  avem:  $b = 2R \sin B$ ,  $c = 2R \sin C$ , deci  $b + c = 2R(\sin B + \sin C)$ . Inegalitatea din enunț se scrie echivalent astfel:

$$\sin\left(B + \frac{A}{2}\right) + \sin\left(C + \frac{A}{2}\right) > \sin B + \sin C, \text{ sau:}$$

$$2 \sin \frac{A+B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} > 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}. \text{ Rezultă:}$$

$$\cos \frac{B-C}{2} \left(1 - \sin \frac{B+C}{2}\right) > 0,$$

care este o inegalitate evidentă, deoarece  $m\left(\frac{B-C}{2}\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  și  $m\left(\frac{B+C}{2}\right) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

*Metoda II.* Aplicând teorema lui Ptolemeu patrulaterului inscriptibil  $ABDC$  obținem:  $AB \cdot CD + AC \cdot BD = AD \cdot BC$  sau  $a \cdot d = b \cdot BD + c \cdot CD$ . Dar  $m(\widehat{BD}) = m(\widehat{CD})$ , deci  $[BD] \equiv [CD]$  și atunci putem scrie relația anterioară sub forma:  $a \cdot d = BD(b + c)$ . Ducem  $DE \perp BC$  și avem  $[BE] \equiv [EC]$ , adică  $BE = \frac{a}{2}$ .

Evident  $BD > BE = \frac{a}{2}$ . Din relația anterioară obținem:  $a \cdot d > \frac{a}{2}(b + c)$ , adică  $d > \frac{1}{2}(b + c)$ . Ținând seama de faptul că trebuie demonstrată și relația lui Ptolemeu (problemă din manual) cele două soluții sînt comparabile ca întindere.

2°. Fie  $MNPQ$  un dreptunghi înscris în semicercul dat. Avem:  $ON = R \cos \alpha$ ,  $PN = R \sin \alpha$ , deci  $MN = 2R \cos \alpha$ . Atunci aria lui  $MNPQ$  este:  $S = MN \cdot PN = 2R^2 \sin \alpha \cos \alpha = R^2 \sin 2\alpha$ . Evident, aria maximă se obține pentru  $\sin 2\alpha = 1$ , adică  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . Rezultă  $ON = \frac{R\sqrt{2}}{2} = PN$  și  $S_{\max} = R^2$  (v. fig. M.B.8).

3°. Deoarece  $CB \perp AB$  (dreapta de intersecție a celor două plane) și  $p \perp q$  rezultă  $CB \perp q$  (v. fig. M.B.9). Din teorema celor trei perpendiculare rezultă:  $CB \perp q$ ,  $BD \perp AD$ , deci  $CD \perp AD$ . Deoarece  $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ADC}) = \frac{\pi}{2}$  rezultă

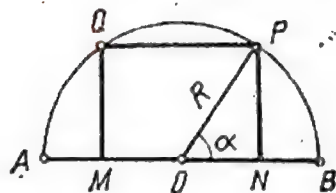


Fig. M.B.8

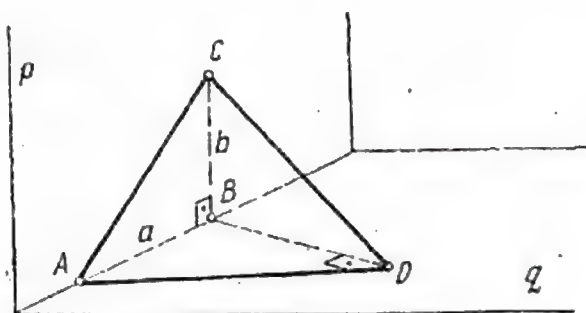


Fig. M.B.9

că punctele  $B$  și  $D$  se află pe sfera de diametru  $[AC]$ . Avem  $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$  și raza sferei este  $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ . Atunci volumul sferei este:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{(a^2 + b^2) \sqrt{a^2 + b^2}}{8} = \frac{\pi}{6} (a^2 + b^2) \sqrt{a^2 + b^2}.$$

4°. O secțiune axială prin figură arată astfel:

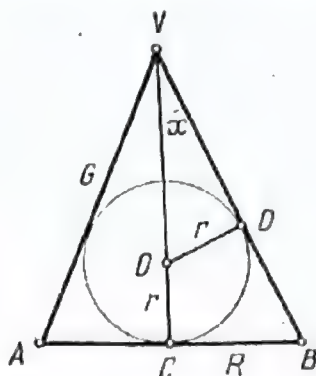


Fig. M.B.10

Avem:  $VA = VB = G$ ,  $CV = h$ ,  $AC = BC = R$ . În triunghiul dreptunghic  $VOD$  putem scrie:  $OV = \frac{r}{\sin x}$ . Atunci  $h = OV + OC = \frac{r}{\sin x} + r = \frac{r(1 + \sin x)}{\sin x}$ . În triunghiul dreptunghic  $VBC$  avem (v. fig. M.B.10):

$$R = h \operatorname{tg} x = \frac{r(1 + \sin x)}{\cos x} \text{ și } G = \frac{h}{\cos x} = \frac{r(1 + \sin x)}{\sin x \cdot \cos x}.$$

Atunci aria laterală a conului este:  $A_{\text{lat}} = \pi R G = \frac{\pi r^2 (1 + \sin x)^2}{\sin x \cdot \cos^2 x}$ . Aria bazei

conului este  $\pi R^2$ , iar aria sferei este  $4\pi r^2$ . Rezultă ecuația:  $\frac{\pi r^2 (1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} = 4\pi r^2$ , adică  $(1 + \sin x)^2 = 4 \cos^2 x$ . Deci  $1 + 2 \sin x + \sin^2 x = 4 - 4 \sin^2 x$ , sau  $5 \sin^2 x + 2 \sin x - 3 = 0$ . Obținem  $\sin x = -1$  (neacceptabilă) și  $\sin x = \frac{3}{5}$ .

Rezultă  $x = \arcsin \frac{3}{5}$ .

5°. Avem:  $(\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 1 - \sin 2x$  și  $\cos 4x + 1 = 2 \cos^2 2x = 2(1 - \sin^2 2x)$ . Ecuația se scrie echivalent:  $m(1 - \sin 2x) - 2(1 - \sin^2 2x) = 0$  sau  $(1 - \sin 2x)(m - 2 - 2 \sin 2x) = 0$ . Rezultă  $1 - \sin 2x = 0$  cu soluțiile  $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , pentru orice  $m \in \mathbb{R}$  și  $m - 2 - 2 \sin 2x = 0$ , de unde:  $\sin 2x = \frac{m-2}{2}$ . Impunem condițiile:  $-1 \leq \frac{m-2}{2} \leq 1$ , adică  $m \in [0, 4]$ , pentru care mai avem un rând de soluții:  $2x = (-1)^l \arcsin \frac{m-2}{2} + l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , adică  $x = \frac{(-1)^l}{2} \arcsin \frac{m-2}{2} + l \frac{\pi}{2}$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ .

V.1°. a) Sistemul are soluție unică dacă determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} = a^3 - 7a + 6$$

este nenul. Rezolvând ecuația  $a^3 - 7a + 6 = 0$  avem:

$$a^3 - a - 6a + 6 = a(a - 1)(a + 1) - 6(a - 1) = (a - 1)(a^2 + a - 6),$$

de unde  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = -3$ . Deci pentru  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 2\}$  sistemul are soluție unică  $((0, 0, 0))$  deoarece este omogen.

b) Pentru  $a = 1$  matricea sistemului

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

are rangul 2, deoarece determinantul  $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ . Sistemul fiind omogen este compatibil (toți determinanții caracteristici sînt, evident, nuli). Pentru rezolvare renunțăm la ecuația a treia (ecuație secundară) și scriem sistemul sub forma:

$$\begin{cases} y + 2z = -x; \\ y + z = -x. \end{cases}$$

Scăzînd ecuațiile obținem  $z = 0$  și apoi  $y = -x$ . Deci soluțiile sînt:  $x = \lambda$ ;  $y = -\lambda$ ;  $z = 0$ ,  $(\forall) \lambda \in \mathbb{R}$ .

2°. Avem:  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$ ,  $i^5 = i$ ,  $i^6 = -1$ . Înlocuind în ecuație  $x = i$ , obținem relația:  $(m + 1)i = 0$ , deci  $m = -1$ .

3°. Avem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( 1 - \frac{\ln(x+1)}{x} \right) = +\infty,$$

deci  $x = -1$  este asimptotă verticală. Calculăm:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{\ln(x+1)}{x} \right) = 1. \text{ Apoi:}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-\ln(x+1)) = -\infty,$$

deci nu avem asimptote orizontale și nici oblice. Observăm că  $f(0) = 0$ . Calculăm prima derivată:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}.$$

Calculăm și derivata a doua:  $f''(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ . Tabloul de variație este următorul:

$x$	-1	0	$\infty$
$f'(x)$	-	- 0 +	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	+	+

și graficul (v. fig. M.B.11).

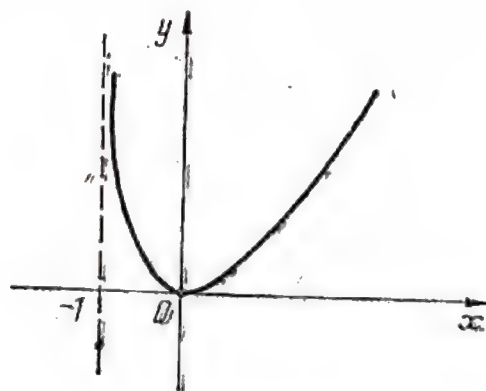


Fig. M.B.11



4°. Avem cazul de nedeterminare 0°. Scriem astfel:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)}{\ln x}}.$$

Pentru limita de la exponent avem cazul de nedeterminare  $\frac{-\infty}{\infty}$  și aplicăm regula lui l'Hôpital. Rezultă:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{0}{0}}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{1+x^2} = -1. \end{aligned}$$

Deci limita inițială este  $e^{-1} = \frac{1}{e}$ .

5°. Avem:

$$I = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \int \frac{1+x^2}{x\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = J + \sqrt{1+x^2},$$

unde:

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\frac{dx}{x^2}}{\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}} = - \int \frac{-\frac{dx}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = - \int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = \\ &= - \ln \left( \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + \frac{1}{x} \right) + C. \text{ Obținem: } I = \sqrt{1+x^2} - \ln \frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{x} + C. \end{aligned}$$

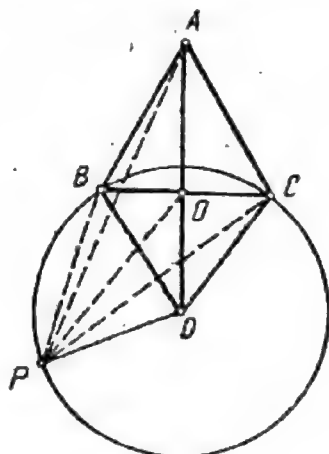


Fig. M.B.12

VI. 1°. Fie  $O$  intersecția lui  $[BC]$  cu  $[AD]$ . Unim  $P$  cu  $O$  (v. fig. M.B.12). Fie  $l$  lungimea laturii în triunghiul echilateral  $ABC$ . Atunci  $OA = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

și  $AD = 2OA = l\sqrt{3}$ . Teorema medianei în triunghiul  $PBC$  ne dă relația:  
 $PO^2 = \frac{2(PB^2 + PC^2) - l^2}{4}$ , iar teorema medianei în triunghiul  $PAD$  ne conduce  
 la relația  $PO^2 = \frac{2(PA^2 + l^2) - 3l^2}{4}$ . Din cele două relații obținem:

$$2(PB^2 + PC^2) - l^2 = 2PA^2 + 2l^2 - 3l^2,$$

deci  $PB^2 + PC^2 = PA^2$ , adică  $a^2 = b^2 + c^2$ .

2°. Avem:  $AM^2 = AB^2 - BM^2 = 130$ , deci  $AM = \sqrt{130}$  dm (v. fig. M.B.13).

Din teorema bisectoarei în triunghiul  $AMC$  obținem:  $\frac{AE}{EC} = \frac{AM}{MC}$ , deci

$$\frac{AE}{AE + EC} = \frac{AM}{AM + MC}, \text{ adică } \frac{AE}{11,5} = \frac{\sqrt{130}}{\sqrt{130} + 1,5}. \text{ Rezultă } AE = \frac{11,5 \cdot \sqrt{130}}{\sqrt{130} + 1,5} \text{ dm.}$$

3°. Prin ipoteză avem:  $m(\widehat{ACB}) = 45^\circ$ ,  $m(\widehat{ADB}) = 30^\circ$  și  $m(\widehat{CAD}) = 90^\circ$ .  
 Ducem  $AE \perp CD$ ; deoarece  $AB \perp p$ , din teorema celor trei perpendiculare rezultă  $BE \perp CD$  (v. fig. M.B.14). În triunghiul  $ABC$  avem:  $BC = AB = a$

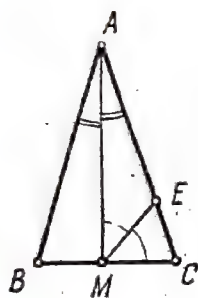


Fig. M.B.13

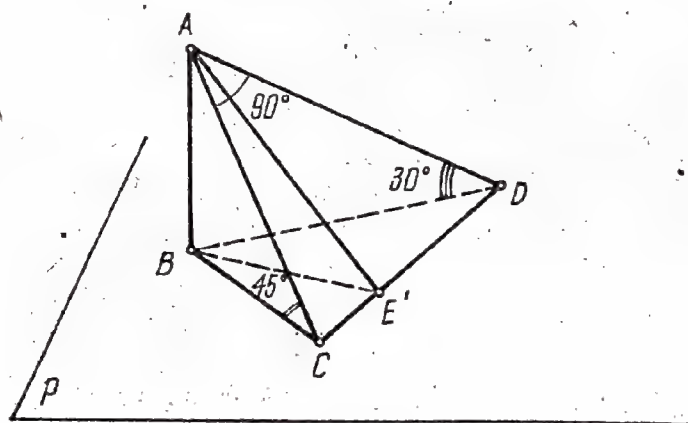


Fig. M.B.14

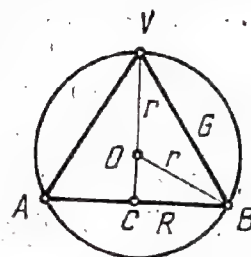


Fig. M.B.15

și  $AC = a\sqrt{2}$ . În triunghiul  $ABD$  avem:  $AD = 2AB = 2a$  și  $BD = a\sqrt{3}$ . În  
 triunghiul  $ACD$  rezultă:  $CD^2 = AC^2 + AD^2 = 2a^2 + 4a^2 = 6a^2$ , deci  $CD = a\sqrt{6}$ .

Apoi  $AE = \frac{AC \cdot AD}{CD} = \frac{a\sqrt{2} \cdot 2a}{a\sqrt{6}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ . În triunghiul  $ABE$  avem:  $BE^2 =$   
 $= AE^2 - AB^2 = \frac{3a^2}{9}$ , deci  $BE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Rezultă  $\sigma(ABC) = \frac{a^2}{2}$ ,  $\sigma(ABD) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ ,

$\sigma(ACD) = a^2\sqrt{2}$  și  $\sigma(BCD) = \frac{CD \cdot BE}{2} = \frac{a\sqrt{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ . Atunci, aria  
 totală a piramidei  $[ABCD]$  este:  $S = \sigma(ABC) + \sigma(ABD) + \sigma(ACD) + \sigma(BCD) =$   
 $= \frac{a^2(1 + \sqrt{3} + 3\sqrt{2})}{2}$ .

4°. O secțiune axială arată ca în fig. M.B.15. Din ipoteză rezultă relația:  
 $2h = R + G$ . Din triunghiul  $VBC$  obținem:  $h^2 = G^2 - R^2 = (G + R)(G - R)$ .  
 Rezultă relația:  $h^2 = 2h(G - R)$ , deci  $h = 2(G - R)$ . Deducem egalitatea

$4(G - R) = G + R$ , deci  $G = \frac{5}{3} R$  și  $h = \frac{4R}{3}$ . Din triunghiul  $OBC$  rezultă:  
 $OB^2 = CB^2 + OC^2$ , deci  $r^2 = R^2 + \left(\frac{4R}{3} - r\right)^2$ , adică  $R^2 + \frac{16R^2}{9} - \frac{8Rr}{3} = 0$ , de  
unde  $R = \frac{24}{25} r$ . Obținem apoi:  $G = \frac{8}{5} r$  și  $h = \frac{32}{25} r$ . Volumul conului este:  
 $V_{\text{con}} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{24^2}{25^2} \cdot \frac{32}{25} r^3 = \frac{5144}{15625} \pi r^3$ , iar aria laterală este:  $A_{\text{lat}} = \pi R G =$   
 $= \pi \cdot \frac{24}{25} r \cdot \frac{8}{5} r = \frac{192}{125} \pi r^2$ .

5°. Avem:  $MN = |z_M - z_N| = |5 + i| = \sqrt{26}$ ,  $NP = |z_P - z_N| =$   
 $= |1 - 5i| = \sqrt{26}$ ,  $PQ = |z_Q - z_P| = |5 + i| = \sqrt{26}$  și  $QM = |z_M - z_Q| =$   
 $= |-1 + 5i| = \sqrt{26}$ , deci  $MN = NP = PQ = QM$ , adică  $MNPQ$  este romb.  
Apoi:  $MP^2 = |z_P - z_M|^2 = |-4 - 6i|^2 = 16 + 36 = 52 = MN^2 + NP^2$ ,  
deci  $\widehat{MNP} = 90^\circ$ , adică  $MNPQ$  este pătrat (v. fig. M.B.16). Putem scrie  
 $\frac{z_M}{z_Q} = \frac{5 + 6i}{6 + i} = \frac{(5 + 6i)(6 - i)}{36 + 1} = \frac{36 + 31i}{37} = \sqrt{\frac{61}{37}} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , unde  $\text{tg } \varphi = \frac{31}{36}$ ,  
adică  $\varphi = \text{arctg } \frac{31}{36}$ . Rezultă:  $\sqrt[4]{\frac{z_M}{z_Q}} = \sqrt[8]{\frac{61}{37}} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{4} \right)$ ,  
 $k = 0, 1, 2, 3$ , unde  $\varphi = \text{arctg } \frac{31}{36}$ .

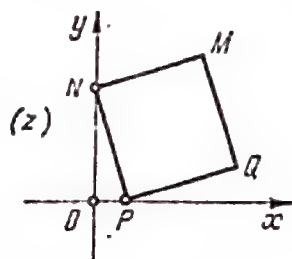


Fig. M.B.16

VII. 1°. Cum

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

procedînd prin inducție matematică, se găsește:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}, (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

2°. Sistemul dat este simetric în  $x$  și  $y$ . Punînd  $x + y = s$  și  $xy = p$ , sistemul respectiv ia forma:

$$\begin{cases} p + s = 11; \\ ps = 30, \end{cases}$$

necunoscutele  $p$  și  $s$  fiind rădăcinile ecuației:  $t^2 - 11t + 30 = 0$ , adică  $(p, s) \in \{(5, 6), (6, 5)\}$ , deci  $(x, y) \in \{(2, 3), (3, 2), (1, 5), (5, 1)\}$  sînt soluțiile căutate.



3°. Observind că:

$$E(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{8x^3 - 24x + 16}{2x + 1} = \frac{1}{8} \left( 4x^2 - 2x - 11 + \frac{27}{2x + 1} \right), \text{ deducem că:}$$

(1)  $E(x) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left( 4x^2 - 2x - 11 + \frac{27}{2x + 1} \right) \in \mathcal{M}_8 \subset \mathbb{Z}$ , cu  $x \in \mathbb{Z}$ . Cum însă, pentru  $x \in \mathbb{Z}$ , avem  $4x^2 - 2x - 11 \in \mathbb{Z}$ , rezultă că  $E(x) \in \mathbb{Z}$  atunci și numai atunci când sînt îndeplinite condițiile (1) și (2)  $\frac{27}{2x + 1} \in \mathbb{Z}$ . Pe de altă parte, (2) este adevărată dacă și numai dacă

$$2x + 1 \in \mathcal{D}_{27} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27\}, \text{ adică:}$$

$$(3) \quad x \in \{-14, -5, -2, -1, 0, 1, 4, 13\},$$

de unde rezultă că:  $A = \{-14, -5, -2, -1, 0, 1, 4, 13\}$ , dacă avem în vedere că, pentru  $x$  satisfăcînd (3), este îndeplinită (1).

Notă. Calculul valorilor lui  $E(x)$ , cu  $x$  satisfăcînd (3), se poate realiza chiar mai simplu dacă avem în vedere că:

$$E(x) = \frac{(x-1)^2(x+2)}{2x+1}.$$

4°. Pentru o funcție  $f: A \rightarrow B$ , ținem seama că:

$P_1: f$  este surjectivă  $\Leftrightarrow (\forall)y \in B$ , ecuația  $f(x) = y$  admite cel puțin o soluție  $x \in A$ ;

$P_2: f$  este injectivă  $\Leftrightarrow (\forall)y \in B$ , ecuația  $f(x) = y$  admite cel mult o soluție  $x \in A$ .

Notăm:  $\text{Im } f = \{y \in B \mid (\exists)x \in A, \text{ astfel încît } f(x) = y\}$ . În cazul problemei considerate, fie  $y \in \mathbb{R}$ . Să studiem ecuația:

$$(1) \quad f_{mn}(x) = y,$$

i) Căutînd soluții  $x \leq 0$ , ecuația (1) se reduce la  $x - m = y$ , deci  $x = y + m$  este soluție dacă și numai dacă  $y + m \leq 0$ , ceea ce este echivalent cu  $y \in (-\infty, -m]$ . Așadar,  $(\forall)y \in (-\infty, -m]$ , (1) este verificată pentru  $x = y + m \leq 0$ , deci  $(-\infty, -m] \subseteq \text{Im } f_{mn}$ .

ii) Căutînd soluții  $x > 0$ , ecuația (1) se reduce la:

$$(2) \quad nx + m = y.$$

Dacă  $n = 0$ , atunci (2) are soluții numai pentru  $y = m$ .

Dacă  $n \neq 0$ ,  $x = \frac{y-m}{n}$  este soluție a lui (2) atunci și numai atunci cînd  $\frac{y-m}{n} > 0$ .

Revenind la textul problemei date, găsim:

a) Ținem cont de  $P_1$ ; în plus, din studiul făcut în cazul i) avem că  $(\forall)y \in (-\infty, -m]$ ,  $(\exists)x = m + y \in \mathbb{R}_- \subset \mathbb{R}$  astfel încît  $f_{mn}(x) = y$ .

Așadar, pentru ca  $f$  să fie surjectivă este necesar și suficient ca pentru orice  $y > -m$ , ecuația  $nx + m = y$  să aibă o soluție pozitivă, adică  $x = \frac{y-m}{n} > 0$ ,

$(\forall)y > -m$ .

Dacă  $n = 0$ , conform cu ii), avem:

$$\text{Im } f_{mn} = (-\infty, -m] \cup \{m\} \subset \mathbb{R} \text{ și } \text{Im } f_{mn} \neq \mathbb{R},$$

deci  $f_{mn}$  nu este surjectivă.

Pentru  $n < 0$ , potrivit aceluiași caz ii),  $x = \frac{y-m}{n}$  este soluție dacă și numai dacă  $\frac{y-m}{n} > 0$ , adică  $y < m$ , deci:

$\text{Im } f_{mn} = (-\infty, -m] \cup (-\infty, m) = (-\infty, |m|) \subset \mathbb{R}$  și  $\text{Im } f_{mn} \neq \mathbb{R}$ , prin urmare  $f_{mn}$  nu este surjectivă. Analog, pentru  $n > 0$ , găsim:

$$\text{Im } f_{mn} = (-\infty, -m] \cup (m, \infty),$$

deci  $f_{mn}$  este surjectivă atunci și numai atunci când  $\text{Im } f_{mn} = \mathbb{R}$ , adică  $-m \geq m$ , ceea ce este echivalent cu  $m \in (-\infty, 0]$ . În concluzie,  $f_{mn}$  este surjectivă pentru orice  $m \in (-\infty, 0]$  și orice  $n \in (0, \infty)$ .

b) În acord cu cele obținute în cazul i), rezultă că oricare ar fi  $y \leq -m$ , există o rădăcină  $x = y + m < 0$  a ecuației (1). Ținând cont și de ii), găsim că dacă  $n = 0$ , atunci  $f_{mn}$  nu este injectivă, deoarece oricare ar fi două numere reale, pozitive,  $x_1 \neq x_2$ , avem  $f_{m0}(x_1) = f_{m0}(x_2) = m$ . Analog, dacă  $n < 0$ , atunci oricare ar fi  $y < -|m| \leq -m$ , există o soluție negativă  $x_1 = y + m$  și una pozitivă

$$x_2 = \frac{y-m}{n} \text{ ale ecuației (1), adică:}$$

$$(\exists) x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_1 < 0 < x_2, \quad f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Pentru  $n > 0$ , ținând cont de  $P_2$ , rezultă că ecuația (1) are o soluție pozitivă  $x = \frac{y-m}{n} > 0$  dacă și numai dacă  $y > m$  și o soluție nulă sau negativă

$x = y + m$  atunci și numai atunci când  $y \leq -m$ . Pentru a nu avea (simultan) o soluție pozitivă și una nulă sau negativă este necesar și suficient ca  $-m \leq m$ , adică  $m \geq 0$ . Prin urmare,  $f_{mn}$  este injectivă dacă și numai dacă  $m \in (0, \infty]$  și  $n \in (0, \infty)$ .

c)  $f_{mn}$  este bijectivă dacă și numai dacă este surjectivă și injectivă, adică atunci și numai atunci când  $m = (-\infty, 0] \cap [0, \infty) = \{0\}$  și  $n \in (0, \infty)$ .

5°. Ținând seama că „ $a \in \mathbb{Z}_n^*$  este inversabil dacă și numai dacă c.m.m.d.c.

$(a, n) = 1$ ”, găsim că mulțimea elementelor inversabile din  $\mathbb{Z}_{12}$  este  $U = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{11}\}$ .

Se verifică fără dificultate că  $(\forall) x \in U$ , avem  $x \cdot x = \hat{1}$ , deci

$$(\hat{1})^{-1} = \hat{1}; \quad (\hat{5})^{-1} = \hat{5}; \quad (\hat{7})^{-1} = \hat{7}; \quad (\hat{11})^{-1} = \hat{11}.$$

*Notă.* Folosirea proprietății (teoremei) respective putea fi evitată dacă, de exemplu, s-ar fi procedat la scrierea celor 144 de elemente ale tabelului de înmulțire în  $\mathbb{Z}_{12}$ , dar față de valoarea mare a lui  $n$  ( $n = 12$ ) această din urmă cale nu este recomandată.

VIII. 1°. Ținem seama că:

„P: Dacă  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  și  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sînt șiruri convergente și dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ , atunci

șirul  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ .”

Fie  $b_n = a_{n+1}$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ . Cum  $(b_n)_{n \geq 1}$  este subșir al șirului  $(a_n)_{n \geq 1}$  convergent, prin ipoteză, către un număr real, diferit de zero, avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \stackrel{\text{not}}{=} l \neq 0$$

și, aplicînd propoziția amintită, găsim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{l}{l} = 1.$$

$$2^\circ. (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } g(x) < 0, \\ 0 & \text{dacă } g(x) = 0, \\ 1 & \text{dacă } g(x) > 0, \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x = 2, \\ 1 & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}. \end{cases}$$

$f \circ g$  este continuă pe  $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ , fiind constantă (deci funcție elementară). Dar:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f \circ g)(x) = 1 \neq (f \circ g)(2) = 0,$$

deci  $f \circ g$  nu este continuă în  $x = 2$ .

$$(g \circ f)(x) = [f(x) - 2]^2 = \begin{cases} 9 & \text{dacă } x < 0, \\ 4 & \text{dacă } x = 0, \\ 1 & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Cum  $(g \circ f)(x) = 9, (\forall)x \in (-\infty, 0)$ , rezultă că  $g \circ f$  este continuă pe  $(-\infty, 0)$ . Analog,  $g \circ f$  este continuă pe  $(0, \infty)$ , dar, în  $x = 0$ ,  $g \circ f$  nu are nici măcar limită deoarece:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (g \circ f)(x) = 9 \neq 1 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (g \circ f)(x),$$

deci nu este continuă în punctul respectiv.

3°. Observăm mai întâi că restricția lui  $f$  la intervalul  $[1, \infty)$  are ca reprezentare grafică o semidreaptă închisă, inclusă în prima bisectoare. Așadar, este suficient să studiem restricția lui  $f$  la intervalul  $(-\infty, 1)$ .

Intersecția cu axele:  $G_f \cap Ox = G_f \cap Oy = \{O(0, 0)\}$ . Cum  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,

rezultă că  $f$  nu admite asimptotă orizontală la  $-\infty$ .

Din:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x - 1} = 1,$$

deducem că  $y = x + 1$  este asimptotă oblică la  $-\infty$ . În plus:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2}{x - 1} = -\infty,$$

deci dreapta de ecuație  $x = 1$  este asimptotă verticală, la dreapta, pentru  $f$ . Funcția  $f$  este derivabilă pe intervalul  $(-\infty, 1)$  și avem:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2},$$

pentru care se constată, fără dificultate că:

$$f'(x) > 0, (\forall)x \in (-\infty, 0); \quad f'(0) = 0; \quad f'(x) < 0, (\forall)x \in (0, 1).$$

Mai mult:

$$f'_s(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = -\infty.$$



Dar, pe intervalul  $(-\infty, 1)$ ,  $f$  este de două ori derivabilă și:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} < 0, (\forall)x \in (-\infty, 1).$$

Tabloul de variație a restricției lui  $f$  la intervalul  $(-\infty, 1)$  este:

$x$	$-\infty$					0					1	2
$f _{(-\infty, 1)}$	$-\infty$		$\nearrow$			0		$\searrow$		$-\infty$		
$f' _{(-\infty, 1)}$		+	+	+	+	0	-	-	-	$-\infty$		
$f'' _{(-\infty, 1)}$		-	-	-	-	-	-	-	-	-		

În figura M.B.17 este redată reprezentarea geometrică a graficului funcției  $f$ .

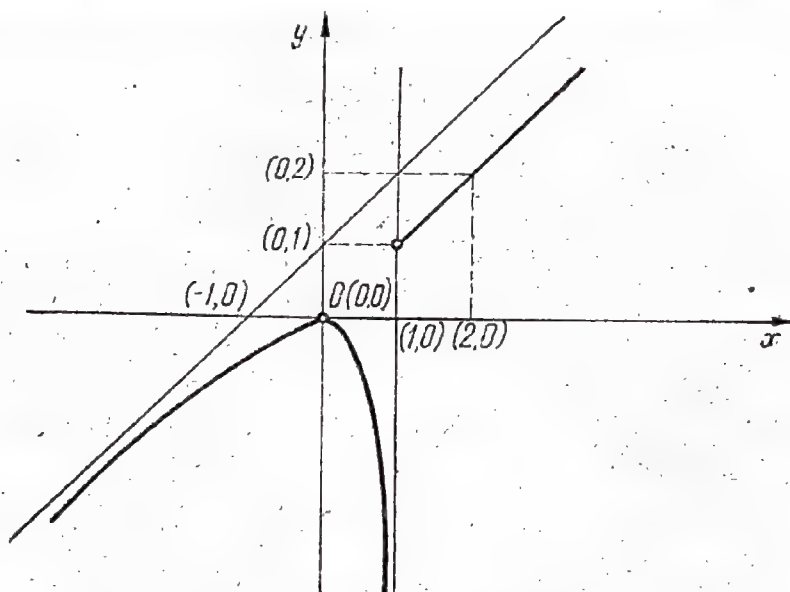


Fig. M.B.17

Notă. Cum

$$(x+1) - \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{1-x} > 0, (\forall)x \in (-\infty, 1); (x+1) - x > 0, (\forall)x \in [1, +\infty),$$

rezultă că graficul funcției  $f$  nu întâlnește asimptota oblică, fiind situat peste tot sub asimptota respectivă.

4°. Notînd  $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$  și punînd  $1 + \sqrt{x} = t$ , avem  $x = (t-1)^2$ , unde  $t: [0, 1] \rightarrow [1, 2]$ ,  $t(0) = 1$ ,  $t(1) = 2$ ; în plus,  $dx = 2(t-1) dt$ . Cum  $f: [0, 1] \rightarrow [1, 1 + \sqrt{2}]$  este continuă, deci integrabilă, avem:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \sqrt{x}} dx = \int_1^2 \sqrt{t} \cdot 2(t-1) dt = 2 \int_1^2 (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) dt = \frac{8(\sqrt{2} + 1)}{15}.$$

5°. Considerînd schimbarea de variabilă:

$u = 1 - x$ ;  $u: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $u(0) = 1$ ,  $u(1) = 0$ , avem:  $du = -dx$ , deci:

$$\int_0^1 x^n (1-x)^p dx = - \int_1^0 (1-u)^n \cdot u^p du = \int_0^1 (1-x)^n \cdot x^p dx.$$



Din (1) și (2), găsim:  $\frac{AC^2}{BD^2} = \frac{DC \cdot EB}{AB \cdot EB}$ , adică:  $\frac{AC^2}{BD^2} = \frac{DC}{AB}$ , de unde:  
 $\frac{AC}{BD} = \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

3°. Fie  $M, N, P, Q, R, S$  mijloacele muchiilor  $[AB], [BC], [CD], [AD], [AC], [BD]$  (v. fig. M.B.20), respectiv; atunci:

- (1)  $(A, B, P) \cap (C, D, M) = MP$ ;  $(B, C, Q) \cap (A, D, N) = NQ$ ;  
 $(B, D, R) \cap (A, C, S) = RS$ .

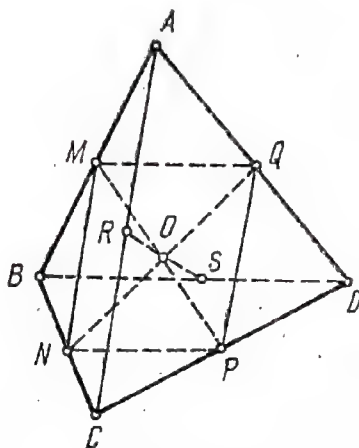


Fig. M.B.20

$MN$  și  $PQ$  fiind linii mijlocii corespunzătoare laturii  $[AC]$ , respectiv în triunghiurile  $ABC$  și  $ADC$ , rezultă:  $MN \parallel AC \parallel PQ$ ; analog:  $MQ \parallel BD \parallel NP$ . Așadar,  $MNPQ$  este paralelogram, deci:

- (2)  $[MP] \cap [NQ] = \{O\}$ ;  $[MO] = [OP]$ ,  $[NO] = [OQ]$ .

În mod similar se arată că  $RQSN$  este paralelogram, având diagonalele  $[NQ]$  și  $[RS]$  care se taie în mijlocul diagonalei  $[NQ]$ . Prin urmare:

- (3)  $[NQ] \cap [RS] = \{O\}$ .

În sfârșit, din (1), (2) și (3) obținem:

$$O \in [MP] \cap [NQ] \cap [RS] = (A, B, P) \cap (M, C, D) \cap (B, C, Q) \cap \\ \cap (A, D, N) \cap (B, D, R) \cap (A, C, S).$$

4°. Ținem seama că inecuația dată este echivalentă cu:

$$\sin 2x - \sqrt{2} \cos 2x \cos \frac{\pi}{4} - \sqrt{2} \sin 2x \sin \frac{\pi}{4} \geq 1, \text{ de unde}$$

- (1)  $\cos 2x \leq -1$ .

Pe de altă parte, potrivit definiției funcției cosinus, avem:

- (2)  $-1 \leq \cos 2x \leq 1, (\forall)x \in \mathbb{R}$ .

Din (1) și (2) deducem  $\cos 2x = -1$ , de unde:

$$2x \in \text{Arccos}(-1) = \{\pm \arccos(-1) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

deci

$$x \in \left\{ \pm \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



5°. Hiperbola fiind echilaterală (v. fig.M.B.21), focarele acesteia sînt  $F(a\sqrt{2}, 0)$ ,  $F'(-a\sqrt{2}, 0)$ . Fie  $\alpha$  și  $\beta$  coordonatele punctului  $P \in (H)$ . Sînt de luat în seamă următoarele trei cazuri:

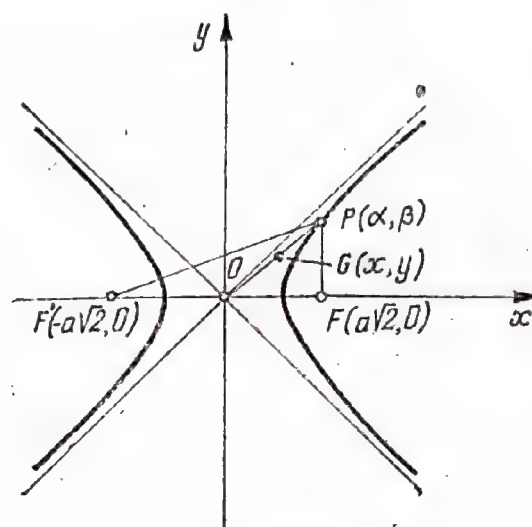


Fig. M.B.21

- i) pentru  $\alpha \leq -a\sqrt{2}$ , rezultă  $m(\widehat{PFF'}) \geq 90^\circ$ ;
- ii) pentru  $\alpha \geq a\sqrt{2}$ , rezultă  $m(\widehat{PFF'}) \geq 90^\circ$ ;
- iii) pentru  $\alpha \in (-a\sqrt{2}, a\sqrt{2}) \setminus [-a, a]$  rezultă  $m(\widehat{PFF'}) < 90^\circ$  și  $m(\widehat{FPF'}) < 90^\circ$ .

Prin urmare, triunghiul  $PPF'$  poate fi ascuțitunghic numai în cazul iii), situație în care mai este necesar să studiem  $m(\widehat{FPF'})$ , considerînd că  $P \notin FF'$ .

$$\begin{aligned} m(\widehat{FPF'}) < 90^\circ &\Leftrightarrow \cos \widehat{FPF'} > 0 \Leftrightarrow \frac{PF^2 + F'P^2 - F'F^2}{2PF \cdot PF'} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(\alpha - a\sqrt{2})^2 + \alpha^2 - a^2 + (\alpha + a\sqrt{2})^2 + \alpha^2 - a^2 - 8a^2}{2\sqrt{[(\alpha - a\sqrt{2})^2 + \alpha^2 - a^2][(\alpha + a\sqrt{2})^2 + \alpha^2 - a^2]}} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 6a^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \in \left(-\infty, -\frac{a\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}, +\infty\right). \end{aligned}$$

Așadar, triunghiul  $PPF'$  este ascuțitunghic numai atunci cînd

$$\alpha \in \left(-a\sqrt{2}, -\frac{a\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}, a\sqrt{2}\right); \beta \neq 0.$$

Fie, acum,  $G(x, y)$  centrul de greutate al triunghiului  $PPF'$ . Cum  $G$  se găsește pe mediana  $[OP]$ , astfel încît:  $\frac{OG}{OP} = \frac{1}{3}$ , rezultă:

$$(1) \quad x = \frac{\alpha}{3}, \quad y = \frac{\beta}{3}, \text{ unde}$$

$$(2) \quad \alpha^2 - \beta^2 = a^2, \quad (\beta \neq 0).$$

Eliminînd parametrii  $\alpha$  și  $\beta$  între relațiile (1) și (2), obținem:

$$(3) \quad x^2 - y^2 = \frac{a^2}{9}.$$

Așadar, locul geometric căutat este format din mulțimea punctelor aflate pe arcele hiperbolei de ecuație (3) și ale căror coordonate  $x$  și  $y$  satisfac condițiile:

$$x \in \left(-\frac{a\sqrt{2}}{3}, -\frac{a\sqrt{6}}{6}\right) \cup \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}, \frac{a\sqrt{2}}{3}\right); \quad y \neq 0.$$

**X.1°. Metoda I.** Folosind schema lui Horner, găsim că  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$  și  $x_3 = 5$  sint soluțiile ecuației date. Formulele:

$$(1) \quad V = abc;$$

$$(2) \quad A_t = 2(ab + ac + bc);$$

$$(3) \quad d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

care dau volumul, aria totală și, respectiv, lungimea diagonalei (în fapt, lungimile diagonalelor paralelipipedului, dar care sint însă congruente) sint simetrice în  $a$ ,  $b$  și  $c$ , deci, pentru a face o alegere, putem considera:

$$(4) \quad a = x_1, \quad b = x_2, \quad c = x_3.$$

Ținînd seama de (4) în (1), (2) și (3), obținem:

$$V = 30, \quad A = 62, \quad d = \sqrt{38}.$$

**Metoda II.** Avem în vedere că:

$$\begin{aligned} x^3 - 10x^2 + 31x - 30 &= x^3 - 10x^2 + 25x + 6x - 30 = \\ &= x(x^2 - 10x + 25) + 6(x - 5) = (x - 5)[x(x - 5) + 6] = (x - 5)(x - 2)(x - 3), \end{aligned}$$

prin urmare, ecuația dată este echivalentă cu:

$$(x - 2)(x - 3)(x - 5) = 0,$$

de unde soluțiile  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$  și  $x_3 = 5$ , raționamentul continuîndu-se ca la metoda anterioară.

**Metoda III.** Scriînd relațiile lui Viète, corespunzătoare ecuației date găsim:

$$\begin{cases} a + b + c = 10; \\ ab + ac + bc = 31; \\ abc = 30, \end{cases}$$

și, comparîndu-le cu (1) – (3) (v. Metoda I), găsim:

$$V = 30, \quad A = 2 \cdot 31 = 62,$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{(a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)} = \sqrt{38}.$$

**Metoda IV.** Scriînd că  $a$ ,  $b$  și  $c$  verifica ecuația dată, obținem sistemul:

$$\begin{cases} a^3 - 10a^2 + 31a - 30 = 0; \\ b^3 - 10b^2 + 31b - 30 = 0; \\ c^3 - 10c^2 + 31c - 30 = 0. \end{cases}$$

Scăzînd, succesiv, din prima ecuație pe celelalte două, găsim:

$$a^3 - b^3 - 10(a^2 - b^2) + 31(a - b) = 0;$$

$$a^3 - c^3 - 10(a^2 - c^2) + 31(a - c) = 0,$$

de unde, cum  $a \neq b$  și  $a \neq c$ , obținem:

$$a^2 + ab + b^2 - 10(a + b) + 31 = 0;$$

$$a^2 + ac + c^2 - 10(a + c) + 31 = 0.$$

Făcînd diferența dintre ultimele două relații, avem:

$$b^2 - c^2 + a(b - c) - 10(b - c) = 0$$

sau, cum  $b \neq c$ , obținem:  $a + b + c = 10$ . Acum, ideea de a folosi relațiile lui Viète aproape că se impune de la sine, mai ales dacă la pasul următor se are în vedere ridicarea la pătrat a ultimei egalități obținute, în scopul evaluării sumei pătratelor celor trei muchii ale paralelipipedului.

*Note.* 1. Metoda III, poate cea mai indicată, este mai elegantă și mai rapidă decît toate celelalte, deoarece evită atît rezolvarea ecuației, cît și unele calcule numerice, care nu sînt neapărat necesare. Trebuie însă remarcat că ideea de a folosi metoda respectivă apare în mod natural la acei rezolvitori care supun problema unei analize globale și, mai ales, totale (complete), adică la aceia care intuiesc înainte de rezolvarea ecuației că vor avea de aplicat formulele (1) — (3). Pentru cei obișnuiți cu raționamente de tip liniar, în pași mici, cu finalizarea fiecărei etape intermediare de lucru, primele două metode se impuneau de la sine.

2. O formulare echivalentă cu cea a problemei considerată, dar care ar fi adus în prim plan utilizarea Metodei III, este următoarea: „Să se determine volumul, aria totală și lungimea diagonalei (diagonalelor) unui paralelipiped dreptunghic, știind că lungimile  $a, b, c$  ( $a \neq b \neq c \neq a$ ) a trei muchii ale acestuia sînt rădăcinile ecuației:

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0.$$

3. Cea de a patra metodă de rezolvare ar fi putut fi sugerată de problema respectivă, în forma dată sau în formulări similare, dar în care s-ar fi înlocuit textul „sînt rădăcinile ecuației” prin „verifică ecuația”.

2°. *Metoda I.* Ecuația dată are sens numai dacă:

$$(1) \quad \begin{cases} x + 2 \geq 0; \\ x - 2 \geq 0; \\ 3x - 2 \geq 0, \end{cases}$$

adică pentru  $x \in [2, +\infty)$ . Observînd că ambii membri ai ecuației respective sînt pozitivi și ridicînd la pătrat, obținem: (2)  $2\sqrt{x^2 - 4} = x - 2$ . Efectuînd o nouă ridicare la pătrat — în (2), ai cărei membri sînt pozitivi — găsim:  $(x - 2)(3x + 10) = 0$ , de unde  $x = 2$ , deoarece  $3x + 10 > 0$ , pentru  $x \in [2, +\infty)$ .

*Metoda II.* Se procedează ca anterior pînă se obține relația (2) ce mai poate fi scrisă sub forma:

$$\sqrt{x - 2}(2\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 2}) = 0,$$

de unde  $x = 2 \in [2, +\infty)$  și  $2\sqrt{x + 2} = \sqrt{x - 2}$ , ultima egalitate conducînd, de exemplu, prin ridicare la pătrat (ambii membri fiind pozitivi) la valoarea:

$$x = -\frac{10}{3} \notin [2, +\infty).$$

Așadar,  $x = 2$  este singura valoare care verifică ecuația dată.

*Metoda III.* Se impun aceleași condiții (1) ca la metodele anterioare, de unde rezultă că  $x \in [2, +\infty)$ . Notăm: (3)  $x + 2 = u^2$ ;  $x - 2 = v^2$ . Cum  $x \geq 2$ , rezultă că  $u^2$  și  $v^2$  trebuie să verifice condițiile:  $u^2 \geq 4$ ;  $v^2 \geq 0$ . Atunci, ecuația dată se scrie ca: (4)  $u + v = \sqrt{u^2 + 2v^2}$ , iar din (3), scăzînd între ele cele două egalități, obținem: (5)  $u^2 - v^2 = 4$ . Pentru a afla soluțiile ecuației date este necesar să rezolvăm sistemul format din ecuațiile (4) și (5). Ridicînd la pătrat



în (4), găsim:  $v(v - 2u) = 0$ , de unde:  $v = 0$  sau  $v = 2u$ . Pentru  $v = 0$  din (5) rezultă  $u^2 = 4$  și, dacă ținem cont de aceste valori în (3), obținem  $x = 0$ . Pentru  $v = 2u$ , (5) devine:

$$u^2 - 4u^2 = 4,$$

egalitate imposibilă deoarece  $u^2 \geq 4$ . Așadar, singura soluție a ecuației date este  $x = 2$ .

**Metoda IV.** Se procedează ca anterior, până se găsește că  $x \in [2, +\infty)$ . Apoi, se ține seama că ecuația dată se mai scrie ca:

$$(6) \quad \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{(x+2) + 2(x-2)} \text{ sau}$$

$$1 + \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} = \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{x-2}{x+2}},$$

deoarece  $x + 2 > 0$ , pentru  $x \geq 2$ . Notînd: (7)  $\sqrt{\frac{x-2}{x+2}} = t$ , avem: (8)  $0 \leq t < 1$ , inegalități care rezultă imediat, deoarece  $x \geq 2$ . Pe de altă parte, ținînd seama de (7) în (6), găsim:

$$1 + t = \sqrt{1 + 2t^2},$$

de unde, ridicînd la pătrat (ambii membri fiind pozitivi) și efectuînd calculele, obținem:  $t(t - 2) = 0$ , deci  $t = 0$  sau  $t = 2$ . Valoarea  $t = 2$  nu satisface (8), prin urmare nu poate conduce la o soluție a ecuației date. Pentru  $t = 0$ , din (7), găsim  $x = 2$ , aceasta fiind unica soluție a ecuației considerate.

**Metoda V.** Ridicînd la pătrat ambii membri ai ecuației date și efectuînd calculele, obținem:  $2\sqrt{x^2 - 4} = x - 2$ , care mai poate fi pusă și sub forma:  $\sqrt{x-2}(2\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}) = 0$ , de unde  $x = 2$  și  $2\sqrt{x+2} = \sqrt{x-2}$ .

Ridicînd la pătrat în ultima egalitate și efectuînd calculele, găsim  $x = -\frac{10}{3}$ . În sfîrșit, prin calcul direct se constată că  $x = 2$  verifică ecuația dată în timp ce  $x = -\frac{10}{3}$  conduce la o egalitate imposibilă. Deci singura soluție a ecuației respective este  $x = 2$ .

**Note.** 1. Prima metodă pare a fi cea mai naturală deoarece folosește succesiv două ridicări la pătrat. Trebuie observat însă că, în general, ridicarea la pătrat poate conduce la creșterea gradului ecuației care se obține, fapt ce poate avea ca efect imposibilitatea de a rezolva noua ecuație. Creșterea gradului ecuațiilor care se obțin prin ridicări la pătrat poate fi atenuată dacă se procedează ca la Metoda II.

2. În cele mai multe lucrări de specialitate nu se atrage atenția asupra studierii semnelor celor doi membri ai unei ecuații, înaintea ridicării la pătrat, acest lucru fiind solicitat, aproape în exclusivitate, numai în cazul inecuațiilor. Probabil că se are în vedere afirmația: „oricare ar fi numerele  $A$  și  $B$ , reale sau complexe,  $A = B$  implică  $A^2 = B^2$ ”. Ținînd însă seama că „pentru  $A$  și  $B$ , numere reale sau complexe, din  $A^2 = B^2$  nu rezultă (cu necesitate)  $A = B$ ”, putînd avea  $A = B$  sau  $A = -B$ , considerăm că trebuie analizate două situații distincte, conștienți fiind că procedeul de rezolvare a ecuațiilor prin ridicare la pătrat poate introduce rădăcini străine:

— impunînd condițiile de existență a ecuației date și asigurîndu-ne că egalitățile  $A = B$  și  $A^2 = B^2$  sînt echivalente (afirmație adevărată atunci cînd  $A$  și  $B$  au același semn), avem asigurat că soluțiile obținute printr-un calcul corect satisfac ecuația dată, dacă verifică toate condițiile impuse. Așa am procedat la Metodele I—IV. În asemenea cazuri, verificarea soluțiilor (astfel obținute) în ecuația dată este facultativă, aceasta avînd doar rolul de control asupra corectitudinii calculului;

— neimpunînd nici un fel de condiție asupra necunoscutelor, se efectuează calculele necesare după care se verifică în ecuația dată toate valorile obținute, în vederea eliminării rădăcinilor străine. În acest mod am procedat în cazul Metodei V.

3°. *Metoda I.* Egalitatea din ipoteză, fiind simetrică în  $A$ ,  $B$  și  $C$ , o putem scrie, pentru a face o alegere, sub forma:

$$A = \pi - B - C,$$

de unde:

$$\sin A = \sin [\pi - (B + C)] = \sin (B + C).$$

Atunci:

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C &= \sin (B + C) + \sin B + \sin C = \\ &= 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B+C}{2} + 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{B+C}{2} \left( \cos \frac{B+C}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) = \\ &= 2 \sin \frac{\pi - A}{2} \cdot 2 \cos \frac{\frac{B+C}{2} + \frac{B-C}{2}}{2} \cos \frac{\frac{B+C}{2} - \frac{B-C}{2}}{2} = \\ &= 4 \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}, \end{aligned}$$

de unde, reținând din lanțul de egalități numai termenii extremi, rezultă egalitatea din enunț.

*Metoda II.* Egalitatea ce trebuie dovedită este echivalentă cu:

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} - \\ - 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = 0, \text{ adică:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} \left( \sin \frac{B}{2} - \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \right) + \\ + \cos \frac{C}{2} \left( \sin \frac{C}{2} - \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Prin ipoteză:  $A + B + C = \pi$ , deci  $\frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+C}{2}$ , de unde:

$$(2) \quad \sin \frac{B}{2} = \cos \frac{A+C}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}$$

și, analog:

$$(3) \quad \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}.$$

Ținând cont de (2) și (3) în (1), obținem:

$$\begin{aligned} \left( \cos \frac{A}{2} - \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \right) \cdot \sin \frac{A}{2} = 0 \text{ sau:} \\ \left[ \cos \frac{A}{2} - \sin \left( \frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) \right] \cdot \sin \frac{A}{2} = 0, \text{ adică:} \\ (4) \quad \left( \cos \frac{A}{2} - \sin \frac{\pi - A}{2} \right) \cdot \sin \frac{A}{2} = 0, \end{aligned}$$

egalitate care este adevărată pentru orice valoare a lui  $A$ , deoarece  $\sin \frac{\pi - A}{2} = \cos \frac{A}{2}$ .

Metoda III. Ținând seama că:

$$\sin B + \sin C = 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2};$$

$$\sin \frac{B+C}{2} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) = \cos \frac{A}{2},$$

egalitatea dată este echivalentă cu:

$$\sin A + 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}, \text{ sau:}$$

$$\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Ultima egalitate este adevărată pentru  $A = \pi$ , iar dacă  $A \neq \pi$  aceasta este echivalentă cu:

$$\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} = 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}, \text{ sau:}$$

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}, \text{ adică:}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2}, \text{ ultima relație fiind adevărată, deoarece: } \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}.$$

Note. 1. Pentru a arăta că relația (4), de la metoda a doua, este adevărată s-ar fi putut proceda și la o analiză de cazuri:

— dacă  $A = 0$ , atunci egalitatea (4) este verificată;

— dacă  $A \neq 0$ , atunci (4) este echivalentă cu:  $\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{\pi - A}{2} = 0$ , care

este adevărată pentru orice  $A$ , deoarece:  $\cos \frac{A}{2} = \sin \frac{\pi - A}{2}$ .

2. Condiția din ipoteză:  $A + B + C = \pi$  nu este echivalentă cu afirmația „ $A, B$  și  $C$  sînt unghiuri ale unui triunghi”, caz în care, evident,  $A, B$  sau  $C$  nu pot lua valorile 0 sau  $\pi$ .

4°. Metoda I. Cum  $M$  și  $N$  sînt mijloacele catetelor  $[AB]$  și respectiv  $[AC]$  (v. fig. M.B.22), rezultă că  $[MN]$  este linie mijlocie în  $ABC$ , prin urmare:

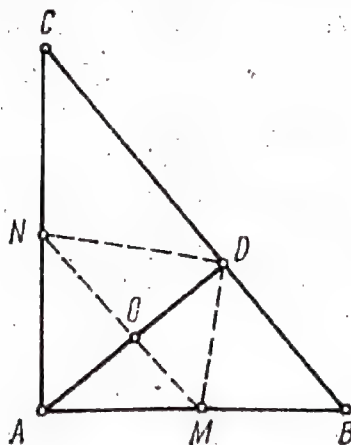


Fig. M.B.22

(1)  $MN \parallel BC$ . Pe de altă parte,  $D$  fiind proiecția (ortogonală) a lui  $A$  pe  $[BC]$ , deducem că: (2)  $AD \perp BC$ . Din (1) și (2), rezultă: (3)  $AD \perp MN$ . Fie  $O$  punctul de intersecție al lui  $[AD]$  cu  $[MN]$ , adică  $[AD] \cap [MN] = \{O\}$ . Din  $\triangle ADB$ , cum  $OM \parallel DB$ , rezultă: (4)  $\frac{AO}{OD} = \frac{AM}{MB}$ . Dar (5)  $[AM] \equiv [MB]$  și, dacă ținem seama



de (5) în (4), obținem: (6)  $[AO] \equiv [OD]$ . Din (3) și (6) rezultă că  $MN$  este mediatoarea segmentului  $[AD]$ , prin urmare: (7)  $[MA] \equiv [MD]$ . Analog, însă folosind  $\triangle ADC$ , găsim: (8)  $[NA] \equiv [ND]$ . Ținând seama de (7) și (8), precum și de faptul că  $[MN] \equiv [NM]$ , rezultă că triunghiurile  $MAN$  și  $MDN$  sînt congruente (cazul L.L.L.), prin urmare:  $\widehat{MAN} \equiv \widehat{MDN}$ , adică  $m(\widehat{MDN}) = 90^\circ$ .

**Metoda II.** Cum  $AD \perp BC$ ,  $D$  fiind proiecția (ortogonală) a lui  $A$  pe  $BC$ , rezultă că  $\triangle ADB$  este dreptunghic. Pe de altă parte, prin ipoteză,  $M$  este mijlocul lui  $[AB]$ , prin urmare  $M$  este centrul cercului circumscris triunghiului  $ADB$ , de unde: (9)  $[MA] \equiv [MD]$ , ca raze ale cercului respectiv. Analog, dar folosind  $\triangle ADC$ , găsim: (10)  $[NA] \equiv [ND]$ . Din (9) și (10), în fapt relații identice cu (7) și (8), de la metoda anterioară, și ținând seama că  $[MN] \equiv [NM]$ , rezultă (cazul L.L.L.):

$\triangle MAN \equiv \triangle MDN$ , de unde  $\widehat{MAN} \equiv \widehat{MDN}$ , deci  $m(\widehat{MDN}) = 90^\circ$ .

**Metoda III.** Din faptul că  $MN \parallel BC$ , ( $[MN]$  fiind linie mijlocie în  $\triangle ABC$ ), rezultă: (11)  $\widehat{AMN} \equiv \widehat{ABC}$ , ca unghiuri corespondente, și: (12)  $\widehat{NMD} \equiv \widehat{MDB}$ , ca unghiuri alterne interne. Pe de altă parte, triunghiul  $ADB$  fiind dreptunghic, găsim că  $[MD] \equiv [MB]$ , ca raze ale cercului triunghiului respectiv, prin urmare  $\triangle BMD$  este isoscel, deci: (13)  $\widehat{MBD} \equiv \widehat{MDB}$ . Din (11), (12) și (13), obținem: (14)  $\widehat{AMN} \equiv \widehat{NMD}$ . Analog, găsim: (15)  $\widehat{ANM} \equiv \widehat{MND}$ . Ținând seama de (14) și (15), precum și de faptul că  $[MN] \equiv [NM]$ , rezultă (cazul U.L.U.):  $\triangle MAN \equiv \triangle MDN$ , prin urmare  $m(\widehat{MDN}) = 90^\circ$ .

**Metoda IV.** Se procedează ca la Metoda II pînă cînd se obțin relațiile (9) și (10). Apoi se ține seama că  $\triangle MAN$  este dreptunghic, prin urmare: (16)  $MN^2 = AM^2 + AN^2$ , iar din (9) și (10) găsim: (17)  $MA = MD$ ;  $NA = ND$ . Ținând cont de (17) în (16), obținem:  $MN^2 = MD^2 + ND^2$ , ceea ce probează faptul că  $\triangle MDN$  este dreptunghic în  $D$ .

**Metoda V.** Obținînd, ca la Metoda I sau ca la cea de-a doua, că  $[MA] \equiv [MD]$ , deducem că  $\triangle AMD$  este isoscel, prin urmare:  $\widehat{MAD} \equiv \widehat{MDA}$ . Analog, se găsește:  $\widehat{NAD} \equiv \widehat{NDA}$ . Așadar:

$$90^\circ = m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{MAD}) + m(\widehat{NAD}) = m(\widehat{MDA}) + m(\widehat{NDA}) = m(\widehat{MDN}),$$

deci  $m(\widehat{MDN}) = 90^\circ$ .

**Metoda VI.** Din motivele arătate la metoda a treia, au loc relațiile (13) și (14). Pe de altă parte,  $\triangle ABC$  fiind dreptunghic, rezultă:  $m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{NCD}) = 90^\circ$ . Atunci  $m(\widehat{MDN}) = 180^\circ - [m(\widehat{MDB}) + m(\widehat{NDC})] = 180^\circ - [m(\widehat{MBD}) + m(\widehat{NCD})] = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ , deci  $m(\widehat{MDN}) = 90^\circ$ .

**Metoda VII.** Motivînd ca anterior că  $M$  este centrul cercului circumscris  $\triangle ADB$ , găsim: (18)  $m(\widehat{AMD}) = 2 m(\widehat{ABD})$ , primul fiind unghi la centru iar celălalt unghi înscris în cercul respectiv. Analog, obținem: (19)  $m(\widehat{AND}) = 2 m(\widehat{ACD})$ . Ținînd seama de (18) și (19), precum și de faptul că  $AMND$  este un poligon convex, găsim  $m(\widehat{MDN}) = 360^\circ - [m(\widehat{NAM}) + m(\widehat{AMD}) + m(\widehat{DNA})] = 360^\circ - 90^\circ - 2[m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{ACD})] = 270^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 90^\circ$ , adică  $m(\widehat{MDN}) = 90^\circ$ .

Note. 1. La primele trei metode, ideea comună este de a arăta congruența triunghiurilor  $MAN$  și  $MDN$ , de unde rezultă concluzia problemei.

2. Teorema lui Pitagora este utilizată numai la Metoda IV.

3. Proprietatea privind inscriptibilitatea unui triunghi dreptunghic în cercul de diametru egal cu ipotenuza triunghiului respectiv este utilizată la Metodele II–IV, VI și VII, la Metoda V aceasta fiind opțională.

XI. 1°. Aplicând proprietățile determinantilor avem succesiv:

$$\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ c-a & a-c & 0 \\ c-b & b-c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-a & a-c \\ c-b & b-c \end{vmatrix} = 0.$$

2°. Ecuația se mai scrie:

$$m(2x^2 - 5x + 2) + x^3 - 5x^2 + 9x - 6 = 0.$$

Rădăcina independentă de  $m$  satisface:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0; \\ x^3 - 5x^2 + 9x - 6 = 0. \end{cases}$$

Prima ecuație are rădăcinile 2 și  $\frac{1}{2}$ . Valoarea  $x = 2$  satisface și a doua ecuație și deci aceasta este rădăcina întreagă independentă de  $m$  căutată. Ecuația inițială se mai scrie:

$$(x-2)[x^2 + (2m-3)x - (m-3)] = 0,$$

având rădăcinile:

$$x_1 = 2; \quad x_{2,3} = \frac{2m-3 \pm \sqrt{4m^2-8m-3}}{2}.$$

3°. Punem condițiile:  $f(-1) = 5$ ;  $f'(-1) = 0$ , de unde:  $1 + 4m - 2n = 5$ ;  $-3 - 3m + n + 6 = 0 \Rightarrow m = 1$ ;  $n = 0$ .

$$4^\circ. \text{ a). Avem } \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \in (-1, 1), \\ 1 & \text{pentru } x \in \{-1, 1\}, \\ +\infty & \text{pentru } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Cu aceasta obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - x^2 + 6}{x^{2n} + x^2 + 4} = \frac{6 - x^2}{x + x^2} \quad \text{pentru } x \in (-1, 1);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - x^2 + 6}{x^{2n} + x^2 + 4} = 1 \quad \text{pentru } x \in \{-1, 1\};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - x^2 + 6}{x^{2n} + x^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} \left( 1 - \frac{x^2}{x^{2n}} + \frac{6}{x^{2n}} \right)}{x^{2n} \left( 1 + \frac{x^2}{x^{2n}} + \frac{n}{x^{2n}} \right)} = 1 \quad \text{pentru } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

b) Avem  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x \in (-\infty, -1], \\ \frac{6-x^2}{4+x^2} & \text{pentru } x \in (-1, 1), \\ 1 & \text{pentru } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

$f(-x) = f(x)$ , deci  $f$  este pară și vom studia variația doar pe  $[0, \infty)$ .

Intersecția cu axa absciselor:  $y = 0 \Rightarrow x = \sqrt{6} \notin [0, 1)$ .

Intersecția cu axa ordonatei:  $x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ .

Graficul nu prezintă asimptote.

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{20x}{(4+x^2)^2} & \text{pentru } x \in [0, 1), \\ 0 & \text{pentru } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

$$f_s(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f'(x) = -\frac{4}{5}; \quad f_d(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f'(x) = 0 \text{ și deci } f \text{ nu este derivabilă}$$

în  $x = 1$ , conform corolarului teoremei lui Lagrange.

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{20(3x^2 - 4)}{(4 + 2x^2)^3} & \text{pentru } x \in [0, 1), \\ 0 & \text{pentru } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

$f''(x)$  nu se anulează pe  $(0, 1)$ .

Tabloul de variație pe  $[0, \infty)$  este următorul:

$x$	0			1			$\infty$
$f'(x)$		—	—	—	—	$-\frac{4}{5}$	0
$f''(x)$		—	—	—		0	0
$f(x)$	$\frac{3}{2}$		$\searrow$		1	1	1

Graficul funcției este prezentat în fig. M.B.23:

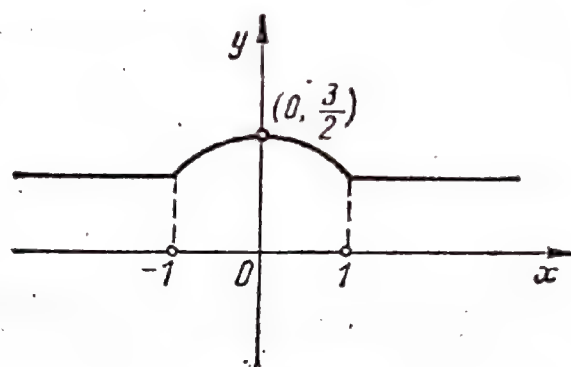


Fig. M.B.23

5°. Considerăm  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\varphi(t) = 2 \operatorname{arctg} t$ ,  $\varphi'(t) = \frac{2}{1+t^2}$ .

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \cos x + 3} &= \int_0^1 \frac{1}{2 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{1}{5+t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$



XII. 1°. Fie  $M, N, P, Q$  mijloacele laturilor  $[AB], [BC], [CD]$  și  $[DA]$  respectiv (v. fig. M.B.24). Coarda comună  $[BB']$  a cercurilor care au diametrele  $[AB]$  și  $[BC]$  este perpendiculară pe linia centrelor, deci este perpendiculară pe  $MN$ .

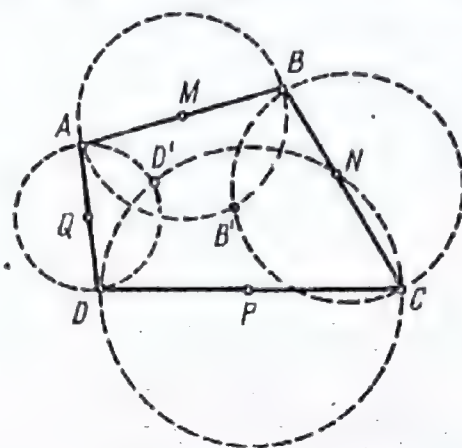


Fig. M.B.24

Analog coarda comună  $[DD']$  cercurilor care au diametrele  $[DC]$  și  $[AD]$  este perpendiculară pe linia centrelor celor două cercuri care este  $PQ$ . Să observăm că  $[MN]$  și  $[PQ]$  sunt linii mijlocii în triunghiurile  $ABC$  și  $ADC$ , deci avem  $MN \parallel AC$  și  $PQ \parallel AC$ , deci  $MN \parallel PQ$ . Rezultă că  $BB' \parallel DD'$ . Mai mult, punctele  $A, B'$  și  $C$  sunt coliniare deoarece avem  $m(\widehat{AB'B}) = m(\widehat{BB'C}) = 90^\circ$ . Analog se constată că  $D'$  este pe diagonală  $[AC]$ .

2°. *Cazul 1.*  $N$  este pe cercul dat între  $A$  și  $M$ , iar  $M$  între  $B$  și  $N$  (v. fig. M.B.25). În acest caz să observăm că  $ABMN$  este trapez isoscel cu laturile neoparalele congruente  $[AB] \equiv [MN]$ . Dacă notăm  $\{P\} = AM \cap BN$  avem  $m(\widehat{APB}) = \frac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{MN})}{2} = 90^\circ$ . Rezultă că punctul  $P$  aparține cercului de diametru  $[AB]$ . Ținând cont că  $P$  este în interiorul cercului, deducem că locul lui  $P$  este un arc de cerc care se obține prin intersecția discului determinat de cercul dat și cercul de diametru  $[AB]$ .

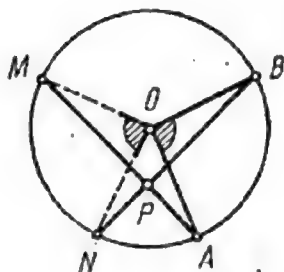


Fig. M.B.25

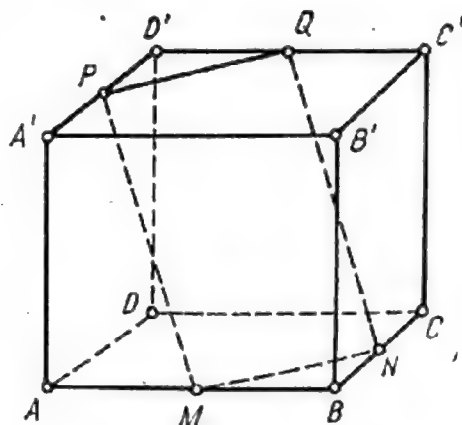


Fig. M.B.26

*Cazul 2.*  $N$  este pe cercul dat între  $B$  și  $M$ . În acest caz rezultă  $AM \parallel BN$ , deci locul este mulțimea vidă  $\emptyset$ .

3°. Să observăm mai întâi că  $MNPQ$  (vezi fig. M.B.26) este un paralelogram. Într-adevăr,  $MN$  este linie mijlocie în triunghiul  $ABC$ , deci  $MN \parallel AC$ . La fel

Intersecția cu axa absciselor:  $y = 0 \Rightarrow x = \sqrt{6} \notin [0, 1)$ .

Intersecția cu axa ordonatelor:  $x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ .

Graficul nu prezintă asimptote.

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{20x}{(4+x^2)^2} & \text{pentru } x \in [0, 1), \\ 0 & \text{pentru } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

$$f_*(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f'(x) = -\frac{4}{5}; \quad f_d(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f'(x) = 0 \text{ și deci } f \text{ nu este derivabilă}$$

în  $x = 1$ , conform corolarului teoremei lui Lagrange.

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{20(3x^2 - 4)}{(4+x^2)^3} & \text{pentru } x \in [0, 1), \\ 0 & \text{pentru } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

$f''(x)$  nu se anulează pe  $(0, 1)$ .

Tabloul de variație pe  $[0, \infty)$  este următorul:

$x$	0	1	$\infty$
$f'(x)$	— — — — — $-\frac{4}{5}$	0	0
$f''(x)$	— — — — —	0	0
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	1	1

Graficul funcției este prezentat în fig. M.B.23:

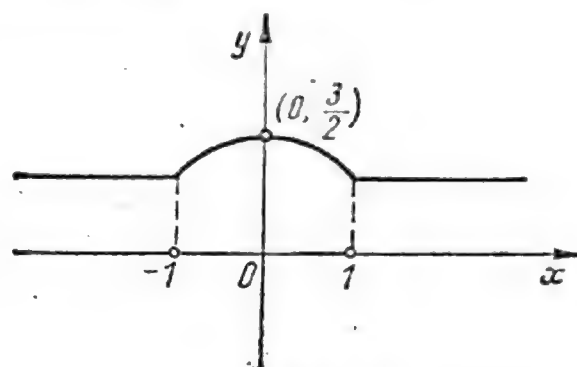


Fig. M.B.23

5°. Considerăm  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\varphi(t) = 2 \operatorname{arctg} t$ ,  $\varphi'(t) = \frac{2}{1+t^2}$ .

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \cos x + 3} &= \int_0^1 \frac{1}{2 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{1}{5+t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

XII. 1°. Fie  $M, N, P, Q$  mijloacele laturilor  $[AB], [BC], [CD]$  și  $[DA]$  respectiv (v. fig. M.B.24). Coarda comună  $[BB']$  a cercurilor care au diametrele  $[AB]$  și  $[BC]$  este perpendiculară pe linia centrelor, deci este perpendiculară pe  $MN$ .

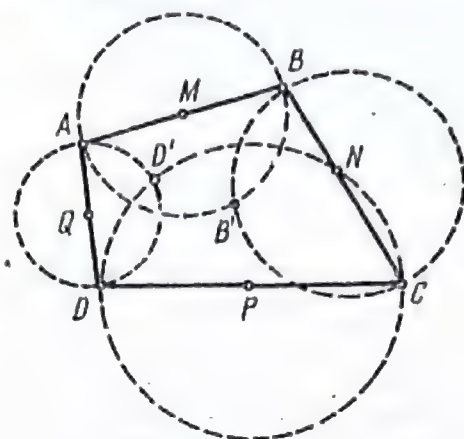


Fig. M.B.24

Analog coarda comună  $[DD']$  cercurilor care au diametrele  $[DC]$  și  $[AD]$  este perpendiculară pe linia centrelor celor două cercuri care este  $PQ$ . Să observăm că  $[MN]$  și  $[PQ]$  sînt linii mijlocii în triunghiurile  $ABC$  și  $ADC$ , deci avem  $MN \parallel AC$  și  $PQ \parallel AC$ , deci  $MN \parallel PQ$ . Rezultă că  $BB' \parallel DD'$ . Mai mult, punctele  $A, B'$  și  $C$  sînt coliniare deoarece avem  $m(\widehat{AB'B}) = m(\widehat{BB'C}) = 90^\circ$ . Analog se constată că  $D'$  este pe diagonala  $[AC]$ .

2°. *Cazul 1.*  $N$  este pe cercul dat între  $A$  și  $M$ , iar  $M$  între  $B$  și  $N$  (v. fig. M.B.25). În acest caz să observăm că  $ABMN$  este trapez isoscel cu laturile neparallele congruente  $[AB] \equiv [MN]$ . Dacă notăm  $\{P\} = AM \cap BN$  avem  $m(\widehat{APB}) = \frac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{MN})}{2} = 90^\circ$ . Rezultă că punctul  $P$  aparține cercului de diametru  $[AB]$ . Ținînd cont că  $P$  este în interiorul cercului, deducem că locul lui  $P$  este un arc de cerc care se obține prin intersecția discului determinat de cercul dat și cercul de diametru  $[AB]$ .

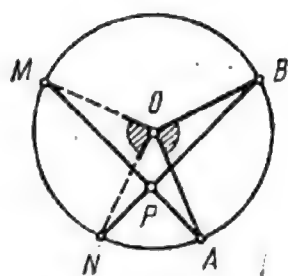


Fig. M.B.25

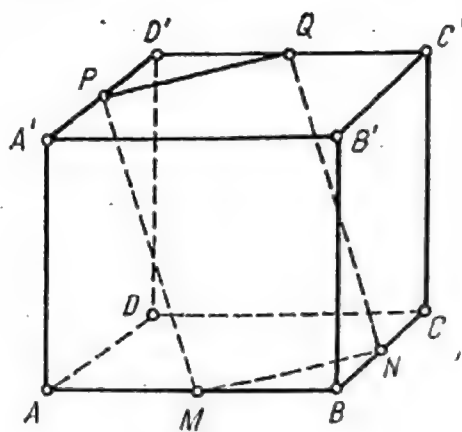


Fig. M.B.26

*Cazul 2.*  $N$  este pe cercul dat între  $B$  și  $M$ . În acest caz rezultă  $AM \parallel BN$ , deci locul este mulțimea vidă  $\emptyset$ .

3°. Să observăm mai întîi că  $MNPQ$  (vezi fig. M.B.26) este un paralelogram. Într-adevăr,  $MN$  este linie mijlocie în triunghiul  $ABC$ , deci  $MN \parallel AC$ . La fel



avem  $PQ \parallel A'C'$ . Dar  $AC \parallel A'C'$  așa încît deducem  $MN \parallel PQ$ . Mai mult,  $MN = PQ = \frac{AC}{2} = \frac{A'C'}{2}$ . Folosind teorema lui Pitagora obținem imediat:  $MN = PQ = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ ,  $MP = NQ = \frac{1}{2} \sqrt{4c^2 + a^2 + b^2}$ ,  $MQ = \sqrt{b^2 + c^2}$  și  $PN = \sqrt{a^2 + c^2}$ .

Să presupunem  $MN < PM$  și să notăm  $\{O\} = MQ \cap PN$ . Atunci  $\alpha = m(\widehat{MON}) < 90^\circ$  și avem:

$$\cos \alpha = \frac{MO^2 + NO^2 - MN^2}{2MO \cdot NO}.$$

Prin calcul rezultă:  $\cos \alpha = \frac{c^2}{\sqrt{(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)}}$ . Aria paralelogramului  $MNPQ$  este:

$$\sigma[MNPQ] = \frac{1}{2} MQ \cdot PN \sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}.$$

4°. Notăm cu  $V$  vârful piramidei, iar cu  $O$  și  $O'$  centrele bazelor cubului, astfel că  $O$  este și centrul bazei piramidei date. Fie  $M$  mijlocul unei laturi a pătratului piramidei și  $N$  intersecția lui  $VM$  cu una din laturile cubului (v. fig. M.B.27).

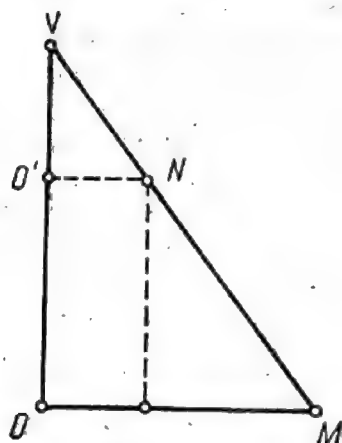


Fig. M.B.27

Dacă notăm cu  $x$  lungimea laturii cubului înscris în piramidă avem  $OO' = 2O'N = x$ .

Din asemănarea triunghiurilor  $\triangle VO'N$  cu  $\triangle VOM$  deducem:  $\frac{h-x}{h} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{a}{2}}$ , de unde

$$\text{rezultă } x = \frac{ah}{a+h}.$$

5°. Ecuația se mai scrie:  $2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin^3 \frac{x}{2}$ . Avem imediat soluția  $x = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Celelalte soluții sînt date de ecuația:  $2 \cos \frac{x}{2} = \sin^2 \frac{x}{2}$ , care este echivalentă cu ecuația:  $\cos^2 \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} - 1 = 0$  care ne mai dă soluțiile:

$$x = 4k\pi \pm 2 \arccos(\sqrt{2} - 1).$$

XIII. 1°. a) Discriminantul ecuației este:

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(m^2 + 2m + 1)^2 - 8m(m^2 + 1) = 4(m^4 - 4m^3 + 6m^2 - 4m + 1) = \\ &= 4m^2 \left[ m^2 - 4m + 6 - \frac{4}{m} + \frac{1}{m^2} \right] = 4m^2 \left[ \left( m + \frac{1}{m} \right)^2 - 4 \left( m + \frac{1}{m} \right) + 4 \right] = \\ &= 4m^2 \left[ \left( m + \frac{1}{m} \right) - 2 \right]^2, \text{ deci ecuația are rădăcini reale.} \end{aligned}$$

b) Inegalitatea se exprimă în funcție de  $m$  ( $m \neq 0$ ) astfel  $\frac{2(m+1)^2}{m^2+1} \leq 4$  care este echivalentă cu  $(m-1)^2 \geq 0$ . Deci inegalitatea are loc pentru orice  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

2°. Notăm  $\log_2 x = y$  ( $x > 0$ ) și observăm că:  $\log_{16} x = \frac{y}{4}$ . Ecuația devine:

$$2 \sqrt[8]{2 \left(\frac{y}{4}\right)^2} - \sqrt[3]{y} - 6 = 0.$$

Dacă facem substituția  $z = \sqrt[3]{y}$  rezultă ecuația în  $z$  de gradul al doilea:  $z^2 - z - 6 = 0$ , care are rădăcinile  $z_1 = 3$ ,  $z_2 = -2$ . Revenind la substituțiile făcute obținem  $y_1 = 27$  și  $y_2 = -8$ , de unde rezultă că rădăcinile ecuației date sînt  $x_1 = 2^{27}$  și  $x_2 = 2^{-8}$ .

3°. Înlocuind  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ , rezultă că ecuația dată este echivalentă cu ecuația  $2 \sin^2 x + 13 \sin x + 6 = 0$ . Rezultă  $\sin x = -\frac{1}{2}$  și  $\sin x = -6$ . Obținem soluția reală  $x = k\pi + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

4°. a) Aplicînd teorema bisectoarei rezultă: (1)  $\frac{AP}{BP} = \frac{AM}{BM}$  și (2)  $\frac{AQ}{CQ} = \frac{AM}{MC}$ . Din ipoteză avem  $BM = CM$ , așa încît (1) și (2) implică: (3)  $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{CQ}$ , deci  $PQ \parallel BC$  (v. fig. M.B.28). b) Din  $PQ \parallel BC$  deducem: (4)  $\frac{AR}{AM} = \frac{PR}{BM}$  și (5)  $\frac{AR}{AM} = \frac{QR}{CM}$ .

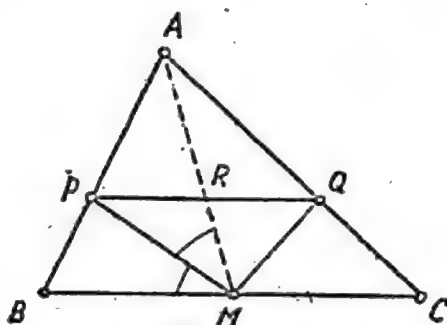


Fig. M.B.28

Avînd în vedere că  $BM = CM$  din (4) și (5) rezultă  $PR = QR$ , deci  $R$  este mijlocul lui  $[PQ]$ . Pe de altă parte,  $MP$  și  $MQ$  fiind bisectoarele a două unghiuri adiacente suplimentare, avem  $PM \perp QM$ . În triunghiul dreptunghic  $PMQ$  mediana  $MR$  satisface relația  $2RM = PQ$ .

XIV. 1°. Ecuația în necunoscuta  $y$  va avea suma rădăcinilor:

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -p - \frac{p}{q} = -p \left( \frac{1+q}{q} \right) \text{ și produsul:}$$

$$y_1 y_2 = x_1 x_2 + \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{p^2 + q^2 - 2q + 1}{q}.$$

Ecuația căutată este: -

$$qy^2 + p(1+q)y + p^2 + q^2 - 2q + 1 = 0, \text{ unde } q \neq 0.$$

2°. Notînd cu  $a$  primul termen și cu  $q$  rația progresiei rezultă ecuația  $a(1+q+q^2+q^3) = 75$ , de unde obținem pentru  $a = 5$ , ecuația satisfăcută de rația  $q: q^3 + q^2 - 14 = 0$ , care are soluție reală  $q = 2$ . Celelalte două soluții date de ecuația  $q^2 + 3q + 7 = 0$  sînt complexe. Progresia este 5, 10, 20, 40.

3°. Ecuația se mai scrie  $\sin x(2 \cos x + m) = 0$ . Rezultă că ecuația admite soluția:  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  și soluția  $x = 2k\pi \pm \arccos\left(-\frac{m}{2}\right)$ . A doua soluție este reală dacă  $m \in [-2, 2]$ . În cazul  $m = 0$  soluția generală a ecuației este:  $x = \frac{k\pi}{2}$ , unde  $k \in \mathbb{Z}$ . În cazurile  $m = \pm 1$  soluția generală este  $x = k\pi$ , unde  $k \in \mathbb{Z}$ .

4°. Fie  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  hexagonul rezultat avînd laturile de lungime  $a$  și  $H_2 = B_1B_2B_3B_4B_5B_6$  hexagonul determinat de mijloacele laturilor  $[A_1A_2], \dots, [A_6A_1]$  respectiv. Să notăm cu  $O$  centrul cercului circumscris hexagonului dat. Observăm că  $[OB_i]$  ( $i = 1, 6$ ) sînt apotemele hexagonului dat și au lungimea  $a' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Se constată imediat că hexagonul  $H_2$  are toate laturile egale cu apotema hexagonului dat  $H_1$  și toate unghiurile de  $120^\circ$ , deci este de asemenea un hexagon regulat. Raportul ariilor este pătratul raportului de asemănare, deci este 3.

XV. 1°. Din ecuație avem:  $x_1 + x_2 = \frac{1+m}{1+m^2}$ ;  $x_1 \cdot x_2 = \frac{m(1-m)}{1+m^2}$ . Inecuațiile se pot scrie:  $-1 \leq \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2} \leq 1$ . Pentru  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  obținem:  $-1 \leq \frac{m^2+m+2}{m(1-m)} \leq 0$ . Trinomul  $m^2+m+2$  este pozitiv pentru orice  $m$  real, așa încît inegalitatea a doua:  $\frac{m^2+m+2}{m(1-m)} \leq 0$ , are loc dacă trinomul  $m(1-m)$  este negativ, deci pentru  $m \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ . Prima inegalitate:  $-1 \leq \frac{m^2+m+2}{m(1-m)}$ , este echivalentă cu inegalitatea:  $\frac{2(m+1)}{m(1-m)} \geq 0$ . Avem  $m+1 \geq 0$  și  $m(1-m) > 0$  pentru  $m \in (0, 1)$ . Avem  $m+1 \leq 0$  și  $m(1-m) < 0$  pentru  $m \in (-\infty, -1]$ . În concluzie cele două inegalități sînt satisfăcute pentru  $m \in (-\infty, -1]$ .

2°. Pentru orice  $k \in \mathbb{N}^*$  avem:

$$(*) \quad \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{k(k+1)^2 - k^2(k+1)} = \\ = \frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{k(k+1)} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Membrul stîng se poate scrie:

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Egalitatea se poate demonstra și prin metoda inducției. Pentru  $n = 1$  egalitatea se scrie:  $\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ , care este evidentă dacă raționalizăm numitorul din membrul stîng. Presupunem că egalitatea este adevărată pentru un  $n$  oarecare și s-o demonstrăm pentru  $n+1$ . Avem:

$$S_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} + \\ + \dots + \frac{1}{(n+2)\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n+2}} = S_n + \frac{1}{(n+2)\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n+2}}. \\ S_{n+1} = 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$



3°. Ecuația se mai scrie pentru orice  $x \in (0, \infty)$  sub forma:

$$5^{\lg x} - \frac{1}{3} \cdot 3^{\lg x} = 3 \cdot 3^{\lg x} - \frac{1}{5} \cdot 5^{\lg x}$$

care este echivalentă cu ecuația:

$$\left(1 + \frac{1}{5}\right) 5^{\lg x} = \left(3 + \frac{1}{3}\right) 3^{\lg x} \text{ sau } \frac{6}{5} \cdot 5^{\lg x} = \frac{10}{3} \cdot 3^{\lg x}.$$

Rezultă:  $\left(\frac{5}{3}\right)^{\lg x} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$ , de unde obținem  $\lg x = 2$ . Soluția este  $x = 100$ .

4°. Având în vedere că înmulțirea matricilor este asociativă, ecuația se mai scrie:

$$A(A - (x + t)I_2) + (xt - yz)I_2 = 0.$$

Avem:

$$A - (x + t)I_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x+t & 0 \\ 0 & x+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t & y \\ z & -x \end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} -t & y \\ z & -x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t & y \\ z & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz - xt & 0 \\ 0 & yz - tx \end{pmatrix} = \\ &= (yz - xt)I_2 = -(xt - yz)I_2, \end{aligned}$$

care ne arată că ecuația este verificată pentru orice numere reale  $x, y, z$  și  $t$ . Ecuația  $A^2 = I_2$  este echivalentă cu:

$$\begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yt \\ xz + tz & yz + t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

care ne conduce la sistemul:

$$(*) \quad \begin{cases} x^2 + yz = 1; \\ xy + yt = 0; \\ xz + tz = 0; \\ yz + t^2 = 1. \end{cases}$$

Scăzând ultima ecuație din prima obținem ecuația:  $(x - t)(x + t) = 0$ , deci avem  $x = t$  sau  $x = -t$ . Dacă  $x = t$  sistemul se reduce la ecuațiile:  $x^2 + yz = 1$ ;  $xy = 0$ ;  $xz = 0$ , care ne conduce la matricile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dacă  $x = -t$  sistemul  $(*)$  este echivalent cu ecuația  $x^2 + yz = 1$ . Orice matrice de forma  $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$  care satisface condiția:  $x^2 + yz = 1$ ,  $x, y, z \in \mathbb{Z}$  are proprietatea  $A^2 = I_2$ . Pentru orice  $a \in \mathbb{Z}$  matricea  $A = \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 1-a & -a \end{pmatrix}$  are proprietatea  $A^2 = I_2$ .

**XVI. 1°.** Facem substituția  $y = 2^{x-2}$  și obținem ecuația:  $\lg 2 + \lg(y^2 + 9) \leq \leq 1 + \lg(y+1)$ , care este echivalentă cu ecuația:  $\lg \frac{y^2 + 9}{y+1} \leq \lg 5$ , de unde inecuația:

$$\frac{y^2 + 9}{y+1} \leq 5 \Leftrightarrow \frac{y^2 - 5y + 4}{y+1} \leq 0$$

în care  $y \geq 0$ . Rezultă  $y \in [1, 4]$ . Revenind la substituție obținem inecuațiile:

$$1 \leq 2^{x-2} \leq 2^2,$$

care ne dă  $x \in [2, 4]$ .

**2°.** Scriind toți termenii din stînga ecuațiilor în baza  $a$  obținem sistemul:

$$\begin{cases} \log_a x + \frac{1}{2} \log_a y = \frac{3}{2}; \\ \frac{1}{2} \log_a x + \log_a y = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Facem substituția  $u = \log_a x$  și  $v = \log_a y$ . Obținem:

$$\begin{cases} 2u + v = 3; \\ u + 2v = 5, \end{cases}$$

care are soluția unică:  $u = \frac{1}{3}$ ;  $v = \frac{7}{3}$ . Revenind la substituție, obținem:

$$x = \sqrt[3]{a}; \quad y = \sqrt[3]{a^7} = a^2 \sqrt[3]{a}, \quad \text{unde } a > 0.$$

**3°.** Se verifică imediat că termenul din mijloc este media aritmetică a celorlalți doi. Rația progresiei este:

$$r = \frac{x+a-1}{2x} - \frac{a}{x+1} = \frac{x^2 - ax + a - 1}{2x(x+1)}.$$

Pentru  $a=2$  rezultă  $r = \frac{(x-1)^2}{2x(x+1)}$ . Avem de rezolvat sistemul de inecuații:

$$1 \leq \frac{(x-1)^2}{2x(x+1)} \leq 2, \text{ care are soluțiile } x \in \left[ \frac{-2 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} \right].$$

**4°.** Prin substituția  $z = \frac{x+i}{x-i}$  obținem:  $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ , cu soluțiile  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = i$  și  $z_3 = -i$ . Revenind la substituție obținem:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 1$ ;  $x_3 = -1$ .

**5°.** Deoarece  $\sin x \neq 0$  avem:

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos^2 x + 1 - 2 \sin x = 0,$$

care este echivalentă cu ecuația:

$$(1 - \sin x)(1 + \sin x + 2 \sin^2 x) = 0.$$

Rezultă  $\sin x = 1$  cu soluția  $x \in \left\{ 2k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ . Ecuația  $2 \sin^2 x + \sin x + 1 = 0$  nu are soluții reale.

**XVII. 1°.** Se verifică imediat că termenul din mijloc este media aritmetică a celorlalți doi termeni. Pentru  $m = -7$  rația este  $r = \frac{x+7}{x(x-1)}$ .

Din condiția  $r = 3$  rezultă ecuația:  $3x^2 - 4x - 7 = 0$ , cu soluțiile:  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = \frac{7}{3}$ .

2°. Substituția  $y = 3^x$  conduce la inecuațiile:  $\frac{1}{3} \leq \frac{y+1}{y^2+1} \leq \frac{1}{2}$ , unde  $y > 0$ .

Se obține:  $y \in \left[1 + \sqrt{2}, \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right]$ ;  $x \in \left[\log_3(1 + \sqrt{2}), \log_3\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)\right]$ .

3. Ecuația admite și rădăcina  $z = 2 + i$ , așa încît polinomul din stînga ecuației se divide prin polinomul  $z^2 - 4z + 5$ . Prin împărțire directă obținem ca rest polinomul de gradul I,  $(a + 4)z$ , care se anulează pentru  $a = -4$ . Cîtul împărțirii este  $z^2 + 1$ , așa încît celelalte două soluții sînt  $z_3 = i$  și  $z_4 = -i$ .

4°. Dacă notăm  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t$  obținem ecuația:  $6t^2 - 5t + 1 = 0$ , cu soluțiile:  $t_1 = \frac{1}{2}$ ;  $t_2 = \frac{1}{3}$ .

XVIII. 1°. Relația dată se mai scrie:

$$\begin{pmatrix} x - 2y + z - t & 2x - y + 3z - 3t \\ x + y + z & 2x + (a-1)y + 2z + at \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Formăm sistemul:

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 0; \\ 2x - y + 3z - 3t = 0; \\ x + y + z + t = 0; \\ x + (a-1)y + 2z + at = 0. \end{cases}$$

Avem un sistem linear omogen care va admite și soluții diferite de cea banală dacă determinantul matricii coeficienților este nul. Deci avem de rezolvat ecuația:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a-1 & 2 & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & a-3 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & -5 \\ a-3 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ a-3 & a-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

2°. Practic avem de rezolvat inecuația:  $\left| \frac{2x^2 - x}{x^2 + x + 1} \right| < 2$ , care conduce la sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} \frac{2x^2 - x}{x^2 + x + 1} < 2; \\ \frac{2x^2 - x}{x^2 + x + 1} > -2. \end{cases}$$

Intrucît  $x^2 + x + 1 > 0$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$ , rămîne de rezolvat:

$$\begin{cases} -3x - 2 < 0 \\ 4x^2 + x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > -\frac{2}{3}.$$



3°. Condițiile sînt:

$$\begin{cases} x + 2 > 0, \\ x^2 + 2x > 0 \\ x \neq 1, \\ x > 0, \end{cases} \text{ de unde } x \in (0, 1) \cup (1, \infty).$$

Ecuția se mai scrie:

$$\frac{1}{2} \log_x(x+2) + 1 + \log_x(x+2) = 4 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \log_x(x+2) = 3 \Leftrightarrow \log_x(x+2) = 2 \Leftrightarrow x^2 = x+2,$$

de unde reținem  $x = 2$ , unica soluție a ecuației date.

4°. Demonstrăm prin reducere la absurd că  $R_1$  este parte stabilă în raport cu  $*$ . Fie  $x \neq 1, y \neq 1$ . Admitem că  $x * y = 1$ . Deci:

$$x + y - xy = -1; \quad xy - x - y + 1 = 0; \quad (x-1)(y-1) = 0, \text{ imposibil.}$$

Verificăm asociativitatea operației. Fie  $x, y, z \in R_1$ :

$$(x * y) * z = \left[ \frac{1}{2} (x + y - xy + 1) \right] * z = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (x + y - xy + 1) + z - \frac{1}{2} (xz + xy - xyz + z) + 1 \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (x + y + z - xy - xz - yz + xyz) + \frac{3}{2} \right];$$

$$x * (y * z) = x * \left[ \frac{1}{2} (y + z - yz + 1) \right] = \frac{1}{2} \left[ x + \frac{1}{2} (y + z - yz + 1) - \frac{1}{2} x(y + z - yz + 1) + 1 \right] = (x * y) * z, \text{ și astfel legea e asociativă.}$$

$$x * y = \frac{1}{2} (x + y - xy + 1) = \frac{1}{2} (y + x - yx + 1) = y * x,$$

de unde avem comutativitatea operației. Fie  $e \in R_1$  elementul neutru. Trebuie ca pentru  $(\forall)x \in R_1$  să avem:

$$x * e = x \Rightarrow \frac{1}{2} (x + e - ex + 1) = x; \quad e(1 - x) = x - 1 \text{ și } e = -1.$$

Să arătăm că pentru  $(\forall)x \in R_1$  există  $x' \in R_1$  cu  $x * x' = e$ .

Deci  $\frac{1}{2} (x + x' - xx' + 1) = -1$ , de unde  $x' = \frac{x+3}{x-1}$  care este în  $R_1$ . În concluzie  $(R_1, *)$  este grup abelian.

5°. Avînd coeficienții reali polinomul va admite și rădăcina  $-1 - i$ , deci se va divide cu  $x^2 + 2x + 2$ . Avem:

$$f = (X^2 + 2x + 2)[X^2 + (m - 2)] + (n - 2m + 4)X + p - 2m + 4.$$

Formăm sistemul:

$$\begin{cases} f(1) = -15; \\ n - 2m + 4 = 0; \\ p - 2m + 4 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + n + p = -18 \\ n = -4 + 2m \\ p = -4 + 2m \end{cases}, \text{ de unde } m = -2, n = -8, p = -8.$$

Rădăcinile ecuației  $f(x) = 0$  sînt furnizate de:  $(X^2 + 2x + 2)(x^2 - 4) = 0$  și deci:  $x_1 = -1 + i; x_2 = -1 - i; x_3 = 2; x_4 = -2$ .

XIX. 1°. Determinantul matricii coeficienților este:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Cazul 1.  $a \neq b \neq c \neq a$ . Sistemul este compatibil determinat, rezolvabil cu regula lui Cramer.

$$\text{Avem: } \Delta x = \begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{vmatrix} = abc \cdot \begin{vmatrix} a^2 & 1 & a \\ b^2 & 1 & b \\ c^2 & 1 & c \end{vmatrix} = -abc(b-a)(c-a)(b-c).$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 1 & b^3 & b^2 \\ 1 & c^3 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 0 & b^3 - a^3 & b^2 - a^2 \\ 0 & c^3 - a^3 & c^2 - a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a^2 + ab + b^2 & a + b \\ a^2 + ac + c^2 & a + c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(b-c)(ab + bc + ac).$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c).$$

$$\text{Deci: } x = \frac{\Delta x}{\Delta} = abc; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -(ab + bc + ac); \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = a + b + c.$$

Cazul 2.  $a = b \neq c$ . Matricea coeficienților are rangul 2 deoarece avem minorul:  $\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} = c - b \neq 0$ . Singurul minor caracteristic este  $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = 0$ .

Sistemul este deci compatibil simplu nedeterminat cu necunoscute principale  $x$  și  $y$ ; necunoscuta secundară  $z$ . Se rezolvă:  $\begin{cases} x + by = b^3 - b^2z; \\ x + cy = c^3 - c^2z. \end{cases}$  Rezultă:

$$\begin{cases} x = bc(\alpha - b - c); \\ y = b^2 + bc + c^2 - \alpha(b + c); \\ z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Analog se tratează cazurile  $a \neq b = c$  și  $a = c \neq b$ .

Cazul 3.  $a = b = c$  în care sistemul se reduce la o ecuație, este deci compatibil dublu nedeterminat cu soluțiile:

$$\begin{cases} x = a^3 - a\alpha - a^2\beta; \\ y = \alpha; \\ z = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2°. Utilizând algoritmul de împărțire a două polinoame putem scrie:

$$aX^4 + bX^3 + 1 = (X^2 - 2X + 1)[a^2X^2 + (2a + b)X + (3a + 2b)] + (4a + 3b)X + 1 - 3a - 2b.$$

Pentru divizibilitate punem condițiile:

$$\begin{cases} 4a + 3b = 0; \\ 1 - 3a - 2b = 0, \end{cases} \text{ de unde } a = 3 \text{ și } b = 4.$$

Ecuatia devine

$$(x^2 - 2x + 1)(3x^2 - 4x + 1) = 0, \text{ cu r\adac\inile: } x_1 = x_2 = x_3 = 1; x_4 = \frac{1}{3}.$$

$$3^\circ. \text{ Avem: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{n^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = 1;$$

$$b_n = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{n^2}{(n-1)(n+1)} \cdot \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

F\acind simplific\arile corespunz\atoare ob\inem:

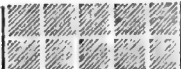
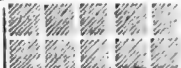
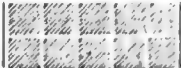
$$b_n = \frac{2(n+1)}{n+2}, \text{ de unde } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2.$$

$$4^\circ. f'(x) = -\frac{3}{4} e^{\frac{-3x}{4}} \cdot \sqrt{x^3 + 1} + e^{\frac{-3x}{4}} \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}} =$$

$$= -\frac{3}{4} \frac{e^{\frac{-3x}{4}}}{\sqrt{x^3 + 1}} (x^3 + 1 - 2x^2).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \text{ cu r\adac\inile: } x_1 = 1; x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Din tabloul:

$x$		1	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		0 +	0 -	
$f(x)$		$f(1)$	$f\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$	$\searrow 0$

ob\inem c\c  $x = 1$  este punct de minim iar  $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  este punct de maxim.

5°. Utiliz\nd metoda integr\rii prin p\ar\i avem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)' dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

XX. 1°. Fie  $x_1, x_2, x_3, x_4$  r\adac\inile ecua\iei. Utiliz\nd rela\iile lui Vi\ete avem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2; \\ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = m; \\ x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -2; \\ x_1x_2x_3x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4. \end{cases}$$

Not\nd:  $x_1 + x_2 = S$ ;  $x_1x_2 = P_1$ ;  $x_3x_4 = P_2$ , ob\inem:

$$\begin{cases} 2S = -2; \\ S^2 + P_1 + P_2 = m; \\ P_1S + P_2S = -2; \\ P_1P_2 = 1; \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} P_1 = P_2 = 1; \\ S = -1; \\ m = 3; \end{cases}$$



$x_1$  și  $x_2$  sînt rădăcinile ecuației  $x^2 + x + 1 = 0$ . La fel  $x_3$  și  $x_4$ . În concluzie:  $m = 3$ ;  
 $x_1 = x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ ;  $x_2 = x_4 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ .

2°. Fie  $f: [-2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x+1)e^{-|x|}$ . Funcția  $f$  este continuă pe  $[-2, 5]$  și integrabilă atît pe  $[-2, 0]$  cît și pe  $[0, 5]$ . Avem:

$$\int_{-2}^5 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^5 f(x) dx = \int_{-2}^0 (x+1)e^x dx + \int_0^5 (x+1)e^{-x} dx.$$

Fiecare integrală se calculează prin părți și avem:

$$\int_{-2}^5 f(x) dx = xe^x \Big|_{-2}^0 + \left[ -(x+1)e^{-x} \Big|_0^5 + \int_0^5 e^{-x} dx \right] = 2 + \frac{2}{e^2} - \frac{7}{e^5}.$$

3°. Graficul nu intersectează axa  $Oy$ , iar intersecția cu  $Ox$  este punctul de coordonate  $(1, 0)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Deci  $x = 0$  este asimptotă verticală la dreapta, iar  $y = 0$  este asimptotă orizontală.  $f$  este continuă și derivabilă pe  $(0, \infty)$ .

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = e.$$

$$f''(x) = \frac{-2 + \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = e^2.$$

Tabloul de variație este următorul:

$x$	0	1	$e$	$e^2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow \frac{2}{e^2}$	$\searrow 0$

$x = e$  este punct de maxim.

$x = e^2$  este punct de inflexiune.

Graficul funcției este prezentat în fig. M.B.29.

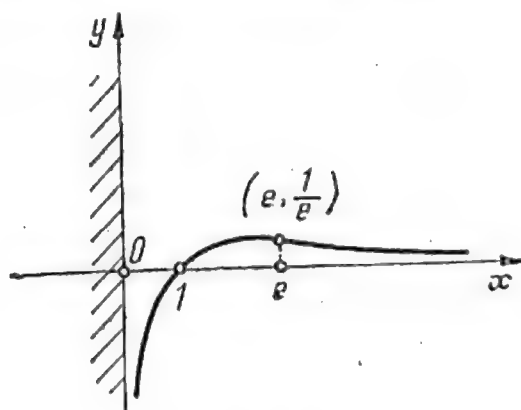


Fig. M.B.29

4°. Întrucît  $c = -(a + b)$  rămîne de calculat:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [a(\sqrt{n+a} - \sqrt{n-a-b}) + b(\sqrt{n+b} - \sqrt{n-a-b})] &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ a \cdot \frac{n+a-n+a+b}{\sqrt{n+a} + \sqrt{n-a-b}} + b \cdot \frac{n+b-n+a+b}{\sqrt{n+b} + \sqrt{n-a-b}} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(2a+b)}{\sqrt{n} \left( \sqrt{1+\frac{a}{n}} + \sqrt{1-\frac{a+b}{n}} \right)} + \frac{b(a+2b)}{\sqrt{n} \left( \sqrt{1+\frac{b}{n}} + \sqrt{1-\frac{a+b}{n}} \right)} = 0. \end{aligned}$$

5°. Determinantul se mai scrie:

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 i & i(a_1 + b_1 i) & c_1 \\ a_2 + b_2 i & i(a_2 + b_2 i) & c_2 \\ a_3 + b_3 i & i(a_3 + b_3 i) & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

deoarece coloanele prima și a doua sînt proporționale.

XXI. 1°. Prin ipoteză avem relațiile:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} &= a(n-1)^2 + b(n-1); \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n &= an^2 + bn, \end{aligned}$$

pentru orice  $n \geq 2$ . Scăzîndu-le obținem:  $a_n = a + b + 2a(n-1)$ . Făcînd  $n = 1$  în relația dată prin ipoteză obținem:  $a_1 = a + b$ , deci  $a_n = a_1 + 2a(n-1)$ , ceea ce reprezintă formula termenului general al unei progresii aritmetice cu primul termen  $a_1 = a + b$  și rația  $r = 2a$ .

2°. Fie  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ , o funcție polinomială de grad  $n$ . Atunci:

$$\begin{aligned} f(x+2) &= a_n(x+2)^n + a_{n-1}(x+2)^{n-1} + a_{n-2}(x+2)^{n-2} + \dots + a_0 = \\ &= a_n(x^n + C_n^1 x^{n-1} 2 + C_n^2 x^{n-2} 2^2 + \dots) + a_{n-1}(x^{n-1} + C_{n-1}^1 x^{n-2} 2 + \dots) + \\ &+ a_{n-2}(x^{n-2} + \dots) + \dots + a_0 = a_n x^n + (2na_n + a_{n-1})x^{n-1} + (2n(n-1)a_n + \\ &+ 2(n-1)a_{n-1} + a_{n-2})x^{n-2} + \dots + a_0; \text{ am pus în evidență coeficienții termeni-} \\ &\text{lor } x^n, x^{n-1} \text{ și } x^{n-2}. \text{ Analog, avem:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x+1) &= a_n(x+1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} + a_{n-2}(x+1)^{n-2} + \dots + a_0 = \\ &= a_n(x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \dots) + a_{n-1}(x^{n-1} + C_{n-1}^1 x^{n-2} + \dots) + a_{n-2}(x^{n-2} + \dots) + \\ &+ \dots + a_0 = a_n x^n + (na_n + a_{n-1})x^{n-1} + \left( \frac{n(n-1)}{2} a_n + (n-1)a_{n-1} + \right. \\ &\left. + a_{n-2} \right) x^{n-2} + \dots + a_0. \end{aligned}$$

Efectuînd calculele obținem:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = (a_n - 2a_n + a_n)x^n + \\ &+ (2na_n + a_{n-1} - 2na_n - 2a_{n-1} + a_{n-1})x^{n-1} + (2n(n-1)a_n + 2(n-1)a_{n-1} + \\ &+ a_{n-2} - n(n-1)a_n - 2(n-1)a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-2})x^{n-2} + \dots = \\ &= n(n-1)a_n x^{n-2} + \dots, \text{ deci grad } g(x) = n-2 (a_n \neq 0), \text{ adică } g(x) \text{ este polino-} \\ &\text{mială de grad } n-2. \text{ În cazul particular, } n=3, \text{ avem: } f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + \\ &+ a_1 x + a_0, g(x) = a_3(x+2)^3 + a_2(x+2)^2 + a_1(x+2) + a_0 - 2(a_3(x+1)^3 + \\ &+ a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0) + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 6a_3 x + 8a_3 + 4a_2 + \\ &+ 2a_1 + a_0 - 2(a_3 + a_2 + a_1 + a_0) + a_0 = 6a_3 x + 6a_3 + 2a_2 = 6x + 24. \text{ Obți-} \\ &\text{nem: } 6a_3 = 6, 6a_3 + 2a_2 = 24 \text{ și, din condițiile } f(0) = 5, f(1) = 23, \text{ rezultă:} \\ &a_0 = 5, a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 23. \text{ Rezultă: } a_3 = 1, a_2 = 9, a_1 = 8, a_0 = 5. \end{aligned}$$

3°. Avem:  $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-2-1}{\frac{1}{e^2}} = -3e^2$ . Deoarece  $2,718 < e < 2,7183$  obținem

$-22,167 < -3e^2 < -22,162$ , deci  $f\left(\frac{1}{e}\right) \approx -22,16$ , cu două zecimale exacte.

Pentru a determina numărul de soluții reale ale ecuației  $f(x) = m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , avem (în general) două metode.

**Metoda I** (grafică). Ecuația  $f(x) = m$  este echivalentă cu sistemul  $y = f(x)$ ,  $y = m$ , deci vom trasa graficul funcției  $f$  și îl vom intersecta pe acesta cu drepte de ecuație  $y = m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ . Avem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2 \ln x - 1}{x^3} = -\infty \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{2x} = 0.$$

Rezultă  $x = 0$  asimptotă verticală și  $y = 0$  asimptotă orizontală. Evident  $f(x) = 0$  pentru  $2 \ln x - 1 = 0$ , adică  $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ . Calculăm:

$$f'(x) = \frac{4(1 - \ln x)}{x^3} \quad \text{și} \quad f''(x) = \frac{4(3 \ln x - 4)}{x^4}.$$

Tabloul de variație este următorul:

$x$	0	$\sqrt{e}$	$e$	$e^{\frac{4}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	0	- - -
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$ $\frac{5}{3e^{\frac{8}{3}}}$ $\searrow$	0
$f''(x)$		-	-	-	0 + + +

Graficul funcției este prezentat în fig. M.B.30.

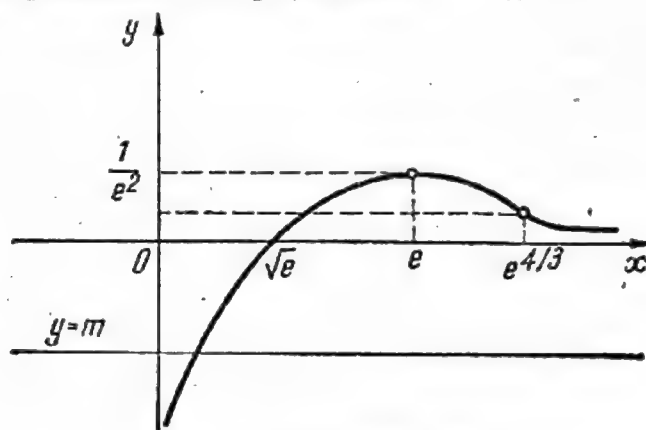


Fig. M.B.30

Din grafic rezultă următoarele cazuri:

- Dacă  $m \in (-\infty, 0]$ , ecuația are o soluție reală;
- Dacă  $m \in (0, \frac{1}{e^2})$ , ecuația are două soluții reale distincte;
- Dacă  $m = \frac{1}{e^2}$ , ecuația are o soluție dublă  $x = e$ ;
- Dacă  $m \in (\frac{1}{e^2}, +\infty)$ , ecuația nu are soluții reale.

**Metoda II** (cu șirul lui Rolle). Se consideră funcția  $g(x) = f(x) - m$ ,  $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  și  $m \in \mathbb{R}$ , parametru. Calculăm:  $g'(x) = f'(x) = \frac{4(1 - \ln x)}{x^3} = 0$ , de unde  $x = e$ . Se scrie șirul lui Rolle:

$x$	0	$e$	$\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e^2} - m$	$-m$



Avem:  $\frac{1}{e^2} - m = 0$  pentru  $m = \frac{1}{e^2}$  și  $-m = 0$  pentru  $m = 0$ . Apar mai multe cazuri pe care le scriem în tabloul următor:

$m \backslash x$	0	e	$+\infty$	Observații
$m \in (-\infty, 0]$	-	+	+	o rădăcină reală
$m \in (0, \frac{1}{e^2})$	-	+	-	două rădăcini reale
$m = \frac{1}{e^2}$	-	0	-	o rădăcină reală dublă
$m \in (\frac{1}{e^2}, +\infty)$	-	-	-	nici o rădăcină reală

4°. Funcția  $g$  este continuă fiind compunerea a două funcții continue  $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $g(x) = 1, (\forall)x \in \mathbb{R}$ , avem  $\cos f(x) = 1, (\forall)x \in \mathbb{R}$ , deci  $f(x) = 2k_x\pi$ , unde  $k_x \in \mathbb{Z}$  este un întreg, care poate să depindă de  $x$ . Presupunem că  $f$  nu este constantă; atunci există cel puțin două puncte  $x, x' \in \mathbb{R}$  astfel încît  $f(x) = 2k_x\pi, f(x') = 2k_{x'}\pi$  cu  $k_x \neq k_{x'}, (k_x, k_{x'} \in \mathbb{Z})$ . Funcția  $f$  fiind continuă are proprietatea Darboux, deci ia orice valoare cuprinsă între  $2k_x\pi$  și  $2k_{x'}\pi$ , absurd, deoarece  $f$  ia numai valori multipli întregi de  $2\pi$ . Rezultă că  $f$  este constantă.

5°. Aplicăm metoda de integrare prin părți și alegem:  $f(x) = x, g'(x) = \sin x$ . Rezultă  $f'(x) = 1$  și  $g(x) = -\cos x$ . Obținem:

$$\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx = -x \cos x \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = -2\pi + \sin x \Big|_0^{2\pi} = -2\pi.$$

XXII. 1°. Folosim notațiile uzuale  $BC = a, AC = b, AB = c$  etc. (v. fig. M.B.31).

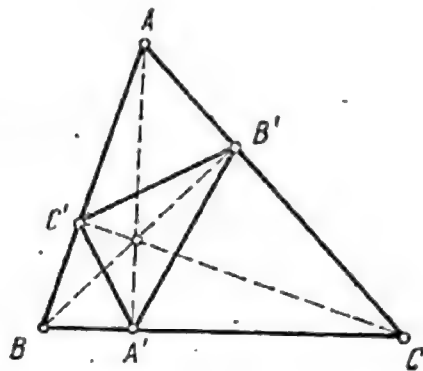


Fig. M.B.31

În triunghiul dreptunghic  $AA'B$  avem:  $BA' = AB \cos B = c \cos B$ . Analog rezultă:  $A'C = b \cos C, B'A = c \cos A, B'C = a \cos C, C'A = b \cos A, C'B = a \cos B$ . Deoarece  $m(\widehat{BB'C}) = m(\widehat{BC'C}) = 90^\circ$  rezultă că patrulaterul  $BC'B'C$  este inscriptibil. Atunci  $\widehat{AB'C'} = \widehat{ABC}$  (au același suplement, pe  $\widehat{C'B'C}$ ). Triunghiurile  $AB'C'$  și  $ABC$  sînt asemenea avînd unghiul  $A$  comun și  $\widehat{AB'C'} = \widehat{ABC}$ . Rezultă  $\frac{B'C'}{BC} = \frac{AB'}{AB} = \cos A$ , deci  $B'C' = a \cos A$ . Analog se arată că patrulaterul  $ACA'C'$ ,  $ABA'B'$  sînt inscriptibile, de unde rezultă că  $\triangle BA'C' \sim \triangle ABC$  și



c)  $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ . Ecuația devine:  $\cos x + \sin x - \cos x + \sin x = 2 \sin x$ , sau  $2 \sin x = 2 \sin x$ , cu soluțiile  $(\forall)x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ .

d)  $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ . Ecuația devine:  $\cos x + \sin x + \cos x - \sin x = 2 \sin x$ , sau  $\cos x - \sin x = 0$ , care nu are soluții în acest interval.

e)  $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ . Ecuația devine:  $-\cos x - \sin x + \cos x - \sin x = 2 \sin x$ , sau  $-2 \sin x = 2 \sin x$ , adică  $\sin x = 0$  și  $x = \pi$ . În concluzie, soluțiile ecuației sînt:  $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \{-\pi, \pi\}$ .

4°. Vom calcula distanța între diagonala cubului  $B'D$  și diagonala unei fețe  $BC'$ . Ducem prin  $B'$  paralela  $BE$  la  $BC'$  ( $E \in BC$ ) (v. fig. M.B.33). Deoarece  $BC' \parallel BE$  rezultă  $BC' \parallel$  planul  $B'DE$ . Atunci, distanța cerută este distanța de la punctul  $B$  (de exemplu) la planul  $B'DE$ . Vom calcula această distanță  $h$  exprimînd volumul piramidei  $BB'DE$  în două moduri. Avem:  $BE = a$  ( $B'C'BE$  paralelogram). În triunghiul dreptunghic  $DCE$  calculăm:  $DE^2 = DC^2 + CE^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$ , deci  $DE = a\sqrt{5}$ . În triunghiul  $BB'E$  avem:  $B'E^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ , deci  $B'E = a\sqrt{2}$ . Apoi  $BD = a\sqrt{2}$  și  $B'D^2 = BD^2 + BB'^2 = 3a^2$ , deci  $B'D = a\sqrt{3}$ . Deoarece  $DB'^2 + B'E^2 = 5a^2 = DE^2$ , triunghiul  $DB'E$  este dreptunghic. Calculăm:  $V = V_{B'BDE} = \frac{1}{3} \sigma(B'BE) \cdot DC = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}$ . Pe de altă parte avem:  $V = \frac{1}{3} \sigma(B'DE) \cdot h = \frac{h}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2}}{2}$ . Egalînd cele două expresii ale volumului aflăm pe  $h$ :  $h = \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ .

5°. Fie  $M$  mijlocul muchiei  $[VA]$  și  $MNPQ$  patrulaterul de secțiune (planul  $MNPQ$  este perpendicular pe  $CV$ ); v. fig. M.B.34. Avem:  $AC = a\sqrt{2}$ , deci

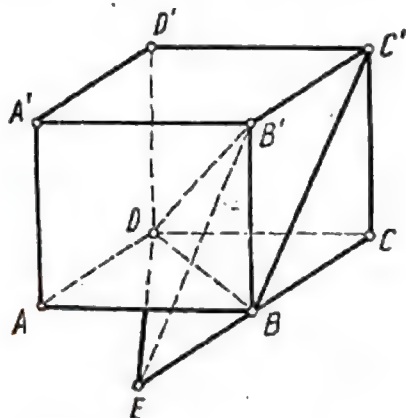


Fig. M.B.33

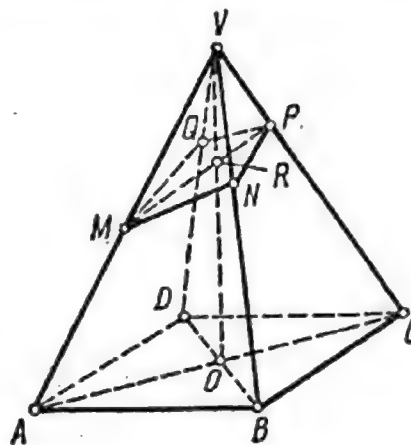


Fig. M.B.34

triunghiul  $VAC$  este echilateral. Ducem  $AE \perp CV$ ; rezultă:  $VO = AE = VA \cos 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$  (fig. M.B.35). Deoarece  $MP \perp VC$  rezultă  $MP \parallel AE$ , deci  $[MP]$  este linie mijlocie în  $\triangle VAE$ ; atunci  $MP = \frac{AE}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ . Avem:  $GE = \frac{1}{3} AE = \frac{a\sqrt{6}}{6}$  și  $RP = \frac{1}{2} GE = \frac{a\sqrt{6}}{12}$ .



Analog  $VP = \frac{1}{2} VE = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ . Apoi  $MR = MP - RP = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ . Cum  $QN \parallel BD$  avem:  $\frac{QN}{BD} = \frac{VR}{VO} = \frac{1}{3}$ , deci  $QN = \frac{a\sqrt{2}}{3}$  și  $QR = RN = \frac{a\sqrt{2}}{6}$ . În triunghiul drept-

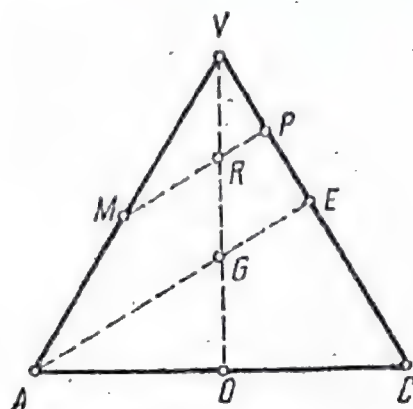


Fig. M.B.35

unghiic  $PRN$  rezultă:  $NP = \sqrt{RP^2 + RN^2} = \sqrt{\frac{6a^2}{144} + \frac{2a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{14}}{12} = QP$ . În triunghiul dreptunghiic  $MRN$  rezultă:  $MN = \sqrt{MR^2 + RN^2} = \sqrt{\frac{6a^2}{36} + \frac{2a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{2}}{3} = QM$ . Atunci perimetrul lui  $MNPQ$  este:  $p = 2(MN + PN) = 2\left(\frac{a\sqrt{2}}{3} + \frac{a\sqrt{14}}{12}\right) = \frac{a(4\sqrt{2} + \sqrt{14})}{6}$ . Aria lui  $MNPQ$  este:  $S = \frac{MP \cdot QN}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$ . Volumul lui  $VMNPQ$  este:  $V_1 = \frac{1}{3} \sigma(MNPQ) \cdot VP = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{144}$ . Volumul piramidei  $VABCD$  este:  $V = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ . Atunci:  $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{24}$ , de unde  $\frac{V_1}{V - V_1} = \frac{1}{24 - 1} = \frac{1}{23}$ , deci  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{23}$ .

**XXIII. 1°.** a) Pentru ca  $f$  să fie strict crescătoare trebuie să fie îndeplinită condiția:  $(\forall)x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  cu  $x_1 < x_2$  să avem  $f(x_1) < f(x_2)$ . Obținem  $mx_1 < mx_2$  sau:  $m(x_2 - x_1) > 0$  când  $x_2 - x_1 > 0$ , deci  $m > 0$ , adică  $m \in (0, \infty)$ .

b) Avem:  $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = m(mx) = m^2x$ . Pentru ca  $f \circ f = f$  trebuie ca  $m^2x = mx$ ,  $(\forall)x \in \mathbb{R}$ , deci obținem:  $m^2 = m$ , de unde  $m = 0$  sau  $m = 1$ .

2°. Din  $(x^2 - 2x)(e^{x-2} - 1) = 0$  obținem:  $x^2 - 2x = 0$ , cu soluțiile  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ , sau  $e^{x-2} - 1 = 0$ , adică  $e^{x-2} = e^0$ , cu soluția  $x_3 = 2$ . În concluzie ecuația are soluția simplă  $x_1 = 0$  și soluția dublă  $x_2 = x_3 = 2$ . Pentru rezolvarea inecuației facem tabloul următor:

$x$	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$e^{x-2} - 1$		-	-	-	0	+	+
$x^2 - 2x$		+	+	0	-	0	+
$\frac{e^{x-2} - 1}{x^2 - 2x}$		-		+		+	

și obținem:  $x \in (-\infty, 0)$ .

3°. Avem:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Din relația  $A^3 = pA^2 + qA$  obținem:

$$\begin{pmatrix} 2p & 0 & 2p \\ 0 & p & 0 \\ 2p & 0 & 2p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q & 0 & q \\ 0 & q & 0 \\ q & 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

deci:  $2p + q = 4$  și  $p + q = 1$ . Rezultă soluția:  $p = 3$ ,  $q = -2$ .

4°. Avem:  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{16}{\pi^2} - 1$ . Deoarece  $3,141 < \pi < 3,1416$ , obținem  $1,621 < \frac{16}{\pi^2} < 1,6212$ , deci  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0,62$ , cu două zecimale exacte. Pentru calculul limitei observăm că apare cazul de nedeterminare  $\infty - \infty$  și procedăm astfel:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} + 1 = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} + 1.$$

Avem:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1 + \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x}$ . Am ajuns la cazul de nedeterminare  $\frac{0}{0}$  și aplicăm regula lui l'Hôpital de patru ori:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x - 2x}{2x \sin^2 x + 2x^2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x(1 - \cos 2x) + x^2 \sin 2x} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos 2x - 1)}{1 - \cos 2x + 4x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin 2x}{6 \sin 2x + 12x \cos 2x - 4x^2 \sin 2x} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8 \cos 2x}{12 \cos 2x + 12 \cos 2x - 24x \sin 2x - 8x \sin 2x - 8x^2 \cos 2x} = \frac{-8}{24} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Rezultă  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ .

5°. Calculăm:  $f'(x) = 2 + a \ln x + ax \cdot \frac{1}{x} = a + 2 + a \ln x$ . Din  $f'(1) = 1$  obținem:  $a + 2 = 1$ , deci  $a = -1$ . Rezultă  $f(x) = 2x - x \ln x$  și  $f'(x) = 1 - \ln x$ . Pe intervalul  $[1, e]$  avem următorul tablou de variație al funcției  $f$ :

$x$	1				$e$
$f'(x)$	+	+	+	+	0
$f(x)$	2		$\nearrow$		$e$

Rezultă că  $f(x) > 0$  pe  $[1, e]$ , deci aria cerută este:

$$A = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e (2x - x \ln x) dx = x^2 \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx = e^2 - 1 - J,$$

unde  $J = \int_1^e x \ln x \, dx$ . Integrăm prin părți:  $f(x) = \ln x$ ,  $g'(x) = x$ , de unde  $f'(x) = \frac{1}{x}$  și  $g(x) = \frac{x^2}{2}$ . Rezultă:

$$J = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Atunci aria cerută este:  $A = e^2 - 1 - \frac{e^2 + 1}{4} = \frac{3e^2 - 5}{4}$ .

XXIV. 1°. Unim  $E$  cu  $C$  și ducem mediana  $AA'$  ( $A' \in BC$ ); v. fig. M.B.36.

a) Avem:  $m(\widehat{ABC}) = m\left(\frac{\widehat{AC}}{2}\right) = m(\widehat{AEC})$ .

b) În triunghiul dreptunghic  $ADB$  avem:  $m(\widehat{BAD}) = \frac{\pi}{2} - m(\widehat{ABC})$ .

Avem:  $m(\widehat{ACE}) = m\left(\frac{\widehat{AE}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ ; în triunghiul dreptunghic  $ACE$  rezultă:

$$m(\widehat{CAE}) = \frac{\pi}{2} - m(\widehat{AEC}) = \frac{\pi}{2} - m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BAD}).$$

c) Deoarece  $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{A'AC})$ , rezultă  $m(\widehat{A'AC}) = m(\widehat{EAC})$ , deci dreptele  $AE$  și  $AA'$  coincid. Rezultă că diametrul  $[AE]$  trece prin mijlocul  $A'$  al laturii  $[BC]$ . Dacă  $AE \perp BC$  rezultă  $m(\widehat{DAA'}) = 0$ , imposibil (căci  $m(\widehat{DAA'}) = m\left(\frac{\widehat{A}}{3}\right)$ ). Rezultă că  $[BC]$  este diametru (adică  $A'$  coincide cu  $O$ ), deci  $m(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{2}$ .

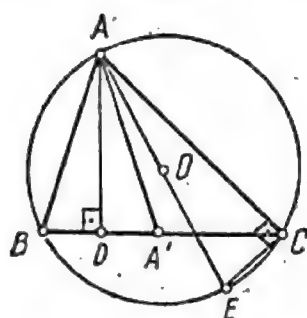


Fig. M.B.36

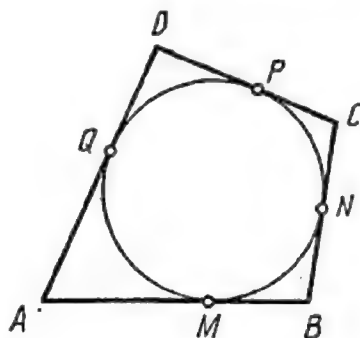


Fig. M.B.37

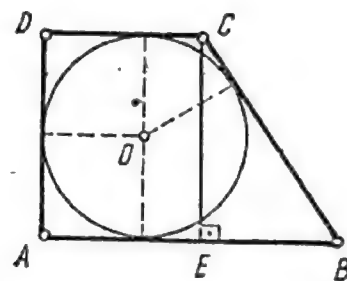


Fig. M.B.38

2°. Fie patrulaterul  $ABCD$  circumscribit și fie  $M, N, P, Q$  punctele de tangență ale laturilor  $[AB], [BC], [CD], [DA]$  la cerc (v. fig. M.B.37). Deoarece tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc sînt congruente avem:  $AM = AQ$ ,  $MB = BN$ ,  $CP = CN$ ,  $DP = DQ$ . Adunînd cele patru relații obținem:  $(AM + MB) + (CP + PD) = (BN + CN) + (AQ + DQ)$ , deci  $AB + CD = BC + AD$ . Fie acum  $ABCD$  un trapez dreptunghic circumscribit (v. fig. M.B.38). Notăm:  $AB = B$ ,  $CD = b$ ,  $AD = CE = l$  și  $BC = x$ . Avem:  $BE = B - b$ ; din triunghiul dreptunghic  $BEC$  rezultă:  $(B - b)^2 + l^2 = x^2$ . Efectuînd calculele obținem:  $B^2 + b^2 - 2Bb + l^2 = x^2$ . Din cele demonstrate anterior avem relația:  $B + b = l + x$ , pe care o ridicăm la pătrat:  $B^2 + b^2 + 2Bb = l^2 + x^2 + 2lx$ . Scădem din această relație relația anterioară și obținem:  $4Bb = 2l^2 + 2lx$ , sau  $2Bb = l(l + x)$ , deci  $2Bb = l(B + b)$ , adică aria lui  $ABCD$ :  $S = \frac{1}{2} l(B + b) = Bb$ .



3°. Se impun condițiile:  $\cos x \neq 0$ ,  $\sin x \neq 0$ ,  $\operatorname{tg} x \neq -1$ ,  $\operatorname{ctg} x \neq -1$ , de unde rezultă  $x \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $x \neq k\pi$ ,  $x \neq k\pi - \frac{\pi}{4}$ , cu  $k \in \mathbb{Z}$ .

Înlocuind  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  și  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$  ecuația devine:

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x} - \frac{\cos^2 x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{2} \text{ sau } \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{2},$$

adică  $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$ . Putem scrie:  $\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$ , deci  $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ , de unde  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ . Rezultă că:  $x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , sau încă:  $x = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , soluții care nu sînt acceptabile, datorită condițiilor de existență impuse mai sus. Rezultă că ecuația dată nu are soluții.

4°. Ducem apotema  $[VM]$  ( $M$  mijlocul lui  $AB$ ) și  $AN \perp VB$ ,  $CN \perp VB$ .

Unghiul diedru căutat este unghiul  $\widehat{ANC}$  (v. fig. M.B.39). În triunghiul drept-unghic  $VOA$  avem:  $OA^2 = VA^2 - VO^2 = 100 - 64 = 36$ , deci  $OA = 6$  cm. Rezultă  $AB = OA = OB = 6$  cm. Atunci  $AM = 3$  cm, deci  $VM^2 = VA^2 - AM^2 = 100 - 9 = 91$ , de unde  $VM = \sqrt{91}$ . Aria laterală este:  $A_l = 6 \cdot \sigma_{(VAB)} = 6 \cdot \frac{VM \cdot AB}{2} = 3 \cdot 6 \sqrt{91} = 18\sqrt{91}$  cm<sup>2</sup>. Apoi:  $AC = OA\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$  cm și  $AB \cdot VM = VB \cdot AN$ , de unde  $AN = \frac{AB \cdot VM}{VB} = \frac{6 \cdot \sqrt{91}}{10} = \frac{3\sqrt{91}}{5}$  cm. Avem  $CN = AN$ . Notînd cu  $\alpha$  unghiul  $\widehat{ANC}$ , din teorema cosinusului în triunghiul  $ANC$ , obținem:  $\cos \alpha = \frac{AN^2 + NC^2 - AC^2}{2AN \cdot NC} = -\frac{59}{91}$ . Rezultă

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{59}{91}\right) = \pi - \arccos \frac{59}{91}.$$

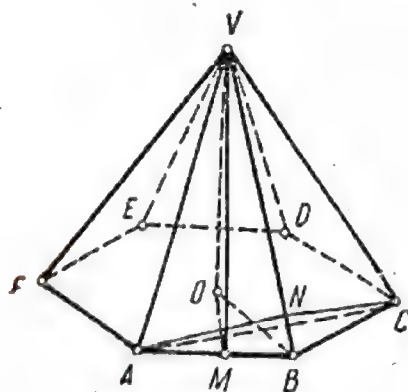


Fig. M.B.39

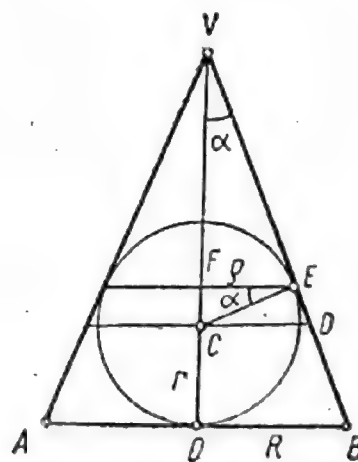


Fig. M.B.40

5°. O secțiune prin figură arată ca în fig. M.B.40. În  $\triangle VOB$  avem:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{h}$ , deci  $R = h \operatorname{tg} \alpha$ . În  $\triangle VEC$  avem:  $\sin \alpha = \frac{r}{h-r}$ , de unde  $r = \frac{h \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$ . În  $\triangle CEF$  avem:  $\cos \alpha = \frac{\rho}{r}$ , deci  $\rho = r \cos \alpha = \frac{h \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$ . În  $\triangle VCD$

avem:  $CD = (h - r) \operatorname{tg} \alpha$ . Volumul conului mic determinat de planul (P) este:  $V_1 = \frac{\pi \cdot CD^2(h-r)}{3} = \frac{\pi(h-r)^3 \operatorname{tg}^3 \alpha}{3}$ . Volumul conului este:  $V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi h^3 \operatorname{tg}^3 \alpha}{3}$ .

Punind condiția  $V = 2V_1$ , obținem:  $h^3 = 2(h-r)^3$ , deci  $h = \sqrt[3]{2(h-r)}$ . Înlocuind pe  $r$  obținem:  $1 + \sin \alpha = \sqrt[3]{2}$ , deci  $\sin \alpha = \sqrt[3]{2} - 1$  și  $\alpha = \arcsin(\sqrt[3]{2} - 1)$ .

XXV. 1°. Ecuația are sens numai dacă  $x \in [-9, 97]$ . Fie  $u = \sqrt[4]{97-x} \geq 0$  și  $v = \sqrt{9+x} \geq 0$ . Atunci:

$$\begin{cases} u + v = 8; \\ u^4 + v^2 = 106, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 8 - u; \\ u^4 + u^2 - 16u - 42 = 0. \end{cases}$$

Ultima ecuație admitând soluția  $u = 3$ , avem:  $(u-3)(u^3 + 3u^2 + 10u + 14) = 0$ . Cum  $u \geq 0$ , rezultă  $u^3 + 3u^2 + 10u + 14 > 0$ , deci singura soluție reală este  $u = 3$ , prin urmare  $x = 16 \in [-9, 97]$ .

2°. Matricea sistemului fiind  $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ , obținem  $\det A =$

$= (a-b)(c-1)^2$  și distingem trei cazuri:

i) Dacă  $a \neq b$  și  $c \neq 1$ , atunci  $\det A \neq 0$ , deci sistemul este compatibil determinat; în plus:

$\Delta_x = c(c-1)^2(a-b)$ ;  $\Delta_y = (b-a)(c-1)^2(2c+1)$ ;  $\Delta_z = (a-b)(c-1)^2(c+2)$ , prin urmare:  $x = c$ ;  $y = -(2c+1)$ ;  $z = c+2$  sînt soluțiile sistemului.

ii) Dacă  $a = b$ , atunci oricare ar fi  $c \in \mathbb{R}$ , rangul matricii  $A$  este egal cu 2. Într-adevăr, presupunînd că rangul lui  $A$  ar fi mai mic decît 2, atunci ar trebui ca  $ac - a - 1 = 0$  și  $ac^2 - a - 2 = 0$ , cu  $a \neq 0$ ; din prima egalitate obținem  $c = \frac{a+1}{a}$ , care înlocuită în cea de a doua conduce la  $1 = 0$ , ceea ce este fals.

Analog, se arată că rangul matricii extinse a sistemului este tot 2. Prin urmare, soluția sistemului se găsește exprimînd două din necunoscute în funcție de cea de a treia; exemplu:

$$x = \frac{(a+1)c^2 - (a+3)c + [a(c+2) - (a+1)c^2]z}{a+1-ac};$$

$$y = \frac{a+3-ac^2 - (a+2-ac^2)z}{a+1-ac}, \text{ cu } z \in \mathbb{R}.$$

iii) Dacă  $a \neq b$  și  $c \neq 1$ , atunci  $\det A = 0$  și  $\operatorname{rang} A = 2$ , deoarece  $\begin{vmatrix} b & b+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ . Minorul caracteristic este nul, deci sistemul este compatibil nedeterminat, soluțiile putînd avea forma:  $x = t - 2$ ;  $y = 3 - 2t$ ;  $z = t$ , cu  $t \in \mathbb{R}$ .

3°. Fie  $a, b$  și  $c$  cele trei rădăcini întregi ale lui  $f(X)$ , astfel încît  $a = 3p$ ,  $b = 3q + 1$  și  $c = 3r + 2$ ; în plus,  $f(X) = (X-a)(X-b)(X-c)g(X)$ , unde  $g(X) \in \mathbb{Z}[X]$ . Fie  $n \in \mathbb{Z}$ ; pentru  $n = 3h$ , cu  $h \in \mathbb{Z}$ ,  $f(n) = 3(h-p)(h-q)(h-r)g(n)$  este divizibil cu 3; pentru  $n = 3h + 1$ , cu  $h \in \mathbb{Z}$ ,  $f(n) = 3(n-a)(h-q)(h-r)g(n)$  este divizibil cu 3; pentru  $n = 3h + 2$ , cu  $h \in \mathbb{Z}$ ,  $f(n) = 3(n-a)(n-b)(h-r)g(n)$  este divizibil cu 3. Cum  $n$  a fost un întreg arbitrar ales, rezultă că oricare ar fi  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f(n)$  este divizibil cu 3.

4°. Cum  $a$  este o rădăcină a ecuației date, avem: (1)  $a^3 - a - 1 = 0$ , și, prin ipoteză: (2)  $2a^2 - a = b$ . Sumînd prima egalitate, înmulțită cu 2, cu cea de a doua, înmulțită cu  $-a$ , obținem, după efectuarea calculelor: (3)  $a^3 - 2a + ab - 2 = 0$ . În continuare, adunînd pe (2) cu (3), înmulțită cu  $-2$ , găsim: (4)  $a(3 - 2b) = b - 4$ .

Dar  $3 - 2b \neq 0$ . Într-adevăr, dacă admitem că  $3 - 2b = 0$ , atunci, din (2), obținem  $a^2 = \frac{2a+3}{4}$  și, dacă ținem cont de această valoare în (1), găsim  $a^2 = \frac{2a+8}{4}$ , ultimele două egalități fiind însă incompatibile. Atunci, din (4), avem  $a = \frac{b-4}{3-2b}$ , valoare care înlocuită în (2) conduce la egalitatea:  $b^3 - 4b^2 + 9b - 11 = 0$ . Prin urmare, polinomul căutat este  $g(X) = X^3 - 4X^2 + 9X - 11$ .

5°. Considerind  $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}$ , unde  $\{a, b, c, d, e\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , avem:  $x\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ b & c & a & e & d \end{pmatrix}$  și  $\sigma x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sigma(a) & \sigma(b) & \sigma(c) & \sigma(d) & \sigma(e) \end{pmatrix}$ . Dar  $\sigma x = x\sigma$ , deci:  $\sigma(a) = b$ ;  $\sigma(b) = c$ ;  $\sigma(c) = a$ ;  $\sigma(d) = e$  și  $\sigma(e) = d$ . Ultimele două egalități arată că  $\{d, e\} = \{4, 5\}$ , fiind de studiat următoarele trei cazuri:

i) Dacă  $a = 1$ , atunci  $\sigma(1) = b$ ,  $\sigma(b) = c$  și  $\sigma(c) = 1$ , deci  $b = 2$  și  $c = 3$ , prin urmare găsim soluțiile:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

ii) Dacă  $a = 2$ , atunci  $\sigma(2) = b$ ,  $\sigma(b) = c$  și  $\sigma(c) = 2$ , deci  $b = 3$  și  $c = 1$ , prin urmare:

$$x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

iii) Dacă  $a = 3$ , atunci  $\sigma(3) = b$ ,  $\sigma(b) = c$  și  $\sigma(c) = 3$ , deci  $b = 1$  și  $c = 2$ , de unde:

$$x_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad x_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

XXVI. 1°. Sînt de analizat două cazuri:

i) Dacă  $x_0 \geq a$ , atunci  $x_1 - a = \frac{a(x_0 - a)}{x_0 + a} \geq 0$ , adică  $x_1 \geq a$  și, prin inducție matematică, se arată că  $x_n \geq a$ ,  $(\forall)n \geq 1$ . Într-adevăr, presupunind că  $x_{n-1} \geq a$ , atunci  $x_n = \frac{2ax_{n-1}}{x_{n-1} + a} \geq \frac{2ax_{n-1}}{x_{n-1} + x_{n-1}} = a$ . În plus,  $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n(a - x_n)}{x_n + a} \leq 0$ ,  $(\forall)n \in \mathbb{N}$ , deoarece  $a - x_n \leq 0$  și  $x_n > 0$ ,  $(\forall)n \in \mathbb{N}$ . Rezultă că șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  este mărginit inferior și descrescător, deci convergent. Notînd  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  și trecînd

la limită în relația de recurență găsim că:  $\alpha = \frac{2a\alpha}{\alpha + a}$ , de unde  $\alpha = 0$  sau  $\alpha = a$ . Cum  $x_n \geq a > 0$ ,  $(\forall)n \in \mathbb{N}$ , rezultă că  $\alpha > 0$ , deci  $\alpha = a$ , prin urmare  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

ii) Dacă  $0 < x_0 < a$ , atunci  $x_1 - a = \frac{a(x_0 - a)}{x_0 + a} < 0$ , deci  $x_1 < a$ ; în plus,  $x_1 = \frac{2ax_0}{x_0 + a} > 0$ ; așadar  $0 < x_1 < a$ . Procedînd prin inducție se arată, fără dificultate, că  $0 < x_n < a$ ,  $(\forall)n \in \mathbb{N}$ . În acest caz:  $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n(a - x_n)}{x_n + a} > 0$ ,  $(\forall)n \in \mathbb{N}$ , deoarece  $a - x_n > 0$  și  $x_n > 0$ . Prin urmare, și în acest caz, șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent, fiind mărginit și monoton (chiar strict monoton, fiind strict crescător). Notînd  $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  și trecînd la limită în relația de recurență, găsim  $\beta = \frac{2a\beta}{\beta + a}$ .



de unde  $\beta = 0$  sau  $\beta = a$ ; dar  $\beta \neq 0$  deoarece  $0 < x_n < a$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}$  și  $(x_n)_{n \geq 0}$  este strict crescător, deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

Așadar, în oricare din situații șirul considerat este convergent și are limita  $a$ , atunci când  $a > 0$  și  $x_0 > 0$ .

2°. Observind că funcția  $f$  este periodică, avînd perioada principală  $2\pi$ , conchidem că este suficient să studiem restricția lui  $f$  la intervalul  $[0, 2\pi]$ . Fie  $g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \lambda + \cos x - \sin x$ . Cum  $g'(x) = 0$ , atunci și numai atunci cînd  $x \in \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$ , pentru  $x = \frac{3\pi}{4}$ ,  $g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \lambda - \sqrt{2}$  fiind minim global al lui  $g$ , iar pentru  $x = \frac{7\pi}{4}$ ,  $g\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \lambda + \sqrt{2}$  fiind maxim global al lui  $g$ , rezultă  $\lambda - \sqrt{2} \leq g(x) \leq \lambda + \sqrt{2}$ ,  $(\forall) x \in [0, 2\pi]$  și sînt de analizat trei cazuri:

i) Dacă  $\lambda \leq -\sqrt{2}$ , atunci  $g(x) \leq 0$ , deci  $\lambda + \cos x \leq \sin x$ ,  $(\forall) x \in [0, 2\pi]$ ; prin urmare  $f(x) = \sin x$ ,  $(\forall) x \in [0, 2\pi]$ ,  $f$  fiind evident derivabilă peste tot.

ii) Dacă  $\lambda \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ , cum  $\lambda - \sqrt{2} < 0$  și  $\lambda + \sqrt{2} > 0$ , rezultă că ecuația  $g(x) = 0$  are o rădăcină în intervalul  $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ . Fie  $x_0$  rădăcina respectivă; atunci, pentru  $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, x_0\right)$ ,  $g(x) < 0$ , deci  $f(x) = \sin x$ , iar pentru  $x \in \left(x_0, \frac{7\pi}{4}\right)$ ,  $g(x) \geq 0$ , deci  $f(x) = \lambda + \cos x$ . Prin urmare:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dacă } x \in \left(\frac{3\pi}{4}, x_0\right), \\ \lambda + \cos x & \text{dacă } x \in \left(x_0, \frac{7\pi}{4}\right), \end{cases}$$

dar  $f$  nu este derivabilă în  $x_0$ . Într-adevăr, cum  $f'_s(x_0) = \cos x_0$  și  $f'_d(x_0) = -\sin x_0$ , dacă ar avea loc egalitatea  $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$ , atunci ar rezulta  $\cos x_0 = -\sin x_0$ , adică  $x_0 \in \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$  ceea ce este fals, deoarece  $x_0 \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ . Așadar, în acest caz,  $f$  nu este derivabilă pe  $[0, 2\pi]$ .

iii) Dacă  $\lambda \geq \sqrt{2}$ , atunci  $g(x) \geq 0$ , deci  $\lambda + \cos x \geq \sin x$ ,  $(\forall) x \in [0, 2\pi]$ , prin urmare  $f(x) = \lambda + \cos x$ ,  $(\forall) x \in [0, 2\pi]$ , funcția  $f$  fiind derivabilă peste tot. Așadar,  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  dacă și numai dacă

$$\lambda \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty).$$

3°. Cum  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = 1$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = 0$ , rezultă  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}\right)^{\frac{x - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}} = e$ .

Pe de altă parte,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} \cdot x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \infty$ . Prin urmare:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}\right)^{\frac{x - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} \cdot x} = \infty.$$

4°. Ecuația  $f(x) = 0$ , avînd singura soluție pe  $x = 1$ , rezultă că graficul lui  $f$  întilnește axa  $Ox$  numai în punctul de coordonate  $(1, 0)$ . Cum  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ ,

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$  și  $f(1) = 0$ , rezultă că funcția  $f$  este continuă în punctul  $x = 1$ , deci este continuă pe tot domeniul de definiție. Pe de altă parte:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0,$$

deci dreapta  $x = 0$  (adică axa  $Oy$ ) este asimptotă verticală, iar dreapta  $y = 0$  (adică axa  $Ox$ ) este asimptotă orizontală. Cum

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}(x - 1)}, \text{ iar}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{|\ln x|}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{-\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left( -\frac{1}{x} \right) = -1 \text{ și}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{|\ln x|}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1,$$

rezultă că funcția  $f$  nu este derivabilă în  $x = 1$ , acesta fiind un punct unghiular al graficului lui  $f$ . Pentru orice  $x \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ , funcția  $f$  este derivabilă și cum

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\ln x}{\sqrt{x}} & \text{dacă } x \in (0, 1), \\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}} & \text{dacă } x \in (1, \infty), \end{cases}$$

avem:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\ln x - 2}{2x\sqrt{x}} & \text{dacă } x \in (0, 1), \\ \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} & \text{dacă } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Pentru  $x \in (0, 1)$ ,  $f'(x) < 0$ . Pentru  $x \in (1, \infty)$ , ecuația  $f'(x) = 0$  are soluția  $x = e^2$ , semnul funcției  $f'$  fiind dat de cel al expresiei  $2 - \ln x$ ; în acest caz:  $f'(x) > 0$  dacă  $x \in (1, e^2)$  și  $f'(x) < 0$  dacă  $x \in (e^2, \infty)$ ; în plus,  $f(e^2) = \frac{2}{e}$  este valoarea funcției în punctul de maxim. Cum

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-3 \ln x + 8}{4x^2\sqrt{x}} & \text{dacă } x \in (0, 1), \\ \frac{3 \ln x - 8}{4x^2\sqrt{x}} & \text{dacă } x \in (1, \infty), \end{cases}$$

rezultă că  $f''(x) > 0$ , pentru  $x \in (0, 1)$ , deoarece inegalitatea  $\frac{-3 \ln x + 8}{4x^2\sqrt{x}} > 0$  este echivalentă cu  $\ln x < \frac{8}{3}$ , care este adevărată pentru că  $\ln x < 0$ ; pentru  $x \in (1, \infty)$ ,

ecuația  $f''(x) = 0$  are soluția  $x = e^{\frac{8}{3}}$ , deci  $f''(x) < 0$  dacă  $x \in (1, e^{\frac{8}{3}})$  și  $f''(x) > 0$  dacă  $x \in (e^{\frac{8}{3}}, \infty)$ ; în plus,  $f(e^{\frac{8}{3}}) = \frac{8}{3e^{\frac{8}{3}}}$  este valoarea ordonatei punctului de inflexiune.

Tabloul variației funcției  $f$  este următorul:

$x$	0	1	$e^2$	$e^{\frac{8}{3}}$	
$f'(x)$	-	-	+	+	0 - - -
$f(x)$	$\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$ $\searrow$ $\frac{8}{3e^{\frac{8}{3}}}$ $\searrow$ 0
$f''(x)$		+	+	-	- - - 0 + +

iar graficul acestuia redat în fig. M.B.41.

5°. Fie  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{x^2} + e^{1-x^2}$ . Atunci  $f'(x) = 2x(e^{x^2} - e^{1-x^2})$  și ecuația  $f'(x) = 0$  are soluțiile  $x = 0$  și  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Semnul funcției  $f'$  fiind dat de cel al expresiei  $e^{x^2} - e^{1-x^2}$ , rezultă că  $f'(x) \leq 0$  dacă  $x \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$  și  $f'(x) \geq 0$  dacă  $x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ . Prin urmare, funcția  $f$  este crescătoare pe primul interval și descrescătoare pe cel de al doilea; în plus,  $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{e}$  și  $f(1) = 1 + e$ . Așadar  $2\sqrt{e} \leq f(x) \leq 1 + e$ ,  $(\forall)x \in [0, 1]$  și, integrând această dublă egalitate pe intervalul respectiv, găsim:

$$\int_0^1 2\sqrt{e} dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 (1 + e) dx,$$

de unde rezultă imediat cerința din enunț.

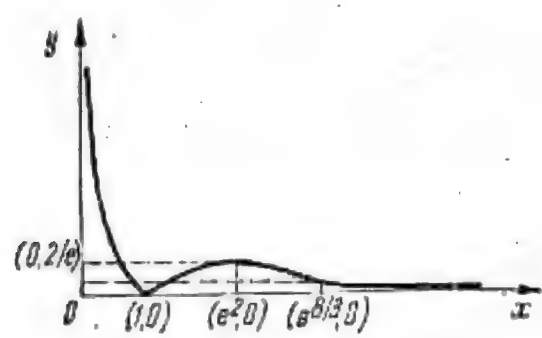


Fig. M.B.41

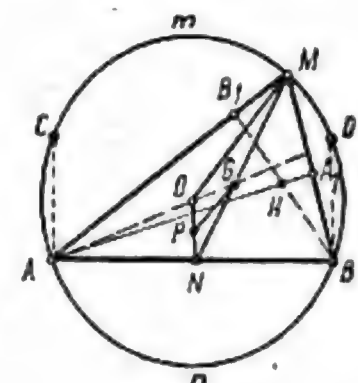


Fig. M.B.42

XXVII. 1°. Pentru a determina locul geometric al punctului  $H$ , notăm cu  $A_1$  și  $B_1$  picioarele înălțimilor triunghiului, duse din vîrfurile  $A$  și, respectiv,  $B$  (v. fig. M.B.42). Patrulaterul  $MA_1HB_1$  este inscripabil, deoarece  $m(\widehat{A_1A_1M}) = m(\widehat{B_1B_1M}) = 90^\circ$ ; prin urmare,  $m(\widehat{AHB}) = 180^\circ - m(\widehat{AMB}) = \text{const}$ ,  $m(\widehat{AMB})$  fiind constantă. Deci, cînd  $M$  parcurge arcul  $\widehat{CmD} \subset \mathcal{C}(O, r)$ ,  $H$  va parcurge un arc



de cerc, avind capetele în  $A$  și  $B$  și fiind situat de aceeași parte a dreptei  $AB$  ca și  $M$ , iar cind  $M$  parcurge arcul  $\widehat{CnD} \subset \mathcal{C}(O, r)$ ,  $H$  va parcurge tot un arc de cerc, într-o situație similară celei anterioare cu excepția a două puncte (simetricele punctelor  $C$  și  $D$  față de  $AB$  care corespund cazurilor cind  $\triangle ABM$  este degenerat, adică  $M \equiv A$  sau  $M \equiv B$ ). Se arată apoi, fără dificultate, că arcele parcurse de  $H$  aparțin aceluiași cerc, simetricul lui  $\mathcal{C}(O, r)$ , fără două puncte, față de dreapta  $AB$ , care este însuși locul geometric al lui  $H$ . Pentru a determina locul geometric al lui  $G$ , considerăm mediana  $[MN]$  ( $N \in AB$ ,  $AN \equiv BN$ ) și construim  $GP \parallel OM$  ( $P \in NO$ ). Cum triunghiurile  $GNP$  și  $MNO$  sint asemenea, avind valoarea raportului de asemănare egală cu  $\frac{1}{3}$ , rezultă că  $P$  este fix ( $N$  și  $O$  fiind fixe), iar  $PG = \frac{1}{3} MO = \frac{1}{3} r = \text{const.}$

Prin urmare, locul geometric al punctului  $G$  este cercul de centru  $P$  și rază  $r' = \frac{1}{3} r$ , adică  $\mathcal{C}(P, r')$ , fără două puncte, care corespund cazurilor cind  $\triangle ABM$  este degenerat, adică  $M \equiv A$  sau  $M \equiv B$ .

2°. *Metoda I.* Fie  $AD \perp (OBC)$  și  $DE \perp OC$ ,  $DF \perp OB$  ( $E \in OC$ ,  $F \in OB$ );  
v. fig. M.B.43. Conform teoremei celor trei perpendiculare, avem că  $AE \perp OC$

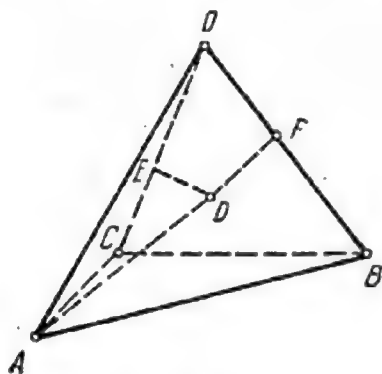


Fig. M.B.43

și  $AF \perp OB$ . Mai mult, triunghiurile  $ADE$  și  $AFD$  sint dreptunghice. Rezultă că  $\text{tg}(\widehat{AOC}) = \frac{AE}{OE} > \frac{ED}{OE} = \text{tg}(\widehat{DOC})$ , deoarece  $AE > ED$  (că ipotenuză în triunghiul dreptunghic  $ADE$ ). Analog:  $\text{tg}(\widehat{AOB}) = \frac{AF}{OF} > \frac{DF}{OF} = \text{tg}(\widehat{DOB})$ . Funcția tangentă fiind crescătoare pe  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , rezultă  $m(\widehat{AOC}) > m(\widehat{DOC})$  și  $m(\widehat{AOB}) > m(\widehat{DOB})$ , de unde, prin adunarea membru cu membru a celor două inegalități, găsim:  $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{AOC}) > m(\widehat{DOC}) + m(\widehat{DOB}) = m(\widehat{BOC})$ , adică inegalitatea din enunț.

*Notă.* În aplicarea raționamentului făcut s-a considerat că  $D \in \text{Int}(\widehat{BOC})$ , cazul cind  $D \notin \text{Int}(\widehat{BOC})$  fiind evident deoarece măsura proiecției unuia dintre cele două unghiuri  $\widehat{AOC}$  și  $\widehat{AOB}$  este mai mare decît  $m(\widehat{BOC})$ .

*Metoda II.* Dacă  $m(\widehat{AOC}) > m(\widehat{BOC})$ , problema este rezolvată. Să analizăm ce se întimplă dacă  $m(\widehat{AOC}) \leq m(\widehat{BOC})$ . Atunci există un punct  $D \in \text{Int}(\widehat{BOC})$  astfel încît  $OD = OA$  și  $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{COD})$ . Planul  $(ADC)$  intersectează semidreapta

$[OB]$  în punctul  $B'$ . Rezultă că triunghiurile  $OCD$  și  $OAC$  sînt congruente, deci  $[CA] \equiv [CD]$ . În triunghiul  $ACB'$  avem  $AC + AB' > CB' = CD + DB'$ , deci  $AB' > DB'$ . În triunghiurile  $AOB'$  și  $DOB'$  avem  $[OD] \equiv [OA]$ ,  $[OB']$  latură comună și  $AB' > DB'$ . Așadar,  $m(\widehat{AOB'}) > m(\widehat{DOB'})$ , prin urmare:  $m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{AOB'}) > m(\widehat{COD}) + m(\widehat{DOB'}) = m(\widehat{BOC})$ , deci tocmai inegalitatea cerută.

3°. Fie  $ABC$  un triunghi pentru care  $\sigma[ABC] = 1$ . Prin reducere la absurd, presupunem că există două laturi, fie acestea  $AB$  și  $AC$ , avînd lungimile strict mai mici decît  $\sqrt{2}$ . Atunci:

$$1 = \sigma[ABC] = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\widehat{BAC})}{2} \leq \frac{AB \cdot AC}{2} < \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 1.$$

adică  $1 < 1$ , fapt imposibil, prin urmare cel puțin două laturi ale triunghiului respectiv au lungimile mai mari sau egale cu  $\sqrt{2}$ .

4°. Pentru  $n = 1$ , ecuația dată devine  $\cos x - \sin x = 1$ , de unde  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , adică  $x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , echivalent cu  $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{2k\pi - \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

Pentru  $n \geq 2$ , sînt de analizat două cazuri:

i) Dacă  $n = 2p$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ , ecuația devine  $\cos^{2p} x - \sin^{2p} x = 1$ . Pe de altă parte,  $0 \leq \cos^{2p} x \leq 1$  și  $-1 \leq -\sin^{2p} x \leq 0$ , deci  $\cos^{2p} x - \sin^{2p} x \leq 1$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$ , egalitatea avînd loc atunci și numai atunci cînd  $\cos^{2p} x = 1$  și  $\sin^{2p} x = 0$ , adică dacă și numai dacă  $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

ii) Dacă  $n = 2p + 1$ , ecuația dată devine: (1)  $\cos^{2p+1} x - \sin^{2p+1} x = 1$ . Pe de altă parte, oricare ar fi  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ , avem:

$$|\cos^{2p+1} x| = |\cos x|^{2p+1} < |\cos x|^2 = \cos^2 x,$$

deci  $\cos^{2p+1} x < \cos^2 x$ ; analog, găsim  $-\sin^{2p+1} x < \sin^2 x$ . Cum

$$\cos^{2p+1} x - \sin^{2p+1} x < \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

rezultă că oricare ar fi  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$  nu satisface (1). Observînd că  $x = 0$  și  $x = \frac{3\pi}{2}$  verifică (1), dar  $x = \frac{\pi}{2}$  și  $x = \pi$  nu, cum  $\cos^{2p+1} x - \sin^{2p+1} x$  este periodică, avînd perioada principală  $2\pi$ , rezultă că  $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$  sînt soluții ale ecuației (1).

5°. Ecuația hiperbolei raportată la axele sale este (II):  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ , cu  $a > 0$ . Cum punctul de coordonate  $(1, 0)$  aparține hiperbolei (II), trebuie să aibă loc egalitatea  $\frac{1}{a^2} - \frac{0}{b^2} = 1$ , deci  $a = 1$ , deoarece  $a > 0$ . Pe de altă parte, dreptele  $(d_1)$  și  $(d_2)$  sînt asimptote la hiperbolă, deci  $\frac{b}{a} = 2$ , adică  $b = 2$ , deoarece  $a = 1$ . Prin urmare, hiperbola (II) are ecuația  $4x^2 - y^2 - 4 = 0$ .

XXVIII. 1°. Fie  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k < 1989$ ; atunci:

$$T_{k+1} = C_{1989}^k (Vx \sqrt{x})^{1989-k} \left( \frac{2}{Vx} \right)^k,$$

adică

$$T_{k+1} = C_{1989}^k x^{\frac{3}{4}(1989-k)} \cdot 2^k \cdot (x)^{-\frac{k}{4}},$$

termenii respectivi fiind independenți de  $x$  atunci și numai atunci când

$$\frac{3}{4}(1989-k) - \frac{k}{4} = 0,$$

de unde  $k = 1377$ , valoare care îndeplinește condițiile cerute asupra lui  $k$ . Așadar, în dezvoltarea considerată, există un singur termen independent de  $x$ , anume  $T_{1378}$ , a cărui valoare este

$$T_{1378} = C_{1989}^{1377} \cdot 2^{1377}.$$

2°. Fie  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ,  $x_1 < x_2$ . Atunci  $x_1^3 < x_2^3$  și, cum  $a > 0$ , avem:

$$f(x_1) = x_1^3 + \frac{x_1}{a} < x_2^3 + \frac{x_2}{a} = f(x_2),$$

adică:

$$f(x_1) < f(x_2),$$

prin urmare funcția  $f$  este strict crescătoare, deci injectivă. Fie acum  $y \in \mathbb{R}$ : să arătăm că există  $x \in \mathbb{R}$ , astfel încât să avem  $y = f(x)$ . Acest fapt este imediat, deoarece ecuația  $x^3 + \frac{x}{a} = y$  este o ecuație algebrică (polinomială), cu coeficienți reali și de grad impar (trei), prin urmare admite cel puțin o rădăcină reală, numărul rădăcinilor complexe fiind — în cazul problemei date — egal cu doi. Așadar, funcția  $f$  este surjectivă. Fiind injectivă și surjectivă, rezultă că  $f$  este bijectivă.

*Observație.* În condițiile utilizării unor elemente de Analiză matematică, problema respectivă putea fi rezolvată după cum urmează. Funcția  $f$  este continuă și derivabilă pe  $\mathbb{R}$ , fiind o funcție polinomială. Cum

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{a} > 0,$$

rezultă că  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ , deci (strict) monotonă; fiind și continuă, rezultă că este bijectivă deoarece  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  și  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

3°. Fie  $M$  punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor  $\widehat{BCD}$  și  $\widehat{ADC}$ . Atunci  $M$  este egal depărtat de laturile  $[BC]$ ,  $[CD]$  și, respectiv,  $[AD]$ ; notăm cu  $h$  distanța respectivă. Pe de altă parte:

$$(*) \quad \sigma_{(ABCD)} = \sigma_{(ADM)} + \sigma_{(MBC)} + \sigma_{(MDC)}$$

atunci și numai atunci când  $M$  se află pe  $[AB]$ ; în caz contrar, egalitatea (1) fiind evident înlocuită de o inegalitate. Dar (\*) se mai scrie ca:

$$\frac{h \cdot (AB + CD)}{2} = \frac{AD \cdot h}{2} + \frac{CD \cdot h}{2} + \frac{BC \cdot h}{2},$$

care este echivalentă cu relația (1) din enunț.

*Notă.* Pentru obținerea egalității (1) din enunț s-ar fi putut proceda prin a arăta că dacă  $M$  se află pe  $[AB]$ , atunci triunghiurile  $MAD$  și  $BMC$  sînt isosecele de unde se obținea, fără dificultate, relația respectivă.



Pentru calculul lungimii diagonalelor, se are în vedere că din proprietatea de inscriptibilitate a trapezului  $ABCD$ , rezultă că acesta este isoscel, de unde găsim valoarea  $a\sqrt{3}$ , unde cu  $a$  am notat jumătate din lungimea lui  $[AB]$ .

4°. Cum  $A = \pi - (B + C)$ , rezultă  $\cos A = -\cos(B + C)$ . Pe de altă parte:

$$\sin B + \sin C = 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2};$$

deci inegalitatea din enunț este adevărată atunci și numai atunci când:

$$4 \sin^2 \frac{B+C}{2} - 4 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} + 1 \geq 0,$$

adică dacă și numai dacă:

$$\left(2 \sin \frac{B+C}{2} - \cos \frac{B-C}{2}\right)^2 + \sin^2 \frac{B-C}{2} \geq 0,$$

ultima fiind adevărată deoarece toți termenii din suma respectivă sînt nenegativi. Pentru  $A = \frac{2\pi}{3}$  și  $B = C = \frac{\pi}{6}$ , inegalitatea din enunț este satisfăcută cu egalitate.

XXXIX. 1°. Utilizînd relațiile lui Viète avem:

$$\begin{cases} a+b+c=a; \\ ab+bc+ac=b; \\ abc=c; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=0; \\ b(c-1)=0; \\ c(ab-1)=0. \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem obținem:

$$\begin{cases} a=-1; \\ b=-1; \\ c=1; \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} a \in \mathbb{R}; \\ b=0; \\ c=0. \end{cases}$$

2°. Polinomul are coeficienți reali, admite și rădăcina  $x_2 = 1 - i$ , deci se va divide cu  $[x - (i + 1)][x - (1 - i)] = x^2 - 2x + 2$ . Utilizînd algoritmul împărțirii a două polinoame obținem:

$$2X^3 - X^2 + aX + b = (2X + 3)(X^2 - 2X + 2) + (a + 2)X + b - 6.$$

Pentru a avea restul 0 trebuie ca  $a = -2$  și  $b = 6$ . În aceste condiții:  $x_3 = -\frac{3}{2}$  și

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 &= (1+i)^4 + (1-i)^4 + \left(-\frac{3}{2}\right)^4 = (2i)^2 + (-2i)^2 + \\ &+ \frac{81}{16} = -8 + \frac{81}{16} = -\frac{47}{16}. \end{aligned}$$

3°. Avem:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \ln 1 = 0$ ;  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\ln x} = 0$  și deci  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{\frac{1}{\ln x}} = 0$ .

Pentru  $x_n = \frac{n\pi}{2} \rightarrow \infty$ ,  $f(x_n) = \ln\left(1 + \left|\frac{\sin n\pi}{2}\right|\right)$  nu are limită, deci  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  nu există.

4°. Funcția nu este nici pară, nici impară. Graficul nu intersectează axele:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty.$$

$x = 1$  asimptotă verticală.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x(3-2x)}{(1-x)^2} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{x}}; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = 0.$$

Tabloul de variație este următorul:

$x$	0	1
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0	$\nearrow \infty$

Graficul funcției este prezentat în fig. M.B.44.

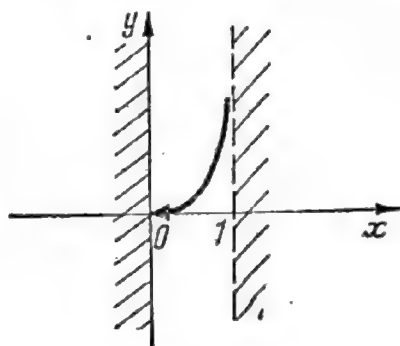


Fig. M.B.44

5°. Avem:  $\frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$

Efectuind calculele obținem:  $A = \frac{1}{2}$ ;  $B = -\frac{1}{2}$ ,  $C = \frac{1}{2}$ . Deci:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x-1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x+1) \Big|_1^2 - \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1} dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) \Big|_1^2 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_1^2 = \\ &= \ln \sqrt[4]{\frac{9}{10}} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 \end{aligned}$$

XXX. 1°. Avem de rezolvat ecuația:  $\sqrt{x+3} = x+1$ . Punind condiția  $x \geq -1$  putem ridica ambii membri la pătrat. Obținem:  $x+3 = x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$  cu soluțiile:  $x_1 = -2$ ;  $x_2 = 1$ . Reținem deci  $x = 1$ . Pentru  $\log_{\frac{1}{2}} f(x) \leq 0 = \log_{\frac{1}{2}} 1$  punem condițiile:  $f(x) > 0$ ;  $f(x) \geq 1$ . Rămâne de rezolvat

$f(x) \geq 1$ , adică:  $\sqrt{x+3} \geq x+2$ . Evident convine  $(\forall)x, x \in [-3, -2]$ . Căutăm soluții  $x > -2$ . Avem:

$$x+3 \geq x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^2+3x+1 \leq 0 \Rightarrow x \in \left[ \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right].$$

Reținem în acest caz  $x \in \left[ -2, \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right]$ . Soluția inecuației este deci  $x \in \left[ -3, \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right]$ .

2°. Inegalitatea se mai scrie:  $100 \cdot 2^n + 500 < 101 \cdot 2^n + 202 \Leftrightarrow 2^n > 298$ . Ținând cont de faptul că  $2^8 = 256$  și  $2^9 = 512$  rezultă valoarea căutată  $n = 9$ .

3°. Deoarece toate coloanele matricii  $A$  se regăsesc în  $B$  avem  $\text{rang } A \leq \text{rang } B \leq 3$ .

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & p \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 21 - 5p.$$

Dacă  $p \neq \frac{21}{5}$ , atunci  $\text{rang } A = \text{rang } B = 3$  pentru  $(\forall) q \in \mathbb{R}$ . Dacă  $p = \frac{21}{5}$ , atunci  $\text{rang } A = 2$ , întrucât  $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$  este un minor nenul al lui  $A$ . Pentru a avea și  $\text{rang } B = 2$  punem condiția:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & q \end{vmatrix} = 0, \text{ de unde } q = \frac{44}{7}.$$

În concluzie matricile au același rang pentru  $p \neq \frac{21}{5}, q \in \mathbb{R}$  sau  $p = \frac{21}{5}, q = \frac{44}{7}$ .

4°. Fie  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Trebuie ca:

$$\begin{cases} f'(1) = 0; \\ f(1) = 1; \\ f'(0) = 0; \\ f(0) = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0; \\ a + b + c + d = 1; \\ c = 0; \\ d = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4; \\ b = -6; \\ c = 0; \\ d = 0; \end{cases} \text{ și } f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3.$$

$$f(0) = 3; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty.$$

$f$  este continuă și derivabilă pe  $\mathbb{R}$ :

$$f'(x) = 12x(x - 1); f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 1.$$

Putem forma șirul lui Rolle pentru a rezolva ecuația  $f(x) = 0$ :

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$3$	$1$	$+\infty$

Rezultă că există o singură rădăcină a ecuației  $f(x) = 0$  și avem  $x_0 \in (-\infty, 0)$ . Întrucât  $f(-1) = -7$ , avem  $x_0 \in (-1, 0)$ .

$$f''(x) = 24x - 12. f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Tabloul de variație este următorul:

$x$	$-\infty$	$-1$	$x_0$	$0$	$\frac{1}{2}$	$1$	$+\infty$						
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$		
$(f''x)$		$-$	$-$		$-$	$0$		$+$		$+$	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-7$	$\nearrow$	$0$	$\nearrow$	$3$	$\searrow$	$2$	$\searrow$	$1$	$\nearrow$	$+\infty$

Graficul funcției este prezentat în fig. M.B.45.

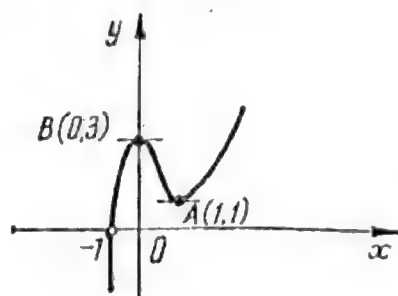


Fig. M.B.45



5°. Utilizând metoda integrării prin părți putem scrie:

$$I_n = \int_{-n}^0 (2x - 3) (e^x)' dx = (2x - 3) e^x \Big|_{-n}^0 - 2 \int_{-n}^0 e^x dx = \frac{2n + 5}{e^n} - 5.$$

Fie  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{2x + 5}{e^x} - 5$ . Pentru calculul  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$  utilizăm regula lui l'Hôpital și avem:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 5}{e^x} = -5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = -5.$$

Deci pentru orice șir  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ , cu  $x_n \rightarrow \infty$ , avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = -5$ . Alegem  $x_n = n (\forall) n \in \mathbb{N}$ . Obținem:  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = -5$ .

XXXI. 1°. Împărțind ambii membri ai ecuației cu  $9^x \neq 0$  avem:  $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^x = 3$ . Fie  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$ ,  $y > 0$ . Rezolvăm  $y^2 + 2y - 3 = 0$  și se obține  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = -3$ . Reținem  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$ , de unde  $x = 0$ .

2°. Sistemul este linear omogen și admite soluție banală:  $x = y = z = 0$ . Căutăm și alte soluții. Observăm că  $\varepsilon$  este rădăcină cubică a unității și deci:

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0; \varepsilon^3 = 1 \text{ cu } \varepsilon \neq 1.$$

Determinantul matricii coeficienților este:

$$\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 & 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 & 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sistemul admite deci și soluții diferite de cea banală. Rangul matricii coeficienților este 1. Avem necunoscuta principală  $x$  și necunoscute secundare  $y$  și  $z$ . Obținem soluția:  $x = -\varepsilon\alpha - \varepsilon^2\beta$ ;  $y = \alpha$ ;  $z = \beta$ ;  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

$$3°. A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Fie } X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

$$A^2X = XA^2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ y & z+t \end{pmatrix}, \text{ de unde } \begin{cases} x+z = x; \\ y+t = x+y; \\ t+z = t. \end{cases}$$

$$\text{Deci } \begin{cases} z = 0; \\ x = t; \\ y \in \mathbb{R}, \end{cases} \text{ și matricile căutate au forma } X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \text{ cu } x, y \in \mathbb{R}.$$

Pentru a doua cerință a problemei considerăm, la fel  $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ .

$$A^2Y - AY^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{și deci } \begin{cases} z = 1; \\ t - x = 0; \\ -z = 1, \end{cases} \text{ contradicție. Deci nu există matrici } Y \text{ cu proprietatea cerută.}$$

4°.  $x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 1) = 0$ ,  $x_1 = x_2 = 1$ ,  $x_3 = -1$ .  
 Funcția nu este nici pară nici impară. Intersecțiile cu  $Ox$  sînt punctele de coordonate  $(1, 0)$  și  $(-1, 0)$ . Intersecția cu  $Oy$  este  $(0, 1)$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = -\infty.$$

Graficul nu prezintă asimptote verticale sau horizontale.

Căutăm asimptotele oblice la  $-\infty$  și la  $+\infty$  de tipul  $y = mx + n$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1;$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 - x + 1 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - x^2 - x + 1)^2} + x \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1} + x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(-1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2 \left[ \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} + 1 \right]} = -\frac{1}{3}.$$

Deci  $y = x - \frac{1}{3}$  este asimptotă oblică la  $-\infty$ . Analog se arată că această dreaptă este asimptotă și la  $+\infty$ .  $f$  e continuă pe  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = \frac{3x + 1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^2}}. \text{ Deci } f \text{ nu este derivabilă în } x = 1 \text{ și } x = -1.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

$$f''(x) = -\frac{8}{27} \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^2}}.$$

Tabloul de variație este următorul:

$x$	$-\infty$	$-1$	$-\frac{1}{3}$	$0$	$1$	$\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0 \nearrow$	$\frac{\sqrt[3]{32}}{3}$	$\searrow 1$	$\searrow 0$

Graficul funcției este prezentat în fig. M.B.46.

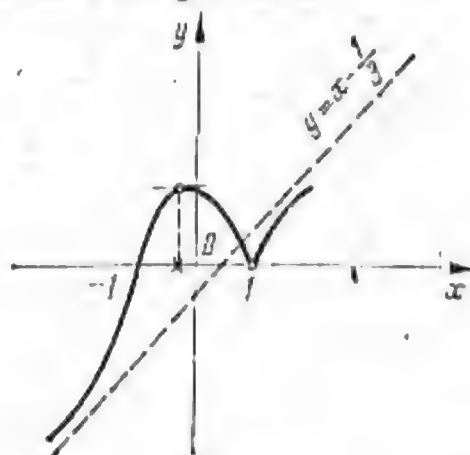


Fig. M.B.46

5°. Utilizând metoda integrării prin părți avem:

$$I = -xe^{1-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{1-x} dx = -1 + (-e^{1-x}) \Big|_0^1 = e.$$

XXXII. 1°. Ecuația are sens pentru  $x \in (1, \infty)$  și avem:  $\log_{x^2}(x-1) = \log_x 8$ , care este echivalentă cu:  $\frac{1}{2} \log_x(x-1) = \log_x 8$ , de unde rezultă soluția  $x = 65$ .

2°. Pentru  $n = 1$  egalitatea este evidentă. Presupunem că este adevărată pentru  $n = p$  și să demonstrăm că este adevărată pentru  $n = p + 1$  ( $p \in \mathbb{N}$ ). Avem:

$$\begin{aligned} 2^2 + 4^2 + \dots + (2p)^2 + (2p+2)^2 &= \frac{2p(p+1)(2p+1)}{3} + (2p+2)^2 = \\ &= \frac{2p(p+1)(2p+1) + 3(2p+2)^2}{3} = \frac{2(p+1)(2p^2+7p+6)}{3} = \frac{2(p+1)(p+2)(2p+3)}{3}. \end{aligned}$$

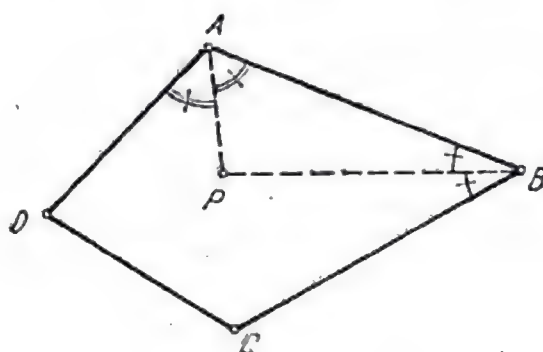


Fig. M.B.47

3°. Fie  $P$  intersecția bisectoarelor unghiurilor  $\hat{A}$  și  $\hat{B}$  ale patrulaterului  $ABCD$ . Astfel avem:

$$m(\widehat{APB}) = 180^\circ - \frac{1}{2} m(\hat{A}) - \frac{1}{2} m(\hat{B}) = \frac{360^\circ - m(\hat{A}) - m(\hat{B})}{2} \quad (\text{v. fig. M.B.47}).$$

Dacă ținem seamă că  $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 360^\circ$  deducem că:

$$m(\widehat{APB}) = \frac{1}{2} m(\hat{C}) + \frac{1}{2} m(\hat{D}).$$

4°. Ținând seama de formula  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$  ecuația devine:

$$4(m+1) \sin^2 x - 4m \sin x + m - 1 = 0.$$

Discriminantul ecuației este:  $\Delta = 16m^2 - 16(m+1)(m-1) = 16$ ; prin urmare avem:  $\sin x = \frac{4m \pm 4}{8(m+1)}$ , care ne conduce la  $\sin x = \frac{1}{2}$  cu soluția:

$$(1) \quad x = k + (-1)^k \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ independentă de } m.$$

Mai avem:  $\sin x = \frac{m-1}{2(m+1)}$ ,  $m \neq -1$ , care are soluții reale dacă sunt satisfăcute inegalitățile:  $-1 \leq \frac{m-1}{2(m+1)} \leq 1$ ,  $m \neq -1$ ; acestea sînt satisfăcute pentru  $m \in (-\infty, -3] \cup (-1, \infty)$ . În concluzie, dacă  $m \in (-3, -1]$  avem numai soluțiile (1). Dacă  $m \in (-\infty, -3] \cup (-1, \infty)$  avem soluțiile (1) și soluțiile:

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin \left[ \frac{m-1}{2(m+1)} \right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$



XXXIII. 1°. Ecuația se mai scrie:  $2m(x^3 - 1) + (2 - 7m)(x - 1)x = 0$ ,  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , adică  $(x - 1)[2m(x^2 + x + 1) + (2 - 7m)x] = 0$ , de unde  $x = 1$  și  $2mx^2 + (2 - 5m)x + 2m = 0$ ,  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Discriminantul ultimei ecuații fiind  $\Delta \equiv (2 - 5m)^2 - 16m^2 = (2 - 9m)(2 - m)$ , rezultă că  $\Delta = 0$  pentru  $m = \frac{2}{9}$  și  $m = 2$ ,  $\Delta > 0$  pentru  $m \in \left(-\infty, \frac{2}{9}\right) \cup \left(2, \infty\right)$  și  $\Delta < 0$  pentru  $m \in \left(\frac{2}{9}, 2\right)$ . Pe de altă parte, suma rădăcinilor ecuației respective de gradul II este  $S = \frac{2 - 5m}{2m}$ , iar produsul  $P = \frac{2 - 5m}{2m}$ , dacă  $m \neq 0$ ;  $S > 0$  și  $P < 0$  dacă  $m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{5}, \infty\right)$ ,  $S < 0$  și  $P > 0$  dacă  $m \in \left(0, \frac{2}{5}\right)$  și  $S = P = 0$  dacă  $m = \frac{2}{5}$ . Prin urmare, ecuația dată are o rădăcină egală cu 1 iar pentru celelalte două rezultatele sînt conforme cu cele indicate în tabelul următor:

$m$	$\Delta$	$S$	$P$	Natura și semnele rădăcinilor ecuației: $2mx^2 + (2 - 5m)x + 2m = 0$ , $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
$m < 0$	+	+	-	Rădăcini (reale), de semne contrare, cea mai mare în modul fiind strict pozitivă.
$m = 0$				Ecuația nu este definită (prin ipoteză, $m \neq 0$ ).
$0 < m < \frac{2}{9}$	+	-	+	Rădăcini reale, distincte, (ambele) strict negative.
$m = \frac{2}{9}$	0	-	+	Rădăcini reale, egale, strict negative.
$\frac{2}{9} < m < \frac{2}{5}$	-	-	+	Rădăcini complexe.
$m = \frac{2}{5}$	0	0	0	Ambele rădăcini egale cu zero.
$m > \frac{2}{5}$	+	+	-	Rădăcini (reale) de semne contrare, cea mai mare în modul fiind strict pozitivă.

2°. Ținem seama că:  $\log_2(9 - 2^x) > 3 - x \Leftrightarrow \log_2(9 - 2^x) > \log_2 2^{3-x} \Leftrightarrow 9 - 2^x > 2^3 \cdot 2^{-x} \Leftrightarrow 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 < 0$  și punind  $y = 2^x > 0$ , găsim inecuația:  $y^2 - 9y + 8 < 0$ , care este adevărată atunci și numai atunci cînd  $y \in (1, 8)$ . Prin urmare, inecuația dată este verificată de acele valori ale lui  $x \in \mathbb{R}$  pentru care  $2^x \in (1, 8)$ , adică pentru  $x \in (0, 3)$ , care verifică și condiția  $9 - 2^x > 0$ .

3°. Dacă  $x_1 = 1 + \sqrt[3]{3}$  este rădăcină a lui  $f$ , atunci și  $x_2 = 1 - \sqrt[3]{3}$  este rădăcină a aceluiași polinom, prin urmare:

$$\begin{aligned} f(1 + \sqrt[3]{3}) &= (1 + \sqrt[3]{3})^4 + a(1 + \sqrt[3]{3}) + b = 0; \\ f(1 - \sqrt[3]{3}) &= (1 - \sqrt[3]{3})^4 + a(1 - \sqrt[3]{3}) + b = 0. \end{aligned}$$

de unde  $a = -16$  și  $b = -12$ . Admitînd că rădăcini pe  $x_1$  și  $x_2$ , polinomul dat se divide prin  $(X - x_1)(X - x_2)$ , adică prin  $X^2 - 2X - 2$ , deci  $f$  poate fi pus sub formă:  $f = (X^2 - 2X - 2)(X^2 + 2X + 6)$ ; prin urmare  $x_3 = -1 - i\sqrt{5}$  și  $x_4 = -1 + i\sqrt{5}$  sînt celelalte două rădăcini ale lui.

4°. Adunând membru cu membru primele sau ultimele două ecuații ale sistemului, obținem  $x = 0$ . Pentru  $x = 0$ , toate ecuațiile sistemului sînt de forma:  $-y + z = 1$ ;  $y = z - 1$ ,  $z \in \mathbb{R}$ . Așadar, sistemul este verificat de valorile  $(0, t - 1, t)$ , unde  $t \in \mathbb{R}$ .

5°. Notăm mai întâi faptul că  $(\mathbb{Q}, +)$  este grup abelian. Fie  $M(x, y)$ ,  $P(p, q) \in M_2$ ; atunci

$$\begin{aligned} M(x, y) + P(p, q) &= \begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p+q & 4q \\ -q & p-q \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (x+p) + (y+q) & 4(y+q) \\ -(y+q) & (x+p) - (y+q) \end{pmatrix} \in M_2, \end{aligned}$$

deci operația „+” este bine definită pe  $M_2$ . Fie acum  $M(x, y)$ ,  $P(p, q)$ ,  $S(u, v) \in M_2$ ; atunci este ușor de arătat că:

$[M(x, y) + P(p, q)] + S(u, v) = M(x, y) + [P(p, q) + S(u, v)]$ , deoarece  $(x+p) + u = x + (p+u)$  și  $(y+q) + v = y + (q+v)$ . În continuare, se verifică fără dificultate că  $O(0, 0)$  este elementul neutru, iar  $M'(-x, -y)$  este simetricul lui  $M(x, y)$ . Deci  $(M_2, +)$  este grup. Rămîne să arătăm că grupul respectiv este și abelian. Evident,  $M(x, y) + P(p, q) = P(p, q) + M(x, y)$ , deoarece  $x + p = p + x$  și  $y + q = q + y$ , demonstrația fiind completă.

**Notă.** Observația făcută la început, precum că  $(\mathbb{Q}, +)$  este grup abelian este esențială în tot cursul demonstrației. Fără îndoială că prin semnul „+” am marcat operații distincte de adunare — într-un caz pentru numere raționale, în altul pentru matrici — dar credem că nu există pericol de confuzie, notațiile întrebuintate fiind suficient de clare, de altfel uzitate și în manualele școlare.

**XXXIV. 1°.** Notînd  $y = x^3$ , ecuația devine  $y^2 - 9y + 8 = 0$ , ale cărei rădăcini sînt  $y_1 = 1$  și  $y_2 = 8$ . Prin urmare, soluțiile ecuației date sînt:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = x$ ,  $x_3 = \bar{x}$ ;  $x_4 = 2$ ,  $x_5 = 2x$  și  $x_6 = 2\bar{x}$ , unde  $x$  și  $\bar{x}$  sînt rădăcinile cubice ale unității:

$$\left( x = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \bar{x} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right).$$

2°. Din condițiile  $1 + x \geq 0$  și  $1 - x \geq 0$ , găsim că ecuația are sens numai pentru  $x \in [-1, 1]$ . Pe de altă parte:

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} > \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x > 0.$$

Pentru  $x \in (0, 1]$  ridicăm la pătrat ambii membri ai ecuației date și găsim  $2\sqrt{1-x^2} = 1$  sau, printr-o nouă ridicare la pătrat,  $4(1-x^2) = 1$ , de unde  $x^2 = \frac{3}{4}$ ,

adică  $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \in (0, 1]$ , și  $x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \notin (0, 1]$ . Pentru  $x \in [-1, 0]$ , avem  $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \leq 0$ , deci egalitatea din ecuația dată nu poate avea loc. Prin urmare, singura soluție a ecuației respective este  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

3°. Inecuația respectivă are sens numai dacă  $x > 0$ ; în plus, valoarea  $x = 1$  nu satisface inegalitatea strictă. Sînt de analizat două cazuri:

i) Pentru  $x \in (0, 1)$ , logaritmînd, avem:

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} < \sqrt{x^x} &\Leftrightarrow \sqrt{x} \log_x x > x \log_x \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{x} > \frac{x}{2} \Leftrightarrow x > \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow 4x - x^2 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in (0, 1); \end{aligned}$$



ii) Pentru  $x > 1$ , găsim:

$$x^{\sqrt{x}} < \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} < \frac{x}{2} \Leftrightarrow x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow x \in (4, \infty).$$

În concluzie, inecuația dată este verificată de toate valorile  $x \in (0, 1) \cup (4, +\infty)$ .

4°. Scriind relațiile între rădăcinile și coeficienții ecuației respective (relațiile lui Viète), la care adăugăm condiția din ipoteză, avem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -m; \\ (x_1 + x_2)x_3 + x_1x_2 = -16; \\ x_1x_2x_3 = 48; \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

de unde:  $x_3 = -m$ ;  $x_1x_2 = 16$ ;  $x_1x_2x_3 = 48$ ;  $x_1 + x_2 = 0$ . Rădăcinile ecuației nu pot fi nule (fapt evident, pentru că  $x=0$  nu o verifică), deci  $x_3 = \frac{x_1x_2x_3}{x_1x_2} = \frac{48}{-16} = -3$ , prin urmare  $m = 3$ . Din  $x_1 + x_2 = 0$  și  $x_1x_2 = -16$  găsim că  $x_1, x_2 \in \{-4, 4\}$ , cu  $x_1 = -x_2$ . Așadar soluțiile ecuației date sînt elementele mulțimii  $\{-4, -3, 4\}$ .

XXXV. 1°. Se impun condițiile:  $x > 0$ ,  $x \neq 1$  și apoi se transformă toți logaritmi în baza 6. Notînd  $u = \log_6 x$  avem:

$$\log_{\frac{1}{6}} \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{\log_6 \frac{1}{x}}{\log_6 \frac{1}{6}} = \log_6 x = u; \quad \log_x 6 = \frac{1}{\log_6 x} = \frac{1}{u};$$

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} \left( \frac{1}{6} \right) = \frac{\log_6 \frac{1}{6}}{\log_6 \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{2}{\log_6 x} = \frac{2}{u}; \quad \log_{\sqrt{6}} x = \frac{\log_6 x}{\log_6 \sqrt{6}} = 2u.$$

Ecuația dată devine:  $u^2 + \frac{1}{u^2} + 2\left(u + \frac{1}{u}\right) + \frac{3}{4} = 0$ , care este o ecuație reciprocă.

Se face substituția  $u + \frac{1}{u} = t$  și obținem  $4t^2 + 8t - 5 = 0$ , de unde  $t_1 = \frac{1}{2}$  și  $t_2 = -\frac{5}{2}$ . Rezultă ecuațiile:  $u + \frac{1}{u} = \frac{1}{2}$  cu soluții nerezale și  $u + \frac{1}{u} = -\frac{5}{2}$  cu soluțiile  $u_1 = -2$ ,  $u_2 = -\frac{1}{2}$ . Obținem:  $\log_6 x = -2$ , deci  $x_1 = \frac{1}{36}$  și  $\log_6 x = -\frac{1}{2}$ , deci  $x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ , ambele soluții acceptabile.

2°. *Metoda I.* Scriem relațiile lui Viète:  $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{m}{2}$ ,  $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2$ ,  $x_1x_2x_3 = -2$  și adăugăm condiția  $x_1 = x_2$ . Rezultă sistemul:  $2x_1 + x_3 = -\frac{m}{2}$ ,  $x_1^2 + 2x_1x_3 = 2$ ,  $x_1^2x_3 = -2$ . Din ultima ecuație avem:  $x_1x_3 = -\frac{2}{x_1}$  și, înlocuind în a doua ecuație obținem:  $x_1^2 - \frac{2}{x_1} = 2$ , deci  $x_1^3 - 2x_1 - 4 = 0$ . Singura soluție reală a ecuației obținute este  $x_1 = 2$  (se poate aplica Horner). Rezultă:  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = -\frac{1}{2}$  și  $m = -7$ .

*Metoda II.* Notăm  $P(x) = 2x^3 + mx^2 + 4x + 4$  și  $\alpha$  rădăcina dublă. Se impun condițiile:  $P(\alpha) = 0$ ,  $P'(\alpha) = 0$ ,  $P''(\alpha) \neq 0$ . Rezultă:  $2\alpha^3 + m\alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0$ ,  $6\alpha^2 + 2m\alpha + 4 = 0$ ,  $12\alpha + 2m \neq 0$ . Eliminînd pe  $m$  între primele două relații rezultă:  $\alpha^3 - 2\alpha - 4 = 0$ , de unde  $\alpha = 2$  etc.



3°. Notind cu  $a_n$  termenul general al şirului dat şi amplificînd cu conjugata ultimei paranteze avem:

$$a_n = n^k \left( a^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \cdot \frac{\frac{n-1}{n} - \frac{n+1}{n+2}}{\sqrt{\frac{n-1}{n}} + \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}} = \frac{n^k \left( a^{\frac{1}{n}} - 1 \right)}{n(n+2)} \cdot \frac{-2}{\sqrt{\frac{n-1}{n}} + \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}} =$$

$$= \frac{n^{k-2}}{n+2} \cdot \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{\frac{n-1}{n}} + \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}}.$$

Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{\frac{n-1}{n}} + \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}} = -1$  şi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln a$ , rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$   
 $= (-\ln a) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k-2}}{n+2}$ . Pentru  $k = 0, 1, 2$  avem:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ; pentru  $k = 3$  avem:  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\ln a$ , iar pentru  $k \geq 4$  rezultă:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  dacă  $a > 1$ , sau  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  dacă  $a < 1$ .

4°. a) Funcţia  $f$  este indefinit derivabilă pe intervalele  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, \infty)$  ca restricţie de funcţii elementare. Trebuie ca  $f$  să fie indefinit derivabilă şi în punctele  $\pm 1$ . Să impunem mai întîi condiţia ca  $f$  să fie continuă în  $x = 1$ .

Avem:  $f(1-0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0$  şi  $f(1+0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} P(x) = P(1) = f(1)$ . Obţinem condiţia  $P(1) = 0$ . Analog rezultă  $P(-1) = 0$ . Apoi avem:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2x}{(x^2-1)^2} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{dacă } |x| < 1, \\ P'(x) & \text{dacă } |x| > 1. \end{cases}$$

Cum  $f'$  trebuie să existe şi să fie continuă în punctele  $\pm 1$ , rezultă condiţiile:

$$f'(1-0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{-2x}{(x^2-1)^2} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0 = f'(1+0) = P'(1);$$

analog avem  $P'(-1) = 0$ . Presupunem că avem:

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} R_k(x) e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{dacă } |x| < 1, \\ P^{(k)}(x) & \text{dacă } |x| > 1, \end{cases}$$

unde  $R_k(x)$  este o funcţie raţională în  $x$ . Atunci rezultă:

$$f^{(k+1)}(x) = \begin{cases} \left[ R'_k(x) - \frac{2x}{(x^2-1)^2} R_k(x) \right] e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{dacă } |x| < 1, \\ P^{(k+1)}(x) & \text{dacă } |x| > 1, \end{cases}$$

deci  $R_{k+1}(x) = R'_k(x) - \frac{2x}{(x^2-1)^2} R_k(x)$  este tot o funcţie raţională în  $x$ , adică orice derivată are forma indicată mai sus. Impunem condiţiile ca  $f^{(k)}(x)$  să existe şi să fie continuă în punctele  $\pm 1$ :

$$f^{(k)}(1-0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} R_k(x) e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0 = f^{(k)}(1+0) = P^{(k)}(1);$$

analog avem  $P^{(k)}(-1) = 0$ . În concluzie am obținut condițiile  $P^{(k)}(\pm 1) = 0$ ,  $(\forall) k \in \mathbb{N}$ . Presupunem  $P \neq 0$  și fie  $n = \text{grad } P$  și  $a_n \neq 0$  primul coeficient al lui  $P(x)$ . Avem:  $P^{(n)}(x) = n!a_n \neq 0$ , contradicție cu condiția  $P^{(n)}(\pm 1) = 0$ . Rezultă  $P = 0$  și funcția:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^3-1}} & \text{dacă } |x| < 1, \\ 0 & \text{dacă } |x| \geq 1, \end{cases}$$

este indefinit derivabilă pe  $\mathbb{R}$ .

b) Dacă  $|x| > 1$ , atunci  $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$ , deci  $f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{\frac{1}{x^3}-1}} = e^{\frac{x^3}{1-x^3}}$ . Obținem funcția:

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{x^3}{1-x^3}} & \text{dacă } |x| > 1, \\ x^2 - 1 & \text{dacă } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Deoarece  $g(-x) = g(x)$  ( $g$  funcție pară), graficul este simetric față de axa  $Oy$ . Avem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^3}{1-x^3}} = e^{-1} = \frac{1}{e},$$

deci  $y = \frac{1}{e}$  este asimptotă orizontală la  $+\infty$  (deci și la  $-\infty$ ). Calculăm:

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{(1-x^2)^2} e^{\frac{x^3}{1-x^3}} & \text{dacă } |x| > 1, \\ 2x & \text{dacă } |x| < 1. \end{cases}$$

Rezultă tabloul de variație:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$0$	$-$	$0$	$+$
$g(x)$	$1/e$	$0$	$-1$	$0$	$1/e$

și graficul din fig. M.B.48.

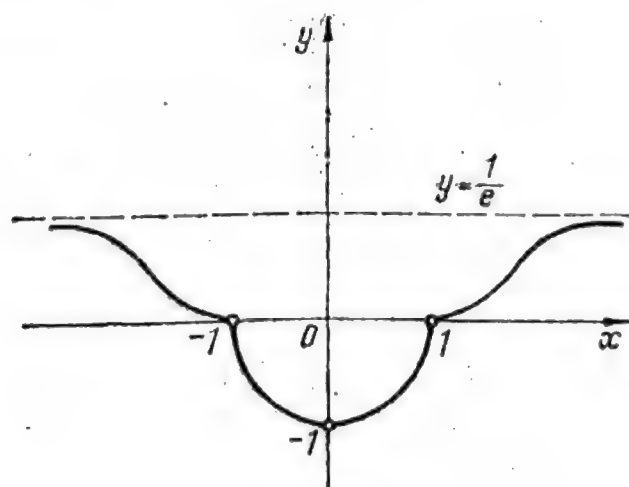


Fig. M.B.48

5°. Pe intervalul  $[1, 3]$  avem:  $x - 1 \geq 0$  și  $x - 3 \leq 0$ , deci:

$$|(x-1)(x-2)(x-3)| = \begin{cases} (x-1)(x-2)(x-3) & \text{dacă } x \in [1, 2], \\ -(x-1)(x-2)(x-3) & \text{dacă } x \in (2, 3]. \end{cases}$$

Rezultă:

$$I = \int_1^3 |(x-1)(x-2)(x-3)| dx = \int_1^2 (x-1)(x-2)(x-3) dx - \int_2^3 (x-1)(x-2)(x-3) dx.$$

O primitivă a funcției  $(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  este  $\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x$ . Făcând calculele obținem:  $I = \frac{1}{2}$ .

XXXVI. 1°. a) Fie  $[AA']$ ,  $[BB']$  înălțimi în triunghiul  $MAB$  și  $H = AA' \cap BB'$  ortocentrul ( $A' \in MB$ ,  $B' \in MA$ ). A treia înălțime  $[MM']$  ( $M' \in AB$ ) trece prin  $H$  și taie cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  în punctul  $M_1$ . Unim  $A$  cu  $M_1$  (v. fig. M.B.49).

Avem:  $m(\widehat{M_1AB}) = m(\widehat{\frac{M_1B}{2}}) = m(\widehat{M'MB})$ . Dar  $m(\widehat{M'MB}) = \frac{\pi}{2} - m(\widehat{B}) = m(\widehat{A'AB})$ ,

deci  $\widehat{M_1AB} = \widehat{A'AB}$ . Deoarece  $[AM']$  este latură comună, triunghiurile dreptunghice  $HAM'$  și  $M_1AM'$  sînt congruente, deci  $[HM'] = [M'M_1]$ . Rezultă că  $H$  este simetricul lui  $M_1$  față de dreapta  $AB$ . Cînd  $M$  parcurge cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  (fără punctele  $A$  și  $B$  cînd  $\triangle MAB$  este degenerat), punctul  $M_1$  parcurge cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  fără punctele  $C$  și  $D$ . Cum simetricul unui cerc față de o dreaptă este evident tot un cerc, rezultă că  $H$  parcurge cercul simetric față de  $AB$  al cercului  $\mathcal{C}(O, r)$  fără două puncte  $C'$  și  $D'$ .

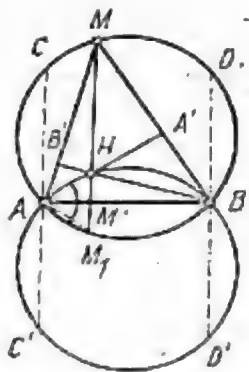


Fig. M.B.49

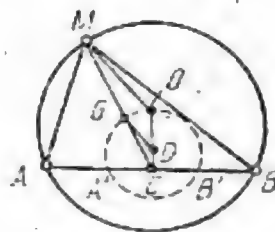


Fig. M.B.50

b) Fie  $C$  mijlocul lui  $[AB]$  și ducem  $GD \parallel OM$  ( $G \in [MC]$  este centrul de greutate al triunghiului  $MAB$ , iar  $D \in [OC]$ ); v. fig. M.B.50. Rezultă:  $\frac{CD}{CO} = \frac{CG}{CM} = \frac{GD}{OM} = \frac{1}{3}$ , de unde avem: punctul  $D$  este fix ( $CD = \frac{1}{3} CO$ ) și  $GD = \frac{1}{3} OM = \frac{r}{3}$ , deci locul geometric al punctului  $G$  este cercul  $\mathcal{C}(D, \frac{r}{3})$  fără două puncte  $A', B'$  (punctele de intersecție ale cercului  $\mathcal{C}(D, \frac{r}{3})$  cu dreapta  $AB$ , care corespund cazurilor de degenerare ale triunghiului  $MAB$  cînd  $M$  este în  $A$  sau  $B$ ).



2°. *Metoda I.* Avem:  $m(\widehat{BA_1A_1}) = m\left(\frac{\widehat{BA_1}}{2}\right) = m\left(\frac{\widehat{MA_1}}{2}\right)$  și  $m(\widehat{CA_1A_1}) = m\left(\frac{\widehat{CA_1}}{2}\right) = m\left(\frac{\widehat{NA_1}}{2}\right)$ . Dar  $\widehat{BA_1A_1} \equiv \widehat{CA_1A_1}$  și, cum, în același cerc la arce congruente corespund coarde congruente, rezultă  $[BA_1] \equiv [A_1N]$  și  $[A_1M] \equiv [CA_1]$ ; v. fig. M.B.51. Deoarece patrulaterul  $ABA_1N$  este inscriptibil rezultă  $\widehat{NA_1C} \equiv \widehat{BAC}$ ; deoarece  $ACA_1M$  este inscriptibil rezultă  $\widehat{MA_1B} \equiv \widehat{BAC}$ . Atunci:  $\widehat{NA_1C} \equiv \widehat{MA_1B}$  și  $\triangle BA_1M \equiv \triangle NA_1C$ , deci  $[BM] \equiv [CN]$ .

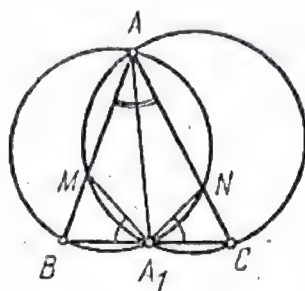


Fig. M.B.51

*Metoda II.* Puterea punctului  $C$  față de cercul  $ABA_1$  este:  $CA_1 \cdot CB = CN \cdot CA$ . Puterea punctului  $B$  față de cercul  $ACA_1$  este:  $BA_1 \cdot BC = BM \cdot BA$ . Teorema bisectoarei în triunghiul  $ABC$  dă:  $\frac{CA}{AB} = \frac{CA_1}{BA_1}$  sau  $\frac{CA}{CA_1} = \frac{BA}{BA_1}$ . Scriem primele două relații sub forma:  $\frac{CA}{CA_1} = \frac{CB}{CN}$ ,  $\frac{BA}{BA_1} = \frac{CB}{BM}$ . Ținând seama de a treia relație rezultă:  $\frac{CB}{CN} = \frac{CB}{BM}$ , deci  $[BM] \equiv [CN]$ .

3°. Notăm  $\lg x = t$ ,  $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Deoarece  $\sin 2x = \frac{2\lg x}{1 + \lg^2 x}$ ,  $\cos 2x = \frac{1 - \lg^2 x}{1 + \lg^2 x}$  rezultă ecuația:  $mt^2 - 6mt + 2 - m = 0$ , cu soluțiile  $t_{1,2} = \frac{3m \pm \sqrt{10m^2 - 2m}}{m}$ . Dacă  $m \in (-\infty, 0) \cup [1/5, \infty)$  soluțiile sînt reale și avem:  $x = k\pi + \arctg t_{1,2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Pentru  $m = 0$  în ecuația inițială se obține  $\cos 2x = -1$ , adică  $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

4°. O secțiune axială prin figură arată astfel:

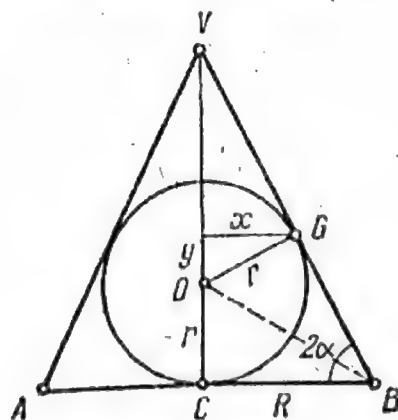


Fig. M.B.52

**Metoda I.** Aria sferei este  $4\pi r^2$ ; aria totală a conului este  $\pi R(R + G)$ .  
 Avem:  $r = R \operatorname{tg} \alpha$ ,  $G = \frac{R}{\cos 2\alpha}$ . Condiția din enunț devine:  $\frac{R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{R \left( R + \frac{R}{\cos 2\alpha} \right)} = \frac{1}{9}$ ,  
 sau  $10 \cos^2 2\alpha - 7 \cos 2\alpha + 1 = 0$ , de unde rezultă  $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$  sau  $\cos 2\alpha = \frac{1}{5}$ .

Se observă că avem:

$$x = r \sin 2\alpha = R \operatorname{tg} \alpha \sin 2\alpha = 2R \sin^2 \alpha; \quad y = r \cos 2\alpha = R \operatorname{tg} \alpha \cos 2\alpha.$$

$$\text{Apoi: } V_{\text{cil}} = 2\pi x^2 y = 8\pi R^3 \frac{\sin^3 \alpha \cos 2\alpha}{\cos \alpha} \text{ și } V_{\text{con}} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\pi R^3}{3} \cdot \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha}{\cos 2\alpha}.$$

$$\text{Obținem: } \frac{V_{\text{cil}}}{V_{\text{con}}} = \frac{12 \cos^2 2\alpha \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}. \text{ Pentru } \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \text{ se obține } \frac{V_{\text{cil}}}{V_{\text{con}}} = \frac{1}{4}, \text{ iar}$$

$$\text{pentru } \cos 2\alpha = \frac{1}{5} \text{ se obține } \frac{V_{\text{cil}}}{V_{\text{con}}} = \frac{16}{125}.$$

**Metoda II.** Condiția din enunț devine  $R(R + G) = 9r^2$ . Avem relațiile:  
 $\frac{r}{R} = \frac{G - R}{h} = \frac{h - r}{G}$ ;  $h^2 = G^2 - R^2$ , unde  $h$  este înălțimea conului. Se deduce  
 ecuația:  $10R^2 - 7RG + G^2 = 0$  cu soluțiile  $G = 2R$  și  $G = 5R$ . Apoi avem:  
 $\frac{y}{R} = \frac{x}{h} = \frac{r}{G}$ , de unde obținem:  $\frac{V_{\text{cil}}}{V_{\text{con}}} = \frac{6r^2 h}{RG^3}$ . Pentru  $G = 2R$  se obține  $\frac{V_{\text{cil}}}{V_{\text{con}}} = \frac{1}{4}$ ,  
 iar pentru  $G = 5R$  se obține  $\frac{V_{\text{cil}}}{V_{\text{con}}} = \frac{16}{125}$ .

$$5^\circ. \text{ Avem: } \sin A \sin B = \frac{1}{2} (\cos(A - B) - \cos(A + B)) \text{ și } \cos(A + B) = -\cos C.$$

Relația dată devine:  $4 \cos^2 C + 4 \cos(A - B) \cos C + 1 = 0$ . Se impune condiția  $\Delta \geq 0$ , adică  $\cos^2(A - B) \geq 1$ , deci  $\cos(A - B) = \pm 1$ . Dacă  $\cos(A - B) = 1$ , atunci  $A = B$ . Rezultă:  $4 \cos^2 C + 4 \cos C + 1 = 0$ , de unde  $A = B = \frac{\pi}{6}$  și  $C = \frac{2\pi}{3}$ .

Relația  $\cos(A - B) = -1$  nu este posibilă într-un triunghi. Menționăm că relația  $4 \cos^2 C + 4 \cos(A - B) \cos C + 1 = 0$  se putea scrie echivalent:  $[2 \cos C + \cos(A - B)]^2 + \sin^2(A - B) = 0$ , care este echivalentă cu două relații:  $\sin(A - B) = 0$  și  $2 \cos C + \cos(A - B) = 0$  etc; se obține astfel o altă variantă de rezolvare.

**XXXVII. 1°.** Se impun condițiile:  $x > 0$ ,  $y > 0$ . Logaritmind, de exemplu, în baza  $e$ , rezultă sistemul:  $\sqrt{y} \ln x = x \ln y$ ,  $\sqrt{x} \ln y = y \ln x$ . Din prima ecuație avem:  $\ln y = \frac{\sqrt{y}}{x} \ln x$  și, înlocuind în ecuația a doua, se obține  $\sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{y}}{x} \ln x = y \ln x$ , adică  $(\sqrt{xy} - 1) \ln x = 0$ . Dacă  $\ln x = 0$ , rezultă  $x = 1$ , care conduce la  $y = 1$ . Dacă  $\ln x \neq 0$  (adică  $x \neq 1$ ), atunci avem  $\sqrt{xy} - 1 = 0$ , deci  $y = \frac{1}{x}$ . Înlocuind în prima ecuație se obține  $x \sqrt{x} + 1 = 0$ , care nu are soluții reale ( $x > 0$ ). În concluzie, singura soluție a sistemului este:  $x = 1$ ,  $y = 1$ .

**2°.** Polinoamele au forma:  $P(X) = aX^2 + bX + c$ , cu  $a \neq 0$ . Egalitatea din enunț devine:  $(aX^2 + bX + c)^3 = aX^6 + bX^3 + c$ . Identificând coeficienții lui  $X^6$ ,  $X^5$  etc., rezultă  $b = 0$ ,  $c = 0$  și  $a = \pm 1$ , deci  $P(X) = X^2$  sau  $P(X) = -X^2$ .

3°. Avem egalitatea:  $x^n - (\sin x)^n = (x - \sin x)(x^{n-1} + x^{n-2} \sin x + \dots + \sin^{n-1} x)$  și limita din enunț se poate scrie astfel:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n - (\sin x)^n}{x^{n+2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{n-1} + x^{n-2} \sin x + \dots + \sin^{n-1} x}{x^{n-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + \frac{\sin x}{x} + \dots + \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{n-1} \right] = r \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}, \end{aligned}$$

deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . Limita rămasă de calculat are o nedeterminare de tipul  $\frac{0}{0}$  și aplicăm regula lui l'Hôpital de două ori:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Deci } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n - (\sin x)^n}{x^{n+2}} = \frac{n}{6}.$$

4°. a) Fie  $x = c + d\sqrt{5}$ ,  $x' = c' + d'\sqrt{5} \in L$ , deci  $c, d, c', d' \in \mathbb{Q}$ . Atunci  $x + x' = (c + c') + (d + d')\sqrt{5} \in L$  (căci  $c + c', d + d' \in \mathbb{Q}$ ) și  $x \cdot x' = (cc' + 5dd') + (cd' + c'd)\sqrt{5} \in L$  (căci  $cc' + 5dd', cd' + c'd \in \mathbb{Q}$ ). Deci  $L$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu adunarea și înmulțirea. Fie  $A = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix}$ ,  $A' = \begin{pmatrix} a' & 5b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \in K$ , deci  $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$ . Atunci:  $A + A' = \begin{pmatrix} a + a' & 5(b + b') \\ b + b' & a + a' \end{pmatrix} \in K$ , căci  $a + a', b + b' \in \mathbb{Q}$  și  $A \cdot A' = \begin{pmatrix} aa' + 5bb' & 5(ab' + a'b) \\ ab' + a'b & aa' + 5bb' \end{pmatrix} \in K$ , căci  $aa' + 5bb', ab' + a'b \in \mathbb{Q}$ . Deci  $K$  este parte stabilă a lui  $M_2(\mathbb{Q})$  în raport cu adunarea și înmulțirea matricilor.

b) Adunarea pe  $L$  este asociativă deoarece adunarea pe  $\mathbb{R}$  este asociativă. Elementul neutru la adunare este  $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{5} \in L$ . Opusul elementului oarecare  $x = c + d\sqrt{5} \in L$  este elementul  $-x = -c - d\sqrt{5} \in L$ . Deoarece adunarea este comutativă pe  $L$  (adunarea este comutativă pe  $\mathbb{R}$ ), rezultă că  $L$  este grup abelian față de adunare. Înmulțirea pe  $L$  este asociativă deoarece înmulțirea pe  $\mathbb{R}$  este asociativă. Elementul neutru la înmulțire este  $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{5} \in L$ , deci  $L$  este monoid față de înmulțire. Apoi, înmulțirea este distributivă față de adunare pe  $L$  deoarece aceeași proprietate are loc pe  $\mathbb{R}$ . Rezultă că  $L$  este un inel. În sfârșit, fie  $(\forall) x = c + d\sqrt{5} \in L$ ,  $x \neq 0$ . Atunci  $c^2 - 5d^2 \neq 0$ ; într-adevăr, dacă  $c^2 - 5d^2 = 0$  și  $d \neq 0$ , rezultă  $\frac{c^2}{d^2} = 5$ , de unde  $\sqrt{5} = \left| \frac{c}{d} \right| \in \mathbb{Q}$ , contradicție; rezultă  $d = 0$  și apoi  $c = 0$ , deci  $x = 0$ , contradicție. Atunci  $x' = \frac{c}{c^2 - 5d^2} - \frac{d}{c^2 - 5d^2} \sqrt{5} \in L$  și

$$\text{avem: } x' \cdot x = x \cdot x' = \frac{(c + d\sqrt{5})(c - d\sqrt{5})}{c^2 - 5d^2} = 1, \text{ adică } x \text{ are invers la înmulțire.}$$

Rezultă că  $L$  este corp (chiar corp comutativ). Adunarea pe  $K$  este asociativă deoarece adunarea pe  $M_2(\mathbb{Q})$  este asociativă. Elementul neutru la adunare este matricea  $0 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \cdot 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K$ . Opusul elementului  $A = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \in K$  este elementul  $-A = \begin{pmatrix} -a & 5(-b) \\ -b & a \end{pmatrix} \in K$ . Deoarece adunarea este comutativă pe  $K$  (adunarea matricilor pe  $M_2(\mathbb{Q})$  este comutativă), rezultă că  $K$  este grup abelian față de





adunare. Înmulțirea pe  $K$  este asociativă deoarece înmulțirea matricilor din  $M_2(\mathbb{Q})$  este asociativă. Elementul neutru la înmulțire este  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \cdot 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K$ , deci  $K$  este monoid față de înmulțire. Apoi, înmulțirea este distributivă față de adunarea pe  $K$  deoarece aceeași proprietate are loc pe  $M_2(\mathbb{Q})$ . Rezultă că  $K$  este un inel. În sfârșit, fie  $(\forall) A = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \in K$ ,  $A \neq 0$ . Atunci,  $\det A = a^2 - 5b^2 \neq 0$  (altfel, ca mai sus, rezultă  $a = 0$  și  $b = 0$ , deci  $A = 0$ , contradicție). Rezultă că  $A$  este inversabilă și avem:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 - 5b^2} & \frac{-5b}{a^2 - 5b^2} \\ \frac{-b}{a^2 - 5b^2} & \frac{a}{a^2 - 5b^2} \end{pmatrix} \in K,$$

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$ . Atunci  $K$  este corp (chiar comutativ).

c) Definim  $f: L \rightarrow K$  prin:

$$f(a + b\sqrt{5}) = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (\forall) x = a + b\sqrt{5} \in L.$$

Aplicația  $f$  este injectivă. Într-adevăr, fie  $x, x' \in L$  cu  $f(x) = f(x')$ . Dacă  $x = a + b\sqrt{5}$ ,  $x' = a' + b'\sqrt{5}$ , atunci avem:  $f(x) = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & 5b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = f(x')$ , deci  $a = a'$  și  $b = b'$ , adică  $x = x'$ . Aplicația  $f$  este surjectivă; într-adevăr,  $(\forall) A = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \in K$  avem  $x = a + b\sqrt{5} \in L$  astfel încât  $f(x) = A$ . Rezultă că  $f$  este bijectivă. Apoi,  $(\forall) x, x' \in L$  avem:

$$x = a + b\sqrt{5}; \quad x' = a' + b'\sqrt{5}; \quad x + x' = (a + a') + (b + b')\sqrt{5};$$

$$x \cdot x' = (aa' + 5bb') + (ab' + a'b)\sqrt{5} \text{ și atunci:}$$

$$f(x + x') = \begin{pmatrix} a + a' & 5(b + b') \\ b + b' & a + a' \end{pmatrix} = f(x) + f(x');$$

$$f(x \cdot x') = \begin{pmatrix} aa' + 5bb' & 5(ab' + a'b) \\ ab' + a'b & aa' + 5bb' \end{pmatrix} = f(x) \cdot f(x'),$$

deci  $f$  este izomorfism de corpuri.

5°. Avem:

$$f(x) = \int_0^x \left( \frac{1}{\cos^2 t} - 1 + \frac{\sin t}{\cos t} \right) dt = \lg x - x + \ln(\cos x),$$

pentru  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Deoarece  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 + \frac{\sin x}{\cos x} = \lg x + \lg^2 x$ , rezultă  $f'(x) > 0$ , pentru  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , deci  $f$  este strict crescătoare și, prin urmare, injectivă. Apoi, deoarece  $f$  este continuă pe  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  și, deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ,

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$ , conform proprietății lui Darboux, rezultă că  $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (0, \infty)$

este și surjectivă, deci  $f$  este bijectivă.

XXXVIII. 1°. Fie  $\alpha$  unghiul obtuz al paralelogramului și  $\beta$  unghiul său ascuțit (v. fig. M.B.53). Teorema cosinusului ne dă relațiile:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cos \alpha$$

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cos \beta.$$

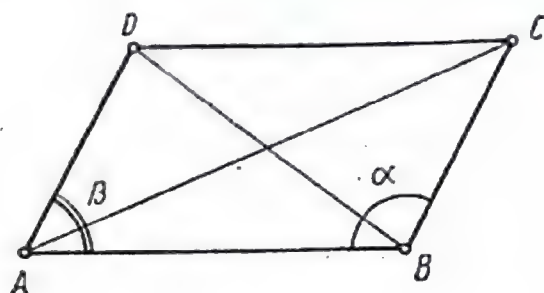


Fig. M.B.53

Deoarece  $\cos \alpha = -\cos \beta$ , prin adunarea celor două relații obținem:  $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$ . Prin înmulțirea relațiilor anterioare se obține:

$$AC^2 \cdot BD^2 = (AB^2 + AD^2)^2 - 4AD^2 \cdot AB^2 \cos^2 \alpha.$$

Înlocuind  $AC^2 \cdot BD^2 = AB^4 + AD^4$  se obține:  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$ , deci  $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  ( $\alpha$  obtuz), de unde  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ .

2°. Ducem  $O_1N' \parallel AN$ . Teorema lui Pitagora în triunghiul  $O_1O_2N'$  ne dă (v. fig. M.B.54):

$$O_1N'^2 = (a + x)^2 - (x - a)^2 = 4ax, \text{ deci } O_1N' = 2\sqrt{ax}.$$

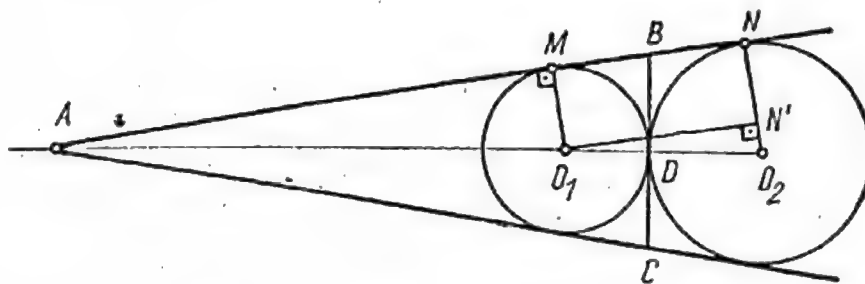


Fig. M.B.54

Avem:  $BM = BD = BN$ , deci  $BC = 2BD = MN = 2\sqrt{ax}$ . Apoi  $\triangle O_1O_2N' \sim \triangle ABD$ , deci  $\frac{x-a}{\sqrt{ax}} = \frac{x+a}{AB}$ , de unde rezultă:  $AB = \frac{(x+a)\sqrt{ax}}{x-a} = AC$ . Corpul generat prin rotație este un con ce are volumul  $V = \frac{1}{3} \pi BD^2 \cdot AD = \frac{\pi}{3} \cdot ax \cdot \frac{2ax}{x-a}$  (deoarece  $AD^2 = AB^2 - BD^2$ ). Condiția din enunț devine  $\frac{x^2}{x-a} = 4a$ , cu soluția  $x = 2a$ .

3°. Fie  $ABC$  planul perpendicular pe  $OM$ , ce trece prin  $M$ . Avem:  $OA \perp$  planul  $OBC$ , deci  $BC \perp OA$  (v. fig. M.B.55). Fie  $A' = AM \cap BC$ . Deoarece

$BC \perp OM$  rezultă că  $BC$  este perpendiculară pe planul  $OAA'$ . Prin urmare  $AA' \perp BC$ , adică  $[AM]$  este înălțimea din  $A$  în triunghiul  $ABC$ . Analog,  $OB \perp$  planul  $OAC$ , deci  $AC \perp OB$ . Fie  $B' = BM \cap AC$ . Deoarece  $AC \perp OM$  rezultă că  $AC$  este perpendiculară pe planul  $OBB'$ . Prin urmare  $BB' \perp AC$ , deci  $[BM]$  este înălțimea din  $B$  în triunghiul  $ABC$ . Atunci  $M$  este ortocentrul triunghiului  $ABC$ .

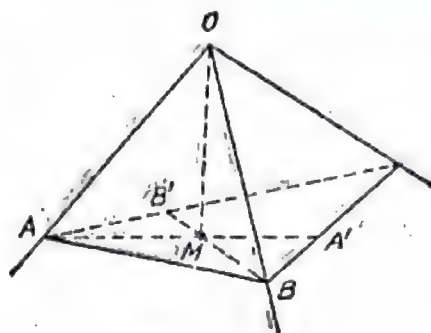


Fig. M.B.55

4°. Impunem condițiile:  $\cos x \neq 0$ ,  $\sin x \neq 0$ , deci  $x \neq k \frac{\pi}{2}$ , cu  $k \in \mathbb{Z}$ . Înlocuind  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  și  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ , ecuația devine:  $(\sin x + \cos x) \sqrt{2} = \frac{1}{\sin x \cos x}$ . Notăm  $\sin x + \cos x = t$  și, prin ridicare la pătrat, obținem:  $\sin x \cos x = \frac{1}{2} (t^2 - 1)$ . Rezultă ecuația  $t^3 - t - \sqrt{2} = 0$ , cu unica soluție reală  $t = \sqrt{2}$ . Deci  $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$  sau  $\sin x + \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = \sqrt{2}$ , de unde obținem:  $2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}$ , adică  $\cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 1$ , cu soluțiile  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (toate acceptabile).

5°. Deoarece  $\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - B \right) = \frac{\operatorname{ctg} B + 1}{\operatorname{ctg} B - 1}$ , relația dată devine:  $1 + \frac{\operatorname{ctg} B + 1}{\operatorname{ctg} B - 1} = \frac{2}{1 - \operatorname{ctg} C}$  sau  $\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C = 1$ , deci  $\cos(B + C) = 0$ . Rezultă  $B + C = \frac{\pi}{2}$ , deci triunghiul este dreptunghic în  $A$ .

XXXIX. 1°. Impunem condițiile:  $x, y \in \mathbb{N}$ ,  $x \geq y + 1$ . Aplicând formulele:  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ,  $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ , din ipotezele problemei rezultă sistemul:

$$\begin{cases} 2 \cdot \frac{(x-1)!}{y!(x-y-1)!} = \frac{(x-1)!}{(y-y)!(x-y)!} + \frac{x!}{y!(x-y)!}; \\ \left( \frac{x!}{(x-y-1)!} \right)^2 = \frac{x!}{(x-y)!} \cdot \frac{(x+1)!}{(x-y)!}. \end{cases}$$

După simplificări sistemul devine:  $x = 3y$ ;  $(x-y)^2 = x+1$ . Obținem ecuația:  $4y^2 - 3y - 1 = 0$ , cu soluțiile  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = -\frac{1}{4}$ . Convine doar  $y = 1$  și rezultă  $x = 3$ .



2°. Tabla înmulțirii în inelul claselor de resturi modulo 7 este următoarea:

	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$	$\hat{5}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{6}$	$\hat{2}$	$\hat{5}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{5}$	$\hat{2}$	$\hat{6}$	$\hat{3}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{6}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{6}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Pentru aflarea celui mai mare divizor comun în inelul  $\mathbb{Z}_7[X]$  se utilizează algoritmul lui Euclid. Împărțim polinomul  $f$  la polinomul  $\hat{5}g = X^2 + \hat{5}$  și avem:  $f = (X^2 + \hat{5})(X^2 + \hat{6}X) + (X + \hat{3})$ . Acum împărțim polinomul  $\hat{5}g = X^2 + \hat{5}$  la restul  $X + \hat{3}$  și obținem:  $X^2 + \hat{5} = (X + \hat{3})(X + \hat{4})$ . Rezultă că cel mai mare divizor comun al polinoamelor  $f$  și  $g$  este polinomul  $X + \hat{3}$ .

3°. Avem:  $x_0 > 0$ ; presupunem  $x_n > 0$  și atunci rezultă că  $x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + nx_n^2} > 0$ , deci  $x_n > 0$ ,  $(\forall)n \in \mathbb{N}$ . Apoi, pentru orice  $n \geq 1$ , avem:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{1 + nx_n^2} - x_n = \frac{-nx_n^3}{1 + nx_n^2} < 0,$$

deci  $x_{n+1} < x_n$ , adică șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este monoton descrescător. Deoarece  $0 < x_n \leq x_0$  pentru  $n \geq 0$ , rezultă că șirul  $(x_n)$  este și mărginit, deci convergent. Fie

$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Scriind relația de recurență sub forma:  $x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + nx_n^2}$  și trecind la

limită rezultă  $l = 0$ . Notăm  $y_n = nx_n$ , deci  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = x_1 = x_0$  și  $y_2 = 2x_2 = \frac{2x_1}{1 + x_1^2} \leq 1$ . Presupunem că  $y_n \leq 1$  ( $n \geq 2$ ). Avem relația:  $y_{n+1} = \frac{[n+1]y_n}{y_n^2 + n}$  (obținută din relația  $x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + nx_n^2}$  prin înlocuirile  $x_n = \frac{y_n}{n}$ ,  $x_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{n+1}$ ).

Rezultă atunci că:

$$y_{n+1} - 1 = \frac{(1 - y_n)(y_n - n)}{y_n^2 + n} \leq 0, \text{ deci } y_{n+1} \leq 1, \text{ adică } y_n \leq 1, (\forall)n \geq 2.$$

Calculăm diferența:

$$y_{n+1} - y_n = \frac{(n+1)y_n}{y_n^2 + n} - y_n = \frac{y_n(1 - y_n^2)}{y_n^2 + n} \geq 0,$$

deci șirul  $(y_n)_{n \geq 2}$  este și monoton crescător; atunci rezultă  $(y_n)$  convergent. Fie  $l_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ . Deoarece  $y_n = nx_{n+1} = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$  și deoarece  $y_n = \frac{n}{\frac{1}{x_n}}$ , aplicând

Stolz-Cesàro, avem:

$$l_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{l_1}.$$

Deci  $l_1^2 = 1$ , de unde  $l_1 = 1$  (evident  $l_1 \geq 0$ ).

4°. Avem o nedeterminare de forma  $1^\infty$ . Prin urmare, putem scrie:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2 - \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{ctg} x})^{\frac{1}{\sin x - \cos x}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 + (1 - \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{ctg} x}))^{\frac{1}{1 - \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{ctg} x}} \frac{1 - \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin x - \cos x}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin x - \cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x \operatorname{ctg} x}{(\sin x - \cos x)(1 + \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{ctg} x})}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)}{\cos x(\sin x - \cos x)(1 + \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{ctg} x})}} = e^{\frac{-\sqrt{2}}{2}}. \end{aligned}$$

5°. a) Notăm:  $u(x) = f(x) - g(x)$ ,  $x \in [0, 1]$  și calculăm:

$$u'(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}; \quad u''(x) = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0, \text{ pentru } x \in [0, 1].$$

Rezultă că  $u'$  este crescătoare pe intervalul  $[0, 1]$  și, cum  $u'(0) = 0$ ,  $u'(x) \geq 0$ , pentru  $x \in [0, 1]$ . Rezultă că  $u$  este crescătoare pe intervalul  $[0, 1]$  și, cum  $u(0) = 0$ , rezultă  $u(x) \geq 0$ , pentru  $x \in [0, 1]$ . În concluzie, avem:

$$h(x) = f(x) = x \operatorname{arctg} x \text{ pentru } x \in [0, 1].$$

b) Deoarece  $f(x) \geq g(x)$  pentru  $x \in [0, 1]$ , rezultă că aria cerută este:

$$S = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx. \text{ Avem:}$$

$$\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C \text{ (calculată prin integrare prin părți)}$$

$$\text{și } \int g(x) dx = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C \text{ (calculată, de asemenea, prin}$$

$$\text{integrare prin părți). Efectuând calculele obținem: } S = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} - \ln 2.$$

**XL. 1°.** Completăm semicercul dat la un cerc și fie  $M'$ , respectiv  $N'$ , punctele în care dreptele  $AM$ , respectiv  $BN$ , taie din nou cercul (v. fig. M.B.56). Ducem  $OP \perp MM'$  și  $OQ \perp NN'$ ;  $OP$  și  $OQ$  sunt în prelungire deoarece  $MM' \parallel NN'$ .

Avem:  $\triangle AOP \equiv \triangle BOQ$  deoarece sînt dreptunghice,  $[AO] \equiv [OB]$  și  $\widehat{AOP} \equiv \widehat{BOQ}$  (opuse la vîrf). Rezultă  $[OP] \equiv [OQ]$  și  $[AP] \equiv [BQ]$ . Atunci  $[MM'] \equiv [NN']$  ca fiind coarde egal depărtate de centrul cercului. Rezultă  $MP = NQ = PM'$ ; ținînd seama și de relația  $AP = BQ$  obținem  $BN = NQ + BQ = PM' + AP = AM'$ . Puterea punctului  $A$  față de cerc este:  $AM \cdot AM' = R^2 - OA^2$ . Obținem:  $AM \cdot BN = R^2 - OA^2 = \text{const.}$

**2°.** Deoarece triunghiul  $ABC$  este isoscel bisectoarea  $[AD]$  este și mediatoare. Unim  $N$  cu  $C$  și  $M$  cu  $A$  (v. fig. M.B.57). Avem  $[BN] \equiv [NC]$  (deoarece

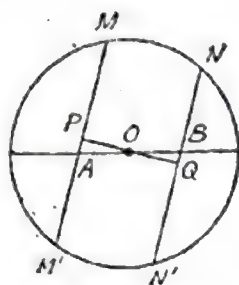


Fig. M.B.56

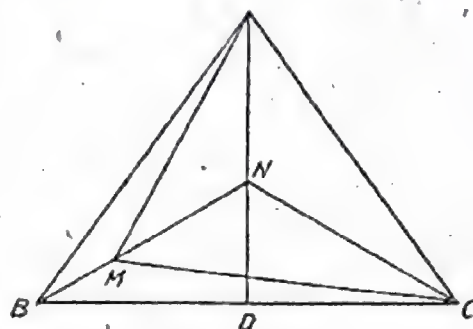


Fig. M.B.57

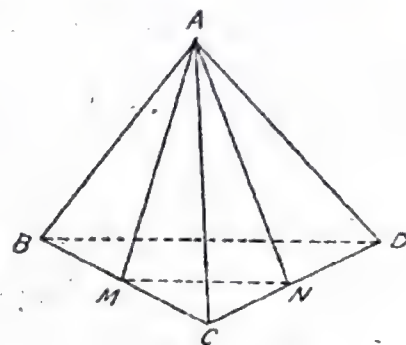


Fig. M.B.58

$N \in [AD]$  mediatoarea lui  $BC$ ). Rezultă:  $m(\widehat{NBC}) = m(\widehat{NCB}) = 30^\circ$ , de unde  $m(\widehat{BNC}) = 120^\circ$ . Avem:  $m(\widehat{ACB}) = 50^\circ$ ,  $m(\widehat{MCN}) = m(\widehat{BCN}) - m(\widehat{MCB}) = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$  și  $m(\widehat{ACN}) = m(\widehat{ACB}) - m(\widehat{NCB}) = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$ , deci  $m(\widehat{MCN}) = m(\widehat{ACN}) = 20^\circ$ . Apoi  $m(\widehat{NAC}) = 40^\circ$ , deci  $m(\widehat{ANC}) = 180^\circ - (40^\circ + 20^\circ) = 120^\circ = m(\widehat{MNC})$ . Deoarece triunghiurile  $MNC$  și  $ANC$  au și latura  $[NC]$  comună, rezultă  $\triangle MNC \equiv \triangle ANC$ . Atunci  $[AC] \equiv [MC]$ , adică  $\triangle ACM$  este isoscel. Deoarece  $m(\widehat{ACM}) = 40^\circ$ , obținem  $m(\widehat{AMC}) = 70^\circ$ .

**3°.** Înlocuind  $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$  și  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ , ecuația dată devine:  $\cos 2x + 3 \sin 2x + 3 = 0$ . Deoarece  $x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , nu sînt soluții ale ecuației putem face substituția  $\tan x = t$  ( $x \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) și înlocuim  $\cos 2x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ ,  $\sin 2x = \frac{2t}{1 + t^2}$  în ecuația de mai sus. Obținem ecuația:  $\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \frac{6t}{1 + t^2} + 3 = 0$  sau  $t^2 + 3t + 2 = 0$ , cu soluțiile  $t_1 = -1$ ,  $t_2 = -2$ . Rezultă  $\tan x = -1$  cu soluțiile  $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  și  $\tan x = -2$  cu soluțiile  $x = l\pi - \arctg 2$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , toate acceptabile.

**4°.** Planul ceru va tăia planul  $BCD$  după o dreaptă  $MN$  paralelă cu  $BD$  (deoarece este paralel cu  $BD$ ); v. fig. M.B.58. Dacă notăm cu  $h$  lungimea înălțimii din vîrfurile  $A$ , avem:  $V_{AMCN} = \frac{1}{3} \sigma(MCN) \cdot h$  și  $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \sigma(BCD) \cdot h$ .



Impunând condiția din enunț  $\frac{F_{AMCN}}{F_{ABCD}} = \frac{1}{2}$ , obținem relația:  $\frac{\sigma(MCN)}{\sigma(BCD)} = \frac{1}{2}$ . Dar  $\triangle MCN \sim \triangle BCD$ , deci putem scrie:  $\frac{\sigma(MCN)}{\sigma(BCD)} = \left(\frac{CM}{CB}\right)^2$ . Rezultă  $\left(\frac{CM}{CB}\right)^2 = \frac{1}{2}$ , deci  $CM = \frac{CB}{\sqrt{2}} = \frac{CH\sqrt{2}}{2}$ . Cunosând lungimea segmentului  $[CM]$ , aflăm punctul  $M$ , apoi ducem paralela la  $BD$  prin  $M$  și fie  $N$  intersecția acesteia cu  $CD$ . Planul  $AMN$  este planul căutat.

5°. Din teorema sinusurilor în triunghiul  $ABC$  avem:  $a = 2R \sin A$ ,  $b = 2R \sin B$ ,  $c = 2R \sin C$ . Înlocuind în relația dată rezultă:

$$\sin B \cdot \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin^2 B}{\sin A \sin C},$$

sau  $\sin^2 B (\cos B - \sin A \sin C) = 0$ . Dar  $\sin B \neq 0$  într-un triunghi, deci  $\cos B = \sin A \sin C$ . Avem  $\cos B = \cos(\pi - (A + C)) = -\cos(A + C)$ , de unde rezultă relația:  $\cos(A + C) + \sin A \sin C = 0$  sau  $\cos A \cdot \cos C = 0$ . Atunci  $\cos A = 0$  și  $A = \frac{\pi}{2}$  sau  $\cos C = 0$  și  $C = \frac{\pi}{2}$ , deci  $\triangle ABC$  este dreptunghic în  $A$  sau în  $C$ .

XII. 1°. Matricea  $A$  va fi inversabilă dacă  $\det A \neq 0$ ,  $(\forall)x \in \mathbb{R}$ . Avem:  $\det A = (1 - m)x^2 + 2x + 3 - 2m$ . Condiția de mai sus exprimă faptul că trinomul obținut nu are rădăcini reale, deci  $\Delta < 0$ . Rezultă inegalitatea:  $1 - (1 - m)(3 - 2m) < 0$ , cu soluțiile  $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$ .

2°. Scriem relațiile lui Viète:  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ;  $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1$ ,  $x_1x_2x_3 = a$ , dar nu calculăm direct expresiile din inegalitatea dată de problemă, deoarece sînt calcule prea complicate. Procedăm astfel: notăm  $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$ ,  $(\forall)k \geq 1$ . Avem:

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ și } S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 2. \end{aligned}$$

Apoi scriem că  $x_1, x_2, x_3$  sînt rădăcini ale ecuației date și avem relațiile:  $x_1^3 = x_1 + a$ ,  $x_2^3 = x_2 + a$ ,  $x_3^3 = x_3 + a$ . Înmulțim aceste relații respectiv cu  $x_1^{k-3}$ ,  $x_2^{k-3}$ ,  $x_3^{k-3}$  ( $k \geq 3$ ) și adunîndu-le, obținem:  $S_k = S_{k-2} + a \cdot S_{k-3}$ . Din această relație obținem recursiv sumele:  $S_3 = S_1 + 3a = 3a$ ,  $S_4 = S_2 + aS_1 = 2$ ,  $S_5 = S_3 + a \cdot S_2 = 3a + 2a = 5a$ ,  $S_6 = S_4 + a \cdot S_3 = 3a^2 + 2$ . Se obține inecuația:  $3a^2 + 2 \geq 5a$ , cu soluțiile  $a \in \left[-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [1, \infty)$ .

3°. Pentru a calcula ușor derivatele de orice ordin ale funcției date descompunem fracția rațională în fracții simple:

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 1}, \quad (\forall)x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}.$$

Obținem:  $1 = (A + B)x - A - 2B$ , deci  $A + B = 0$  și  $-A - 2B = 1$ . Rezultă:  $A = 1$ ,  $B = -1$ , deci avem descompunerea:  $f(x) = \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x - 1}$ . Rezultă:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{(x - 2)^2} = (-1) \left[ \frac{1}{(x - 2)^2} - \frac{1}{(x - 1)^2} \right];$$

$$f''(x) = (-1)^2 2! \left[ \frac{1}{(x - 2)^3} - \frac{1}{(x - 1)^3} \right], \quad (\forall)x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}.$$

Presupunem că avem:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k k! \left[ \frac{1}{(x-2)^{k+1}} - \frac{1}{(x-1)^{k+1}} \right], \quad (\forall) x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}.$$

Derivind încă o dată, obținem:

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} (k+1)! \left[ \frac{1}{(x-2)^{k+2}} - \frac{1}{(x-1)^{k+2}} \right], \quad (\forall) x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\},$$

ceea ce arată că formula de mai sus este corectă. Atunci:

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(n+3) = \left( -\frac{1}{n+2} \right)^{k+1} - \left( -\frac{1}{n+1} \right)^{k+1}.$$

Notăm:  $u = -\frac{1}{n+2}$ ;  $v = -\frac{1}{n+1}$ , și șirul din enunț se scrie:

$$a_n = n^2 \left( \sum_{k=0}^n u^{k+1} - \sum_{k=0}^n v^{k+1} \right) = n^2 \left( u \cdot \frac{1-u^{n+1}}{1-u} - v \cdot \frac{1-v^{n+1}}{1-v} \right).$$

Înlocuind pe  $u$  și  $v$  cu expresiile lor, obținem:

$$\begin{aligned} a_n &= n^2 \left[ -\frac{1}{n+2} \cdot \frac{1 - \left( -\frac{1}{n+2} \right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+2}} + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1 - \left( -\frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} \right] = \\ &= n^2 \left[ \frac{1 - \left( -\frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}{n+2} - \frac{1 - \left( -\frac{1}{n+2} \right)^{n+1}}{n+1} \right] = \\ &= \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} \left[ 1 + (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+2)^n} - (-1)^n \cdot \frac{n+3}{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)^n} \right]. \end{aligned}$$

Atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

4°. Avem:  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + bx^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{8 + \frac{b}{x}} = \sqrt[3]{8}$ . Rezultă  $\sqrt[3]{8} = 2$ , deci  $a = 8$ . Apoi:

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{8x^3 + bx^2} - 2x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(8x^3 + bx^2) - 8x^3}{\sqrt[3]{(8x^3 + bx^2)^2} + 2x\sqrt[3]{8x^3 + bx^2} + 4x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx^2}{x^2 \left[ \sqrt[3]{\left(8 + \frac{b}{x}\right)^2} + 2\sqrt[3]{8 + \frac{b}{x}} + 4 \right]} = \frac{b}{12}. \end{aligned}$$

Rezultă  $\frac{b}{12} = -\frac{1}{3}$ , deci  $b = -4$ . Observăm că graficul funcției are aceeași asimptotă și la  $-\infty$ , deci a fost suficient de studiat cazul  $x \rightarrow \infty$  (sau  $x \rightarrow -\infty$ ).

5°. Explicitând modulul putem scrie:

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)e^{x-1} & \text{dacă } x \in (-\infty, 1), \\ (1+x)e^{1-x} & \text{dacă } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x}{e^{x-1}} = 0$  și  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ , rezultă că  $y = 0$  este asimptotă orizontală la ambele ramuri. Calculăm:

$$f'(x) = \begin{cases} (x+2)e^{x-1} & \text{dacă } x \in (-\infty, 1), \\ -xe^{1-x} & \text{dacă } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Tabloul de variație este următorul:

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$0$	$\searrow$	$-1/e^3$	$\nearrow$	$0$	$\nearrow$
				$1/e$	$2$	

Graficul este următorul:

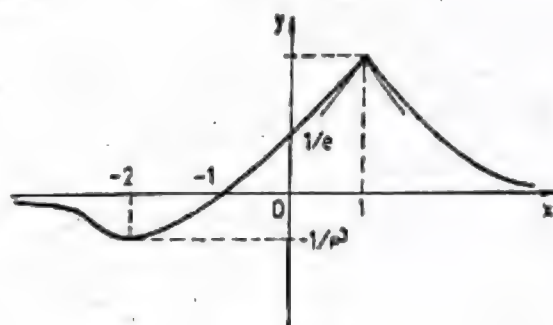


Fig. M.B.59

Aria cerută este:

$$A = \int_0^1 (1+x)e^{x-1} dx + \int_1^2 (1+x)e^{1-x} dx = 1 + \left(3 - \frac{4}{e}\right) = 4 - \frac{4}{e}.$$

**XLII. 1°.** Fie  $I$  punctul de intersecție al laturilor neparalele ale trapezului,  $P$  și  $Q$  intersecția dreptei  $OI$  cu bazele. Ducem prin  $O$  paralela  $EF$  la bazele trapezului (v. fig. M.B.60). Avem egalitățile:  $\frac{EO}{AB} = \frac{DE}{DA} = \frac{CF}{CB} = \frac{OF}{AB}$ , deci  $EO = OF$ .

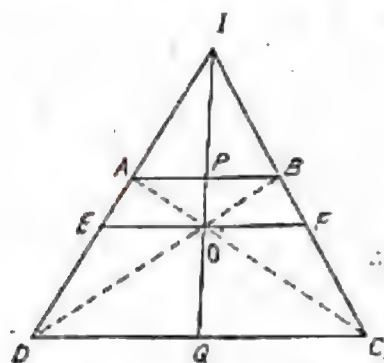


Fig. M.B.60

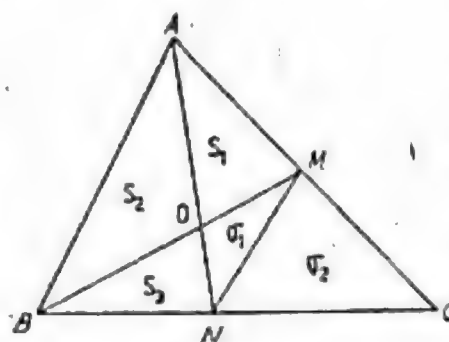


Fig. M.B.61

Avem, de asemenea, egalitățile:  $\frac{AP}{EO} = \frac{IP}{IO} = \frac{PB}{OF}$ , de unde rezultă:  $AP = PB$  (deoarece  $EO = OF$ ), adică  $P$  este mijlocul lui  $[AB]$ . Apoi avem:  $\frac{EO}{DQ} = \frac{IO}{IQ} = \frac{OF}{QC}$ , deci  $DQ = QC$ , adică  $Q$  este mijlocul lui  $[CD]$ .

**2°.** Notăm  $\sigma_1$  = aria  $OMN$  și  $\sigma_2$  = aria  $CMN$  (v. fig. M.B.61). Deoarece triunghiurile  $AOB$  și  $BON$  au aceeași înălțime din  $B$ , iar triunghiurile  $AOM$



și  $OMN$  au aceeași înălțime din  $M$ , obținem egalitățile:  $\frac{S_2}{S_3} = \frac{AO}{ON} = \frac{S_1}{\sigma_1}$ , deci  $\sigma_1 = \frac{S_1 \cdot S_3}{S_2}$ . Deoarece triunghiurile  $ABN$  și  $ANC$  au aceeași înălțime din  $A$ , iar triunghiurile  $MBN$  și  $MNC$  au aceeași înălțime din  $M$ , obținem egalitățile:  $\frac{S_2 + S_1}{S_1 + \sigma_1 + \sigma_2} = \frac{BN}{NC} = \frac{S_2 + \sigma_1}{\sigma_2}$ . Rezultă  $\frac{S_2 - \sigma_1}{S_1 + \sigma_1} = \frac{S_2 + \sigma_1}{\sigma_2}$ , de unde obținem în final:

$$\sigma_2 = \frac{S_1 S_3 (S_1 + S_2) (S_2 + S_1)}{S_2 (S_2^2 - S_1 S_3)}.$$

3°. Ecuația se scrie echivalent:

$$\cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = 2(\cos^2 x + \sin^2 x) \text{ sau}$$

$$4 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0,$$

de unde rezultă:  $(2 \sin x - \cos x)^2 = 0$ . Obținem:  $2 \sin x - \cos x = 0$ , deci  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$  ( $\cos x \neq 0$ , căci altfel obținem și  $\sin x = 0$ , contradicție). Rezultă soluțiile:  $x = k\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

4°. Fie  $M, N, P, Q$  intersecțiile planului de secțiune  $\pi$  cu muchiile  $[AC]$ ,  $[AD]$ ,  $[BD]$ ,  $[BC]$  și fie  $E$  mijlocul muchiei  $[CD]$ . Deoarece  $AB \parallel \pi$ , rezultă  $AB \parallel MQ$  și  $AB \parallel NP$ , deci  $MQ \parallel NP$  (v. fig. M.B.62). Deoarece  $CD \parallel \pi$ , rezultă  $CD \parallel MN$  și  $CD \parallel QP$ , deci  $MN \parallel QP$ . Rezultă că patrulaterul  $MNPQ$  este un paralelogram.

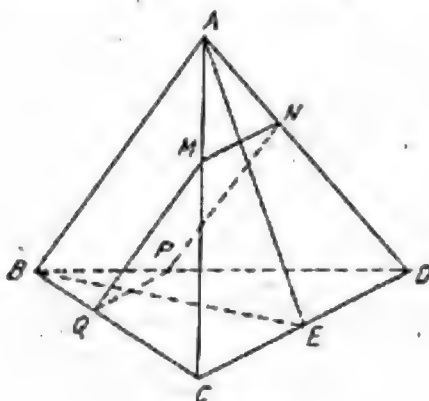


Fig. M.B.62

Avem:  $CD \perp AE$  și  $CD \perp BE$  (tetraedrul  $ABCD$  este regulat), deci  $CD \perp$  planul  $ABE$ , de unde rezultă că  $CD \perp AB$ . Atunci patrulaterul  $MNPQ$  este un dreptunghi. Fie  $PQ = x$ . Deoarece  $\triangle BPQ$  este echilateral rezultă  $BQ = x$  și  $CQ = a - x$ , deci  $MQ = a - x$  ( $\triangle CMQ$  este echilateral). Atunci  $\sigma(MNPQ) = x(a - x)$ . Maximul ariei este atins pentru  $x = \frac{a}{2}$  și aria maximă este  $\frac{a^2}{4}$ .

5°. Fie  $V$  volumul tetraedrului și  $S$  aria unei fețe. Dacă  $h$  este înălțimea tetraedrului și  $d_1, d_2, d_3, d_4$  sînt distanțele la fețe, atunci avem:

$$V = \frac{S \cdot d_1}{3} + \frac{S \cdot d_2}{3} + \frac{S \cdot d_3}{3} + \frac{S \cdot d_4}{3} = \frac{S \cdot h}{3}.$$

Rezultă:  $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = h = \text{const.}$

**XIJJ. 1°.** Pentru  $m \neq 0$  discriminantul ecuației  $f(x) = 0$  este:  $\Delta = -4m^2 + 4m + 1$ . Rădăcinile discriminantului sînt  $m_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$ . Suma  $S$  și produsul  $P$  al rădăcinilor ecuației  $f(x) = 0$  sînt  $S = -\frac{2m+1}{m}$ , respectiv  $P = \frac{2m-1}{m}$  ( $m \neq 0$ ). Natura și semnul rădăcinilor rezultă din următorul tabel:

$m$	Semnul lui $\Delta$	Semnul lui $P$	Semnul lui $S$	Natura rădăcinilor
$m \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$	-	+	+	Nu avem rădăcini reale
$m = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$	0	+	+	$x_1 = x_2 > 0$
$m \in \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, 0\right)$	+	+	+	$x_1 \neq x_2, x_1 > 0, x_2 > 0$
$m = 0$	Ecuația se reduce la o ecuație de gradul I cu rădăcina $x = 1$			
$m \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$	+	-	-	$x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < 0, x_2 > 0$ $ x_1  > x_2$
$m = \frac{1}{2}$	+	0	-	$x_1 = 0, x_2 < 0$
$m \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$	+	+	-	$x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < 0, x_2 < 0$
$m = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$	0	+	-	$x_1 = x_2 < 0$
$m \in \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$	-	+	-	Nu avem rădăcini reale

**2°.** Funcția  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  satisface condiția  $g(3n+1) = n$ . Ecuația  $3n+1 = x$  ne conduce la considerarea funcției  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $g(n) = \left[\frac{n-1}{3}\right]$  pentru  $n \geq 1$  și  $g(0) = 0$ . Astfel avem  $(g \circ f)(n) = g(3n+1) = \left[\frac{3n+1-1}{3}\right] = n$ , deci funcția  $g$  satisface proprietatea cerută. Să arătăm acum că orice funcție  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  cu proprietatea  $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$  satisface și proprietatea  $f \circ g \neq 1_{\mathbb{N}}$ . Procedăm prin reducere la absurd. Dacă  $f \circ g = 1_{\mathbb{N}}$  și din faptul că  $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$  rezultă că funcția  $f$  este inversabilă, deci bijectivă, ceea ce este absurd, deoarece  $f$  nu este surjectivă (numerele de forma  $3n$  și  $3n+2$  nu sînt în imaginea funcției  $f$ ).

**3°.** Să considerăm determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & a+b \\ a^2 & b^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & b \\ a^2 & b^2-a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ab(a-b).$$

Avem mai multe cazuri. *Cazul 1.*  $a \neq b$ ,  $ab \neq 0$ , avem un sistem compatibil determinat ale cărui soluții sînt date de regula Cramer:

$$\begin{aligned}x &= \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{a(b-c)(a-b-c)}{ab(a-b)} = \frac{(b-c)(a-b-c)}{b(a-b)}; \\y &= \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{b(c-a)(b-c-a)}{ab(a-b)} = \frac{(b-c)(a-b-c)}{b(a-b)}; \\z &= \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{(b-a)(c-a)(c-b)}{ab(a-b)} = \frac{(b-c)(c-a)}{ab}.\end{aligned}$$

*Cazul 2.*  $a = b \neq 0$ . Matricea coeficienților necunoscutelor este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 2a \\ a^2 & a^2 & 2a^2 \end{pmatrix}.$$

Avem minorul  $\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 2a \end{vmatrix} = a \neq 0$  și  $\text{rang } A = 2$ . Minorul caracteristic este:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2a & c \\ a^2 & 2a^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & a & c-a \\ a^2 & a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = a(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c+a \end{vmatrix} = ac(c-a).$$

Dacă  $c \neq 0$  și  $c \neq a$  sistemul este incompatibil. Pentru  $c = 0$  sistemul devine:

$$\begin{cases} x + y + z = 1; \\ ax + ay + 2az = 0; \\ a^2x + a^2y + 2a^2z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1; \\ x + y + 2z = 0; \\ x + y + 2z = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha; \\ y = 2 - \alpha; \\ z = -1; \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pentru  $c = a$  sistemul devine:

$$\begin{cases} x + y + z = 1; \\ ax + ay + 2az = a; \\ a^2x + a^2y + 2a^2z = a^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1; \\ x + y + 2z = 1; \\ x + y + 2z = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha; \\ y = 1 - \alpha; \\ z = 0 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

*Cazul 3.*  $a = b = 0$  avem  $\text{rang } A = 1$ . Pentru  $c \neq 0$  sistemul este imposibil. Dacă  $c = 0$  sistemul este compatibil, dublu nedeterminat și avem  $x = 1 - \alpha - \beta$ ,  $y = \alpha$ ,  $z = \beta$ , unde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

*Cazul 4.*  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ . Rangul matricii coeficienților necunoscutelor este  $\text{rang } A = 2$ , deoarece avem minorul  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b \end{vmatrix} = b \neq 0$ . Minorul caracteristic este:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & c \\ 0 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc(c-b).$$

Dacă  $c \neq 0$  și  $c \neq b$  sistemul este incompatibil. Pentru  $c = 0$  sistemul este compatibil și simplu nedeterminat avînd soluția  $x = \frac{b-c}{b}$ ,  $y = \frac{c}{b} - \alpha$ ,  $z = \alpha$ , unde  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pentru  $c = b$  rezultă de asemenea un sistem compatibil și simplu nedeterminat.

*Cazul 5.*  $a \neq 0$ ,  $b = 0$ . Discuția este analoagă cazului 3.



4°. Trebuie să determinăm  $a$  și  $b$  astfel încât legea de compoziție să fie asociativă și să admită element neutru. Prin calcul obținem:

$$(x * y) * z = (xy - az + by) * z = xyz - axz - ayz + byz + a^2x - aby + bz$$

și în mod analog:

$$x * (y * z) = xyz - axy + bxy + byz - ax - aby + b^2z.$$

Legea de compoziție este asociativă dacă avem:

$$-(a+b)xz + a(a+1)x + b(1-b)z = 0$$

pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Pentru  $x=0$  și  $z$  oarecare obținem condiția necesară  $b(1-b)=0$ . Pentru  $x=1$  și  $z=0$  obținem condiția necesară  $a(a+1)=0$ . În sfârșit, avem și condiția necesară  $a+b=0$ . Cele trei condiții obținute sînt și condiții suficiente, după cum se vede imediat. Sistemul:

$$\begin{cases} a+b=0; \\ a(a+1)=0; \\ b(1-b)=0; \end{cases}$$

are soluțiile  $(0, 0)$  și  $(-1, 1)$ . În cazul  $a=0$  și  $b=0$  legea este  $x * y = xy$  cu elementul neutru  $e=1$ . Orice număr real nenul este inversabil. Dacă  $a=-1$  și  $b=1$ , legea de compoziție este  $x * y = xy + x + y$ . Elementul neutru satisface ecuația  $xe + x + e = x$ , deci  $e=0$ . În acest caz orice element din mulțimea  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  este inversabil.

5°. *Metoda I.* Avem descompunerea:  $S'_n = (1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n) + (C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n)$ , care se mai scrie:  $S'_n = (1+1)^n + S'_n = 2^n + S'_n$ , unde  $S'_n = C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n$ . Dacă ținem seama de formula  $C_n^k = C_n^{n-k}$  putem scrie:  $S'_n = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 + \dots + C_n^1$ . Rezultă:  $2S'_n = n(C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n)$  sau  $2S'_n = n \cdot 2^n$ , deci  $S'_n = n \cdot 2^{n-1}$  așa încît:  $S_n = 2^n + n \cdot 2^{n-1} = (n+2)2^{n-1}$ .

*Metoda II.* Considerăm identitatea:

$$x(1+x)^n = x(1 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^nx^n), \quad (\forall)x \in \mathbb{R}.$$

Prin derivare obținem:

$$(1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = 1 + 2C_n^1x + 3C_n^2x^2 + \dots + (n+1)C_n^nx^n.$$

Înlocuind  $x=1$  rezultă:

$$2^n + n \cdot 2^{n-1} = 1 + 2C_n^1 + \dots + (n+1)C_n^n = S_n,$$

deci  $S_n = (n+2)2^{n-1}$ .

XLIV. 1°. Folosind inegalitățile de la punctul 2° avem:

$$0 < \ln \ln 3 - \ln \ln 2 < \frac{1}{2 \ln 2};$$

$$0 < \ln \ln 4 - \ln \ln 3 < \frac{1}{n \ln 3};$$

$$\dots\dots\dots$$

$$0 < \ln \ln(n+1) - \ln \ln n < \frac{1}{n \ln n}.$$

Prin adunare obținem:

$$a_n = \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \dots + \frac{1}{n \ln n} > \ln \ln(n+1) - \ln \ln 2.$$

Prin urmare avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln \ln(n+1) - \ln \ln 2) = +\infty,$$

deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

2°. Pentru orice număr întreg  $k \geq 2$  putem considera funcția  $f: [k, k+1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln \ln x$  (teorema lui Lagrange), deci există  $c \in [k, k+1]$  astfel încît  $f(k+1) - f(k) = f'(c)$ . Astfel obținem:  $\ln \ln(k+1) - \ln \ln k = \frac{1}{c \ln c}$ . Pe de altă parte avem:  $k \ln k < c \ln c < (k+1) \ln(k+1)$ , care ne conduce la inegalitățile:

$$0 < \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} < \ln \ln(k+1) - \ln \ln k < \frac{1}{k \ln k}.$$

3°. Se observă că sîntem în cazul de nedeterminare  $1^\infty$ . Putem scrie:

$$\begin{aligned} a_n &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 2x + \dots + \operatorname{tg}^2 nx) \frac{1}{n^3 x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 2x + \dots + \operatorname{tg}^2 nx) \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + \dots + \operatorname{tg}^2 nx} \right]^{\frac{\operatorname{tg}^2 x + \dots + \operatorname{tg}^2 nx}{n^3 x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\operatorname{tg}^2 x + \dots + \operatorname{tg}^2 nx}{n^3 x^2}}. \end{aligned}$$

Pe de altă parte avem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2} + 2^2 \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{2^2 x^2} + \dots + n^2 \frac{\operatorname{tg}^2 nx}{n^2 x^2} \right) = (1 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Rezultă:

$$a_n = e^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}.$$

4°. Funcția nu este pară și nici impară. Intersecția cu axele ne dă punctele  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ . Avem imediat:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ . Funcția  $f$  se mai poate scrie astfel:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1) \arcsin \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} & \text{pentru } x < 0, \\ 0 & \text{pentru } x = 0, \\ (x-1) \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

Se vede imediat că  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ :

$$f(0) = f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\left[ \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + (x-1) \frac{1}{x^2+1} \right] & \text{pentru } x < 0, \\ \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x-1}{x^2+1} & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = 1; f'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = -1,$$

deci  $f$  nu este derivabilă în  $x = 0$ . Derivând funcția  $f'(x)$  pentru  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , obținem:

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{2(x+1)}{(x^2+1)^2} & \text{pentru } x < 0, \\ \frac{2(x+1)}{(x^2+1)^2} & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

Evident că  $f'(x) > 0$  pentru  $x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ . Avînd  $f(0) = f(1)$ ,  $f''(x) > 0$  pentru  $x \in (0, 1]$  și aplicînd teorema lui Rolle se obține că există un punct unic  $x_0 \in (0, 1)$  pentru care  $f'(x_0) = 0$ . Graficul nu are asimptote verticale sau orizontale. Căutăm asimptote oblice de tipul  $y = mx + n$ .

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x} \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ f(x) - \frac{\pi}{2} x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ -\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + x \left( \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \\ &= -\frac{\pi}{2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Aplicînd regula lui L'Hôpital obținem:

$$n = -\frac{\pi}{2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^3}} = -\frac{\pi}{2} - 1.$$

Deci asimptota oblică la  $+\infty$  este dreapta de ecuație  $(d_1)$ :  $y = \frac{\pi}{2} x - 1 - \frac{\pi}{2}$ .

Prin calcule similare se obține asimptota oblică la  $-\infty$  de ecuație  $(d_2)$ :  $y = \frac{\pi}{2} x + 1 - \frac{\pi}{2}$ .



Tabloul de variație al funcției este următorul:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$x_0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$\frac{\pi}{4}$	$+$	$1$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$0$	$\searrow$

Graficul funcției este prezentat în fig. M.B.63.

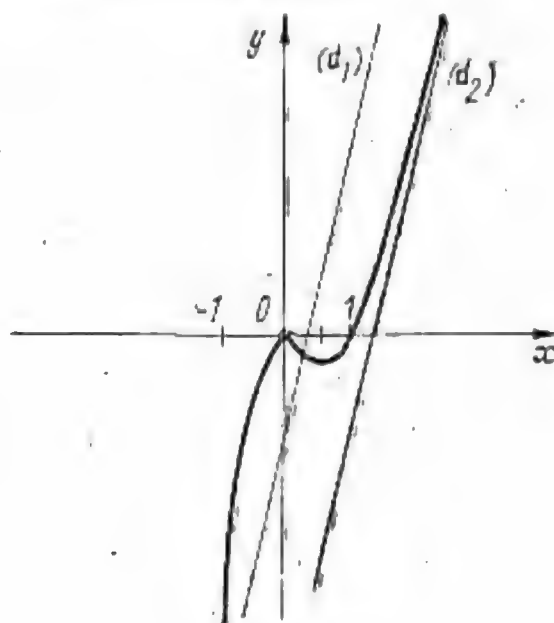


Fig. M.B.63

5°. Considerăm  $\varphi: \left[\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right] \rightarrow [a, b]$ ,  $\varphi(t) = \frac{a+b}{2} - t$ ,  $\varphi'(t) = -1$ .

$$I_n = \int_{\frac{b-a}{2}}^{\frac{a-b}{2}} \left(\frac{b-a}{2} - t\right)^n \left(\frac{b-a}{2} + t\right)^n (-1) dt.$$

Cu notația  $c = \frac{b-a}{2}$  avem:

$$I_n = \int_{-c}^c (c^2 - t^2)^n dt = 2 \int_0^c (c^2 - t^2)^n dt.$$

Integrăm prin părți pentru a stabili o relație de recurență între termenii șirului  $(I_n)_{n \geq 1}$ . Fie:  $u(t) = (c^2 - t^2)^n$ ,  $v'(t) = 1$  și  $u'(t) = -2nt(c^2 - t^2)^{n-1}$ ,  $v(t) = t$ . Atunci:

$$\begin{aligned} I_n &= 2t(c^2 - t^2)^n \Big|_0^c + 4n \int_0^c t^2(c^2 - t^2)^{n-1} dt = -4n \int_0^c (c^2 - t^2 - c^2)(c^2 - t^2)^{n-1} dt = \\ &= -4n \int_0^c (c^2 - t^2)^n dt + 4nc^2 \int_0^c (c^2 - t^2)^{n-1} dt; \quad I_n = -2nI_n + 2nc^2I_{n-1}, \end{aligned}$$

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} c^2 I_{n-1} \text{ sau } I_n = \frac{2n}{2n+1} \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 I_{n-1} \text{ pentru } n \geq 2. \text{ Independent de}$$



am desenat arcul descris de  $A$  în unul din cele două semiplane. Fie  $A$  o poziție a vârfului variabil și  $D$  pe dreapta  $AB$  astfel încât  $AC = AD$  și  $A \in [BD]$ . Rezultă că  $m(\widehat{BDC}) = \frac{\alpha}{2}$ , deci punctul  $D$  descrie un arc capabil de unghiul  $\frac{\alpha}{2}$  construit pe  $BC$ .

Perimetrul triunghiului  $ABC$  este maxim cînd  $BD = AB + AC$  are valoarea maximă, deci cînd  $BD$  devine diametru. Fie  $D'$  punctul diametral opus lui  $B$  în al doilea cerc și  $A'$  intersecția primului cerc cu  $BD'$ . Avem  $BC \perp CD'$  și  $A'C = A'D'$ . Rezultă imediat că  $A'$  este mijlocul lui  $[BD']$ . Prin urmare avem  $BA' = A'C$  care ne spune că perimetrul este maxim cînd triunghiul dat este isoscel. Triunghiul care se poate obține analog în semiplanul opus este congruent cu  $BA'C$ .

**Metoda II.** Din teorema sinusurilor în triunghiul  $ABC$  avem:  $L = BC + AC + AB = 2R(\sin \alpha + \sin B + \sin C)$ , în care  $R$  este raza cercului pe care variază  $A$ . Deci  $L$  are valoarea maximă cînd  $\sin B + \sin C$  are valoarea maximă sau  $2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}$  are valoarea maximă. Deoarece  $B + C = \pi - \alpha$  rezultă că  $\sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{\alpha}{2}$  este o constantă. Prin urmare  $L$  este maxim cînd  $\cos \frac{B-C}{2}$  are valoarea maximă, ceea ce se realizează pentru  $B \equiv C$ , deci în cazul triunghiului isoscel înscris în cercul determinat mai sus.

3°. a) Fie  $M$  mijlocul înălțimii  $[SO]$  și  $P$ , respectiv,  $Q$  proiecțiile lui  $M$  pe  $(SAB)$  și  $SA$  (v. fig. M.B.66). Triunghiul  $MPQ$  este dreptunghic în  $P$ , deoarece

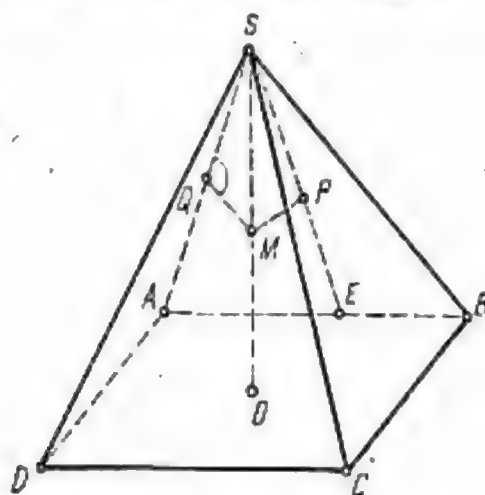


Fig. M.B.66

$MP$  este perpendiculară pe planul  $SAB$ , așa încît  $MP < MQ$ , deci  $p < q$ . Fie  $E$  intersecția lui  $SP$  cu  $AB$ . Avem  $\triangle SMP \sim \triangle SEO$ , de unde:

$$(1) \frac{MP}{OE} = \frac{SM}{SE}. \text{ Din triunghiul dreptunghic } SOE \text{ rezultă:}$$

$$SE = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4h^2 + a^2}.$$

Avînd în vedere că  $SM = \frac{h}{2}$  și  $EO = \frac{a}{2}$  din (1) rezultă: (2)  $p = MP = \frac{ah}{2\sqrt{4h^2 + a^2}}$ .

Din asemănarea triunghiurilor  $SMQ$  și  $SOA$  deducem: (3)  $q = MQ = \frac{ah}{2\sqrt{2h^2 + a^2}}$ ; comparînd (2) și (3) rezultă  $q > p \sqrt{2}$ .



b) Pentru calculul volumului în funcție de  $p$  și  $q$  este necesar să determinăm din sistemul format de ecuațiile (2) și (3) pe  $a$  și  $h$  în funcție de  $p$  și  $q$ . Prin împărțire avem:

$$\frac{q}{p} = \frac{\sqrt{4h^2 + a^2}}{\sqrt{2h^2 + a^2}} \text{ sau } \frac{q^2}{p^2} = \frac{4h^2 + a^2}{2h^2 + a^2},$$

de unde: (4)  $\frac{p^2}{q^2 - p^2} = 1 + \frac{a^2}{2h^2}$ . Rezultă  $2h^2 = \frac{a^2(q^2 - p^2)}{2p^2 - q^2}$  și prin înlocuire în (3),

obținem  $q = \frac{h\sqrt{2p^2 - a^2}}{2p}$ , de unde (5)  $h = \frac{2pq}{\sqrt{2p^2 - q^2}}$ . Ținând seama de (4)

rezultă (6)  $a^2 = \frac{8p^2q^2}{q^2 - p^2}$ . Volumul piramidei este  $V = \frac{1}{3} a^2 h$ . Înlocuind  $h$  și  $a^2$

din (5) și (6) obținem:  $V = \frac{16p^2q^2}{3(q^2 - p^2)(2p^2 - q^2)}$ .

4°. Presupunem că  $C$  nu este mijlocul lui  $[AB]$  și notăm cu  $E$ , respectiv,  $F$  punctele de tangență ale cercului înscris cu  $AM$  și  $BM$ . Avem:  $ME = MF$ ,  $EA = AC$  și  $BC = BF$ , așa încât obținem (v. fig. M.B.67):

$$|MA - MB| = |AC - BC| = \text{const.}$$

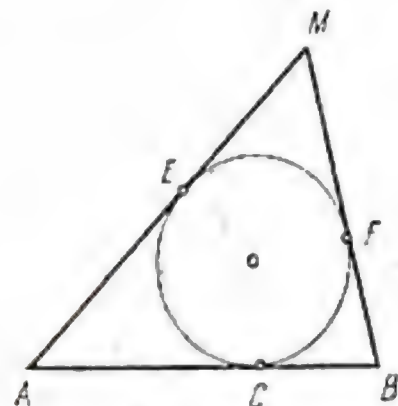


Fig. M.B.67

Rezultă că locul lui  $M$  este o hiperbolă cu focarele în punctele  $A$  și  $B$ . În cazul particular cind  $C$  este mijlocul segmentului  $[AB]$ ,  $M$  descrie mediatoarea lui  $[AB]$  din care se scoate punctul  $C$ .

5°. Avem:  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$

$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$

Putem avea soluții numai dacă  $0 \leq ax \leq 1$  și  $0 \leq bx \leq 1$ . Se observă că pentru  $ab < 0$  nu avem soluții. Analizăm situația  $ab \geq 0$ . Pentru  $a \neq 0$  ecuația  $\arccos bx = 0$  ne dă  $bx = 1$ . Dacă  $b = 0$  nu avem soluții, iar pentru  $b \neq 0$  avem soluția  $x = \frac{1}{b}$ .

Pentru  $b = 0$  ecuația devine  $\arcsin ax = \frac{\pi}{2}$ , de unde  $ax = 1$  cu soluție numai dacă  $a \neq 0$  și deci  $x = \frac{1}{a}$ . Studiem cazul  $ab > 0$  cu  $a > 0$  și  $b > 0$ . Condițiile se mai scriu:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{a}; \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{b}. \end{cases} \quad (*)$$

Intrucit avem  $\arcsin ax$  și  $\arccos bx$  în  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , iar funcția  $\sin$  este bijectivă pe acest interval, ecuația este echivalentă cu  $\sin(\arcsin ax) = \sin(\arccos bx)$ , de unde:

$$ax = \sqrt{1 - b^2 x^2} \text{ și deci } x^2 = \frac{1}{a^2 + b^2}.$$

Reținem doar  $x = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , care satisface restricțiile (\*). Printr-un raționament similar obținem pentru cazul  $a < 0, b < 0$  soluția  $x = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

**XLVI. 1°. Avem restricția  $x + y \geq 0$ . Notăm  $\sqrt{x + y} = t, \sqrt[3]{x - y} = z$ ,  $t \geq 0$ . Sistemul devine:**

$$\begin{cases} t + z = 6; \\ t | z | = 8. \end{cases} \text{ Rezolvăm ecuația: } |z| (6 - z) = 8 \Leftrightarrow z |z| - 6|z| + 8 = 0.$$

*Cazul 1.  $z \geq 0$ . Avem  $z^2 - 6z + 8 = 0$ , de unde  $z_1 = 2, z_2 = 4$  și de aici  $t_1 = 4$ , respectiv,  $t_2 = 2$ . În continuare rezolvăm două sisteme:*

$$(1) \begin{cases} \sqrt{x + y} = 2; \\ \sqrt[3]{x - y} = 4, \end{cases} \text{ și } (2) \begin{cases} \sqrt{x + y} = 4; \\ \sqrt[3]{x - y} = 2. \end{cases}$$

$$(1) \text{ conduce la } \begin{cases} x + y = 4; \\ x - y = 64, \end{cases} \text{ de unde } x = 34, y = -30.$$

$$(2) \text{ se mai scrie } \begin{cases} x + y = 16; \\ x - y = 4, \end{cases} \text{ deci } x = 10, y = 6.$$

*Cazul 2.  $z < 0$ . Avem  $-z^2 + 6z + 8 = 0, z^2 - 6z - 8 = 0$  cu rădăcinile  $z_1 = 3 - \sqrt{17}, z_2 = 3 + \sqrt{17}$ . Reținem doar  $z_1 = 3 - \sqrt{17} < 0$  și deci  $t = 3 + \sqrt{17}$ . Rămâne de rezolvat:*

$$\begin{cases} \sqrt{x + y} = 3 + \sqrt{17}; \\ \sqrt[3]{x - y} = 3 - \sqrt{17}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 26 + 6\sqrt{17}; \\ x - y = 180 - 44\sqrt{17}, \end{cases} \text{ și } \begin{cases} x = 103 - 19\sqrt{17}; \\ y = -77 + 25\sqrt{17}. \end{cases}$$

Deci soluțiile sistemului sînt:

$$\begin{cases} x = 34; \\ y = -30, \end{cases} \begin{cases} x = 10; \\ y = 6, \end{cases} \begin{cases} x = 103 - 19\sqrt{17}; \\ y = -77 + 25\sqrt{17}. \end{cases}$$

**2°.  $x_1, x_2, x_3$  fiind rădăcini ale ecuației avem**

$$(*) \begin{cases} x_1^3 + ax_1^2 + x_1 + 1 = 0; \\ x_2^3 + ax_2^2 + x_2 + 1 = 0; \\ x_3^3 + ax_3^2 + x_3 + 1 = 0. \end{cases}$$

Relațiile între rădăcini și coeficienți sînt:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -a; \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 1; \\ x_1x_2x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Sumînd relațiile (\*) obținem:

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= -a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3) - 3 = -a[(x_1 + x_2 + x_3)^2 - \\ &- 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)] + a - 3 = -a^2 + 3a - 3. \end{aligned}$$

Înmulțind relațiile (\*) cu  $x_1$ ,  $x_2$ , respectiv  $x_3$  și sumând avem:

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 &= -a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3) = \\ &= a - (a^2 - 2) + a = -a^2 + 2a + 2. \end{aligned}$$

Vom determina  $a$  din relațiile:

$$\begin{cases} -a^3 + 3a - 3 = -1; \\ -a^3 + 2a + 2 = 4a - 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3a + 2 = 0; \\ a^2 + 2a - 3 = 0, \end{cases}$$

cu soluția comună  $a = 1$ . Ecuația dată este deci:  $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ , de unde  $(x + 1)(x^2 + 1) = 0$ , cu rădăcinile:  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = i$ ,  $x_3 = -i$ .

3°. Fie  $A$  punctul din spațiu. Notăm cu  $A_1$  respectiv  $A_2$  proiecțiile lui  $A$  pe  $d$  și  $d'$ . Există un plan unic  $\alpha$  ce conține  $AA_1$  și este perpendicular pe  $d$  și un plan unic  $\beta$  ce conține  $AA_2$  și este perpendicular pe  $d'$ . Planele  $\alpha$  și  $\beta$  se intersectează după o dreaptă  $\Delta$  ce conține pe  $A$  și este perpendiculară atât pe  $d$  cit și pe  $d'$ . Planele  $\alpha$  și  $\beta$  avînd punctul comun  $A$  nu pot fi paralele.

4°. Considerăm triunghiul  $ABC$ , cu  $m(\hat{A}) = 90^\circ$  și  $AC = b$ ;  $BC = a$ ,  $AB = c$ . Presupunem  $AB < AC$ . Avem  $a + c = 2b$  și aplicînd teorema sinusurilor:  $a + a \sin C = 2a \sin B$ , de unde  $1 + \sin C = 2 \sin B$ . Ținînd cont de faptul că  $B + C = \frac{\pi}{2}$ , avem  $\sin C = \cos B$ . Rezultă că avem:  $1 + \cos B = 2 \sin B \Leftrightarrow 1 + 2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1 = 4 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$ . Unghiul  $\hat{B}$  fiind unghi ascuțit, rezultă  $\cos \frac{B}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$ . Rezultă  $B = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$  și  $C = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ .

**XLVII. 1°.** Notînd  $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} > 0$ , prima ecuație a sistemului dat se scrie:  $t - \frac{1}{t} = \frac{65}{36}$ , echivalentă cu  $36t^2 - 65t - 36 = 0$ , de unde  $t_1 = \frac{9}{2} > 0$  și  $t_2 = -\frac{4}{9} < 0$ , cea de a doua valoare a lui  $t$  nefiînd acceptată. Din  $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} = \frac{9}{2}$ , găsim  $x - y = 2$ , prin urmare rezolvarea problemei respective revine la aflarea soluției sistemului:  $x - y = 2$ ;  $xy - x + y = 118$ . Adunînd cele două ecuații, găsim  $xy = 120$ . Dar  $x = y + 2$ , deci  $(y + 2)y = 120$ , de unde  $y_1 = -12$  și  $y_2 = 10$ ; corespunzător, obținem  $x_1 = -10$  și  $x_2 = 12$ , prin urmare  $(x, y) \in \{-10, -12\}, (12, 10)$  constituie soluțiile sistemului dat.

2°. Ținem seama că  $a_n = a_1 q^{n-1}$ ,  $(\forall) n \geq 2$ , unde  $a_1$  este primul termen al progresiei geometrice, iar  $q$  rația acesteia. Atunci:  $a_5 = a_1 q^4$ ;  $a_4 = a_1 q^3$ ;  $a_2 = a_1 q$  și sistemul dat se mai scrie:

$$\begin{cases} a_1 q^4 - a_1 = 15; \\ a_1 q^3 - a_1 q = 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 (q^4 - 1) = 15; \\ a_1 q (q^2 - 1) = 6, \end{cases}$$

ultima egalitate confirmînd că  $a_1 \neq 0$  și  $q \notin \{-1, 0, 1\}$ ; împărțind membru cu membru cele două ecuații ale ultimului sistem, obținem:  $\frac{q^3 + 1}{q} = \frac{15}{6}$ , echivalentă cu  $6q^2 - 15q + 6 = 0$ , de unde  $q_1 = \frac{1}{2}$  și  $q_2 = 2$ . Pentru  $q_1 = \frac{1}{2}$ , găsim  $a_1 = -16$  (deoarece, de exemplu,  $a_1 = \frac{15}{q^4 - 1}$ ), deci primii cinci termeni ai progresiei geometrice respective vor fi:  $a_1 = -16$ ;  $a_2 = -8$ ;  $a_3 = -4$ ;  $a_4 = -2$ ;  $a_5 = -1$ . Pentru  $q_2 = 2$ , avem  $a_1 = 1$  și, corespunzător:  $a_1 = 1$ ;  $a_2 = 2$ ;  $a_3 = 4$ ;  $a_4 = 8$ ;  $a_5 = 16$ .





obținem  $(2 + \sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ , adică  $(2 + \sqrt{3})^{\frac{x}{2} + 1} = 1$ , de unde  $\frac{x}{2} + 1 = 0$ , deci  $x = -2$ .

2°. Considerăm prima ecuație și ținem seama că:

$$x^4 - 2x^3 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) - 2(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Prin urmare, soluțiile acesteia sînt:

$$x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; x_4 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Cum  $x_1 = 1$  și  $x_2 = 2$  verifică și cea de a doua ecuație, înseamnă că membrul din stînga al acesteia se divide cu  $x^2 - 3x + 2$  și găsim că aceasta se mai scrie:

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 - x + 1) = 0,$$

de unde obținem și celelalte două soluții  $x_5 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$  și  $x_6 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$  (deduse din  $x^2 - x + 1 = 0$ ).

3°. Din condițiile  $\Delta' = (m - 1)^2 - m(m - 1) = -m + 1 \leq 0$  și  $m > 0$  găsim  $m \in [1, +\infty)$ .

4°. Scăzînd prima ecuație a sistemului din ultima înmulțită cu  $\hat{5}$ , obținem  $\hat{4}x + \hat{9}z = \hat{1}$ , iar din aceasta scădem cea de a doua ecuație înmulțită cu  $\hat{4}$ , găsim  $\hat{8}z = \hat{4}$ , de unde  $z = \hat{6}$ . Ținînd cont de valoarea găsită în cea de a doua ecuație a sistemului avem  $x + \hat{7} = \hat{2}$ , de unde  $x = \hat{6}$ , și înlocuind, de exemplu, ambele valori în cea de a treia ecuație obținem  $y = \hat{3}$ . Așadar, soluția căutată este:  $x = \hat{6}$ ;  $y = \hat{3}$ ;  $z = \hat{6}$ .

**XLIX. 1°.** Ridicînd la pătrat ambii membri ai primei ecuații și ținînd cont că suma pătratelor necunoscute este egală cu 14 (conform ecuației a doua), obținem: (1)  $xy + xz + yz = 1$ . Apoi, ridicînd la cub ambii membri ai primei ecuații și ținînd seama că suma cuburilor necunoscute este egală cu 34 (vezi ecuația a treia), găsim:

$$(2) x^2y + xy^2 + x^2z + y^2z + xz^2 + yz^2 + 2xyz = 10.$$

Pe de altă parte, înmulțind membru cu membru primele două ecuații, avem:

$$(3) x^3 + xy^2 + xz^2 + x^2y + y^3 + yz^2 + x^2z + y^2z + z^3 = 56.$$

Ținînd cont de ecuația a treia a sistemului în (3), obținem:

$$(4) xy^2 + xz^2 + x^2y + y^2z + x^2z + y^2z = 22,$$

și făcînd diferența dintre (4) și (2), găsim: (5)  $xyz = -6$ . Așadar, sistemul dat este echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} x + y + z = 4; \\ xy + xz + yz = 1; \\ xyz = -6, \end{cases}$$

ale cărui soluții sînt soluțiile ecuației atașate: (6)  $u^3 - 4u^2 + u + 6 = 0$ . Dar (6) se mai scrie:  $(u - 2)(u^2 - 2u - 3) = 0$ , de unde  $u_1 = 2$ ,  $u_2 = -1$ ,  $u_3 = 3$ . Cum, sistemul dat — ca de altfel și cel echivalent cu acesta — este simetric în  $x$ ,  $y$  și  $z$ , rezultă că soluțiile sînt  $x, y, z \in \{-1, 2, 3\}$ , cu  $x \neq y \neq z \neq x$ , adică:

$$(x, y, z) \in \{(-1, 2, 3), (-1, 3, 2), (2, -1, 3), (3, -1, 2), (2, 3, -1), (3, 2, -1)\}.$$

2°. Cum  $S_1 = \frac{1}{1 \cdot 4} = \frac{1}{4}$ ,  $S_2 = S_1 + \frac{1}{4 \cdot 7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 7} = \frac{2}{7}$ ,  $S_3 = S_2 + \frac{1}{7 \cdot 10} = \frac{2}{7} + \frac{1}{7 \cdot 10} = \frac{3}{10}$  ș.a.m.d., să arătăm că:  $S_k = \frac{k}{3k+1}$ ,  $(\forall) k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq n$ .  
Presupunind că  $S_{n-1} = \frac{n-1}{3n-2}$ , să dovedim că  $S_n = \frac{n}{3n+1}$ . Într-adevăr:

$$S_n = S_{n-1} + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n-1}{3n-2} + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1},$$

ceea ce completează demonstrația.

*Notă.* Dacă în enunț nu s-ar fi cerut, în mod expres, ca soluția să fie dată „folosind inducția matematică”, atunci s-ar fi putut proceda și astfel:

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{A}{3k-2} + \frac{B}{3k+1}, (\forall) k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n, \text{ de unde } A = \frac{1}{3} \text{ și } B = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Prin urmare: } \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3(3k-2)} - \frac{1}{3(3k+1)}, (\forall) k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n.$$

Dind lui  $k$  valorile  $1, 2, \dots, n$  și sumind rezultatele găsim:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4};$$

$$\frac{1}{4 \cdot 7} = \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 7};$$

.....

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3(3n-2)} - \frac{1}{3(3n+1)}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

3°. a) Observăm mai întâi că  $-1$  este o rădăcină a primului polinom, deci împărțindu-l pe acesta la  $X+1$  avem:

$$X^5 - 5X^4 - 6X^3 - 6X^2 - 7X - 1 = (X+1)(X^4 - 6X^3 - 6X - 1).$$

Pe de altă parte:

$$X^4 - 6X^3 - 6X - 1 = (X^4 - 1) - 6X(X^2 + 1) = (X^2 + 1)(X^2 - 6X - 1),$$

deci:

$$X^5 - 5X^4 - 6X^3 - 6X^2 - 7X - 1 = (X+1)(X^2 + 1)(X^2 - 6X - 1).$$

Dar  $-1$ ,  $i$  și  $-i$  nu sînt rădăcini pentru cel de al doilea polinom. Împărțindu-l pe acesta la  $X^2 - 6X - 1$ , găsim că:

$$2X^4 - 16X^3 + 23X^2 - 2X - 1 = (X^2 - 6X - 1)(2X^2 - 4X + 1).$$

Prin urmare, c.m.m.d.c. căutat este polinomul  $X^2 - 6X - 1$ .

*Notă.* Altă rezolvare este dată de algoritmul lui Euclid.

b) Ținem seama că ecuația se mai scrie sub formă:

$$(x^2 - 6x - 1)(2x^2 - 4x + 1) = 0,$$

(v. pct. a), deci  $x^2 - 6x - 1 = 0$ , de unde  $x_1 = 3 - \sqrt{10}$ ,  $x_2 = 3 + \sqrt{10}$  și

$2x^2 - 4x + 1 = 0$ , de unde  $x_3 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ ,  $x_4 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ .



4°. Ecuația are sens numai dacă  $x > 0$  și  $x \neq 1$ . Punind  $y = \log_x \sqrt[3]{4}$ , ecuația se mai scrie:  $y + 3 + 3y + 6y^2 = 5$ , adică  $3y^2 + 2y - 1 = 0$ , de unde  $y_1 = -1$  și  $y_2 = \frac{1}{3}$ . Pentru  $y = -1$ , avem  $\log_x \sqrt[3]{4} = -1$ , adică  $\log_x \sqrt[3]{4} = \log_x \frac{1}{x}$ ,

de unde  $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ , deci  $x = 4^{-\frac{1}{3}}$ . Pentru  $y = \frac{1}{3}$ , avem  $\log_x \sqrt[3]{4} = \frac{1}{3}$ , prin

urmare  $x^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}}$ , de unde  $x = 4$ .

5°. a) Pentru a arăta că legea respectivă este bine definită, să observăm mai întâi că din  $-1 < x < 1$  și  $-1 < y < 1$  rezultă  $-1 < xy < 1$ , deci  $0 < 1 + xy < 2$ , pentru ceea ce ne interesează fiind important că  $0 < 1 + xy$ . Presupunind prin absurd că  $\frac{x+y}{1+xy} \geq 1$  pentru  $x, y \in (-1, 1)$ , găsim:  $x+y \geq 1+xy \Leftrightarrow (x-1)(1-y) \geq 0 \Leftrightarrow$  sau  $x \geq 1$  și  $y \leq 1$  sau  $x \leq 1$  și  $y \geq 1$ , oricare din cele două alternative nefiind admise, deoarece  $x, y \in (-1, 1)$ . Analog, dacă pentru  $x, y \in (-1, 1)$  presupunem că  $\frac{x+y}{1+xy} \leq -1$ , cum  $0 < 1 + xy$ , ajungem la concluzia că sau  $x \leq 1$  și  $y \geq 1$  sau  $x \geq -1$  și  $y \leq -1$ , nici una din variantele respective neputând fi acceptată. Așadar legea de compoziție  $\top$  este bine definită pe intervalul  $(-1, 1)$ . Că legea de compoziție  $\top$  determină pe  $(-1, 1)$  o structură de grup abelian se verifică imediat. Într-adevăr:

$$\begin{aligned} \text{i) } (x \top y) \top z &= \frac{x+y}{1+xy} \top z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} \cdot z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} = \\ &= \frac{x(1+yz) + (y+z)}{(1+yz) + x(y+z)} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \cdot \frac{y+z}{1+yz}} = x \top (y \top z), (\forall) x, y, z \in (-1, 1); \end{aligned}$$

$$\text{ii) } x \top 0 = \frac{x+0}{1+x \cdot 0} = x = \frac{0+x}{1+0 \cdot x} = 0 \top x, (\forall) x \in (-1, 1);$$

$$\text{iii) } x \top x' = 0 \Leftrightarrow \frac{x+x'}{1+xx'} = 0 \Leftrightarrow x' = -x;$$

același rezultat obținem și din  $x' \top x = 0$ , deci simetricul lui  $x$  este  $x' = -x$ ,  $(\forall) x \in (-1, 1)$ ;

$$\text{iv) } x \top y = \frac{x+y}{1+xy} = \frac{y+x}{1+yx} = y \top x, (\forall) x, y \in (-1, 1).$$

*Notă.* Evident, dacă s-ar fi verificat condiția iv) înainte de ii) și iii) atunci în acestea ar fi fost suficient să folosim numai cîte o condiție (de exemplu:  $x \top y = 0$  și  $x \top x' = 0$  pentru a găsi elementul neutru și, respectiv, simetricul), fără a mai fi fost necesar să probăm și valabilitatea egalităților  $0 \top x = 0$ , respectiv  $x' \top x = 0$ .

b) Fie  $p, q \in (0, \infty)$ ; atunci  $f(p), f(q) \in (-1, 1)$  și, din condiția  $f(p \cdot q) = f(p) \top f(q)$ , găsim:

$$\frac{2mpq + (m-1)(p+q) - 2}{(m^2+1)xy + (1-m)(p+q) + 2} = \frac{mpq - 1}{pq + 1},$$

egalitate ce are loc pentru orice  $p, q \in (0, \infty)$  atunci și numai atunci cînd  $m = 1$ . În acest caz,  $f: (0, \infty) \rightarrow (-1, 1)$ , dat de  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$  este izomorfismul căutat, fapt care se verifică ușor.

L. 1°. Se impun condițiile:  $n > 0$ ,  $n \neq 3$ . Trecind logaritmi în baza 3 obținem inecuația:  $\frac{(\log_3 n)(2 - \log_3 n)}{\log_3 n - 1} > 0$ , cu unica soluție  $n = 8$ . Termenul general din dezvoltarea binomului dat este  $T_{k+1} = C_8^k (\sqrt[3]{a})^{8-k} (-\sqrt[3]{b})^k$ , deci avem  $\frac{k}{3} = 2$ , adică  $k = 6$ . Termenul cerut este  $T_7 = C_8^6 ab^2 = 28ab^2$ .

2°. Determinantul sistemului este  $\Delta = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$ . Dacă  $\Delta \neq 0$  sistemul este compatibil determinat și soluția (unică) în acest caz se obține ușor:

$$x = \frac{(\beta - 1)(\gamma - 1)}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)}; \quad y = \frac{(\alpha - 1)(\gamma - 1)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)}; \quad z = \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}.$$

Dacă  $\alpha = \beta \neq \gamma$  apar două cazuri: pentru  $\alpha = 1$  sau  $\gamma = 1$  sistemul este compatibil nedeterminat, iar pentru  $\alpha \neq 1$  și  $\gamma \neq 1$  sistemul este incompatibil (rezultă calculând, de exemplu, determinanții caracteristici). Analog se discută cazurile  $\alpha = \gamma \neq \beta$  și  $\beta = \gamma \neq \alpha$ . În cazul  $\alpha = \beta = \gamma$  apar două situații: pentru  $\alpha = 1$  sistemul este compatibil nedeterminat, iar pentru  $\alpha \neq 1$  sistemul este incompatibil.

3°. *Metoda I.* Deoarece funcțiile polinomiale de grad  $\leq 2$  nu au extreme distincte, rezultă grad  $f \geq 3$ . Vom arăta că pentru grad  $f = 3$  problema are soluție (deci gradul minim va fi 3). Fie  $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$ ,  $a \neq 0$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Se impun condițiile:  $f'(1) = 0$ ,  $f'(3) = 0$ ,  $f(1) = 6$ ,  $f(3) = 2$  și rezultă ecuațiile:  $3a + 2b + c = 0$ ,  $27a + 6b + c = 0$ ,  $a + b + c + d = 6$ ,  $27a + 9b + 3c + d = 2$ . Obținem:  $a = 1$ ,  $b = -6$ ,  $c = 9$ ,  $d = 2$ , deci  $f = X^3 - 6X^2 + 9X + 2$ . Studiind, de exemplu, semnul derivatei rezultă că  $f$  satisface condițiile cerute.

*Metoda II.* Deoarece  $f'$  are rădăcinile distincte 1 și 3 și are grad minim considerăm  $f' = \alpha(X - 1)(X - 3)$ . Atunci  $f = \frac{\alpha}{3} X^3 - 2\alpha X^2 + 3\alpha X + \beta$ . Impunând condițiile  $f(1) = 6$ ,  $f(3) = 2$ , rezultă  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 2$ , deci  $f = X^3 - 6X^2 + 9X + 2$  și semnul derivatei arată că  $f$  satisface condițiile cerute.

4°. Folosind relația dată termenul general al șirului se scrie sub forma:

$$a_1(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) + a_2(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}) + \dots + a_k(\sqrt[3]{n+k} - \sqrt[3]{n}).$$

Deoarece  $\sqrt[3]{n+j} - \sqrt[3]{n} = \frac{j}{\sqrt[3]{(n+j)^2} + \sqrt[3]{n(n+j)} + \sqrt[3]{n^2}}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , rezultă că limita șirului este:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_1(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) + \dots + a_k(\sqrt[3]{n+k} - \sqrt[3]{n}) = 0 \quad (k \text{ fixat}).$$

5°. Putem scrie:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{1 + \cos x} dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{2 \cos^2 x - 1}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2 \cos^2 x - 2 + 1}{1 + \cos x} dx = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x - 1) dx + \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \left[ 2(\sin x - x) + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right]_0^{\pi/2} = \\ &= 2 \left( 1 - \frac{\pi}{2} \right) + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 3 - \pi. \end{aligned}$$

Integrala dată se putea calcula și cu ajutorul substituției  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , dar calculele erau mai complicate.

II. 1°. Folosind puterea punctelor  $M, N, P$  față de cerc (sau asemănări de triunghiuri) obținem relațiile (v. fig. M.B.69):

$$AM \cdot MQ = \frac{BC^2}{4}; \quad BN \cdot NS = \frac{AC^2}{4}; \quad CP \cdot PT = \frac{AB^2}{4}.$$

Putem scrie:

$$\frac{AM}{MQ} + \frac{BN}{NS} + \frac{CP}{PT} = \frac{AM^2}{AM \cdot MQ} + \frac{BN^2}{BN \cdot NS} + \frac{CP^2}{CP \cdot PT} = 4 \left( \frac{AM^2}{BC^2} + \frac{BN^2}{AC^2} + \frac{CP^2}{AB^2} \right).$$

Notând  $BC = a, AC = b, AB = c$ , din teorema medianei avem:

$$AM^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}; \quad BN^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}; \quad CP^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

$$\text{Rezultă: } \frac{AM}{MQ} + \frac{BN}{NS} + \frac{CP}{PT} = 2 \left( \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \right) + 2 \left( \frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \right) + 2 \left( \frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \right) - 3.$$

$$\text{Deoarece } \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \geq 2, \quad \frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2, \quad \frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2, \text{ rezultă: } \frac{AM}{MQ} + \frac{BN}{NS} + \frac{CP}{PT} \geq 9.$$

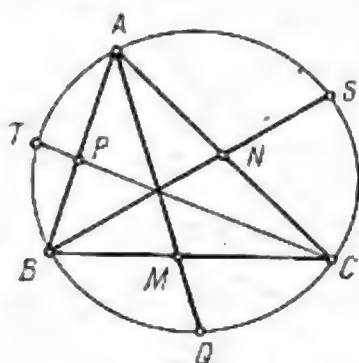


Fig. M.B.69

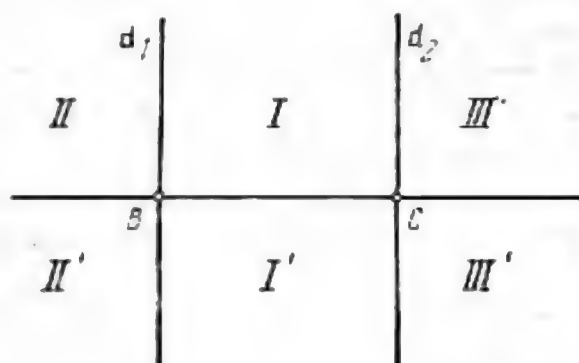


Fig. M.B.70

2°. Vom presupune că vârful  $A$  se află în semiplanul superior determinat de dreapta  $BC$ . Cazul semiplanului inferior se tratează analog (evident  $A$  nu aparține dreptei  $BC$ , căci  $ABC$  nu ar fi triunghi). Din ipoteza  $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = k = \text{const}$  rezultă că  $m(\hat{B}) \neq \frac{\pi}{2}$  și  $m(\hat{C}) \neq \frac{\pi}{2}$ , deci vârful  $A$  nu aparține dreptelor  $d_1$  și  $d_2$  perpendiculare în  $B$ , respectiv  $C$  pe  $BC$ . Observăm că valoarea constantei  $k$  nu poate fi zero. Într-adevăr,  $k = 0$  implică  $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 0$ , deci  $\frac{\sin(B+C)}{\cos B \cos C} = 0$ ; rezultă  $\sin(B+C) = 0$ , adică  $B+C = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ , imposibil. Împărțim planul în șase zone ca în fig. M.B.70. Dacă  $A$  se află în zonele  $I$  și  $I'$ , atunci unghiurile  $\hat{B}$  și  $\hat{C}$  sînt ascuțite, deci  $k = \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C > 0$ . Dacă  $A$  se află în zona  $II$ , atunci unghiul  $\hat{B}$  este obtuz și unghiul  $\hat{C}$  este ascuțit, deci  $\operatorname{tg} B < 0$  și  $\operatorname{tg} C > 0$ . Dar  $\operatorname{tg} B = -\operatorname{tg}(\pi - B)$  și  $\operatorname{tg}(\pi - B) > \operatorname{tg} C$ , deoarece  $\pi - B$  este unghi ascuțit și  $\pi - B > C$ , ca unghi exterior al triunghiului  $ABC$ . Rezultă  $k = \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = -\operatorname{tg}(\pi - B) + \operatorname{tg} C < 0$ .



Analog, dacă  $A$  se află în zonele II', III, III' rezultă  $k < 0$ . Fie acum  $A$  în zona I, deci  $k > 0$  și presupunem că unghiul  $A$  este ascuțit (dacă  $\hat{A}$  este obtuz raționamentul nu se schimbă). Din fig. M.B.71 rezultă că unghiurile  $\widehat{A'HC}$  și  $\widehat{ABC}$  sint congruente avind același complement (pe  $\widehat{A'CH}$ ). Analog, unghiurile  $\widehat{A'HB}$  și  $\widehat{ACB}$  sint congruente avind același complement (pe  $\widehat{A'BH}$ ). Obținem relațiile:

$$\operatorname{tg} B = \frac{A'C}{A'H}, \operatorname{tg} C = \frac{A'B}{A'H}, \text{ deci } \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \frac{A'C + A'B}{A'H} = \frac{BC}{A'H}.$$

Rezultă că  $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = k = \text{const}$  dacă și numai dacă  $A'H = \frac{BC}{k} = \text{const}$ . Atunci locul geometric al lui  $H$  este reuniunea a două segmente paralele la dreapta  $BC$ , la distanța  $\frac{BC}{k}$  de  $BC$ , cuprinse între dreptele  $d_1$  și  $d_2$ , situate în zonele I și I' ( $A$  în semiplanul inferior se tratează la fel). Fie acum  $A$  în zona II, deci  $k < 0$  ( $\operatorname{tg} B < 0$  și  $\operatorname{tg} C > 0$ ). Cazurile  $A$  în zonele II', III și III' se fac analog. Din fig. M.B.72

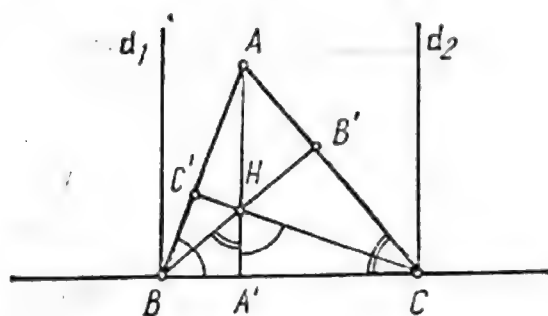


Fig. M.B.71

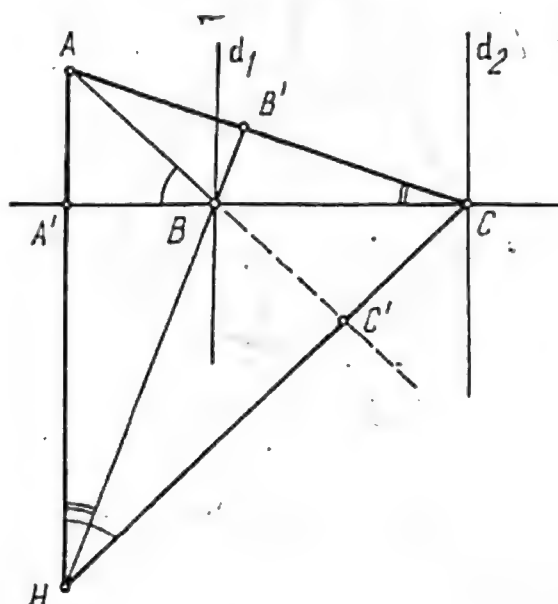


Fig. M.B.72

rezultă cu unghiurile  $\widehat{A'HC}$  și  $\widehat{ABA'}$  sint congruente, avind același complement (pe  $\widehat{HAC'}$ ), și, analog, unghiurile  $\widehat{A'HB}$  și  $\widehat{ACB}$  sint congruente avind același complement (pe  $\widehat{A'AC}$ ). Obținem relațiile:  $\operatorname{tg} (\pi - B) = -\operatorname{tg} B = \frac{A'C}{A'H'}$ ,  $\operatorname{tg} C = \frac{A'B}{A'H}$ , deci  $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = -\frac{A'C - A'B}{A'H} = -\frac{BC}{A'H}$ . Rezultă că  $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = k = \text{const}$  dacă și numai dacă  $A'H = \frac{BC}{-k} = \text{const}$  ( $-k > 0$ ). Atunci locul geometric al lui  $H$  în acest caz ( $k < 0$ ) este reuniunea a patru semidrepte paralele la dreapta  $BC$ , la distanța  $\frac{BC}{-k}$  de  $BC$ , situate în cele patru zone II, II', III și III'.

3°. Vom trata cazul  $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Celelalte cazuri se rezolvă asemănător. Fie  $B' \in AB$ ,  $AB' = l$  și ducem  $B'C' \perp AB$ ,  $B'D' \perp AB$  ( $C' \in AC$ ,  $D' \in AD$ ). Atunci unghiul diedru cerut este  $\widehat{C'B'D'} = x$  (v. fig. M.B.73). În triunghiurile dreptunghice  $AB'C'$  și  $AB'D'$  avem:

$$AC' = \frac{l}{\cos \alpha}; AD' = \frac{l}{\cos \gamma}; B'C' = l \operatorname{tg} \alpha; B'D' = l \operatorname{tg} \gamma.$$

În triunghiul  $AC'D'$  avem:  $C'D'^2 = AC'^2 + AD'^2 - 2AC' \cdot AD' \cos \beta$ , iar în triunghiul  $B'C'D'$  avem:  $C'D'^2 = B'C'^2 + B'D'^2 - 2B'C' \cdot B'D' \cos x$ . Rezultă:

$$\frac{l^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{l^2}{\cos^2 \gamma} - \frac{2l^2 \cos \beta}{\cos \alpha \cos \gamma} = l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + l^2 \operatorname{tg}^2 \gamma - 2l^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma \cos x,$$

de unde  $\cos x = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma}$ .

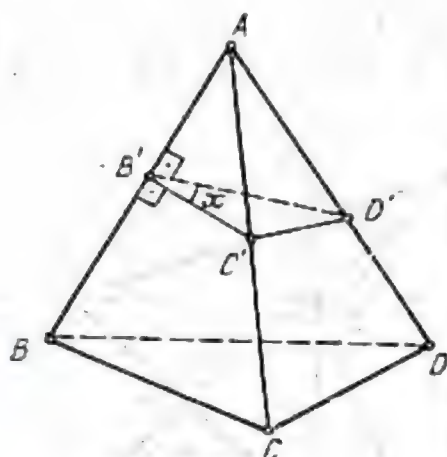


Fig. M.B.73

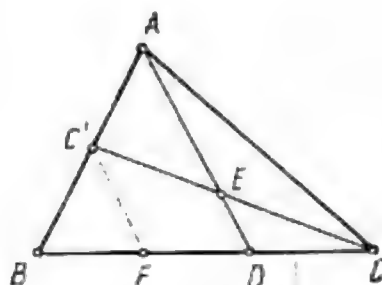


Fig. M.B.74

4°. Folosind formula  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$  ecuația devine:  $\frac{1 + \cos 2x}{2} + \cos^2 2x + \frac{1 + \cos 6x}{2} = 1$ , sau  $\cos 2x + \cos 6x + 2\cos^2 2x = 0$ . Deoarece  $\cos 2x + \cos 6x = 2\cos 4x \cos 2x$  se obține ecuația:  $\cos 2x(\cos 4x + \cos 2x) = 0$ , sau  $\cos 2x(2\cos^2 2x + \cos 2x - 1) = 0$ . Rezultă  $\cos 2x = 0$ ,  $\cos 2x = \frac{1}{2}$  sau  $\cos 2x = -1$ . Ținând seama de condițiile  $x \in [0, \pi]$  și  $\cos 2x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , rezultă soluțiile  $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ .

5°. Avem fig. M.B.74. *Metoda I.* Fie  $F$  mijlocul segmentului  $[BD]$ .  $C'F$  este linie mijlocie în triunghiul  $ABD$ , deci  $C'F \parallel AD$ . Deoarece  $D$  este mijlocul lui  $[FC]$  rezultă  $DE$  linie mijlocie în triunghiul  $CC'F$ , deci  $DE \parallel C'F$ . Din unicitatea paralelei dusă printr-un punct la o dreaptă rezultă că punctele  $A, E, D$  sînt coliniare. *Metoda II.* Se aplică reciproca teoremei lui Menelaus pentru triunghiul  $BC'C$  și punctele  $A, E, D$ . Avem:  $\frac{AB}{AC'} = 2$ ,  $\frac{EC'}{EC} = 1$ ,  $\frac{DC}{DB} = \frac{1}{2}$ , deci  $\frac{AB}{AC'} \cdot \frac{EC'}{EC} \cdot \frac{DC}{DB} = 1$  și atunci punctele  $A, E, D$  sînt coliniare.

**LII. 1°.** Folosim metoda inducției matematice. Pentru  $n = 2$  avem inegalitatea  $\frac{16}{3} < \frac{4!}{(2!)^2}$ , care este evidentă. Presupunem că inegalitatea  $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$  este adevărată; să demonstrăm că inegalitatea  $\frac{4^{n+1}}{n+2} < \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}$  este adevărată. Deoarece  $\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n)!(2n+1) \cdot 2(n+1)}{(n!)^2(n+1)^2}$  este suficient să arătăm că  $\frac{4}{n+2} < \frac{2(2n+1)}{(n+1)^2}$ , adică  $2n^2 + 4n + 2 < 2n^2 + 5n + 2$ , ceea ce este evident.

**2°.** Se observă că dacă  $x_1 = x_2 = x_3$ , atunci  $\Delta = 0$  (unde  $\Delta$  este determinantul dat). Reciproc, calculând  $\Delta$  se obține:

$$\Delta = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3) = \\ = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3), \text{ deoarece } x_1 + x_2 + x_3 = -1.$$

Condiția  $\Delta = 0$  revine la  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3$ . Înmulțind cu 2 ultima egalitate și trecând toți termenii în membrul stâng obținem:

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 = 0,$$

sau  $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 = 0$ , de unde rezultă  $x_1 = x_2 = x_3$ . Dacă rădăcinile sînt egale rezultă  $x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{1}{3}$  (deoarece  $x_1 + x_2 + x_3 = -1$ ),

de unde obținem:  $a = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{1}{3}$  și  $b = -x_1x_2x_3 = \frac{1}{27}$ .

**3°.** Pentru orice  $x \in A$  avem  $x^6 = x$ . Deoarece  $A$  este inel  $-x \in A$  și avem:  $(-x)^6 = -x$ ; dar  $(-x)^6 = x^6 = x$ , de unde rezultă  $x = -x$ , adică  $x + x = 0$  (sau  $2x = 0$ ). Deoarece  $A$  este inel  $1 + x \in A$  și atunci avem:  $(1+x)^6 = 1+x$ , deci  $1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6 = 1 + x$ . Dar  $x^6 = x$  și  $6x = 0$ ,  $20x^3 = 0$ ,  $6x^5 = 0$ ,  $15x^2 = x^2$ ,  $15x^4 = x^4$  (din  $2x = 0$ ), de unde rezultă că:  $x^4 + x^2 = 0$ , adică  $x^4 = -x^2 = x^2$ . Atunci putem scrie:

$$x = x^6 = x^4 \cdot x^2 = x^2 \cdot x^2 = x^4 = x^2 \text{ pentru orice } x \in A.$$

**4°.** Limita este de tipul  $\infty^\circ$ . Putem scrie:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \lg \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \lg \frac{\pi x}{2x+1} \right)}{x}}.$$

Pentru calculul limitei  $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \lg \frac{\pi x}{2x+1} \right)}{x}$  folosim regula lui l'Hôpital (cazul  $\frac{\infty}{\infty}$ ) și obținem:

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \lg \frac{\pi x}{2x+1} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{(2x+1)^2 \cos \frac{\pi x}{2x+1} \sin \frac{\pi x}{2x+1}}.$$

Putem scrie:

$$l = 2\pi \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(2x+1)^2 \sin \frac{2\pi x}{2x+1}};$$



aplicind din nou regula lui l'Hôpital (cazul  $\frac{0}{0}$ ) obținem:

$$l = 2\pi \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{\pi(2x+1) \cdot \cos \frac{2\pi x}{2x+1}} = 0.$$

Atunci limita inițială este  $e^l = e^0 = 1$ .

5°. Pe intervalele  $(-\infty, 1)$ ,  $(1, \infty)$  restricțiile lui  $f$  sînt continue ca restricții de funcții elementare. Funcția  $f$  este continuă în punctul  $x = 1$ , deoarece limitele sale laterale în acest punct sînt egale cu  $f(1) = 0$ . Rezultă că  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ , deci admite primitive pe  $\mathbb{R}$ . Integrind prin părți, rezultă că primitivele lui  $f$  pe intervalul  $(-\infty, 1)$  au forma  $-xe^{-x} + C_1$ . Cu substituția  $\varphi(x) = \ln x$ , rezultă imediat că primitivele lui  $f$  pe intervalul  $(1, \infty)$  au forma  $\frac{1}{3} \ln^3 x + C_2$ . Atunci primitivele lui  $f$  pe  $\mathbb{R}$  au forma:

$$F(x) = \begin{cases} -xe^{-x} + C_1, & x \in (-\infty, 1); \\ \frac{1}{3} \ln^3 x + C_2, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Deoarece  $F$  este continuă în  $x = 1$  obținem  $-\frac{1}{e} + C_1 = C_2$ , deci primitivele lui  $f$  pe  $\mathbb{R}$  au forma:

$$F(x) = \begin{cases} -xe^{-x} + C, & x \in (-\infty, 1); \\ \frac{1}{3} \ln^3 x + C - \frac{1}{e}, & x \in [1, \infty), \end{cases}$$

(am notat  $C_1 = C$ ). Se verifică imediat că  $F'(1) = f(1) = 0$ .

LIII. 1°. Patrulaterul  $ADME$  este inscriptibil deoarece  $m(\widehat{DAE}) + m(\widehat{EMD}) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ . Rezultă că unghiurile  $\widehat{AED}$  și  $\widehat{AMD}$  sînt congruente (v. fig. M.B.75). Analog avem că patrulaterul  $DBFM$  este inscriptibil. Rezultă că unghiurile  $\widehat{DFB}$  și  $\widehat{DMB}$  sînt congruente. Unghiul  $\widehat{AMB}$  este drept ca fiind înscris într-un semicerc. Atunci unghiurile  $\widehat{AED}$  și  $\widehat{FDB}$  sînt congruente; deci triunghiurile dreptunghice  $AED$  și  $BDF$  sînt asemenea. Rezultă:

$$\frac{AE}{BD} = \frac{AD}{BF}, \text{ deci } AE \cdot BF = AD \cdot BD = \text{const.}$$

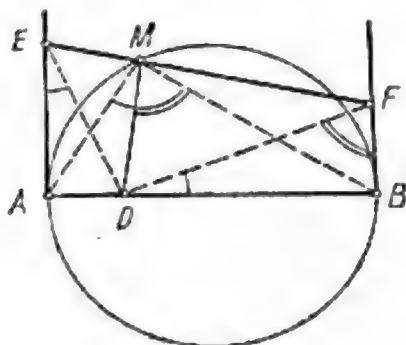


Fig. M.B.75

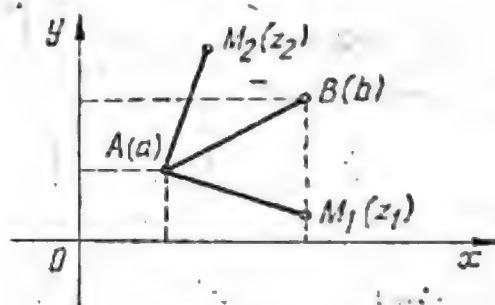


Fig. M.B.76

2°. Evident problema are două soluții (v. fig. M.B.76). Avem:  $AB = |b - a| = 2$ . Fie  $z = x + yi$  afixul punctului  $M$ . Condiția  $AB = AM$  devine  $2 = |z - a|$  sau  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ . Aplicind teorema cosinusului în tri-

unghiul  $ABM$ :  $BM^2 = AM^2 + AB^2 - 2 \cdot AM \cdot AB \cos 45^\circ$ . În condițiile problemei, rezultă:  $(x - \sqrt{3} - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8 - 4\sqrt{2}$ . Obținem sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4; \\ (x - 1)\sqrt{3} + (y - 1) = 2\sqrt{2}, \end{cases}$$

cu soluțiile:  $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{2}$ ,  $y_1 = 1 + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{2}$ ;  $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ ,  $y_2 = 1 + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ , deci avem două puncte  $M_1$ ,  $M_2$  de afixe  $z_1 = x_1 + yi$ , respectiv  $z_2 = x_2 + yi$ .

3°. Notăm:  $AB = a$ ,  $AD = b$ ,  $AA' = c$  și  $AC' = d$  (v. fig. M.B.77). Avem:  $\cos \alpha = \frac{a}{d}$ ,  $\cos \beta = \frac{b}{d}$ ,  $\cos \gamma = \frac{c}{d}$ ; atunci:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \gamma} = d^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$$

Dar  $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ , deci:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \gamma} = \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) + \left( \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} \right) + \left( \frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2} \right) + 3.$$

Folosind de trei ori inegalitatea evidentă  $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ , rezultă inegalitatea cerută.

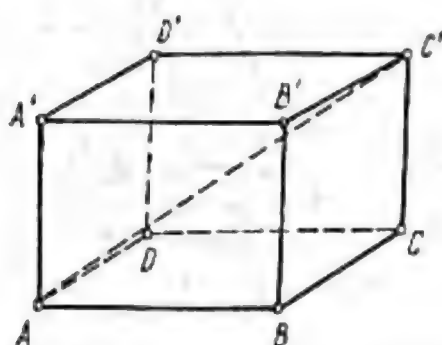


Fig. M.B.77

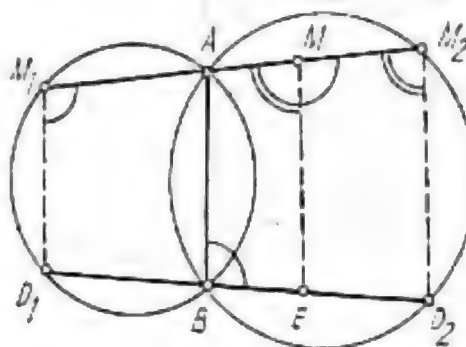


Fig. M.B.78

4°. *Metoda 1.* Fie  $A$  și  $B$  punctele de intersecție ale cercurilor  $\mathcal{O}_1$  și  $\mathcal{O}_2$  și ducem prin  $A$  o dreaptă variabilă care taie a doua oară cercurile  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$  în  $M_1$ , respectiv  $M_2$ . Ducem prin  $B$  o dreaptă fixată (de exemplu perpendiculară pe  $AB$ ) care taie a doua oară cercurile  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$  în punctele fixe  $D_1$ , respectiv  $D_2$  (v. fig. M.B.78). Fie  $M \in (M_1M_2)$  astfel încât  $MM_1 = 2MM_2$  și fie  $E \in (D_1D_2)$  astfel încât  $ED_1 = 2ED_2$ ; punctul  $E$  este atunci fix. Deoarece patrulaterul  $AM_1D_1B$  este inscriptibil rezultă că  $\widehat{AM_1D_1} = \widehat{ABD_2}$ . Deoarece patrulaterul  $AM_2D_2B$  este inscriptibil rezultă că  $\widehat{ABD_2}$  și  $\widehat{AM_2D_2}$  sînt suplementare. Atunci  $\widehat{AM_1D_1}$  și  $\widehat{AM_2D_2}$  sînt suplementare, deci  $M_1D_1 \parallel M_2D_2$ . Deoarece  $\frac{MM_1}{MM_2} = 2 = \frac{ED_1}{ED_2}$  rezultă că  $ME \parallel M_2D_2$ . Atunci

$\widehat{AME} = \widehat{AM_2D_2}$  (unghiuri corespondente), deci  $\widehat{ABE}$  și  $\widehat{AME}$  sînt suplementare. Rezultă că patrulaterul  $ABEM$  este inscriptibil și, cum  $A$ ,  $B$  și  $E$  sînt fixe,  $M$  aparține cercului circumscris triunghiului fix  $ABE$ . Reciproc, fie  $M$  un punct pe cercul

circumscrie triunghiului  $ABE$ . Dreapta  $MA$  taie din nou cercurile  $\mathcal{O}_1$  și  $\mathcal{O}_2$  în  $M_1$ , respectiv  $M_2$ . Din demonstrația anterioară știm că  $M_1D_1 \parallel M_2D_2$ . Deoarece patrulaterul  $MABE$  este inscriptibil rezultă că  $\widehat{AME}$  este suplementar cu  $\widehat{ABE}$ ; dar  $\widehat{ABE}$  este suplementar cu  $\widehat{AM_2D_2}$ , deci  $\widehat{AME} = \widehat{AM_2D_2}$ , adică  $ME \parallel M_2D_2$ . Cum  $\frac{ED_1}{ED_2} = 2$  rezultă  $\frac{MM_1}{MM_2} = 2$ , adică  $M$  este punct al locului geometric. În concluzie, locul geometric al lui  $M$  este cercul circumscris triunghiului fix  $ABE$ .

**Metoda II.** Fie  $A$  punctul de intersecție al cercurilor  $\mathcal{O}_1$  și  $\mathcal{O}_2$  prin care ducem secanta  $M_1M_2$ . Fie  $O_1, O_2$  centrele celor două cercuri și fie  $C \in (O_1O_2)$  astfel încât  $O_1C = 2O_2C$ . Fie  $O'_1, O'_2, P$  picioarele perpendicularelor din  $O_1, O_2$ , respectiv  $C$  pe  $M_1M_2$  și fie  $M \in (M_1M_2)$  astfel încât  $MM_1 = 2MM_2$ . Notăm  $O_1A = x$  și  $O_2A = y$ . Avem:  $AM = M_1M - M_1A = \frac{4y - 2x}{3}$  și  $AP = O_1P - O'_1A = \frac{2y - x}{3}$ , deci  $AP = \frac{1}{2} AM$ .

Atunci  $CP$  este înălțime și mediană în triunghiul  $ACM$ , deci triunghiul  $ACM$  este isoscel. Rezultă  $CM = CA = \text{const.}$  Deoarece punctul  $C$  este fix rezultă că  $M$  aparține cercului de centru  $C$  și rază  $AC$ . Reciproc, dacă  $M$  aparține cercului de centru  $C$  și rază  $AC$ , triunghiul  $ACM$  rezultă isoscel, deci  $P$  este mijlocul segmentului  $[AM]$ . Ținând seama de faptul că  $O'_1$  este mijlocul segmentului  $[M_1A]$  și  $O'_2$  este mijlocul segmentului  $[AM_2]$  rezultă (ca mai sus) că  $M_1M = 2MM_2$ , deci  $M$  este punct al locului geometric.

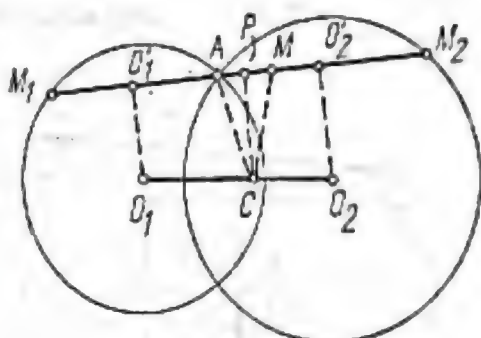


Fig. M.B.79

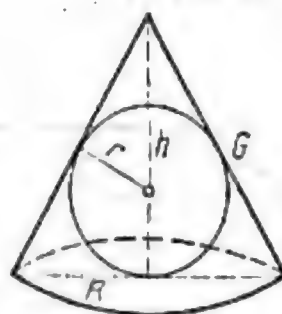


Fig. M.B.80

5°. Avem fig. M.B.80. Cu notațiile din figură putem scrie:  $a = \pi R(R + G)$ ;  $b = \frac{\pi R^2 h}{3}$ ;  $C = 4\pi r^2$ . Din asemănare de triunghiuri avem relația:  $\frac{r}{R} = \frac{h-r}{G}$ , deci  $r = \frac{Rh}{R+G}$ . Calculând, obținem:  $a^2c = 4\pi^3 R^4 h^3 = 36\pi b^2$ .

LIV. 1°. Funcțiile exponențiale  $x \rightarrow 2^x$ ,  $x \rightarrow 4^x$  sînt strict crescătoare deoarece au baza supraunitară; rezultă că funcția  $f$  este strict crescătoare, deci injectivă. Avem:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ; funcția  $f$  fiind continuă are proprietatea lui Darboux, deci este surjectivă. Pentru calculul funcției inverse considerăm ecuația  $4^x + 2^x + 1 = y$ ,  $y \in (1, \infty)$ . Notăm  $2^x = t > 0$  și obținem:  $t^2 + t + (1 - y) = 0$  cu unica soluție acceptabilă  $t = \frac{-1 + \sqrt{4y-3}}{2}$ . Rezultă  $2^x = \frac{-1 + \sqrt{4y-3}}{2}$ , deci funcția inversă este  $g(y) = \log_2 \left( \frac{\sqrt{4y-3} - 1}{2} \right)$ ,  $y \in (1, \infty)$ . După calcule se obține  $g'(3) = \frac{1}{3 \ln 2}$ . Dar și direct,  $g'(3) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\ln 4 + \ln 2}$ .



2°. Considerăm sistemul liniar și omogen:

$$\begin{cases} \left(a - \frac{1}{2}\right)x + by + cz = 0; \\ cx + \left(a - \frac{1}{2}\right)y + bz = 0; \\ bx + cy + \left(a - \frac{1}{2}\right)z = 0. \end{cases}$$

Sistemul are numai soluția banală ( $x = y = z = 0$ ) dacă și numai dacă determinantul  $\Delta$  al sistemului este nenul. Notînd  $a - \frac{1}{2} = a'$ , obținem:

$$\begin{aligned} \Delta &= a'^3 + b^3 + c^3 - 3a'bc = (a' + b + c)(a'^2 + b^2 + c^2 - a'b - a'c - bc) = \\ &= \frac{a' + b + c}{2} \cdot (2a'^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2a'b - 2a'c - 2bc) = \\ &= \frac{a' + b + c}{2} \cdot [(a' - b)^2 + (a' - c)^2 + (b - c)^2]. \end{aligned}$$

Atunci, avem:  $\Delta = 0$  dacă și numai dacă  $a' + b + c = 0$  sau  $a' = b = c$  (adică  $a' - b = a' - c = b - c = 0$ ). Deoarece,  $b, c \in \mathbb{Z}$ , în ambele situații, ar rezulta  $a' = a - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ , ceea ce contrazice  $a \in \mathbb{Z}$ . Deci  $\Delta \neq 0$  și sistemul admite numai soluția banală  $x = y = z = 0$ .

3°. Deoarece  ${}^tA \cdot A = E$  rezultă:  $\det({}^tA \cdot A) = \det(E) = 1$ , deci  $\det {}^tA \cdot \det A = 1$ . Dar  $\det {}^tA = \det A$ , de unde  $(\det A)^2 = 1$ , deci  $\det A = \pm 1$ . Vom verifica axiomele grupului. Avem:  $(AB)({}^tAB) = {}^tB{}^tAAB = {}^tBB = E$  pentru orice  $A, B \in M$ , deci  $M$  este parte stabilă a lui  $M_2(\mathbb{R})$  în raport cu înmulțirea matricilor. Se cunoaște că înmulțirea matricilor este asociativă. Apoi  $E \in M$  este (evident) elementul neutru la înmulțire. Dacă  $A \in M$ , din proprietatea  ${}^tA \cdot A = E$ , rezultă  $A^{-1} = {}^tA$ . Relația  $A \cdot A^{-1} = E$  se mai poate scrie  ${}^t(A^{-1}) \cdot A^{-1} = E$ , deci  $A^{-1} \in M$ . În concluzie  $M$  are o structură de grup față de înmulțire.

4°. Avem relația:

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}\right) = b_n + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) = b_n + \frac{1}{4} a_n. \end{aligned}$$

Rezultă  $b_n = a_{2n} - \frac{1}{4} a_n$ , deci șirul  $(b_n)$  este convergent. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} - \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5°. Deoarece  $\frac{1}{|x-1|} > 0$  rezultă că  $f(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{|x-1|}\right) > 0$ . Atunci aria cerută este:  $A = \int_0^{1/2} \ln \left(1 + \frac{1}{|x-1|}\right) dx = \int_0^{1/2} \ln \left(1 + \frac{1}{1-x}\right) dx =$   
 $= \int_0^{1/2} \ln \frac{2-x}{1-x} dx = \int_0^{1/2} \ln(2-x) dx - \int_0^{1/2} \ln(1-x) dx.$

Integrând prin părți, rezultă că o primitivă a funcției  $\ln(a-x)$  este  $(x-a) \ln(a-x) - x$  pentru  $x < a$ . În acest caz avem:

$$A = [(x-2) \ln(2-x) - x] \Big|_0^{1/2} - [(x-1) \ln(1-x) - x] \Big|_0^{1/2} = \frac{3}{2} \ln \frac{4}{3}.$$

IV. 1°. Fie  $[CD]$  diametrul perpendicular pe diametrul  $[AB]$ . Presupunem că  $M$  aparține arcului  $\widehat{BC}$  (fără capetele  $B$  și  $C$  cînd triunghiul  $OMN$  nu există!); v. fig. M.B.81. Deoarece  $m(\widehat{OMN}) = 90^\circ$ , rezultă că  $m(\widehat{OMI}) = 45^\circ$ . Triunghiurile  $OMI$  și  $OBI$  sînt congruente deoarece  $OI$  este comună,  $OM = OB$  (ca raze) și  $\widehat{MOI} = \widehat{BOI}$ . Atunci  $m(\widehat{OBI}) = 45^\circ$  și, cum  $O$  și  $B$  sînt fixe, rezultă că  $I$  aparține segmentului  $(BC)$ . Mai precis, deoarece  $m(\widehat{BOM}) \in (0, 90^\circ)$ , avem  $m(\widehat{BOI}) \in (0, 45^\circ)$ , deci  $I$  aparține segmentului deschis  $(BI_0)$ , unde  $I_0$  este mijlocul segmentului  $[BC]$ . Reciproc, fie  $I \in (BI_0)$  segment deschis. Atunci  $m(\widehat{BOI}) \in (0, 45^\circ)$ . Construim unghiul  $BOM$  cu  $m(\widehat{BOM}) = 2m(\widehat{BOI}) \in (0, 90^\circ)$ , deci  $M$  aparține arcului deschis  $(\widehat{BC})$ . Tangenta în  $M$  la cerc taie dreapta  $AB$  în  $N$ . Triunghiurile  $OMI$  și  $OBI$  sînt congruente deoarece  $OI$  este comună,  $OM = OB$  (ca raze) și  $m(\widehat{MOI}) = m(\widehat{BOI})$ . Atunci rezultă că  $m(\widehat{OMI}) = m(\widehat{OBI}) = 45^\circ = \frac{1}{2} m(\widehat{OMN})$ , deci  $MI$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{OMN}$ . Obținem că  $I$  este centrul cercului înscris în triunghiul  $OMN$  (fiind la intersecția bisectoarelor  $MI$  și  $OI$ ), deci  $I$  este punct al locului geometric. Datorită simetriei figurii ( $AB$  și  $CD$  sînt axe de simetrie) rezultă că, atunci cînd  $M$  aparține celorlalte trei arce deschise  $(\widehat{AC})$ ,  $(\widehat{AD})$  și  $(\widehat{BD})$ , punctul  $I$  descrie trei segmente deschise situate pe segmentele  $(AC)$ ,  $(AD)$  și  $(BD)$ . În concluzie, locul geometric descris de  $I$  este format din patru jumătăți (segmente deschise) din laturile pătratului  $ACBD$ .

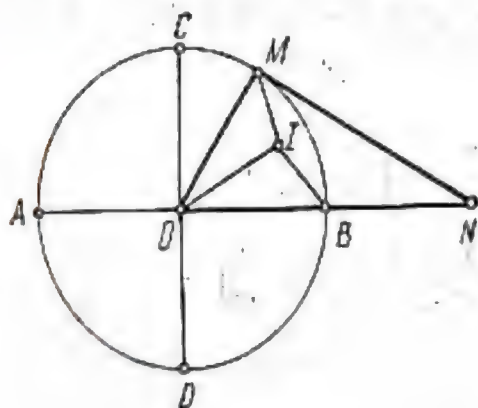


Fig. M.B.81

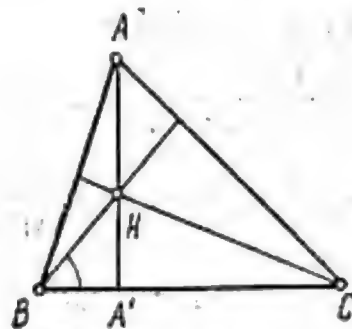


Fig. M.B.82

2°. Folosind formula  $\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$  rezultă:

$$\operatorname{tg} C = -\operatorname{tg}(A+B) = 1, \text{ deci } m(\widehat{C}) = \frac{\pi}{4}.$$

Deoarece  $m(\widehat{HBA'}) = \frac{\pi}{4}$ , rezultă  $HA' = BA'$ . Dar  $\operatorname{tg} B = \frac{AA'}{BA'} = 2$ , deci  $AA' = 2BA' = 2HA'$ , adică  $H$  este mijlocul înălțimii  $[AA']$ ; v. fig. M.B.82.

3°. Avem fig. M.B.83. Din triunghiuri dreptunghice obținem imediat:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}; SB = \sqrt{SD^2 + BD^2} = 3a; SA = a\sqrt{5}; SC = 2a\sqrt{2}.$$

Rezultă  $\cos(\widehat{ASB}) = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $\cos(\widehat{CSB}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ . Notând  $SP = x$  și aplicând teorema cosinusului în triunghiurile  $SAP$  și  $SCP$  obținem:

$$AP^2 = 5a^2 + x^2 - \frac{10ax}{3}; CP^2 = 8a^2 + x^2 - \frac{16ax}{3}.$$

Triunghiul  $APC$  este dreptunghic în  $P$  dacă și numai dacă  $AC^2 = AP^2 + CP^2$ . Înlocuind segmentele calculate, rezultă ecuația  $3x^2 - 13ax + 12a^2 = 0$ , cu soluția acceptabilă  $x = \frac{4a}{3}$ .

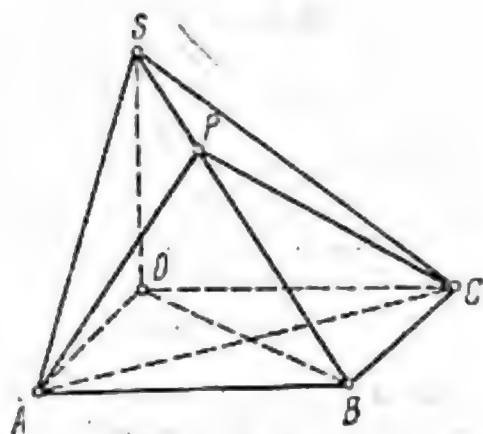


Fig. M.B.83

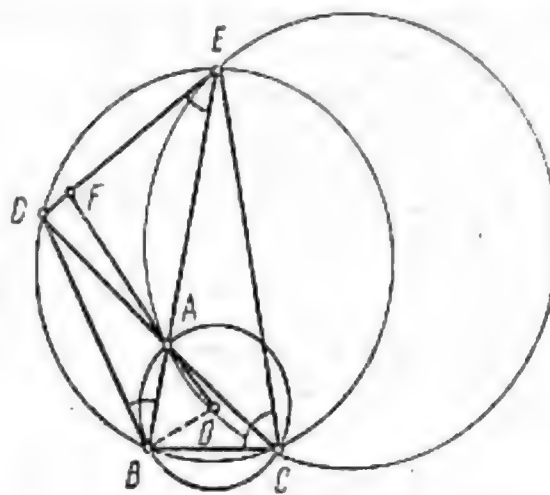


Fig. M.B.84

4°. Folosind formula  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ , rezultă  $f(x) = 2 \cos 4x \cdot \cos x - \cos x = \cos x(2 \cos 4x - 1)$ . Pentru  $\cos x > 0$  putem scrie  $\cos x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ , deci avem:  $f(x) = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} (2 \cos 4x - 1)$ , pentru  $\cos x > 0$ .

$$\text{Avem: } \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{24}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ și } \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{24}\right) = \cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Rezultă } f\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} (\sqrt{3} - 1).$$

5°. a) Patrulaterul  $BCED$  este inscriptibil. Rezultă  $m(\widehat{DEB}) = m(\widehat{BCA})$  și  $m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{DCE})$ .  $BD$  fiind tangentă la cercul circumscris triunghiului  $ABC$  avem:  $m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{BCA}) = m\left(\frac{\widehat{AB}}{2}\right)$  (se observă că  $AC$  este biseectoarea unghiului  $\widehat{BCE}$ ). Rezultă  $m(\widehat{DEB}) = m(\widehat{DCE}) = m\left(\frac{\widehat{AE}}{2}\right)$ , deci  $DE$  este tangentă cercului circumscris triunghiului  $ACE$  (v. fig. M.B.84).

b) Fie  $F$  intersecția dreptelor  $AO$  și  $DE$ . Din ipoteză avem  $m(\widehat{DBO}) = \frac{\pi}{2}$ . Din punctul a) rezultă  $m(\widehat{FOB}) = 2m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{BCE})$ . Cum unghiurile  $BDE$  și



$BCE$  sînt suplementare obținem:  $m(\widehat{EDB}) + m(\widehat{FOB}) = \pi$ , deci  $m(\widehat{DFO}) = \pi - m(\widehat{DBO}) = \frac{\pi}{2}$ .

IV. 1°. Impunem condițiile:  $x \in \mathbb{N}$ ,  $x \geq 3$ ,  $x \geq 4$ ,  $x \geq 5$ , deci  $x \in \{5, 6, 7, \dots\}$ . Inecuațiile date se scriu echivalent sub forma:

$$x^3 \cdot 2^{x-4} (2C_x^3 - xC_x^4) < 0; \quad x^4 \cdot 2^{x-5} (x \cdot C_x^5 - 2C_x^4) < 0.$$

Deoarece  $x > 0$  și  $2^x > 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , rezultă:  $2C_x^3 - xC_x^4 < 0$ ;  $xC_x^5 - 2C_x^4 < 0$ . Înlocuind

$$C_x^3 = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}, \quad C_x^4 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}, \quad C_x^5 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{120}$$

și ținînd seama de condiții, rezultă inecuațiile:  $-x^2 + 3x + 8 < 0$ ;  $x^2 - 4x - 10 < 0$ , cu unica soluție  $x = 5$  ( $x \in \mathbb{N}$ !).

2°. Introducem funcția  $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  și calculăm:  $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ . Ecuația  $f'(x) = 0$  admite soluțiile  $-1/3$  și  $1$ . Folosind șirul lui Rolle, rezultă că ecuația admite o singură rădăcină reală  $x_1$ , situată în intervalul  $(1, \infty)$ , deci  $x_1 > 1$ . Celelalte soluții vor fi complex conjugate și se scriu sub formă trigonometrică:  $x_{2,3} = r(\cos \alpha \pm i \sin \alpha)$ . Folosind formula lui Moivre obținem:  $x_1^n + x_2^n + x_3^n = 2r^n \cos n\alpha$ . Dar  $x_1 x_2 x_3 = 1$ , de unde  $x_1 r^3 = 1$ , deci  $r^3 = \frac{1}{x_1} < 1$ . Atunci  $0 < r < 1$ , deci  $r^n \rightarrow 0$  pentru  $n \rightarrow \infty$ . Rezultă  $|r^n \cos n\alpha| = r^n |\cos n\alpha| \leq r^n$ , deci:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1^n + x_2^n + x_3^n) = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (r^n \cos n\alpha) = 0$ .

3°. Avem:  $\mathbb{Z}_3 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$ . Un polinom de gradul al treilea  $f \in \mathbb{Z}_3[X]$  este ireductibil peste  $\mathbb{Z}_3$  dacă și numai dacă  $f$  nu admite rădăcini în  $\mathbb{Z}_3$ . Pentru polinomul dat  $f = \hat{2}X^3 + (a + \hat{2})X + \hat{1}$  avem:  $f(\hat{0}) = \hat{1} \neq \hat{0}$ ;  $f(\hat{1}) = a + \hat{2}$  și  $f(\hat{2}) = \hat{2} \cdot a$ . Impunem condițiile  $\hat{2} \cdot a \neq \hat{0}$  și  $a + \hat{2} \neq \hat{0}$ , deci  $a \neq \hat{0}$  și  $a \neq \hat{1}$ ; rezultă soluția  $a = \hat{2}$ .

4°. Pe intervalele  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, \infty)$  funcția  $f$  este derivabilă fiind elementară pe fiecare din ele. Rămîne de studiat derivabilitatea în punctele  $x = -1$  și  $x = 0$ . Deoarece  $f(-1) = 0$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = 0$  și  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} e^{\frac{1}{x^2+x}} = 0$ , rezultă că  $f$  este continuă în  $x = -1$ . Analog avem:  $f(0) = f(0-0) = f(0+0) = 0$ , deci  $f$  este continuă și în  $x = 0$ . Rezultă  $f$  continuă pe  $\mathbb{R}$ . Avem:  $f'(x) = 0$ , pentru  $x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$  și  $f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2} e^{\frac{1}{x^2+x}}$ , pentru  $x \in (-1, 0)$ . Avem:  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f'(x) = 0$  și  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left( -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2} e^{\frac{1}{x^2+x}} \right) = 0$ , deci  $f$  este derivabilă în  $x = -1$ . Analog rezultă  $f$  derivabilă și în  $x = 0$ , deci  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$ .

5°. Avem:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} - x, & x \in (-\infty, -1); \\ \sqrt{1-x^2} - x, & x \in [-1, 1]; \\ \sqrt{x^2-1} - x, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Limitele la capete sînt următoarele:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0$$

Rezultă:  $y = 0$  asimptotă orizontală spre  $+\infty$  și, după calcule,  $y = -2x$  asimptotă oblică spre  $-\infty$ . Derivata întâi are forma:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - 1, & x \in (-\infty, -1); \\ -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - 1, & x \in (-1, 1); \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - 1, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Funcția  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$  și derivabilă pe  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ : punctele  $x = -1$  și  $x = 1$  sînt puncte de întoarcere. Graficul intersectează axa  $Ox$  în punctul  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  și axa  $Oy$  în punctul  $y = 1$ . Rezultă tabloul de variație:

$x$	$-\infty$	$-1$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$0$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	$0$	$-$	$-\infty$
$f(x)$	$\infty$	$\searrow$	$1$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$0$

Avem graficul din fig. M.B.85. Aria cerută este:

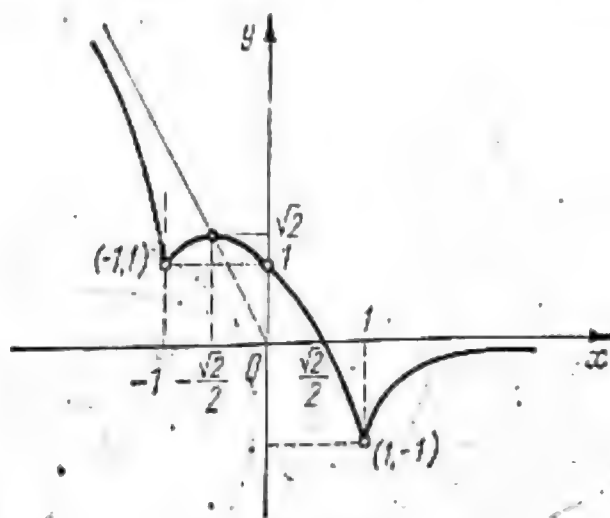


Fig. M.B.85

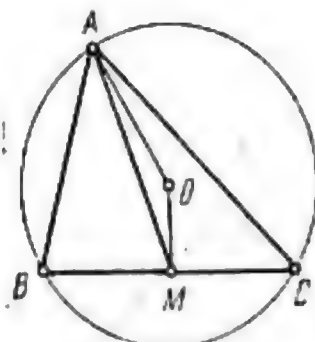


Fig. M.B.86

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x) dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (\sqrt{1 - x^2} - x) dx = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

LVII. 1°. Avem fig. M.B.86. Teorema medianei dă:

$$AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}.$$

În  $\triangle OMB$  avem:  $OM^2 = OB^2 - BM^2$ . Rezultă  $AM^2 - OM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - OB^2 =$   
 $= \frac{k}{2} - R^2 = \text{const.}$  Deoarece  $A$  și  $O$  sînt fixe și  $AM^2 - OM^2 = \text{const}$ , rezultă (vezi

manualul) că locul geometric al lui  $M$  este o dreaptă perpendiculară pe  $OA$ . În cazul problemei de față locul geometric este doar segmentul din acea dreaptă situat în interiorul cercului sau mulțimea vidă (dacă dreapta nu taie cercul).

2°. Notăm:  $AB = c$ ;  $AC = b$ ;  $BC = b\sqrt{2}$ . Avem:  $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$ ,  
deci  $\cos A = \frac{c^2 - b^2}{2bc}$ . În triunghiul  $AA'C$  avem:  $\cos(\widehat{AA'C}) = \frac{AA'^2 + A'C^2 - AC^2}{2AA' \cdot A'C}$ .  
Din teorema medianei rezultă:  $AA'^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} = \frac{c^2}{2}$ . Obținem:  
 $\cos(\widehat{AA'C}) = \frac{c^2 - b^2}{2bc} = \cos A$ , de unde rezultă  $\widehat{AA'C} = \widehat{A}$  (v. fig. M.B.87).

3°. Avem fig. M.B.88. Considerăm triunghiul  $ABN$  în care  $BO = 2ON$ . Ducem  $OP \parallel MN$  ( $P \in AB$ ). Deoarece  $\frac{BO}{ON} = \frac{BP}{PM} = 2$ , rezultă  $BP = 2PM$ , deci  $M$  este mijlocul lui  $AP$  ( $BM = \frac{3}{4}AB$ , de unde  $PM = \frac{1}{4}AB = AM$ ). Atunci, în triunghiul  $AOP$ ,  $MS$  este linie mijlocie, deci  $MN$  trece prin mijlocul  $S$  al înălțimii  $[AO]$ .

4°. Vom înmulți egalitatea dată cu  $2 \sin \frac{\pi}{7} \neq 0$ , deci vom obține egalitatea echivalentă:

$$2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7}.$$

Folosind formula  $2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$ , obținem:

$$\left( \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \right) + \left( \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} \right) + \left( \sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} \right) = -\sin \frac{\pi}{7}, \text{ adică:}$$

$$-\sin \frac{\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7}.$$

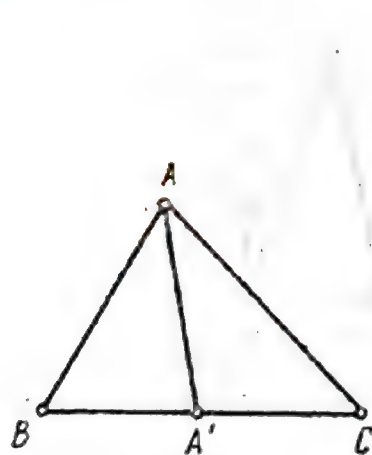


Fig. M.B.87

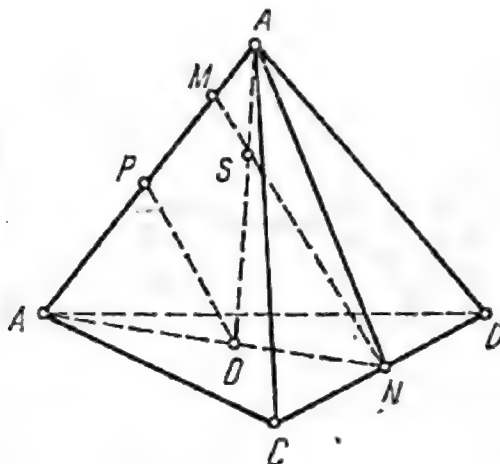


Fig. M.B.88

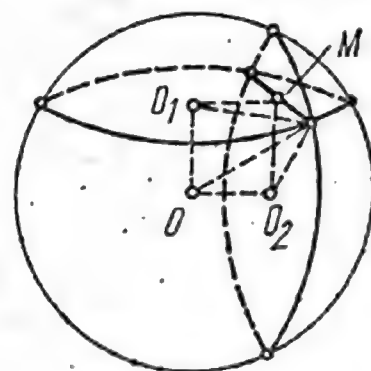


Fig. M.B.89

5°. Fie  $O$  centrul sferei,  $O_1$  și  $O_2$  centrele cercurilor de raze  $a$ , respectiv  $b$  și  $M$  piciorul perpendicularei dusă din  $O$  pe dreapta de intersecție a celor două plane (v. fig. M.B.89). Notăm:  $OO_1 = x$ ,  $OO_2 = y$  și fie  $R$  raza sferei; avem  $OM = c$ . Din triunghiuri dreptunghice rezultă relațiile:  $x^2 + y^2 = c^2$ ;  $x^2 + a^2 = R^2$ ;  $y^2 + b^2 = R^2$ . Adunând ultimele două relații și ținând seama de prima relație, rezultă:  
 $2R^2 = a^2 + b^2 + c^2$ , deci  $R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$ .



LVIII. 1°. Sistemul este echivalent cu:

$$\begin{cases} \sqrt{3x+y} = 3x-11; \\ \sqrt{x-y} = 17-3x, \end{cases}$$

și condițiile de existență sînt:  $3x+y \geq 0$ ,  $x-y \geq 0$ ,  $3x \geq 11$ ,  $17 \geq 3x$ . Rezultă că trebuie să avem îndeplinite condițiile  $\frac{11}{3} \leq x \leq \frac{17}{3}$ ,  $-3x \leq y \leq x$ . Prin ridicare la pătrat, sistemul devine:

$$\begin{cases} 3x+y = 9x^2 - 66x + 121; \\ x-y = 289 - 102x + 9x^2. \end{cases}$$

Eliminînd necunoscuta  $y$  obținem ecuația:  $9x^2 - 86x + 205 = 0$ , care ne dă soluțiile  $x_1 = 5$  și  $x_2 = \frac{41}{9}$ . Ambele soluții satisfac condițiile de existență. Pentru necunoscuta  $y$  obținem:  $y_1 = 1$  și  $y_2 = -\frac{59}{9}$ , care satisfac condițiile de existență.

Rezultă că sistemul are două soluții:  $(5, 1)$  și  $(\frac{41}{9}, -\frac{59}{9})$ .

2°. Trebuie să avem  $|z^2 - i| = |z^2 - 3i|$  cu condiția  $z^3 \neq 3i$ . Punem  $z = x + yi$  și obținem:

$$|(x^2 - y^2) + (2xy - 1)i| = |(x^2 - y^2) + (2xy - 3)i|,$$

care este o relație echivalentă cu condiția:

$$(x^2 - y^2)^2 + (2xy - 1)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy - 3)^2.$$

Reducînd termenii asemenea rezultă că  $z = x + yi$  satisface condiția  $xy = 1$  care ne spune că imaginea geometrică a lui  $z$  este o hiperbolă echilaterală. Să arătăm că relația de condiție  $z^2 \neq 3i$  este satisfăcută de punctele hiperbolei  $xy = 1$ . Într-adevăr, avem  $z^2 = x^2 - y^2 + 2(xy)i$  și pentru punctele hiperbolei rezultă:

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2i, \text{ deci } z^2 \neq 3i.$$

3°. Avem simultan condițiile:

$$\begin{cases} 2C_n^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+2}; \\ 2C_n^{k+2} = C_n^{k+1} + C_n^{k+3}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+2)!(n-k-2)!} \\ \frac{2n!}{(k+2)!(n-k-2)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+3)!(n-k-3)!} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{(k+1)(n-k-1)} = \frac{1}{(n-k)(n-k-1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ \frac{2}{(k+2)(n-k-2)} = \frac{1}{(n-k-2)(n-k-1)} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(n-k)(k+2) = (k+1)(k+2) + (n-k)(n-k-1) \\ 2(n-k-1)(k+3) = (k+1)(k+3) + (n-k-1)(n-k-2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n^2 + 4k^2 - 4nk - 5n + 8k + 2 = 0; \\ n^2 + 4k^2 - 4nk - 9n + 16k + 14 = 0. \end{cases}$$

Prin scădere rezultă  $4n - 8k - 12 = 0$ , de unde obținem  $n = 2k + 3$ . Înlocuind în ultima ecuație și reducînd termenii asemenea rezultă  $k = -2$ , ceea ce este exclus prin ipoteză.



4°. Polinoamele din descompunere vor fi de grad  $\geq 1$ . Polinomul  $P(x)$  fiind strict pozitiv nu are rădăcini reale, așa încît nu putem avea factori de gradul I. Mai rămîne de analizat descompunerea de forma:  $P(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ . Prin identificarea coeficienților rezultă:

$$\begin{cases} a + c = 6; \\ ac + b + d = 13; \\ bc + ad = 12; \\ bd = 5. \end{cases}$$

Să arătăm că acest sistem nu are soluții în  $\mathbf{Z}$ . Din ultima relație deducem că avem posibilitățile:  $(b, d) = (1, 5)$ ;  $(b, d) = (5, 1)$ ;  $(b, d) = (-1, -5)$  și  $(b, d) = (-5, -1)$ . Rezultă că  $b + d = 6$  sau  $b + d = -6$ . Din primele două relații rezultă că trebuie să avem:

$$\begin{cases} a + c = 6; \\ ac = 7; \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} a + c = 6; \\ ac = 19. \end{cases}$$

Deducem că numerele  $a$  și  $c$  sînt soluțiile ecuației  $t^2 - 6t + 7 = 0$  sau  $t^2 - 6t + 19 = 0$ . Prima ecuație are discriminantul  $\Delta_1 = 8$ , iar a doua  $\Delta_2 = -40$ . Rezultă că nu avem soluții în  $\mathbf{Z}$ .

5°. Considerăm două matrici  $M(a_1, b_1)$  și  $M(a_2, b_2)$  din  $M_3(\mathbf{R})$ . Prin înmulțire obținem o matrice de aceeași formă:  $M(a_1, b_1) \cdot M(a_2, b_2) = M(a_3, b_3)$ , în care  $a_3 = a_1 a_2 + 2b_1 b_2$  și  $b_3 = a_1 b_2 + b_1 a_2 + b_1 b_2$ . Mai mult, avem:

$$\det [M(a_1, b_1) \cdot M(a_2, b_2)] = \det M(a_1, b_1) \cdot \det M(a_2, b_2) = 1.$$

Deci  $G$  este o mulțime stabilă în raport cu operația de înmulțire a matricilor. Se observă că matricea unitate  $I_3 = M(1, 0)$  aparține mulțimii  $G$ . Prin calcul direct obținem:

$$M^*(a, b) = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & b^2 - ab & b^2 - ab \\ b^2 - ab & a^2 - b^2 & b^2 - ab \\ b^2 - ab & b^2 - ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} = M(a^2 - b^2, b^2 - ab),$$

deci avem  $M^*(a, b) \in G$ . Matricea inversă este  $M^{-1}(a, b) = M(a^2 - b^2, b^2 - ab)$ , deci  $M^{-1}(a, b) \in G$ . În concluzie  $(G, \cdot)$  este un grup. Se mai observă că înmulțirea este comutativă, deci avem un grup abelian.

LIX. 1°. Pentru orice  $n \geq 1$  avem:  $X_{n+1} < \frac{n}{n+1} X_n < X_n$ , de unde rezultă că șirul este strict descrescător. Deci  $X_n \in (0, X_1]$ ,  $(\forall) n \geq 1$ . Șirul fiind monoton și mărginit este convergent. Putem scrie:

$$X_n < \frac{n-1}{n} X_{n-1} < \frac{n-2}{n} X_{n-2} < \dots < \frac{1}{n} X_1.$$

Aplicînd criteriul majorării avem:  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0$ .

2°. Domeniul maxim de definiție este  $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ . Observăm că  $f$  nu este nici pară și nici impară. Graficul funcției nu intersectează axele.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty; & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty; \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) &= -\infty; & \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 0; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} e^t = +\infty,$$

(unde am notat  $t = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ ). Asimptotele verticale sînt date de ecuațiile  $x = -1$ ,  $x = 0$ .

Pentru determinarea asimptotelor oblice avem:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} e^{\frac{1}{x}} = 1;$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 - x}{x+1}.$$

Dacă substituim  $x = \frac{1}{t}$  ( $t < 0$ ) obținem:

$$n = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} \frac{e^t - 1 - t}{(1+t)t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} \frac{e^t - 1 - t}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} \frac{e^t - 1}{1} = 0.$$

În concluzie  $y = x$  este asimptotică la  $-\infty$ . Analog se arată că  $y = x$  este asimptotică la  $+\infty$ . Pentru calculul derivatelor avem:

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}(x^2 + x - 1)}{(x+1)^2}.$$

Rădăcinile primei derivate sînt:  $x_1 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ,  $x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

$$f''(x) = \frac{(2x+1)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+x-1)}{(x+1)^4} e^{\frac{1}{x}} - \frac{(x^2+x-1)}{(x+1)^2 x^2} e^{\frac{1}{x}} = \frac{(x^3+1)e^{\frac{1}{x}}}{x^2(x+1)^3}.$$

Ecuația  $f''(x) = 0$  nu are soluții în  $D$ . Avem tabloul de variație:

$x$	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$-1$	$0$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$a$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

Graficul funcției este prezentat în fig. M.B.90.

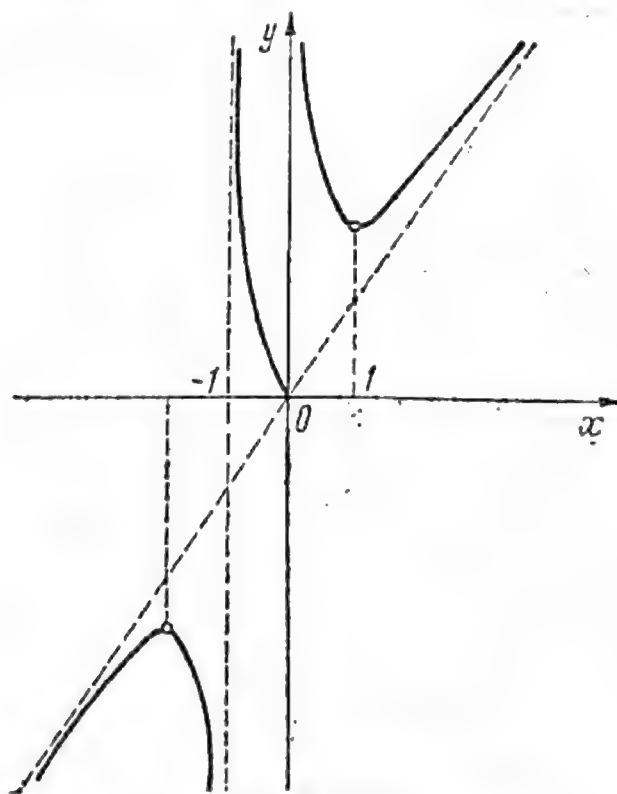


Fig. M.B.90



3°. Facem notația  $t = \sin^2 x$  și observăm că pentru orice  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  avem  $t \in [0, 1]$ . Considerăm funcția  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = t^n + (1-t)^n$  care este derivabilă și avem  $f'(t) = nt^{n-1} + n(1-t)^{n-1}$ . Ecuația  $f'(t) = 0$  are soluția  $t = \frac{1}{2}$ . Pe intervalul  $\left[0, \frac{1}{2}\right)$  avem  $f'(t) < 0$ , deci  $f$  este descrescătoare, iar pe intervalul  $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$  avem  $f'(t) > 0$ , deci  $f$  este crescătoare. Punctul  $t = \frac{1}{2}$  este un punct de minim și avem  $f(t) \geq f\left(\frac{1}{2}\right)$  sau  $f(t) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$ ,  $(\forall) t \in [0, 1]$ . Avem  $f(0) = f(1) = 1$ , deci  $f(t) \in (0, 1]$  pentru  $t \in [0, 1]$ . Dacă  $a \in (0, 1]$  există  $n \in \mathbb{N}$  astfel încât  $\frac{1}{2^{n+1}} < a$  (putem lua  $n > 1 + \log_2\left(\frac{1}{a}\right)$ ). Deoarece  $f$  este continuă pe  $[0, 1]$  rezultă că există  $t_0 \in [0, 1]$  astfel încât  $f(t_0) = a$ . Funcția  $\sin^2: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, 1]$  este bijectivă, așa că există  $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  astfel încât  $\sin^2 x_0 = t_0$ . Prin urmare,  $(\forall) a \in (0, 1]$  există  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  și  $n \in \mathbb{N}$  astfel încât  $\sin^{2n} x + \cos^{2n} x = a$ .

4°. Considerăm funcția  $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = t \cos \frac{\pi}{t}$  care este continuă pe  $[x, x+1] \subset [2, +\infty)$  și derivabilă pe  $(x, x+1)$ . Aplicând teorema lui Lagrange rezultă că există  $c \in (x, x+1)$  astfel încât să avem:  $f(x+1) - f(x) = f'(c)$  sau  $f(x+1) - f(x) = \cos \frac{\pi}{c} + \frac{\pi}{c} \sin \frac{\pi}{c}$ , unde  $c$  depinde de  $x$ . Problema revine la a dovedi că pentru  $t > 2$  avem  $\cos \frac{\pi}{t} + \frac{\pi}{t} \sin \frac{\pi}{t} > 1$ . Această inegalitate este echivalentă cu inegalitatea:

$$2 \frac{\pi}{t} \sin \frac{\pi}{2t} \cos \frac{\pi}{2t} > 2 \sin^2 \frac{\pi}{2t} \text{ sau } \operatorname{tg} \frac{\pi}{2t} < \frac{\pi}{t}, t > 2.$$

Considerăm funcția  $g: (2, +\infty)$ ,  $g(t) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2t} - \frac{\pi}{t}$ . Avem  $g'(t) = \frac{\pi}{t^2} \left(1 - \frac{2}{\cos^2 \frac{\pi}{2t}}\right) < 0$ ,  $t > 2$ . Pentru  $t = 2$  avem  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ , deci  $g(t) < 0$  sau  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2t} < \frac{\pi}{t}$  pentru  $t > 2$ .

5°. Facem o schimbare de variabilă  $x = \varphi(t) = \sin t$ ,

$$\varphi: \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right], \quad \varphi'(t) = \cos t.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{t \cos t}{\sin^2 t} dt = \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} t \left(\frac{1}{\sin t}\right)' dt = \\ &= -\frac{t}{\sin t} \Big|_{-\pi/2}^{-\pi/4} + \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{1}{\sin t} dt = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} - \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{(\cos t)'}{1 - \cos^2 t} dt = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} \Big|_{-\pi/2}^{-\pi/4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

LX. 1°. *Metoda I.* Să notăm  $\mathcal{C}_1\left(O_1, \frac{R}{2}\right)$  cercul în care  $[OB]$  este diametrul, deci cu centrul în mijlocul lui  $[OB]$  și de rază  $\frac{R}{2}$ . Cercurile  $\mathcal{C}(O, R)$  și  $\mathcal{C}_1\left(O_1, \frac{R}{2}\right)$  sînt tan-

gente interioare cu punctul de tangență în  $B$  (distanța dintre centre fiind egală cu diferența razelor). Rezultă că  $M$  este în exteriorul cercului  $\mathcal{C}_1(O, \frac{R}{2})$  (v. fig. M.B. 91). Presupunem că  $M$  este de aceeași parte cu  $B$  față de dreapta  $OA$ . Atunci avem  $m(\widehat{OMA}) \leq \frac{1}{2} m(\widehat{OA}) = m(\widehat{OBA})$ , unde  $\widehat{OA}$  este arcul care nu-l conține pe  $B$ . Avem egalitate cind  $M$  coincide cu  $B$ . Dacă  $M$  este de aceeași parte cu  $C$  față de  $OA$ , raționamentul se repetă și se are în vedere că  $m(\widehat{OBA}) = m(\widehat{OCA})$ .

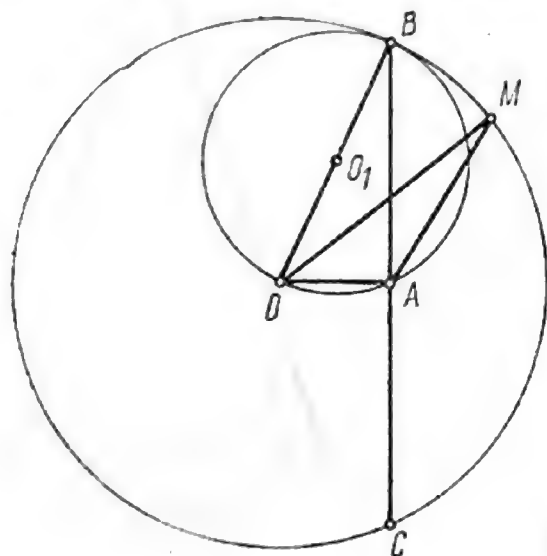


Fig. M.B.91

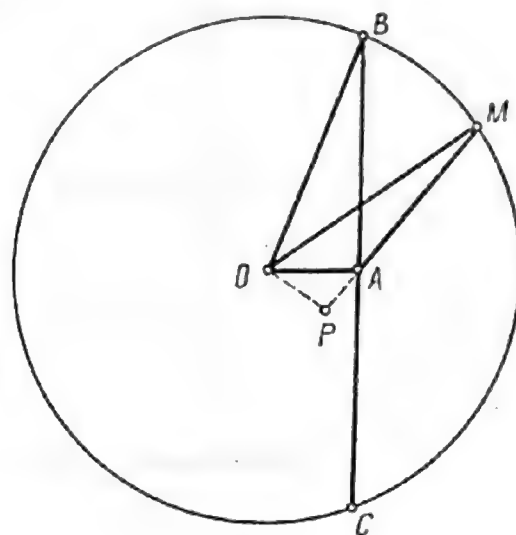


Fig. M.B.92

*Metoda II.* Unghiurile  $\widehat{ABO}$  și  $\widehat{AMO}$  sunt ascuțite deoarece au câte o latură ( $|BO$ , respectiv,  $|MO$ ) diametru în cercul dat. Fie  $P$  proiecția lui  $O$  pe  $AM$ . Avem (v. fig. M.B.92):  $\sin(\widehat{ABO}) = \frac{OA}{R}$  și  $\sin(\widehat{AMO}) = \frac{OP}{R}$ . Din triunghiul dreptunghic  $OPA$  avem  $OP \leq OA$ . Rezultă că  $\sin(\widehat{AMO}) \leq \sin(\widehat{ABO})$ . Funcția  $\sin$  este crescătoare pe  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , deci avem  $m(\widehat{AMO}) \leq m(\widehat{ABO})$ .

2°. i) Patrulaterul  $OMNP$  este inscriptibil deoarece  $m(\widehat{OMP}) = m(\widehat{ONP}) = 90^\circ$ . Rezultă că avem  $m(\widehat{MNO}) = m(\widehat{MPO})$ . Din ipoteză  $MP \parallel CO$ , deci  $m(\widehat{NMP}) = m(\widehat{NCO})$ . Din triunghiul isoscel  $ONC$  rezultă  $m(\widehat{NCO}) = m(\widehat{MNO})$ . În consecință, obținem  $m(\widehat{NMP}) = m(\widehat{MPO})$ . Prin urmare  $NM \parallel PO$ , ceea ce arată că  $OMNP$  este un trapez inscriptibil și deci un trapez isoscel.

ii) Deoarece  $OMNP$  este trapez isoscel, diagonalele sale sînt congruente, deci  $MP = ON = R$ . Rezultă că punctul  $P$  aparține tangentei în  $D$  la cercul  $\mathcal{C}(O, R)$ , pe care o notăm cu  $d$ . Din trapezul isoscel  $OMNP$  mai rezultă că  $QO = QP$ . Prin urmare  $Q$  este un punct variabil egal depărtat de un punct fix  $O$  și o dreaptă fixă  $d$  (v. fig. M.B.93). Rezultă că punctul  $Q$  se află pe parabola  $\Gamma$  de focar  $O$  și directoare dreapta  $d$ . Pe de altă parte, punctul  $Q$  este în interiorul unghiului  $\widehat{AOD}$ , fiind situat pe  $(ON)$ . Rezultă că punctul  $Q$  aparține arcului de parabolă  $\Gamma$  din interiorul unghiului  $\widehat{AOD}$ , avînd capetele în  $A$  și mijlocul lui  $[OD]$ . Capetele arcului nu aparțin locului



deoarece  $(ON)$  este în interiorul unghiului  $\widehat{AOD}$ . Fie  $Q$  un punct al acestui arc și  $N$  intersecția lui  $OQ$  cu cercul  $\mathcal{C}(O, R)$ . Se notează cu  $M$  și  $P$  intersecția paralelei prin  $Q$  la  $CD$  cu  $AO$ , respectiv d. Observăm că  $MQ = NQ$ ,  $QO = QP$ , deci  $\triangle OMQ \equiv \triangle QNP$  care ne arată că  $NP \perp NO$ . Prin urmare  $Q$  aparține locului căutat. În concluzie locul geometric este arcul parabolei  $\Gamma$  cuprins între  $A$  și mijlocul lui  $[OD]$ .

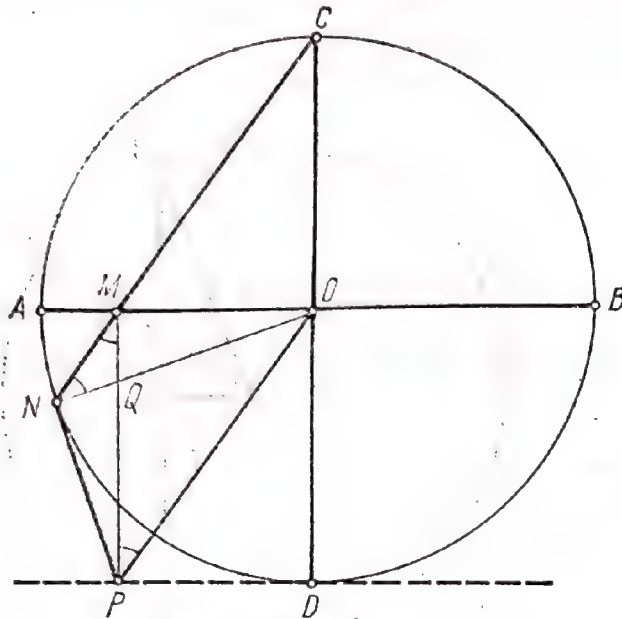


Fig. M.B.93

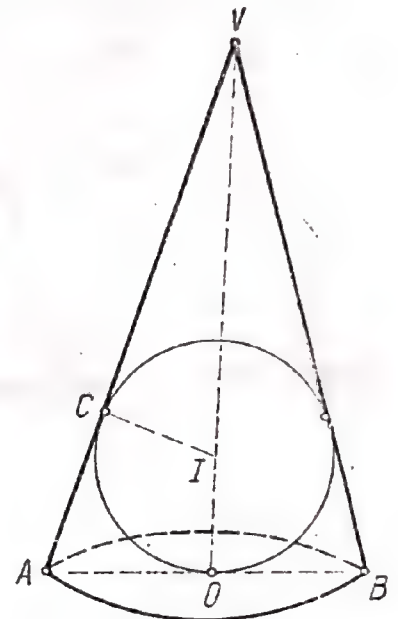


Fig. M.B.94

3°. Aria totală a conului este  $\pi R(R + G)$ , unde  $R$  este raza cercului de bază și  $G$  este lungimea generatoarei. Aria sferei de rază  $r$  este  $4\pi r^2$ . Vîrfurile al conului se proiectează în centrul  $O$  al cercului de bază cu diametrul  $[AB]$ . Centrul sferei înscrise  $I$  este situat pe înălțimea  $[VO]$ , iar proiecția lui  $I$  pe  $VA$  este  $C$ . Din asemănarea triunghiurilor  $VIC$  și  $VOA$  rezultă imediat (v. fig. M.B.94):  $\frac{r}{G - R} = \frac{R}{\sqrt{G^2 - R^2}}$ .

de unde obținem  $r = \frac{R(G - R)}{\sqrt{G^2 - R^2}}$ . Inegalitatea de demonstrat se scrie:  $\frac{\pi R(R + G)}{4\pi r^2} \geq 2$ .

Înlocuind valoarea lui  $r$  de mai sus rezultă:  $\frac{(R + G)^2}{4R(G - R)} \geq 2$ , care este echivalentă cu inegalitatea evidentă:  $(G - 3R)^2 \geq 0$ . Avem egalitate dacă și numai dacă  $G = 3R$ .

4°. Cele două drepte perpendiculare ne dau un reper cartezian în plan în raport cu care punctul  $M$  are coordonatele  $(x, y)$ . Distanțele lui  $M$  la cele două axe sînt  $|x|$  și  $|y|$  așa încît avem relația metrică:  $|x| + |y| = \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}$ , ( $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ ). Această relație metrică este echivalentă cu  $|x| \cdot |y| = 1$ . Rezultă că punctul  $M(x, y)$  satisface ecuația  $xy = 1$  sau ecuația  $xy = -1$ . Prin urmare locul geometric al punctului  $M$  este format din două hiperbole echilaterale reprezentate în fig. M.B.95.

5°. Înlocuim  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$  în ecuația dată și obținem:  $m^2(3 \sin x - 4 \sin^3 x)^2 = \sin^2 x$ , sau  $\sin^2 x [m^2(3 - 4 \sin^2 x)^2 - 1] = 0$ . Observăm că: (1)  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , este o soluție a ecuației date. Celelalte soluții sînt date de ecuațiile: (3)  $m(3 - 4 \sin^2 x) = 1$ ; (4)  $m(3 - 4 \sin^2 x) = -1$ , unde  $m > 0$ . Ecuația (3) este echivalentă cu ecuația (3')  $\sin^2 x = \frac{3m - 1}{4m}$ ,  $m > 0$ . Pentru  $m = \frac{1}{3}$  obținem solu-



ția (1). Ecuația (3') are soluții reale dacă  $m \geq \frac{1}{3}$ . Pentru  $m < \frac{1}{3}$  (3') nu are soluții reale. Deci, mai obținem soluții diferite de (1):

$$(5) \quad x = (-1)^k \arcsin \sqrt{\frac{3m-1}{4m}} + k\pi;$$

$$(6) \quad x = (-1)^{k+1} \arcsin \left( \sqrt{\frac{3m-1}{4m}} \right) + k\pi, \text{ unde } m > \frac{1}{3}.$$

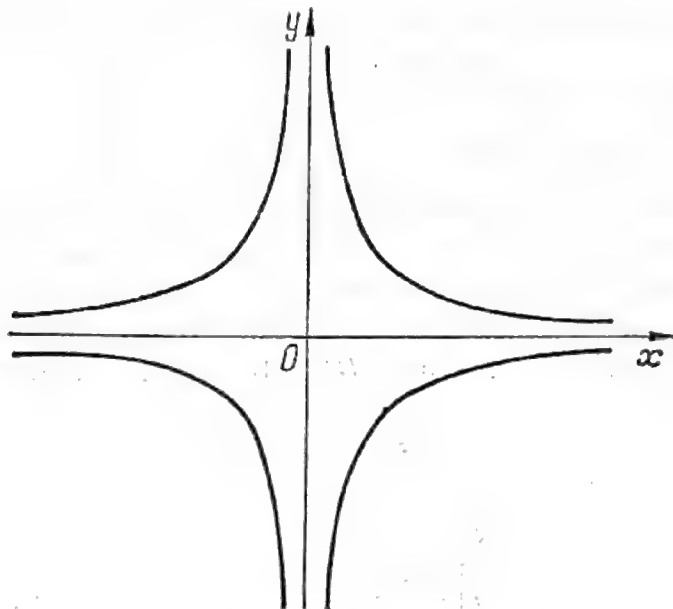


Fig. M.B.95

Din ecuația (4) rezultă: (4')  $\sin^2 x = \frac{3m+1}{4m}$ . Această ecuație are soluții reale dacă  $0 \leq \frac{3m+1}{4m} \leq 1$ . Prin ipoteză  $m > 0$ , așa încît prima inegalitate este satisfăcută.

A doua inegalitate are loc pentru  $m \geq 1$ . Pentru  $m = 1$  obținem: (7)  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ .

Pentru  $m > 1$  rezultă soluțiile:

$$(8) \quad x = (-1)^k \arcsin \sqrt{\frac{3m+1}{4m}} + k\pi;$$

$$(9) \quad x = (-1)^{k+1} \arcsin \sqrt{\frac{3m+1}{4m}} + k\pi.$$

În concluzie, pentru  $m \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$  avem soluția (1), pentru  $m \in \left[\frac{1}{3}, 1\right)$  avem soluțiile (1), (5) și (6). Pentru  $m = 1$  soluțiile sînt date de (1), (5), (6) și (7). Pentru  $m > 1$  soluțiile sînt date de (1), (5), (6), (8) și (9).

**LXI. 1°.** Presupunem că avem ordinea  $m > n > p > q$ , așa încît polinomul dat se scrie:  $f(X) = X^q(X^a + X^b + X^c + 1)$ , unde  $a = m - q$ ,  $b = n - q$ ,  $c = p - q$ , sînt numere naturale  $\geq 1$ . Polinomul  $X^3 + X^2 + X + 1$  are rădăcina  $X_1 = -1$ . Prin împărțire cu  $X + 1$  rezultă citul  $X^2 + 1$  cu rădăcinile imaginare  $X_2 = i$  și  $X_3 = -i$ . Pentru a determina  $a$ ,  $b$  și  $c$  punem condiția ca  $f(X)$  să fie divizibil cu  $X^3 + X^2 + X + 1$ . Prin urmare trebuie să avem:  $f(-1) = 0$ ,  $f(i) = 0$ ,  $f(-i) = 0$ . Condiția  $(-1)^a + (-1)^b + (-1)^c + 1 = 0$  este satisfăcută dacă din



cele trei numere naturale  $(a, b, c)$ , două sînt impare și unul este par. Notăm  $a = 2a' + 1$ ,  $b = 2b' + 1$  și  $c = 2c'$ , deci  $f(X)$  se scrie:  $f(X) = X^q(X^{2a'+1} + X^{2b'+1} + X^{2c'} + 1)$ . Polinomul  $f(X)$  admite rădăcina  $i$  dacă avem:  $(-1)^{a'}i + (-1)^{b'}i + (-1)^{c'} + 1 = 0$ . Rezultă că trebuie să avem  $c'$  impar, iar  $a'$  și  $b'$  de paritate diferite. Luăm  $a' = 2k + 1$ ,  $b' = 2l$  și  $c' = 2r + 1$ . Polinomul devine:  $f(X) = X^q(X^{4k+3} + X^{4l+1} + X^{4r+2} + 1)$ . În concluzie:  $m = q + 4k + 3$ ,  $n = q + 4l + 1$ ,  $p = q + 4r + 2$ , unde  $q, k, l, r$  sînt numere naturale. Mai observăm că  $m, n, p$  și  $q$  pot fi numere naturale care împărțite la 4 să dea resturi diferite între ele.

2°. Avem formula termenului general:  $T_{k+1} = C_{1988}^k a^{1988-k} b^k$ , unde  $k$  este natural,  $k \leq 1988$  și avem:  $a = \sqrt[5]{x \sqrt[3]{x^2}} = x^{\frac{5}{6}}$ ;  $b = -\frac{2}{\sqrt[3]{x}} = -2x^{-\frac{1}{3}}$ . Rezultă că exponentul lui  $x$  din termenul general este de forma:  $\frac{5(1988-k)}{6} - \frac{k}{3}$ , care se anulează pentru  $k = 1420$ ; obținem termenul  $T_{1421} = C_{1988}^{1420} \cdot 2^{1420}$ .

3°. Prin ipoteză  $CF$  este perpendiculară pe  $FG$  și  $AH$  este paralelă cu  $FG$ . Rezultă că  $CF$  este perpendiculară pe  $AH$ . Să considerăm acum triunghiul  $ACH$  în care  $[AD]$  este înălțime și  $CF \perp AH$ . Rezultă că punctul  $F$  este ortocentrul triunghiului  $ACH$  (v. fig. M.B.96). Atunci  $HF$  este perpendiculară pe  $AC$  (din concu-

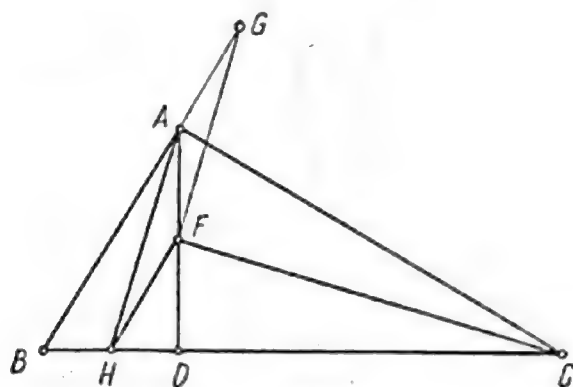


Fig. M.B.96

rența înălțimilor). Pe de altă parte  $AB \perp AC$ . Rezultă că  $HF$  și  $AB$  sînt paralele. În concluzie, patrulaterul  $AGFH$  are laturile paralele două câte două, deci este paralelogram.

4°. Avem  $\arccos : [-1, +1] \rightarrow [0, \pi]$  și  $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Rezultă că ecuația are sens pe domeniul  $D = [-1, +1]$ . Să observăm că imaginea lui  $D$  prin  $\operatorname{arctg}$  este  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  și avem  $[0, \pi] \cap \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ . Mai observăm că:  $\arccos : \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  și  $\operatorname{arctg} : \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \rightarrow \left[\alpha_0, \frac{\pi}{4}\right]$ , cu  $\alpha_0 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$ , sînt funcții bijective. Să notăm  $\alpha = \operatorname{arctg} x$ . Ecuația devine  $\cos \alpha = x$  și mai avem  $\operatorname{tg} \alpha = x$ . Din formula fundamentală  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  și din  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  deducem că  $x$  satisface ecuația  $x^2 + x^4 = 1$ , din care reținem rădăcina pozitivă  $x_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ . Mai trebuie arătat că  $x_0 \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ . Este evident că avem  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} > \frac{1}{2}$  și  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$ .

LXII. 1°. Cum  $\alpha > 0$ , logaritmind în baza  $e$ , prima ecuație a sistemului se mai scrie ca:  $\frac{x}{y} \ln 2 = \frac{y}{x} \ln \alpha$ , de unde: (1)  $\frac{x^2}{y^2} = \frac{\ln \alpha}{\ln 2} > 0$ , deoarece  $x \neq 0$  și  $y \neq 0$ , iar  $\ln 2 > 0$ . Rezultă  $\ln \alpha > 0$ , deci  $\alpha > 1$ . Pe de altă parte: (2)  $x^2 = y^x$ , și, ținând cont de această egalitate în (1), obținem: (3)  $y^{x-2} = \frac{\ln \alpha}{\ln 2}$ . Dacă  $\alpha = 2$ , atunci (3) este verificată pentru orice  $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , iar din (2) găsim că  $x = y$  sau  $x = -y$ . Dacă  $\alpha \in (1, 2) \cup (2, +\infty)$ , din (3) rezultă:  $y = \left(\frac{\ln \alpha}{\ln 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$  și din (2)

obținem:  $x = \pm \left(\frac{\ln \alpha}{\ln 2}\right)^{\frac{x}{2x-2}}$ .

2°. Cum  $X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$ , rezultă că  $P$  este divizibil cu  $X^2 - X + 1$  dacă și numai dacă este divizibil cu  $X - \omega$  și  $X - \bar{\omega}$ , unde  $\omega^3 = -1 = \bar{\omega}^3$ , cu  $\omega \neq -1 \neq \bar{\omega}$ . Pe de altă parte:  $P = (X^3)^m - X(X^3)^n + X^2(X^3)^p$  și, dacă ținem seama că  $P(\omega) = 0$  (sau  $P(\bar{\omega}) = 0$ ), găsim:  $(-1)^m - \omega(-1)^n + \omega^2(-1)^p = 0$ , egalitate satisfăcută atunci când  $m, n$  și  $p$  au simultan aceeași paritate, cu alte cuvinte atunci când  $m, n$  și  $p$  sînt pari sau atunci când  $m, n$  și  $p$  sînt impari.

3°. Cum

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ și}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \text{ găsim:}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \circ$$

$$\circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 6 & 7 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

4°. Cum

$$X^2 = X \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$X^3 = X \cdot X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad X^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

rezultă, fără dificultate, că matricile respective formează un grup ciclic cu patru elemente.

5°. Ținem seama că

$$z_2 = \frac{1 - a + bi}{1 + a - bi} = \frac{(1 - a + bi)(1 + a + bi)}{(1 + a)^2 + b^2} = \frac{1 - a^2 - b^2 + 2bi}{(1 + a)^2 + b^2}.$$





deci

$$z_1 - z_2 = a + bi - \frac{1 - a^2 - b^2 + 2bi}{(1 + a)^2 + b^2} =$$

$$= \frac{a[(1 + a)^2 + b^2] + a^2 + b^2 - 1 + (a^2 + b^2 - 1 + 2a)bi}{(1 + a)^2 + b^2} \in \mathbb{R}$$

dacă și numai dacă  $\text{Im}(z_1 - z_2) = 0$ , adică: (1)  $(a^2 + b^2 - 1 + 2a)b = 0$ . Analog, cum

$$z_2^2 = \frac{(1 - a^2 - b^2)^2 - 4b^2 + 4(1 - a^2 - b^2)bi}{[(1 + a)^2 + b^2]^2}$$

avem că  $z_2^2 \in \mathbb{R}$  dacă și numai dacă (2)  $(a^2 + b^2 - 1)b = 0$ . Cum (1) și (2) trebuie să fie îndeplinite simultan, rezultă că: dacă  $b = 0$ , atunci condițiile respective sînt satisfăcute, iar  $z_1 = a$ ,  $(\forall)a \in \mathbb{R}$ ; dacă  $b \neq 0$ , atunci, din (2), avem (3)  $a^2 + b^2 - 1 = 0$  și, dacă ținem seama de (3) în (1), obținem  $a = 0$ , valoare care, înlocuită în (3), conduce la  $b = \pm 1$ ; prin urmare  $z_1 = i$  sau  $z_1 = -i$ .

LXIII. 1°. Cum

$$\cos^6 x - \sin^6 x = (\cos^2 x)^3 - (\sin^2 x)^3 =$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x) =$$

$$= [(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \sin^2 x \cos^2 x] \cos 2x = \left[1 - \frac{(\sin 2x)^2}{4}\right] \cos 2x,$$

ecuația dată se mai scrie:  $2 \left[1 - \frac{(\sin 2x)^2}{4}\right] \cos 2x = 2 \sin 2x \cos 2x$ , de unde:

a)  $\cos 2x = 0$ , adică:  $2x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $(\forall)k \in \mathbb{Z}$ , deci  $x \in \left\{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ , sau

b)  $1 - \frac{(\sin 2x)^2}{4} = \sin 2x$ , echivalentă cu: (1)  $(\sin 2x)^2 + 4 \sin 2x - 4 = 0$ . Dar (1) se mai scrie ca:  $(\sin 2x)^2 + 4 \sin 2x + 4 - 8 = 0$ , adică:  $(2 + \sin 2x)^2 - 8 = 0$ , de unde:  $2 + \sin 2x = \pm 2\sqrt{2}$ , putînd fi acceptată numai situația (2)  $\sin 2x = -2 + 2\sqrt{2}$ , deoarece  $\sin 2x \in [-1, 1]$ , ecuația (2) fiind verificată pentru  $2x = k\pi + (-1)^k \arcsin(-2 + 2\sqrt{2})$ ,  $(\forall)k \in \mathbb{Z}$ , ceea ce revine la:  $x \in \left\{\frac{k}{2}\pi + \frac{(-1)^k}{2} \arcsin(-2 + 2\sqrt{2}) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ . Așadar, ecuația dată este verificată pentru  $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \frac{k}{2}\pi + \frac{(-1)^k}{2} \arcsin(-2 + 2\sqrt{2})\right\}$ .

2°. Inecuația dată se mai scrie sub forma:  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-6x+10-x^3} < \left(\frac{3}{4}\right)^3$ , echivalentă cu:

(1)  $-6x + 10 - x^3 > 3$ , deoarece  $0 < \frac{3}{4} < 1$ . Dar (1) se mai scrie:  $x^3 + 6x - 7 < 0$ , sau  $(x^3 - 1) + 6(x - 1) < 0$ , adică:  $(x - 1)[(x^2 + x + 1) + 6] < 0$ , aceasta avînd loc dacă și numai dacă  $x < 1$ , deoarece  $x^2 + x + 1 > 0$ ,  $(\forall)x \in \mathbb{R}$ .

3°. Notînd  $n, n + 1, n + 2$  și  $n + 3$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) cele patru numere întregi consecutive, condiția din enunț revine la:  $(n + 3)^3 = n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ , de unde, efectuînd calculele, găsim:  $n^3 - 6n - 9 = 0$ , adică:  $n^3 - 27 - 6n + 18 = 0$ , sau  $(n - 3)(n^2 + 3n + 3) = 0$ , deci  $n = 3$ , deoarece  $n^2 + 3n + 3 > 0$ ,  $(\forall)n \in \mathbb{Z}$ . În consecință, numerele căutate sînt: 3, 4, 5 și 6.

4°. Menținând notațiile din enunț, din condiția  $A + B + C = \pi$ , rezultă  $A = \pi - (B + C)$ , deci (1)  $\sin A = \sin(B + C)$ . Pe de altă parte, egalitatea din enunț se mai scrie sub forma:

$$\sin^2 A = 1 - \sin^2 B + 1 - \sin^2 C \text{ sau } (2) \sin^2 A = \cos^2 B + \cos^2 C.$$

Ținând seama de (1) în (2) și efectuând calculele, găsim:

$$\sin^2 B \cos^2 C + \cos^2 B \sin^2 C + 2 \sin B \cos B \sin C \cos C = \cos^2 B + \cos^2 C,$$

echivalentă cu:

$$(1 - \sin^2 B) \cos^2 C + (1 - \sin^2 C) \cos^2 B - 2 \sin B \cos B \sin C \cos C = 0,$$

de unde:

$$\cos^2 B \cos^2 C - \sin B \cos B \sin C \cos C = 0,$$

adică:

$$(\cos B \cos C - \sin B \sin C) \cos B \cos C = 0$$

sau (3)  $\cos(B + C) \cos B \cos C = 0$ . Dar (3) este adevărată dacă și numai dacă

sau  $B = \frac{\pi}{2}$  sau  $C = \frac{\pi}{2}$  sau  $B + C = \frac{\pi}{2}$  (adică  $A = \frac{\pi}{2}$ ), deoarece  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ , și  $\hat{C}$  sînt unghiurile triunghiului  $ABC$ .

**LXIV. 1°.** Cum  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$ , ecuația dată se mai scrie sub forma: (1)  $\sin^4 x - 10 \sin^2 x + 9 = 0$ . Notînd  $t = \sin^2 x$ ,  $t \in [0, 1]$ , ecuația (1) devine:  $t^2 - 10t + 9 = 0$ , de unde  $t_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 9}$ , singura valoare acceptată fiind  $t = 1$ . Corespunzător, avem:  $\sin^2 x = 1$ , deci  $\sin x = \pm 1$ , adică:

$$x \in \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2°. Facem mai întîi observația că inecuația dată are sens numai pentru  $x > 0$ ; în plus este necesar ca  $\log_a x \neq 5$  și  $\log_a x \neq -1$ , adică  $x \neq a^5$  și  $x \neq a^{-1}$ . Notînd  $\log_a x = t$ , inecuația respectivă devine:  $\frac{1}{5-t} + \frac{2}{1+t} < 1$ , echivalentă cu:

$$\frac{11-t}{(5-t)(1+t)} - 1 < 0 \text{ sau } \frac{t^2 - 5t + 6}{(5-t)(1+t)} < 0,$$

de unde, folosind tabloul:

$t$	$\infty$	$-1$				$2$				$3$				$5$			
$t^2 - 5t + 6$	+	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+
$5 - t$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	-	-	-	-
$1 + t$	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$\frac{t^2 - 5t + 6}{(5-t)(1+t)}$	-	-	-	+	0	-	-	-	0	+	+	+	+	-	-	-	-

găsim că  $t \in (-\infty, -1) \cup (2, 3) \cup (5, +\infty)$ . Prin urmare, cum  $0 < a < 1$ , din  $t < -1$ , rezultă  $\log_a x < -1$ , adică  $\log_a x < \log \frac{1}{a}$ , deci  $x > \frac{1}{a}$ ; din  $2 < t < 3$ , găsim  $a^3 < x < a^2$ ; din  $t > 5$ , obținem  $x < a^5$ . Așadar:  $x \in (0, a^5) \cup (a^3, a^2) \cup (a^{-1}, \infty)$ .



3°. Pentru calculul determinantului respectiv, pe care îl notăm cu  $D$ , vom aduna mai întâi liniile a doua, a treia și a patra la prima linie, apoi vom da în factor pe  $a + b + c + x$ , după care vom scădea, succesiv, prima coloană din celelalte trei. Așadar:

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = (a + b + c + x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = \\
 &= (a + b + c + x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & x-a & c-a & b-a \\ b & c-b & x-b & a-b \\ c & b-c & a-c & x-c \end{vmatrix} = \\
 &= (a + b + c + x) \begin{vmatrix} x-a & c-a & b-a \\ c-b & x-b & a-b \\ b-c & a-c & x-c \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

În continuare, vom aduna linia a doua la prima, pe a treia la a doua și prima la cea de-a treia, astfel că obținem:

$$D = (a + b + c + x) \begin{vmatrix} x-a-b+c & x-a-b+c & 0 \\ 0 & x+a-b-c & x+a-b-c \\ x-a+b-c & 0 & x-a+b-c \end{vmatrix}.$$

de unde, dînd factori comuni pe fiecare linie, găsim:

$$D = (a + b + c + x)(x - a - b + c)(x + a - b - c)(x - a + b - c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Cum ultimul determinant este diferit de zero (are valoarea 2), rezultă că  $D = 0$  atunci și numai atunci cînd:  $x = -a - b - c$ , sau  $x = a + b - c$ , sau  $x = -a + b + c$ , sau  $x = a - b + c$ .

4°. Ecuația dată se mai scrie sub forma:  $(1) \sin B - \sin C = \cos C - \cos B$ . Transformînd diferențele în produse, (1) devine:

$$\sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{B+C}{2}, \text{ de unde:}$$

a)  $\sin \frac{B-C}{2} = 0$ , adică  $B = C$ , ceea ce este adevărat pentru triunghiurile isoscele;

b)  $\sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{B+C}{2}$ , adică  $\frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{4}$  (am ținut cont că  $\hat{B}$  și  $\hat{C}$  sînt unghiuri ale unui triunghi), deci  $B + C = \frac{\pi}{2}$ , ceea ce este adevărat în triunghiurile dreptunghice.

LXV. 1°. Din condițiile:

$$\begin{cases} x > 0, x \neq 1; \\ x + |x - 2| > 0; \\ 5x - 6 + 5|x - 2| > 0, \end{cases}$$



găsim că ecuația are sens numai pentru  $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ . Procedind la schimbarea de bază, noua bază fiind  $x$ , avem:

$$\log_{\sqrt{x}}(x + |x - 2|) = \frac{\log_x(x + |x - 2|)}{\log_x \sqrt{x}} = 2 \log_x(x + |x - 2|),$$

astfel că ecuația dată devine:

$$2 \log_x(x + |x - 2|) = \log_x(5x - 6 + 5|x - 2|),$$

echivalentă cu:

$$(1) \quad (x + |x - 2|)^2 = 5x - 6 + 5|x - 2|,$$

cu  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ . Pentru  $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$ , ecuația (1) se mai scrie ca:

$$(x + 2 - x)^2 = 5x - 6 + 5(2 - x),$$

adică  $4 = 4$ , ceea ce este adevărat, pentru orice  $x$  din domeniul considerat. Pentru  $x \geq 2$ , ecuația (1) ia forma:

$$(x + x - 2)^2 = 5x - 6 + 5(x - 2),$$

adică:

$$4x^2 - 8x + 4 = 10x - 16, \text{ sau } 2x^2 - 9x + 10 = 0, \text{ de unde}$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{4}, \text{ deci } x_1 = 2 \text{ și } x_2 = \frac{5}{2}.$$

Așadar, soluțiile ecuației date sînt valorile:  $x \in (0, 1) \cup (1, 2] \cup \left\{\frac{5}{2}\right\}$ .

2°. Fie  $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ . Atunci ecuația devine:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ adică:}$$

$$\begin{pmatrix} 2x + z & 2y + w \\ x + 2z & y + 2w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x + y & -x + y \\ z + w & -z + w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ sau}$$

$$\begin{pmatrix} x - y + z & x + y + w \\ x + z - w & y + z + w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ de unde sistemul:}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 1; \\ x + y + w = 1; \\ x + z - w = 1; \\ y + z + w = -1, \end{cases}$$

pentru care găsim soluția:  $x = \frac{7}{5}$ ,  $y = -\frac{1}{5}$ ,  $z = -\frac{3}{5}$ ,  $w = -\frac{1}{5}$ . Așadar:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

este soluția căutată a ecuației date.

3°. Vom proceda prin inducție completă. Pentru  $n = 3$ , inegalitatea este adevărată deoarece:  $8 = 2^3 > 2 \cdot 3 + 1 = 7$ . Presupunem că inegalitatea cerută are loc pentru un  $n$  natural,  $n \geq 3$ , arbitrar ales, dar fixat. Atunci, să arătăm că are loc și inegalitatea:  $2^{n+1} > 2(n+1) + 1$ , adică:  $2^{n+1} > 2n + 3$ . Cum  $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2(2n + 1) = 4n + 2 = 2n + 2 + 2n > 2n + 3$ , deoarece  $2n > 3$ .  $(\forall) n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$ , rezultă că inegalitatea din enunț este adevărată pentru orice  $n$  natural,  $n \geq 3$ .

4°. Din relațiile lui Viète, scrise pentru ecuația dată, avem:

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1x_2 + (x_1 + x_2)x_3 = a; \\ x_1x_2x_3 = -8, \end{cases}$$

unde cu  $x_1$ ,  $x_2$  și  $x_3$  am notat rădăcinile ecuației respective. Presupunem, pentru a face o alegere, că: (2)  $x_1x_2 = 2$ ; atunci, din ultima ecuație a sistemului (1), găsim: (3)  $x_3 = -4$ , valoare care, înlocuită în prima ecuație, conduce la: (4)  $x_1 + x_2 = 7$ . Ținând seama de (2), (3) și (4) în cea de a doua ecuație a lui (1), obținem  $a = -26$ . Pe de altă parte, ecuația atașată sistemului format de ecuațiile (2) și (4) este de forma:  $z^2 - 7z + 2 = 0$ , de unde:  $z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-8}}{2}$ , prin urmare:  $x_1 = \frac{7 + \sqrt{41}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{7 - \sqrt{41}}{2}$ ,  $x_3 = -4$  sînt soluțiile căutate ale ecuației date.

**IXVI. 1°.** Se procedează prin inducție matematică (completă). Pentru  $n = 1$ , obținem:  $1^3 = \left[ \frac{1(1+1)}{2} \right]^2$ , ceea ce este adevărat. Presupunind că egalitatea din enunț este verificată pentru un  $n \in \mathbb{N}^*$ , arbitrar ales, dar fixat, să arătăm că:

$$(1) \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[ \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2.$$

Potrivit ipotezei de inducție:

$$(2) \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2,$$

pentru un  $n$  fixat. Ținând seama de (2) în (1), obținem:

$$\left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + (n+1)^3 = \left[ \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2,$$

care se verifică, fără dificultate, prin calculul direct, că este adevărată. Cum  $n$  a fost ales arbitrar, rezultă — potrivit inducției complete — că egalitatea din enunț este adevărată pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pentru suma cerută, ținem seama că:

$$\begin{aligned} & 1 + 2(1+2) + 3(1+2+3) + \dots + n(1+2+3+\dots+n) = \\ &= 1 \cdot \frac{1 \cdot 2}{2} + 2 \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + 3 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \dots + n \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} [1^2(1+1) + 2^2(2+1) + \dots + n^2(n+1)] = \\ &= \frac{1}{2} [(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}. \end{aligned}$$

2°. Observăm mai întâi că  $x = 0$ ,  $y = 0$  nu este soluție a sistemului respectiv. Presupunind  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  și împărțind fiecare ecuație a sistemului cu produsul  $xy$ , acesta devine:

$$(1) \quad \begin{cases} \left( x + \frac{1}{x} + 2 \right) \left( y + \frac{1}{y} + 2 \right) = 15; \\ \left( x + \frac{1}{x} \right) \left( y + \frac{1}{y} \right) = 3. \end{cases}$$

Punind: (2)  $u = x + \frac{1}{x}$ ;  $v = y + \frac{1}{y}$ , avem, din (1):

$$\begin{cases} (u+2)(v+2) = 15; \\ uv = 3, \end{cases} \text{ adică: (3) } \begin{cases} u+v = 4; \\ uv = 3. \end{cases}$$

Ecuția atașată lui (3) este:  $z^2 - 4z + 3 = 0$ , care are soluțiile  $z_1 = 3$  și  $z_2 = 1$ . Sistemul (3) este simetric în  $u$  și  $v$ , iar dacă ținem cont și de (2), avem:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 3; \\ y + \frac{1}{y} = 1, \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 1; \\ y + \frac{1}{y} = 3, \end{cases}$$

de unde găsim:

$$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; \\ y_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \text{ și, respectiv, } \begin{cases} x_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}; \\ y_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Notînd: } A = \left\{ \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\}; \quad B = \left\{ \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right\},$$

rezultă că perechile  $(x, y) \in (A \times B) \cup (B \times A)$  sînt soluțiile căutate ale sistemului considerat.

3°. Egalitatea matricială din enunț este echivalentă cu sistemul:

$$(1) \quad \begin{cases} a_1^2 + a_2 a_3 = b_1; \\ a_1 a_2 + a_2 a_4 = b_2; \\ a_1 a_3 + a_3 a_4 = b_3; \\ a_2 a_3 + a_4^2 = b_4. \end{cases}$$

Numerele  $a_1, a_2 = a_1 + r, a_3 = a_1 + 2r$  și  $a_4 = a_1 + 3r$  sînt în progresie aritmetică,  $a_1$  fiind primul termen, iar  $r$  rația acestuia. Atunci, din (1), găsim:

$b_2 - b_1 = 2a_1 r + r^2$ ;  $b_3 - b_2 = 2a_1 r + 3r^2$ ;  $b_4 - b_3 = 2a_1 r + 5r^2$ , care, evident, sînt în progresie aritmetică, aceasta avînd rația  $2r^2$ .

4°. Funcția  $f$  este continuă pe intervalele  $[1, 2]$  și  $(2, 3]$ , pe fiecare dintre acestea fiind compuneri de funcții elementare. În plus:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \left( \frac{25x}{x^2 + 1} - 1 \right) = 9 = f(2) \text{ și}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{(x+1)^2}{x-1} = 9,$$

deci  $f$  este continuă pe  $[1, 3]$ . Pe de altă parte:

$$f'(x) = \begin{cases} 25 \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & \text{dacă } x \in (1, 2); \\ -3 & \text{dacă } x = 2; \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} & \text{dacă } x \in (2, 3), \end{cases}$$

deci  $f$  este derivabilă pe  $(1, 3)$ . În consecință, funcției  $f$  îi este aplicabilă teorema lui Lagrange și avem: pentru  $x \in (1, 2)$ , găsim  $8 - \frac{23}{2} = 50 \frac{1 - c_1^2}{(c_1^2 + 1)^2}$ , de unde





$7c_1^4 - 86c_1^2 + 107 = 0$ , deci  $c_1^2 = \frac{43 \pm \sqrt{1100}}{7}$  și, cum  $c_1 \in (1, 2)$ , rezultă că, în acest caz, singura valoare acceptată este  $c_1 = \sqrt{\frac{43 - \sqrt{1100}}{7}}$ ; pentru  $x \in (2, 3)$ , găsim  $8 - \frac{23}{2} = 2 \frac{c_2^2 - 2c_2 - 3}{(c_2 - 1)^2}$ , de unde  $11c_2^2 - 22c_2 - 5 = 0$ , deci  $c_2 = \frac{11 \pm \sqrt{176}}{11}$  și, cum  $c_2 \in (2, 3)$ , rezultă că, în acest caz, singura valoare acceptată este  $c_2 = \frac{11 + 4\sqrt{11}}{11}$ .

5°. Din condiția  $\alpha - x^3 > 0$ , deducem că  $f: (-\infty, \sqrt[3]{\alpha}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Cum

$$f'(x) = -\frac{2\alpha + x^3}{2(\alpha - x^3)^{3/2}}, \quad f''(x) = -3x^2 \frac{8\alpha + x^3}{4(\alpha - x^3)^{5/2}},$$

din condiția  $f''(-1) = 0$ , găsim  $\alpha = \frac{1}{8}$ . Pentru  $\alpha = \frac{1}{8}$ , funcția  $f: (-\infty, \frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  este definită prin:  $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{\frac{1}{8} - x^3}}$ . Pentru  $x = 0$ , găsim  $f(0) = 0$ , deci graficul

lui  $f$  trece prin originea sistemului de coordonate. Cum

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = -\infty,$$

rezultă că  $y = 0$  este asimptotă orizontală (spre  $-\infty$ ) și, respectiv,  $x = \frac{1}{2}$  este asimptotă verticală. Din  $f'(x) = 0$ , obținem  $x = -\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ , iar din  $f''(x) = 0$  găsim  $x = 0$  și  $x = -1$ . Rezultatele sînt sintetizate în tabloul următor:

$x$	$-\infty$		$-1$		$-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$		$0$		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		+		+	0	-	-		
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\nearrow$	$2^{5/6} \cdot 3^{-1/2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f''(x)$		+	+	0	-	-	-	0	-

Graficul este prezentat în fig. M.B.97.

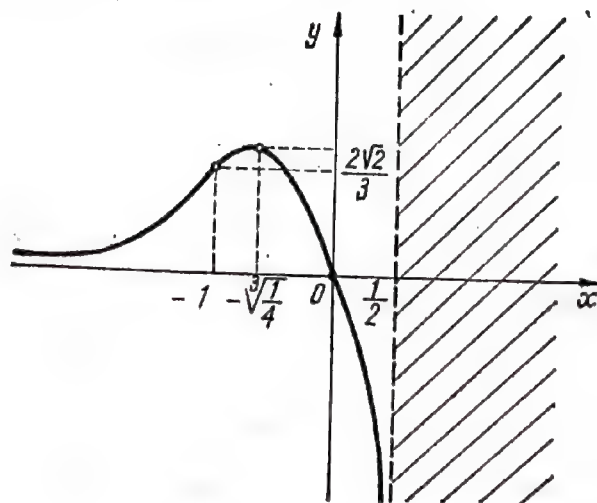


Fig. M.B.97

Volumul căutat este dat de

$$V = \pi \int_{-1}^0 f^2(x) dx = \pi \int_{-1}^0 \frac{x^3}{\frac{1}{8} - x^3} dx = \frac{\pi}{3} \int_{-1}^0 \frac{3x^3}{\frac{1}{8} - x^3} dx = -\frac{\pi}{3} \int_{-1}^0 \frac{3x^3}{x^3 - \frac{1}{8}} dx =$$

$$= -\frac{\pi}{3} \left[ \ln \left| x^3 - \frac{1}{8} \right| \right]_{-1}^0 = -\frac{\pi}{3} \left( \ln \frac{1}{8} - \ln \frac{9}{8} \right) = -\frac{\pi}{3} \ln \frac{1}{9} = \frac{2\pi}{3} \ln 3.$$

LXVII. 1°. Notînd cu  $\Delta$  determinantul ce trebuie calculat, avem, dezvoltînd, de exemplu, după regula triunghiului:

$$(1) \quad \Delta = x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3 - x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 =$$

$$= x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) - (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4).$$

Apoi, ţinem seama, pe de o parte, că:

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 5; \\ x_1 x_2 x_3 = -2, \end{cases}$$

iar, pe de alta, că:

$$(3) \quad x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 2(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2) =$$

$$= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)^2 + 4x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3),$$

iar

$$(4) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3).$$

Ţinînd cont de (2) şi (4) în (3), obţinem: (5)  $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 23$ . Acum, ţinînd seama de (2) şi (5) în (1), găsim:  $\Delta = -25$ .

2°. Cum  $\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{a_k (a_k + r)} = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)$ , ( $\forall k = 1, 2, \dots, n-1$ , unde  $r \neq 0$  este raţia progresiei aritmetice respective, şi  $a_k = a_1 + (k-1)r$ , ( $\forall k = 1, 2, \dots, n$ , avem:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + (n-1)r} \right] = \frac{n-1}{a_1 [a_1 + (n-1)r]}.$$

Să verificăm, prin metoda inducţiei complete, valabilitatea rezultatului obţinut. Pentru  $n = 1$  nu se pune problema verificării, neputînd fi vorba nici de progresie aritmetică şi nici de suma respectivă; pentru  $n = 2$ , găsim:  $\frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{a_1 (a_1 + r)}$ , ceea ce este adevărat. Presupunem că, pentru un  $k \in \{2, \dots, n-1\}$ , arbitrar ales, dar fixat,  $n$  natural şi  $n \geq 3$ , avem:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \dots + \frac{1}{a_{k-1} a_k} = \frac{k-1}{a_1 [a_1 + (k-1)r]}.$$

Să arătăm că atunci este adevărată şi egalitatea:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \dots + \frac{1}{a_{k-1} a_k} + \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{k}{a_1 (a_1 + kr)}.$$

Intr-adevăr:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \dots + \frac{1}{a_{k-1} a_k} + \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{k-1}{a_1 [a_1 + (k-1)r]} + \frac{1}{[a_1 + (k-1)r] (a_1 + kr)} =$$

$$= \frac{1}{a_1 + (k-1)r} \cdot \left( \frac{k-1}{a_1} + \frac{1}{a_1 + kr} \right) = \frac{1}{a_1 + (k-1)r} \cdot \frac{k[a_1 + (k-1)r]}{a_1(a_1 + kr)} = \frac{k}{a_1(a_1 + kr)},$$

ceea ce completează demonstrația, concluzia raționamentului fiind evidentă.

3°. Sistemul dat se mai scrie sub forma:

$$\begin{cases} xy(x+y) = 6; \\ x^2 y^2 (x+y)(x^2 + y^2 - xy) = 36, \end{cases}$$

de unde, ținând cont de prima ecuație în cea de a doua și efectuând calculele, avem:

$$\begin{cases} xy(x+y) = 6; \\ xy[(x+y)^2 - 3xy] = 6, \end{cases}$$

prin urmare, continuând în mod asemănător, găsim:

$$\begin{cases} xy(x+y) = 6; \\ 2(x+y) - x^2 y^2 = 2, \end{cases} \quad \text{deci} \quad (1) \quad \begin{cases} xy(x+y) = 6; \\ (xy)^3 + 2xy - 12 = 0. \end{cases}$$

Din cea de-a doua ecuație a sistemului (1) găsim că:  $xy = 2$  sau  $xy = -1 \pm i\sqrt{5}$ , valori care, introduse în prima ecuație, conduc la:  $x+y = 3$  sau, respectiv,  $x+y = -1 \pm i\sqrt{2}$ . Sistemul:

$$(2) \quad \begin{cases} xy = 2; \\ x+y = 3, \end{cases} \quad \text{conduce la soluțiile:} \quad (3) \quad \begin{cases} x_1 = 1; \\ y_1 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2; \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Apoi, se poate proceda în mod analog cu sistemele:

$$(4) \quad \begin{cases} xy = -1 + i\sqrt{5}; \\ x+y = -1 - i\sqrt{5}, \end{cases} \quad (5) \quad \begin{cases} xy = -1 - i\sqrt{5}; \\ x+y = -1 + i\sqrt{5}. \end{cases}$$

Pentru aflarea valorilor  $x$  și  $y$  care satisfac sistemele (4) și, respectiv, (5) se poate ține seama că:

$$(6) \quad x^2 - x^2 - xy + xy = 0 \Leftrightarrow x^2 - x(x+y) + xy = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{x+y}{2}\right)^2 + xy - \frac{(x+y)^2}{4} = 0.$$

Considerind  $x = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  și ținând seama succesiv de (4) și (5) în (6) găsim:

$$(7) \quad \left(a + bi + \frac{1 + i\sqrt{5}}{2}\right)^2 = -\frac{i\sqrt{5}}{2}, \text{ respectiv:}$$

$$(8) \quad \left(a + bi + \frac{1 - i\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{i\sqrt{5}}{2}, \text{ prin urmare:}$$

$$(9) \quad x_{3,4} = -z \pm w; \quad x_{5,6} = \bar{z} \pm w \text{ și, corespunzător:}$$

$$(10) \quad y_{3,4} = -(z \pm \bar{w}); \quad y_{5,6} = -(3\bar{z} \pm w), \text{ unde } z = \frac{1 + i\sqrt{5}}{2}, \quad w = \frac{i\sqrt{5}}{2}(1 + i).$$

Perechile  $(x_i, y_i)$ , cu  $i = \overline{1, 6}$ , date de (3), (9) și (10) constituie soluțiile distincte ale sistemului dat spre rezolvare.



4°. Avem:

$$A = 2\pi \int_1^4 f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_1^4 \left( \frac{x^2}{2} - \ln \sqrt{x} \right) \sqrt{1 + \left( x - \frac{1}{4x} \right)^2} dx =$$

$$= 2\pi \int_1^4 \left( \frac{x^3}{2} - \frac{1}{4} \ln x \right) \left( x + \frac{1}{4x} \right) dx = \pi \left[ \frac{135}{2} - 8 \ln 2 - \frac{1}{4} (\ln 2)^2 \right].$$

5°. Vom remarca mai întâi că oricare ar fi  $k \in \mathbb{R}$ ,  $D = [-k, +\infty)$ ;  $f(x) = 0$  pentru  $x = -k$  și, pentru  $k \geq 0$ , avem  $f(0) = 0$ . În plus:  $\lim_{x \rightarrow h} f(x) = 0$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

Asimptote oblice nu există  $\left( m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty \right)$ . Cum  $f'_x(x, k) = \frac{5x^2 + 4kx}{2\sqrt{x+k}}$ ,  $(\forall) x > -k$ , avem, pentru cazul în care  $k > 0$ :  $f'_x\left(-\frac{4k}{5}, k\right) = 0$ ;  $f'_x(0, k) = 0$ .

Analog, cum  $f''_x(x, k) = \frac{15x^2 + 24kx + 8k^2}{4(x+k)^{3/2}}$ ,  $(\forall) x > -k$ , avem:

$$f''_x\left(\frac{-2k(6 - \sqrt{6})}{15}, k\right) = 0 \text{ pentru } k > 0; f''_x\left(\frac{-2k(6 + \sqrt{6})}{2}, k\right) = 0 \text{ pentru } k < 0.$$

Rezultatele obținute sînt centralizate în tablourile următoare:

a) pentru  $k > 0$ :

$x$	$-k$	$-\frac{4k}{5}$	$\frac{-2k(6-\sqrt{6})}{15}$	$0$	$+\infty$						
$f'_x(x, k)$		+	0	-	-	-	-	0	+	+	+
$f(x, k)$	$-k$	$\nearrow$	$\frac{16k^2}{25}\sqrt{\frac{k}{5}}$	$\searrow$	$\frac{8k^2(7-2\sqrt{6})}{75}\sqrt{\frac{k(3+2\sqrt{6})}{15}}$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$	$+\infty$		
$f''_x(x, k)$		-	-	-	-	0	+	+	+	+	+

b) pentru  $k = 0$ :

$x$	$0$	$+\infty$
$f'_x(x, 0)$	$+$	$+$
$f(x, 0)$	$0$	$+\infty$
$f''_x(x, 0)$	$+$	$+$

c) pentru  $k < 0$ :

$x$	$0$	$-k$	$\frac{-2k(6 + \sqrt{6})}{15}$				$+\infty$
$f'_x(x, k)$			+	+	+	+	+
$f(x, k)$		$-k$	$\nearrow$	$\frac{8k^2(7 + 2\sqrt{6})}{75} \sqrt{\frac{k(3 - 2\sqrt{6})}{15}}$			$\nearrow$ $+\infty$
$f''_x(x, k)$			-	-	0	+	+

Graficele sînt, respectiv, cele din fig. M.B.98, a — fig. M.B. 98, c.

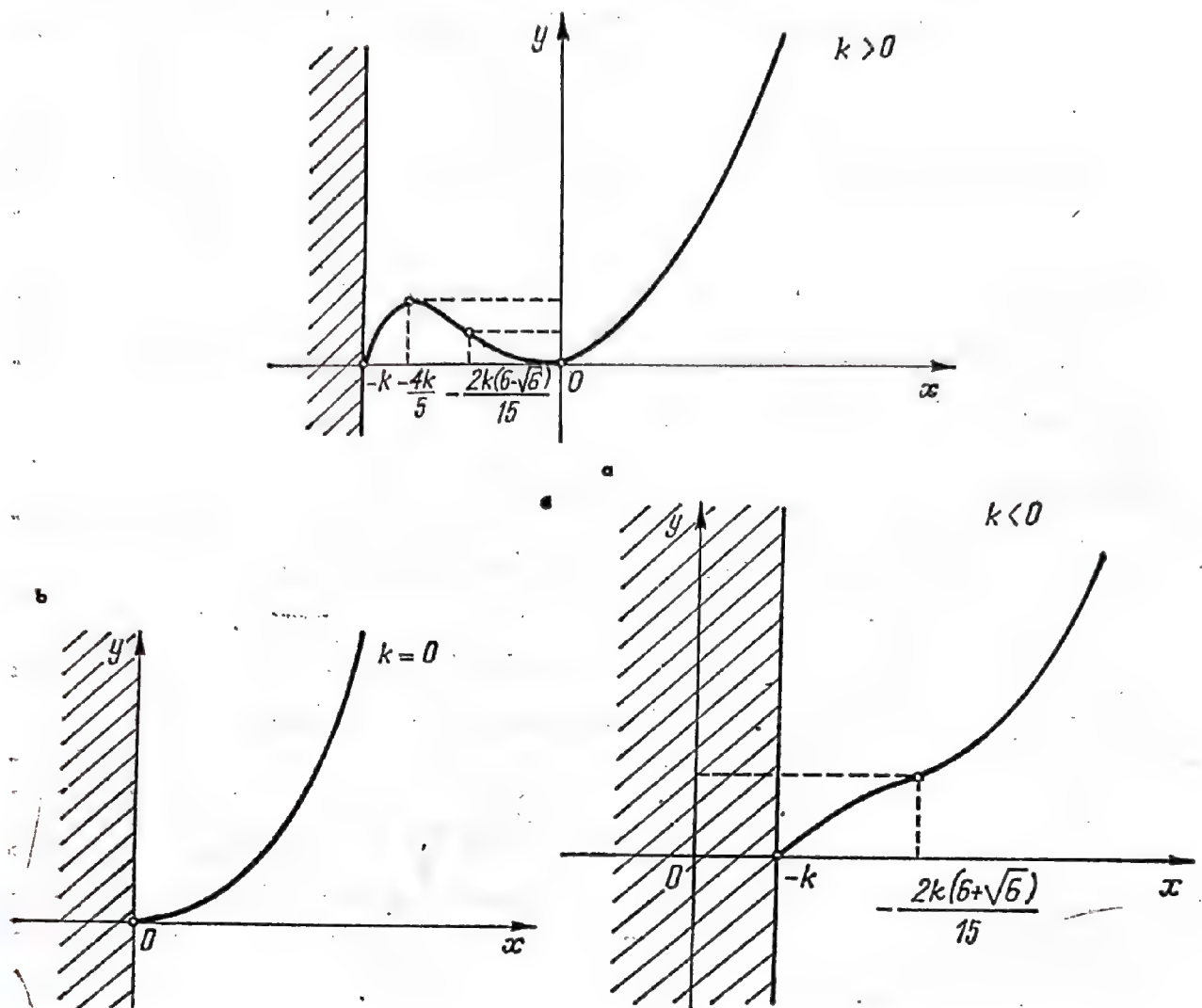


Fig. M.B.98, a, b, c

LXVIII. 1°. Observăm mai întâi că pentru  $a = 0$ , ecuația devine:  $x^2 - bx = -\sqrt{(b^2 - 1)x^2}$ , avînd soluțiile reale:  $x = 0$ ;  $x = b - \sqrt{b^2 - 1}$ , oricare ar fi  $b \in ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)) \cap (0, +\infty) = [1, +\infty)$ . În continuare, cum  $a + b > 0$ , din condiția:  $[(a + b)x - ab]^2 - x^2 = x^2[(a + b)^2 - 1] - 2ab(a + b)x + a^2b^2 > 0$ , rezultă că este necesar ca:

(1)  $x < \frac{ab}{a + b + 1}$  sau  $x > \frac{ab}{a + b - 1}$  dacă  $a + b - 1 > 0$  și  $\frac{ab}{a + b - 1} < x < \frac{ab}{a + b + 1}$  dacă  $a + b - 1 < 0$ . Pe de altă parte, din condiția  $x^2 - (a + b)x + ab < 0$ , rezultă: (2)  $a < x < b$ . Acum, ridicînd la pătrat ambii membri ai ecuației date spre rezolvare, găsim:

$[x^2 - (a + b)x + ab]^2 = [(a + b)x - ab]^2 - x^2$ , de unde:  
 $\{[x^2 - (a + b)x + ab] + [(a + b)x - ab]\} \cdot \{[x^2 - (a + b)x + ab] - [(a + b)x - ab]\} = -x^2$ ,  
 prin urmare:

$x^2[x^2 - 2(a + b)x + 2ab + 1] = 0$ , cu soluțiile:

$$x_1 = x_2 = 0; \quad x_{3,4} = (a + b) \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 1},$$

valori din care trebuie selectate cele care satisfac ecuația inițială. Pentru  $x=0$ , ecuația dată conduce la  $ab=0$ , iar (prin ipoteză)  $0 \leq a < b$ ; prin urmare  $a=0$ , situație în care  $b \geq 1$  (vezi mai sus). În continuare, remarcăm că:  $x_{3,4} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 1 \geq 0$ . Dar:  $a^2 + b^2 - 1 = (a+b)^2 - 2ab - 1 = (a+b+1)(a+b-1) - 2ab \geq 0$ , dacă și numai dacă  $a+b-1 \geq \frac{2ab}{a+b+1} \geq 0$ , deoarece  $0 \leq a < b$  și, evident,  $a+b+1 > 0$ . Cum cazul  $a=0$  a fost analizat, rămâne să ne ocupăm de situația când  $a > 0$ , deci când  $a+b-1 > 0$ . În acest caz trebuie verificate, corespunzător, condițiile (1) și (2). Avem deci:

$$a - \frac{ab}{a+b+1} = \frac{a^2+a}{a+b+1} > 0;$$

$$b - \frac{ab}{a+b-1} = \frac{b(b-1)}{a+b-1} \geq 0 \text{ dacă } b \geq 1;$$

$$x_3 - b = a + \sqrt{a^2 + b^2 - 1} > 0;$$

$$x_4 - b = a - \sqrt{a^2 + b^2 - 1} = \frac{1-b^2}{a + \sqrt{a^2 + b^2 - 1}} < 0 \text{ pentru } b > 1;$$

$$x_3 - \frac{ab}{a+b-1} = \frac{(b-1)^2(a-1)^2}{(a+b-1)[(a+b-1) + b(b-1) + (a+b-1)\sqrt{a^2 + b^2 - 1}]} > 0;$$

$$x_4 - a = \frac{1-a^2}{b + \sqrt{a^2 + b^2 - 1}} > 0 \text{ pentru } 0 < a < 1.$$

În consecință, dacă  $0 \leq a < 1$  și  $b \geq 1$  sau  $0 \leq a \leq 1$  și  $b > 1$ , atunci ecuația dată admite rădăcini reale.

2°. Pentru  $n=1$ , inegalitatea devine:  $(x+y) \leq (x+y)$ , care este satisfăcută prin egalitate. Presupunem că:

(1)  $(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n)$  pentru un  $n \in \mathbb{N}^*$ , arbitrar ales, dar fixat.

Să demonstrăm că:

$$(2) (x+y)^{n+1} \leq 2^n(x^{n+1} + y^{n+1}).$$

Cum  $x, y > 0$ , rezultă  $x+y > 0$  și, înmulțind ambii membri din (1) cu  $x+y$ , avem:

$$(3) (x+y)^{n+1} \leq 2^{n-1}(x^n + y^n)(x+y).$$

Atunci, notînd  $E(x, y) = (x+y)^{n+1} - 2^n(x^{n+1} + y^{n+1})$ , și, ținînd cont de (3) și (1), găsim:

$$\begin{aligned} E(x, y) &\leq 2^{n-1}(x^n + y^n)(x+y) - 2^n(x^{n+1} + y^{n+1}) = 2^{n-1}(xy^n + x^ny - x^{n+1} - y^{n+1}) \\ &= 2^{n-1}[x^n(y-x) + y^n(x-y)] = 2^{n-1}(x-y)(y^n - x^n) = \\ &= -2^{n-1}(x-y)^2(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \leq 0, \quad (\forall) x, y > 0 \text{ și } n \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

ceea ce completează demonstrația.

3°. Notînd

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ cum } \det A = 1 \neq 0, \text{ găsim:}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -12 & -8 \\ 1 & -9 & -6 \\ 1 & -11 & -7 \end{pmatrix}, \text{ deci:}$$

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -33 & -22 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$



4°. Prin calcul direct, găsim:

$$A = 2\pi \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2\alpha} : \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} dx =$$

$$= \frac{\pi}{\alpha} \int_0^{\alpha} (e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x} + 2) dx = \frac{\pi}{\alpha} \left( \frac{e^{2\alpha x}}{2} - \frac{e^{-2\alpha x}}{2} + 2x \right) \Big|_0^{\alpha} = \frac{\pi}{2\alpha^2} (e^{2\alpha^2} - e^{-2\alpha^2} + 4\alpha^2).$$

5°. Cum  $x^2 \geq 0 \geq x$  și  $x^2 \geq 0 \geq x^3$ , pentru orice  $x \leq 0$ , rezultă că  $\max(x, x^2, x^3) = x^2$ ,  $(\forall) x \leq 0$ . Fie acum  $g, h: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , date de:  $g(x) = e^x - x - 1$ ;  $h(x) = x + 1 - \frac{1}{x}$ . Cum  $g'(x) = e^x - 1 > 0$ ,  $(\forall) x > 0$ , rezultă că funcția  $g$  este strict crescătoare pe  $(0, \infty)$ , deci  $x + 1 < e^x$ ,  $(\forall) x > 0$ . Analog, din  $h'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ ,  $(\forall) x > 0$ , rezultă că  $h$  este strict crescătoare pe  $(0, \infty)$ . În plus,  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$  și cum  $h$  este continuă (și strict monotonă) pe  $(0, \infty)$ , rezultă că ecuația  $h(x) = 0$  admite o singură rădăcină în intervalul respectiv. Din ecuația:  $1 + x = \frac{1}{x}$ , găsim soluțiile  $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , singura care convine fiind  $x_0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ . Prin urmare:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dacă } x \in (-\infty, 0]; \\ 1 + x & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right]; \\ \frac{1}{x} & \text{dacă } x \in \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \infty\right). \end{cases}$$

Deoarece  $f$  este compunere de funcții elementare, problema continuității și cea a derivabilității se pune numai în punctele de abscise 0 și  $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ . Cum

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^2 = 0 = f(0) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 + x) = 1, \text{ și}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}} (1 + x) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = f\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}} \frac{1}{x} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{2(-1 - \sqrt{5})}{1 - 5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

rezultă că  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Pe de altă parte:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} 1 = 1 \text{ și}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} \left( \frac{-1}{x^2} \right) = -\frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

deci  $f$  este derivabilă numai pe  $\mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$ . Trasarea graficului lui  $f$  se face imediat ținând seama că acesta se compune dintr-un arc de parabolă ( $y = x^2$ ), un segment de dreaptă ( $y = 1 + x$ ) și un arc de hiperbolă echilaterală ( $y = \frac{1}{x}$ ); acesta este reprezentat în fig. M.B.99.

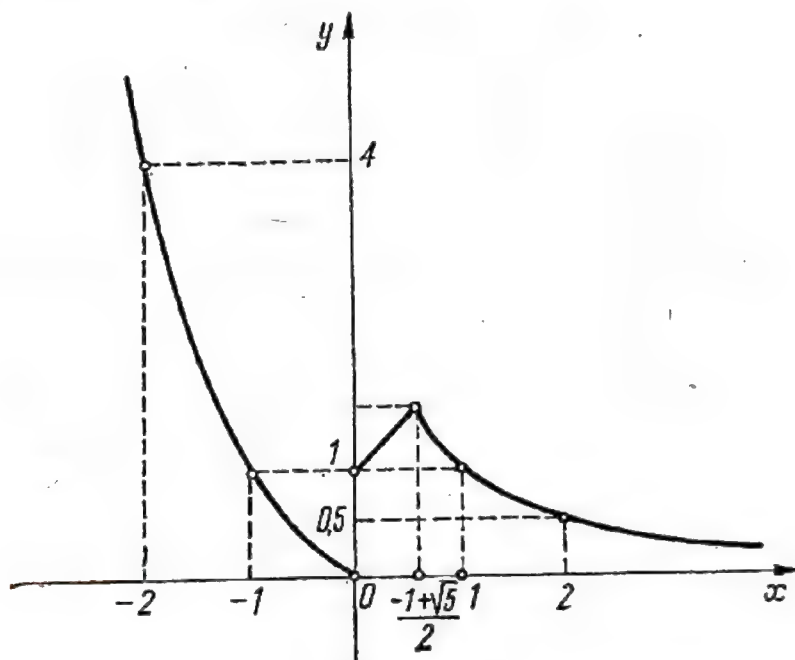


Fig. M.B.99

**LXIX. 1°.** Fie  $n \in \mathbb{Z}$  astfel încât (1)  $\left[ \frac{x+2}{3} \right] = n$ . Ținând seama că:  $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$ , din (1) obținem: (2)  $3n - 2 \leq x < 3n + 1$ . Pe de altă parte: (3)  $\frac{x}{2} = n$ , deci: (3)  $x = 2n$ . Ținând cont de (3) în (2), găsim:  $3n - 2 \leq 2n < 3n + 1$ , inegalități ce sînt satisfăcute numai pentru  $n \in \{0, 1, 2\}$ . Prin urmare  $x \in \{0, 2, 4\}$  și punînd:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 2$ ;  $x_3 = 4$ , acestea formează o progresie aritmetică ( $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$ ), cu primul termen zero și cu rația 2 sau, eventual, cu primul termen 4 și rația  $-2$ .

2°. Prima ecuație se scrie echivalent:  $-x + 2\hat{y} = \hat{3}$ , deci  $x = 2\hat{y} - \hat{3}$  și, înlocuind în cea de-a doua, rezultă:  $8\hat{y} - 12 + 3\hat{y} = \hat{1}$ . Așadar,  $5\hat{y} = \hat{1}$ , de unde  $y = \hat{5}$ . În plus,  $x = 2\hat{y} - \hat{3} = 7 = \hat{1}$ . Prin urmare, unica soluție a sistemului dat este:  $x = \hat{1}$ ,  $y = \hat{5}$ .

3°. Se verifică imediat, prin calcul direct, că:  $P(1) = 0$ ,  $P(-1) = 0$ , deci  $P$  este divizibil cu  $X^2 - 1$ . Pe de altă parte:

$$X^{4^n} + X^3 - X - 1 = X(X^{4^n-1} - 1) + (X^3 - 1) = X[X^{(4-1)(4^{n-1} + \dots + 1)} - 1] + (X^3 - 1) = X[X^{3(4^{n-1} + \dots + 1)} - 1] + (X^3 - 1),$$

ultima expresie obținută devenind zero pentru valorile lui  $X$  egale cu rădăcinile cubice ale unității (rădăcinile ecuației  $x^3 - 1 = 0$ ). Așadar,  $P$  este divizibil cu  $X^2 + X + 1$ , ceea ce completează demonstrația.

4°. Cum  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^{ax} = 1 = f(0)$  și  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (ax)^x = 1$ , rezultă că  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ . Cum

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a \text{ și}$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(ax)^x - 1}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{x \ln(ax)} - 1}{x} = -\infty,$$

rezultă că  $f$  nu este derivabilă în  $x = 0$ .

*Notă.* Pentru  $x < 0$  și  $x > 0$  continuitatea și derivabilitatea lui  $f$  sînt asigurate prin aceea că aceasta este dată prin compuneri de funcții elementare.

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 x^2 f(x) dx &= \int_{-a}^0 x^2 e^{ax} dx = \frac{1}{a} (x^2 e^{ax}) \Big|_{-a}^0 - \frac{2}{a} \int_{-a}^0 x e^{ax} dx = \\ &= -ae^{-a^2} - \frac{2}{a} \left[ \frac{1}{a} (x e^{ax}) \Big|_{-a}^0 - \frac{1}{a} \int_{-a}^0 e^{ax} dx \right] = \\ &= -ae^{-a^2} - \frac{2}{a} e^{-a^2} + \frac{2}{a^2} \left[ \frac{1}{a} (e^{ax}) \Big|_{-a}^0 \right] = -ae^{-a^2} - \frac{2}{a} e^{-a^2} + \frac{2}{a^2} - \frac{2}{a^2} e^{-a^2} = \\ &= \frac{1}{a^2 e^{a^2}} [2e^{a^2} - 2 - 2a^2 - a^4]. \end{aligned}$$

5°. Din condițiile:  $\frac{x-5}{x+2} \geq 0$ ;  $x+2 \neq 0$ , găsim că  $f: (-\infty, -2) \cup [5, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 0$ , pentru  $x = 5$ . Cum  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , rezultă că  $y = 1$  este asimptotă orizontală (la  $+\infty$  și  $-\infty$ ). În plus,  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$ , deci  $x = -2$  este asimptotă verticală. Pe de altă parte:

$$f'(x) = \frac{7}{2(x+2)^2 \sqrt{\frac{x-5}{x+2}}} > 0, (\forall) x \in (-\infty, -2) \cup (5, +\infty).$$



deci  $f$  este strict crescătoare. Mai mult:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} f'(x) = +\infty$ . Din studiul derivatei a doua se găsește că:

$$f''(x) > 0 \text{ dacă } x < -2;$$

$$f''(x) < 0, \text{ dacă } x > 5.$$

Rezultatele sînt sintetizate în tabloul următor:

$x$	$-\infty$		$-2$		$5$		$+\infty$
$f'(x)$		+	+		$+\infty$	+	+
$f(x)$	1		$\nearrow$	$+\infty$	0	$\nearrow$	1
$f''(x)$		+	+			-	-

iar graficul este cel din fig. M.B.100. Pentru studiul soluției ecuației  $f(x) = m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , este suficient să observăm că  $y = m$  reprezintă ecuația unei drepte paralele cu axa  $Ox$  și, evident: dacă  $m \in (-\infty, 0) \cup \{1\}$ , ecuația nu admite soluții

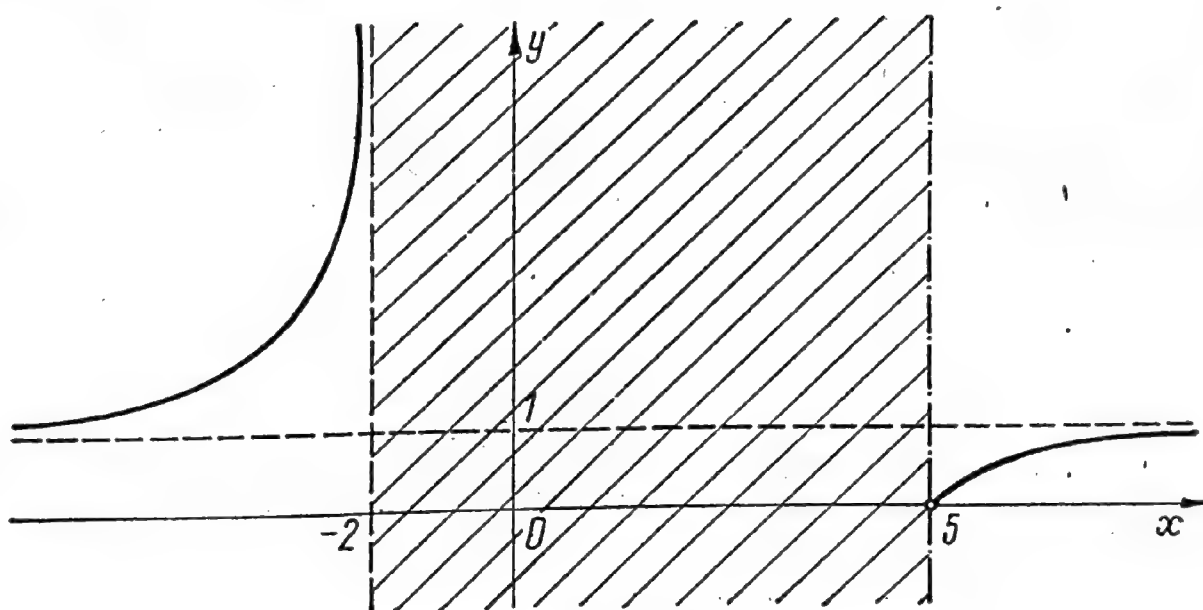


Fig. M.B.100

(dreapta respectivă neintersectînd graficul funcției reprezentate); dacă  $m = 0$ , atunci  $x = 5$  (soluție unică); dacă  $m \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ , ecuația admite soluția unică  $x > 5$  sau  $x < -2$ , după cum  $m \in (0, 1)$  sau, respectiv,  $m \in (1, \infty)$ .

Anume,  $x = \frac{5 + 2m^2}{1 - m^2}$ .

## C. PROBLEME PROPUSE

### ENUNȚURI

#### 1. ALGEBRĂ

1°. Fie ecuațiile:  $x^2 + ax + b = 0$ ,  $x^2 + cx + d = 0$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ . Dacă  $\alpha$  și  $\beta$  sînt rădăcinile primei ecuații, iar  $\gamma$  și  $\delta$  sînt rădăcinile celei de a doua ecuații, să se calculeze în funcție de coeficienți expresia:  $E = (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta)$ .

2°. Să se arate că polinomul  $P(X) = X^n \sin \varphi - X \sin n\varphi + \sin(n-1)\varphi$ ,  $\varphi \in (0, \pi)$ , este divizibil cu polinomul  $X^2 - 2X \cos \varphi + 1$ .

3°. Dacă notăm cu  $\epsilon_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , rădăcinile de ordin  $n$  ale unității, să se arate că are loc egalitatea:  $(\epsilon_0^2 - 2\epsilon_0 \cos \varphi + 1)(\epsilon_1^2 - 2\epsilon_1 \cos \varphi + 1) \dots (\epsilon_{n-1}^2 - 2\epsilon_{n-1} \cos \varphi + 1) = 2(1 - \cos n\varphi)$ , unde  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

4°. Fie  $u, v \in \mathbb{C}$  astfel încît  $|u| < 1$  și  $|v| = 1$ . Fie  $w = v \cdot \frac{z - u}{1 - \bar{u} \cdot z}$ . Să se arate că  $|w| \leq 1$  dacă și numai dacă  $|z| \leq 1$ .

5°. Fie  $p_1, p_2, \dots, p_n$  numere naturale diferite, cu  $p_k \geq 2$ , pentru orice  $k = 1, 2, \dots, n$ . Să se arate că:

$$\left(1 - \frac{1}{p_1^2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n^2}\right) > \frac{1}{2}.$$

6°. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Să se arate că  $A^n$ ,  $n \geq 1$ , are forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ și să se determine } a_n, b_n.$$

7°. Dacă matricile  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  au proprietatea că există  $k$  și  $l \in \mathbb{N}^*$  astfel încît  $A^k = 0$ ,  $B^l = 0$  și  $AB = BA$ , atunci există  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încît  $(A + B)^n = 0$ .

8°. Fie  $x, y$  numere reale care satisfac condiția  $x + y > 1$ . Să se arate că  $x^2 + y^2 > \frac{1}{2}$ .

9°. Fie  $x, y, z$  numere reale. Să se arate că:  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ . Dacă, în plus,  $x + y + z = 1$ , să se arate că:  $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$ .

10°. Fie determinantul de ordinul  $n$ :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}.$$

Să se arate că pentru  $n \geq 3$  avem relația:  $\Delta_n = (\alpha + \beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta \cdot \Delta_{n-2}$ .  
Să se deducă formula:  $\Delta_n = \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \alpha^{n-2}\beta^2 + \dots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n$ , pentru  $n \geq 1$ .

11°. Să se găsească numerele  $x > 2$  și  $y > 0$  astfel încît expresia:

$$\frac{x}{y} + \frac{2y}{x-2} - \frac{8}{x} + 5, \text{ să aibă valoarea minimă.}$$

12°. Să se găsească minimul expresiei:  $x^2 + y^2 + z^2$ ,  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , știind că are loc relația:  $ax + by + z = c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

13°. Să se găsească, în mulțimea numerelor naturale, soluțiile ecuației:  $x^2 + y^2 + 2xy - mx - my - m - 1 = 0$ , unde  $m \in \mathbb{N}$  este dat.

14°. Să se arate că singura funcție  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care satisface proprietatea:  $f(x)f(y) = xf(y) + yf(x) - xy$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ , este funcția  $f(x) = x$ .

15°. Să se arate că pentru orice număr natural  $k \neq 0$ , există numere naturale  $x$  și  $y$ , nenule, care să verifice următoarele ecuații:

$$x^3 + y^3 = 9kxy; \quad (9k - 2x)y^2 = (18k + x)x^2.$$

16°. Notînd  $x_1, x_2, x_3, x_4$  rădăcinile ecuației cu coeficienți reali:  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , să se demonstreze relația:

$$(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1) = (a - c)^2 + (1 - b + d)^2.$$

17°. Să se arate că ecuația:  $x^3 + px^2 - q^2 = 0$ , are o rădăcină reală pozitivă și numai una ( $p, q \in \mathbb{R}$ ;  $q \neq 0$ ).

18°. Să se rezolve ecuația:  $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6) = 3x^2$ .

19°. Să se calculeze suma:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \dots + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2.$$

20°. Pentru ce numere reale  $m, n$  avem:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + 1 \geq 0 \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}?$$

21°. Să se arate că:

$$\left| \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{1000^2} - 0,105 \right| < 0,006.$$

22°. Să se rezolve:

$$a) \text{ ecuația } (x^2 - x - 2)^4 + (2x + 1)^4 = (x^2 + x - 1)^4;$$

$$b) \text{ inecuația } (x^2 - x - 2)^2 - (x^2 - x - 2)(x - 1) \geq 2(x - 1)^2.$$

23°. Să se determine valoarea minimă a expresiei  $a \operatorname{tg}^n x + \operatorname{ctg}^n x$ , unde  $a > 0$ , este constant,  $n \in \mathbb{N}$  și  $x$  variază în intervalul  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

24°. Fie  $1 < a < b < \sqrt{2}$ . Să se arate că:  $\frac{1 - \sqrt{a^2 - 1}}{1 - \sqrt{b^2 - 1}} > \frac{a}{b}$ .

25°. Să se determine  $x \in [0, 2\pi]$  verificînd simultan:  $2^{x+3} + 6 \cdot 2^{x-1} - 33 > 0$  și  $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

26°. Să se rezolve inecuația:  $\sqrt{x} - \sqrt[3]{x-1} \geq 1$ .

27°. Să se arate că nu există un polinom  $P \in \mathbb{R}[X]$  astfel încît  $P(x) = \sin x$  pentru orice  $x \in (0, 1)$ .

28°. Să se rezolve ecuația:  $x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + mx + n = 0$  ( $m, n \in \mathbb{R}$ ), știind că admite o rădăcină  $x_1 = -i$ .

29°. Dacă  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  și matricea  $I_n - ABAB$  este inversabilă, să se arate că matricea  $I_n - BABA$  este de asemenea inversabilă.

30°. Fie polinomul:  $f = (\hat{3}\lambda^2 + \hat{5}\lambda + \hat{2})X^3 + (\lambda + \hat{1})X^2 + (\hat{3}\lambda + \hat{2})X + \hat{1}$ , cu coeficienții în  $\mathbb{Z}_{13}$ . Să se determine gradul lui  $f$  în funcție de  $\lambda \in \mathbb{Z}_{13}$  și să se determine rădăcinile lui  $f$  pentru  $\lambda = \hat{0}$ .





## 2. GEOMETRIE

31°. Fie  $ABCD$  un trapez cu bazele  $[AB]$  și  $[CD]$ , iar  $O$  intersecția diagonalelor. Notăm ariile triunghiurilor  $OAB, OAD, OCD, OBC$  respectiv cu  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . Să se arate că au loc relațiile:  $S_2 = S_4, S_2^2 = S_1 S_3$ .

32°. Să se rezolve ecuația:  $\arccos x + \arccos(1 - x) = \arccos(-x)$ .

33°. Fie  $M, A, B, C$  situate în această ordine pe un cerc de centru  $O$ . Numerele  $a = m(\widehat{MOA}), b = m(\widehat{MOB}), c = m(\widehat{MOC})$  satisfac relațiile:  $\cos a + \cos b + \cos c = 0; \sin a + \sin b + \sin c = 0$ . Să se arate că  $A, B, C$  sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

34°. Să arate că dacă  $7 \sin a = 3 \sin(a + b), \cos \frac{b}{2} \neq 0, \cos \frac{2a + b}{2} \neq 0$ , atunci  $2 \operatorname{tg} \frac{2a + b}{2} = 5 \operatorname{tg} \frac{b}{2}$  și reciproc.

35°. Pe laturile unui triunghi  $ABC$  se construiesc trei triunghiuri isoscele asemenea  $APB([AP] = [PB]), AQC([AQ] = [QC])$  și  $BRC([BR] = [RC])$ , primele două aflîndu-se în exteriorul triunghiului  $ABC$ , iar al treilea fiind așezat de aceeași parte a dreptei  $BC$  ca și triunghiul  $ABC$ . Să se arate că  $APRQ$  este paralelogram.

36°. Să se arate că dacă triunghiurile  $ABC, A'B'C'$  verifică relațiile  $\hat{A} = \hat{A}'$  și  $\frac{a^2}{a'^2} = \frac{bc}{b'c'}$ , atunci triunghiurile sînt asemenea.

37°. Să se rezolve inecuația:  $1 + \cos 2x + \sin x < 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ .

38°. Să se arate că în orice triunghi cu unghiurile ascuțite există relația  $S = p_1 \cdot R$ , unde  $S$  este aria triunghiului,  $R$  este raza cercului circumscris, iar  $p_1$  este semiperimetrul triunghiului ortic (format de picioarele înălțimilor).

39°. Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor care taie două cercuri exterioare date, de centre  $O_1$  și  $O_2$ , după diametre.

40°. Să se rezolve ecuația  $\cos^n x - \sin^n x = 1$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ .

41°. În triunghiul  $ABC$  se notează  $a = BC$  și  $h_a$  înălțimea corespunzătoare din  $A$  etc. Presupunem că  $a > b$ . Să se arate că:  $a + h_a \geq b + h_b$ . În ce caz avem egalitate, în ipoteza  $a > b$ ?

42°. Se dau două cercuri, de centre  $O_1$  și  $O_2$ , care se taie în punctele  $A$  și  $B$ . Fie  $C$  și  $D$  punctele diametral opuse lui  $A$  în cele două cercuri. Tangenta la cercul  $O_1$  dusă prin  $A$  taie din nou cercul  $O_2$  în  $M$ , iar tangenta la cercul  $O_2$  dusă prin  $A$  taie din nou cercul  $O_1$  în  $N$ . Prelungim segmentul  $[AB]$  cu un segment  $[BP]$  astfel încît  $B$  să fie mijlocul segmentului  $[AP]$ . Să se arate că:

- Punctele  $C, B$  și  $D$  sînt coliniare.
- Patrulaterul  $AMPN$  este inscriptibil.

43°. Fie  $ABCD$  un patrulater inscriptibil și fie  $E$  intersecția dreptelor  $AB, CD$ , iar  $F$  intersecția dreptelor  $BC, AD$ . Bisectoarea interioară a unghiului  $AFB$  taie laturile  $[AB], [CD]$  în  $P$ , respectiv  $M$ , iar bisectoarea interioară a unghiului  $AED$  taie laturile  $[AD], [BC]$  în  $Q$ , respectiv  $N$ . Să se arate că  $MNPQ$  este romb.

44°. a) Prin muchia  $[CD]$  a tetraedrului oarecare  $ABCD$  se duce planul  $\pi'$  paralel cu muchia opusă  $[AB]$ , iar prin muchia  $[BD]$  se duce planul  $\pi''$  paralel cu muchia opusă  $[AC]$ . Să se arate că dreapta ce unește mijlocul  $M$  al muchiei  $[BC]$  cu mijlocul  $N$  al muchiei  $[AD]$  este paralelă cu planele  $\pi'$  și  $\pi''$ .

b) Se duce un plan oarecare  $\pi$  perpendicular pe dreapta de intersecție a planelor  $\pi'$  și  $\pi''$ . Să se arate că proiecțiile  $A', B', C', D'$  ale punctelor  $A, B, C, D$  pe planul  $\pi$  sînt vîrfurile unui paralelogram.

45°. Fie  $ABCD$  un tetraedru. Presupunem că perpendiculara  $AE$  dusă din  $A$  pe fața  $BCD$  se intersectează cu perpendiculara  $BF$  dusă din  $B$  pe fața  $ACD$  într-un punct  $G$ . Să se arate că perpendiculara  $CK$  dusă din  $C$  pe fața  $ABD$  și perpendiculara  $DL$  dusă din  $D$  pe fața  $ABC$  se intersectează într-un punct  $M$ .

46°. Să se arate că într-un triunghi  $ABC$  avem:

$$a(60^\circ - m(\hat{A})) + b(60^\circ - m(\hat{B})) + c(60^\circ - m(\hat{C})) = 0$$

dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

47°. Un dreptunghi variabil  $MNPQ$  are virfurile situate pe laturile unui triunghi  $ABC$ . Să se arate că locul geometric al punctului de intersecție al diagonalelor dreptunghiului  $MNPQ$  este reuniunea a trei segmente dacă  $ABC$  este triunghi ascuțitunghic și un segment dacă  $ABC$  este un triunghi obtuzunghic.

48°. Fie  $S$  un număr real pozitiv și  $\alpha \in (0, 180)$ . Să se demonstreze că în mulțimea triunghiurilor  $ABC$  astfel că  $\sigma[ABC] = S$  și  $m(\hat{A}) = \alpha$ , triunghiul de perimetru minim este triunghiul isoscel cu  $AB \equiv AC$ .

49°. Fie  $A$  un punct în planul cercului  $\odot(O, R)$ . Să se găsească punctele  $M$  situate pe cercul  $\odot(O, R)$  astfel încât măsura unghiului  $\widehat{OMA}$  să fie maximă sau minimă.

50°. Să se arate că dacă un poligon convex cu  $n \geq 4$  laturi are patru unghiuri drepte, atunci poligonul este un dreptunghi.

51°. Să se demonstreze că un triunghi  $ABC$  este dreptunghic isoscel dacă și numai dacă avem:  $\cos A \cos B + \sin A \sin B \sin C = 1$ .

52°. Să se demonstreze că pentru orice patrulater convex  $ABCD$  avem:  $\sin A + \sin B + \sin C + \sin D \leq 4 \sin \frac{A+B+C+D}{4}$ ; în ce caz are loc egalitatea?

53°. Să se arate că ecuația:  $1 + |\cos x| \cdot \cos^2 x = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$ , nu are soluții reale.

54°. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare  $ABC$  avem inegalitatea:  $\frac{\cos A \cos B \cos C}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C} \leq \frac{8}{27}$ ; când are loc semnul de egalitate?

55°. Lungimile laturilor unui triunghi notate cu  $a, b, c$  sînt în progresie aritmetică. Să se arate că:

i)  $\sin A, \sin B, \sin C$  sînt în progresie aritmetică;

ii)  $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$  sînt în progresie aritmetică.

( $h_a, h_b, h_c$  reprezintă lungimile înălțimilor).

56°. În triunghiul isoscel  $ABC$  avem  $m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 15^\circ$  și perimetrul  $2p = 4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}$ . Să se determine laturile și aria triunghiului.

57°. Cercurile  $\odot_1(O_1, R_1)$  și  $\odot_2(O_2, R_2)$  se intersectează în punctele  $A$  și  $B$ . Notăm cu  $T_1$  și  $T_2$  punctele de tangentă ale cercurilor  $\odot_1$ , respectiv  $\odot_2$  cu una din tangentele comune. Fie  $P$  punctul de intersecție al dreptelor  $O_1O_2$  și  $AB$ . Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului  $PT_1T_2$  în funcție de razele cercurilor și distanța dintre centre  $d = O_1O_2$ .

58°. Să se demonstreze că suma pătratelor distanțelor la virfuri ale unui punct situat pe o mediană a unui triunghi este minimă cînd punctul este centrul de greutate al triunghiului.

59°. În triunghiul oarecare  $ABC$  se notează cu  $A'$  și  $B'$  intersecțiile cercului circumscris triunghiului cu bisectoarele unghiurilor  $BAC$ , respectiv  $ABC$ . Notînd cu  $I$  centrul cercului înscris triunghiului  $ABC$ , să se arate că raza cercului circumscris triunghiului  $IA'B'$  este egală cu raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$ .

60°. Să se calculeze lungimile diagonalelor unui patrulater inscriptibil în funcție de lungimea laturilor sale.



61°. Să se calculeze unghiurile unui trapez în funcție de lungimile laturilor sale.

62°. Se consideră mulțimea triunghiurilor  $ABC$  în plan care au două vîrfuri fixe, iar expresia  $b^2 + c^2 - a^2$  are o valoare constantă. Să se determine locul geometric descris de al treilea vîrf.

63°. Fie  $ABCD$  un dreptunghi și  $O$  intersecția diagonalelor. Un punct  $M \in (BD)$  se proiectează pe  $AB$  și  $AD$  în punctele  $E$  respectiv  $F$ . Să se arate că, pentru orice  $M \in (BD)$ ,  $MC$  este perpendiculară pe  $EF$  dacă și numai dacă dreptunghiul este pătrat.

64°. Fie  $ABC$  un triunghi și  $O$  un punct în planul său. Să se găsească punctele  $M \in [AB]$  și  $N \in [AC]$  astfel încît  $MN \parallel BC$  și  $OM = ON$ .

65°. Fie  $A$  un punct exterior planului  $\pi$  și  $P$  un punct fixat în planul  $\pi$ . Să se afle locul geometric al proiecțiilor punctului  $A$  pe toate dreptele din planul  $\pi$  care trec prin punctul  $P$ .

66°. Fie  $A$  și  $B$  două puncte de aceeași parte a planului  $\pi$  astfel încît notînd cu  $A'$ , respectiv  $B'$  proiecțiile lor pe planul  $\pi$  să avem  $AA' = k \cdot BB'$  ( $k > 0$ ). Să se găsească locul geometric al punctelor  $M$  din planul  $\pi$  astfel încît să avem  $m(\widehat{AMA'}) = m(\widehat{BMB'})$ .

67°. Se consideră în spațiu două drepte  $d$  și  $d'$  paralele cu un plan  $\pi$  și la distanță egală de acest plan. În ipoteza că planul  $\pi$  separă cele două drepte, să se găsească locul geometric al punctelor din planul  $\pi$  care sînt centrele sferelor tangente celor două drepte  $d$  și  $d'$ .

68°. Să se determine un plan care intersectează o sferă  $\mathcal{S}(O, R)$ , astfel încît diferența ariilor celor două calote sferice determinate să fie egală cu aria cercului de intersecție a planului cu sfera.

69°. Se consideră un cerc  $\mathcal{C}(O, R)$  și o coardă  $[AB]$  de lungime  $R$ . Să se calculeze latura pătratului înscris în segmentul „mic” de cerc.

70°. Fie un patrulater convex  $ABCD$  circumscris unui cerc. Se notează cu  $M, N, P, Q$  punctele de tangență cu laturile  $[AB], [BC], [CD], [DA]$  respectiv. Să se arate că:  $AB + CD = BC + AD$  și că dreptele  $MP, NQ$  trec prin  $O = AC \cap BD$ .

71°. Două cercuri de raze  $R, r$  se intersectează în  $A, A'$  iar  $BC$  este o tangentă comună exterioară, de aceeași parte cu  $A'$  față de linia centrelor. Să se calculeze raza cercului  $ABC$ .

72°. Să se arate că pentru orice  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  ( $n \geq 2$ ) avem:

$$\sin a_1 \sin a_2 \dots \sin a_n + \cos a_1 \cos a_2 \dots \cos a_n \leq 1.$$

73°. Să se arate că pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  are loc:  $\frac{1}{2} \leq \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x \leq \frac{11}{2}$ . Generalizare.

74°. Fie o piramidă  $[VABCD]$ ,  $P$  un punct în planul  $VAD$  și  $Q$  un punct în planul  $VBC$ . Să se construiască punctul de intersecție al dreptei  $PQ$  cu planul  $VBD$ .

75°. Fie un sistem ortogonal  $xOy$  și  $P \in Ox, Q \in Oy$  astfel încît  $OP + OQ = a$ , constant. Fie  $R$  vîrfurile opuse lui  $O$  în dreptunghiul  $OPRQ$ . Să se cerceteze dacă perpendiculara din  $R$  pe  $PQ$  trece sau nu printr-un punct fix.

76°. Se consideră cercul  $\mathcal{C}: x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0$  și dreapta  $D: x + y - 1 = 0$ . Să se determine ecuația cercurilor  $\gamma$  astfel ca  $D$  să fie axa radicală pentru  $\mathcal{C}$  și  $\gamma$  și să se determine locul geometric al centrelor acestor cercuri.



### 3. ANALIZĂ MATEMATICĂ

77°. Să se arate că şirul cu termenul general  $a_n = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n$ ,  $n \geq 1$ , este convergent şi să se calculeze limita.

78°. Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) = 0$ .

79°. Fie şirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  definit prin:  $a_1 = a$ ,  $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta$ , pentru  $n \geq 1$ , unde  $|\alpha| < 1$ . Să se determine  $a_n$  şi să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

80°. Să se arate că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{C_n^1}{2^n + 1} + \frac{C_n^2}{2^n + 2} + \dots + \frac{C_n^n}{2^n + n} \right) = 1.$$

81°. Fie şirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  definit prin:  $a_0 = 1$ ,  $a_{n+1} = \sin a_n$ , pentru  $n \geq 0$ . Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

82°. Fie  $(x_n)_{n \geq 1}$  un şir de numere reale cu proprietatea  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . Să se calculeze:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 \cdot \sin^2 x_n}{x_n^2 - \sin^2 x_n}$ .

83°. Fie funcţia  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & \text{dacă } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Să se arate că  $f$  are primitive şi că  $f$  nu este integrabilă pe intervalul  $[0, 1]$ .

84°. Fie  $f: \left[\frac{1}{\pi}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \int_{1/\pi}^x \left| \cos \frac{1}{t} \right| \frac{dt}{t^2}$ . Să se arate că  $f$  este monotonă şi să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ ,  $n \geq 1$ .

85°. Fie  $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Să se arate că şirul  $(I_n)_{n \geq 0}$  este monoton şi mărginit, să se găsească o relaţie de recurenţă între  $I_n$  şi  $I_{n-1}$  ( $n \geq 1$ ) şi să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

86°. Se consideră funcţia  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{1 + x^{|x-1|}}$ , unde  $D \subset \mathbb{R}$ .

a) Să se afle  $D$  maxim şi să se arate că graficul lui  $f$  are o asimptotă verticală  $x = x_0$ , cu  $x_0 \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ .

b) Să se traseze graficul.

87°. Să se calculeze:  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \cos x}$ .

88°. Să se calculeze:  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$ .

89°. Să se calculeze:  $\int_2^3 \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) dx$ .

90°. Să se calculeze:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ .

91°. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:  $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$ .  
Să se arate că  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și să se calculeze derivata.

92°. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{axe^{nx} + bx^2 + c}{e^{nx} + 1}$ . Să se determine condițiile pe care trebuie să le îndeplinească parametrii reali  $a$ ,  $b$  și  $c$  astfel încât  $f$  să admită primitive.

93°. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} e^x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0. \end{cases}$$

Să se determine  $\alpha \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f$  să admită primitive.

94°. Pentru  $n \geq 2$  definim șirul  $a_n = \frac{e^{\arcsin \frac{1}{n}} - 1}{e^{\frac{1}{n}} - \cos \frac{1}{n}}$ . Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

95°. Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} \ln \left( 1 + \frac{|\sin x|}{x} \right) dx$ .

96°. Să se traseze graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + x^2 + e^{ax}}$ .

97°. Să se studieze șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  definit prin  $x_0 \in (0, 1)$  și  $x_n = x_{n-1} - x_{n-1}^2$  pentru orice  $n \geq 1$ .

98°. Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow n} \frac{(x-n)^2}{\sin^2(\pi x)}$ ;  $n \in \mathbb{Z}$ .

99°. Fie  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă astfel încât  $f(0) = f(1)$  și pentru orice  $x \in (0, 1)$ ,  $f(x) \geq f(0)$ . Să se arate că pentru orice  $k \in (0, 1)$ , graficul lui  $f$  are o coardă paralelă cu  $Ox$  de lungime  $k$ .

100°. Care este aria maximă a unui trapez având trei laturi de măsură 1 cm?

101°. Să se determine  $\lambda \in \mathbb{R}$  astfel încât cea mai mică valoare a lui  $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 1$  pe intervalul  $[0, 1]$  să coincidă cu cea mai mare valoare a lui  $f(x)$  pe  $[1, 3]$ .

102°. Să se calculeze valoarea cea mai mare  $M_n$  a funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin^n x \cos x$  ( $n \in \mathbb{N}$  și  $n \geq 2$ ) și să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n \cdot \sqrt{n+1}$ .

103°. Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a})$ ;  $a > 0$  dat.

104°. Să se determine funcțiile derivabile  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât pentru orice  $x > 0$ ,  $x + \int_0^x f(t) dt = (x+1)f(x)$ .

105°. Să se calculeze:  $I = \int_0^{4\pi} |\arcsin(\sin x)| dx$ .

106°. Dacă  $m > n > 0$ , să se arate că:  $mn \ln \frac{m}{n} < m^2 + mn - 2n^2$ .

107°. Fie  $I_n = \int_0^1 x^n \cdot \sqrt{1-x} \, dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Să se calculeze  $I_0$ ,  $I_1$  și raportul  $\frac{I_n}{I_{n-1}}$  pentru  $n \geq 1$ . Să se arate că:

$$I_n = \frac{2^{n+1} \cdot n!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+3)}.$$

108°. Să se calculeze:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-2}^2 \frac{|x-2|+k}{2-|x-k|} \, dx$ .

109°. Să se arate că:  $e^\pi > \pi^e$ .

110°. Să se calculeze:  $I = \int_0^2 \min\left(x, \sin \frac{\pi x}{2}\right) \, dx$ .

111°. Fie  $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$  o funcție continuă astfel încît  $\int_0^1 f(x) \, dx = 0$ . Să se arate că:  $\int_0^1 f(x)^2 \, dx \leq -ab$ .



1°. Notăm:  $P(X) = X^2 + aX + b$ ,  $Q(X) = X^2 + cX + d$ . Atunci putem scrie  $E = (\alpha - \gamma)(\alpha - \delta) \cdot (\beta - \gamma)(\beta - \delta) = Q(\alpha) \cdot Q(\beta) = (\alpha^2 + c\alpha + d) \cdot (\beta^2 + c\beta + d) = \alpha^2\beta^2 + c\alpha\beta(\alpha + \beta) + d(\alpha^2 + \beta^2) + cd(\alpha + \beta) + c^2\alpha\beta + d^2$ . Dar  $\alpha + \beta = -a$ ,  $\alpha\beta = b$ , deci  $E$  devine:

$$E = b^2 - abc + da^2 - 2bd - acd + c^2b + d^2 = b^2 - 2bd + d^2 + a(ad - dc - ab + bc) + b(a^2 - 2ac + c^2) = (b - d)^2 + a(d - b)(a - c) + b(a - c)^2.$$

2°. Polinomul  $Q(X) = X^2 - 2X \cos \varphi + 1$  are rădăcinile  $x_{1,2} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$ . Calculăm  $P(x_1) = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n \sin \varphi - (\cos \varphi + i \sin \varphi) \sin n\varphi + \sin(n-1)\varphi = (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \sin \varphi - (\cos \varphi + i \sin \varphi) \sin n\varphi + \sin(n-1)\varphi = \cos n\varphi \sin \varphi - \cos \varphi \sin n\varphi + \sin(n-1)\varphi + i \sin n\varphi \sin \varphi - i \sin \varphi \sin n\varphi = -\sin(n-1)\varphi + \sin(n-1)\varphi = 0$ . Deoarece polinomul  $P(X)$  are coeficienți reali, rezultă că avem și  $P(x_2) = 0$  (căci  $x_2 = \bar{x}_1$ ). Atunci  $P(X)$  se divide cu  $(X - x_1)(X - x_2) = Q(X)$ .

3°. Fie  $Q(X) = X^2 - 2X \cos \varphi + 1$  și  $P(X) = X^n - 1$ . Polinomul  $Q(X)$  are rădăcinile  $x_{1,2} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$  și se poate descompune astfel:  $Q(X) = (X - x_1)(X - x_2)$ . Atunci  $(\varepsilon_k^2 - 2\varepsilon_k \cos \varphi + 1) = (\varepsilon_k - x_1)(\varepsilon_k - x_2)$  și avem:

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_0^2 - 2\varepsilon_0 \cos \varphi + 1)(\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_1 \cos \varphi + 1) \dots (\varepsilon_{n-1}^2 - 2\varepsilon_{n-1} \cos \varphi + 1) = \\ & = (\varepsilon_0 - x_1)(\varepsilon_0 - x_2)(\varepsilon_1 - x_1)(\varepsilon_1 - x_2) \dots (\varepsilon_{n-1} - x_1)(\varepsilon_{n-1} - x_2) = \\ & = (x_1 - \varepsilon_0)(x_1 - \varepsilon_1) \dots (x_1 - \varepsilon_{n-1}) \cdot (x_2 - \varepsilon_0)(x_2 - \varepsilon_1) \dots (x_2 - \varepsilon_{n-1}) = \\ & = P(x_1) \cdot P(x_2) = [(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n - 1] \cdot [(\cos \varphi - i \sin \varphi)^n - 1] = \\ & = [(\cos n\varphi - 1) + i \sin n\varphi] [(\cos n\varphi - 1) - i \sin n\varphi] = (\cos n\varphi - 1)^2 + \sin^2 n\varphi = \\ & = 2(1 - \cos n\varphi). \end{aligned}$$

4°. Avem:  $|w| = |v| \cdot \frac{|z-u|}{|1-\bar{u} \cdot z|} = \frac{|z-u|}{|1-\bar{u} \cdot z|}$  (deoarece  $|v|=1$ ). Fie  $u=a+bi$ ; atunci  $|u| = \sqrt{a^2+b^2} < 1$  și  $\bar{u} = a-bi$ . Fie  $z=x+yi$ , atunci  $z-u = (x-a) + (y-b)i$  și  $|z-u| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ . Apoi  $1-\bar{u} \cdot z = (1-ax-by) + (bx-ay)i$ , deci:

$$|1-\bar{u} \cdot z| = \sqrt{(1-ax-by)^2 + (bx-ay)^2}.$$

Rezultă că  $|w| \leq 1$  dacă și numai dacă  $|z-u|^2 \leq |1-\bar{u} \cdot z|^2$ , adică:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq (1-ax-by)^2 + (bx-ay)^2.$$

Această relație este echivalentă cu:  $(a^2+b^2-1)(x^2+y^2-1) \geq 0$ , deci cu relația  $x^2+y^2 \leq 1$ , adică cu  $|z| \leq 1$ .

5°. Renumerotind, eventual, numerele putem presupune că avem:  $2 \leq p_1 < p_2 \dots < p_n$  (deoarece ele sînt diferite). Deoarece fiecare  $p_k$  este număr natural

rezultă inegalitățile:  $p_2 \geq p_1 + 1 \geq 3$ ;  $p_3 \geq p_2 + 1 \geq 4$ ; ...;  $p_n \geq p_{n-1} + 1 \geq n + 1$ .  
Deci avem:  $p_k \geq k + 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Atunci rezultă succesiv inegalitățile:  
 $p_k^2 \geq (k + 1)^2$ , de unde  $\frac{1}{p_k^2} \leq \frac{1}{(k + 1)^2}$ ; apoi  $-\frac{1}{p_k^2} \geq -\frac{1}{(k + 1)^2}$ , deci  $1 - \frac{1}{p_k^2} \geq 1 - \frac{1}{(k + 1)^2}$ . Obținem inegalitatea:

$$\left(1 - \frac{1}{p_1^2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n^2}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n + 1)^2}\right).$$

Membrul drept al inegalității de mai sus poate fi calculat astfel:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n + 1)^2}\right) &= \frac{2^2 - 1}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2} \dots \frac{(n + 1)^2 - 1}{(n + 1)^2} = \\ &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \dots \frac{(k - 1)(k + 1)}{k^2} \dots \frac{n(n + 2)}{(n + 1)^2} = \frac{n + 2}{2(n + 1)}. \end{aligned}$$

Deoarece  $\frac{n + 2}{2(n + 1)} > \frac{1}{2}$ , obținem inegalitatea cerută în enunț.

6°. Pentru  $n = 1$  avem, într-adevăr, că:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

unde  $a_1 = \frac{1}{2}$  și  $b_1 = \frac{1}{3}$ . Presupunem că  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și calculăm:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_n + \frac{1}{2} & b_n + \frac{a_n}{2} + \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & a_n + \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deci și  $A^{n+1}$  are forma căutată, unde:  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$ ,  $b_{n+1} = b_n + \frac{a_n}{2} + \frac{1}{3}$ .

Din relațiile  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$ , rezultă că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este o progresie aritmetică cu primul termen  $\frac{1}{2}$  și rația  $r = \frac{1}{2}$ . Obținem atunci că:  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = \frac{1}{2} + \frac{n - 1}{2} = \frac{n}{2}$ ,  $(\forall) n \geq 1$ . Rezultă formula:  $b_{n+1} = b_n + \frac{n}{4} + \frac{1}{3}$ .

Scriem relațiile:

$$b_2 = b_1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3};$$

$$b_3 = b_2 + \frac{2}{4} + \frac{1}{3};$$

.....

$$b_n = b_{n-1} + \frac{n-1}{4} + \frac{1}{3},$$

și le adunăm. Obținem:  $b_n = \frac{1 + 2 + \dots + (n - 1)}{4} + \frac{n}{3} = \frac{(n - 1)n}{8} + \frac{n}{3} = \frac{n(3n + 5)}{24}$ .

7°. Din ipoteza  $AB = BA$  rezultă prin inducție matematică că  $A^m \cdot B^s = B^s \cdot A^m$  pentru orice  $m, s \in \mathbb{N}$ . Atunci se arată (eventual tot prin inducție) că are loc formula binomului lui Newton:  $(A + B)^n = A^n + C_n^1 A^{n-1} B + \dots + B^n$ . Prin ipoteză avem  $A^k = 0$  și  $B^l = 0$ . Alegem  $n = k + l$  și aplicăm formula de mai sus:

$$(A + B)^n = A^n + C_n^1 A^{n-1} B + \dots + C_n^l A^{k+1} B^l + C_n^{l+1} A^{k-1} B^{l+1} + \dots + B^n = 0,$$

deoarece  $A^k = A^{k+1} = \dots = A^n = 0$  și  $B^l = B^{l+1} = \dots = B^n = 0$ .

8°. Avem:  $2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2) + (x^2 + y^2) \geq x^2 + y^2 + 2xy$ , deci  $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2 > 1$ , adică  $x^2 + y^2 > \frac{1}{2}$ . *Altă metodă.* Notăm  $x = u + v$ ,  $y = u - v$  (deci  $2u > 1$ ). Atunci  $x^2 + y^2 = (u + v)^2 + (u - v)^2 = 2u^2 + 2v^2 \geq 2u^2 > \frac{1}{2}$ .

9°. Inegalitatea cerută este echivalentă succesiv cu următoarele inegalități:  $2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + zx)$  sau  $(x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 + z^2 - 2xz) + (y^2 + z^2 - 2yz) \geq 0$ , adică  $(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geq 0$ , care este evidentă. Ridicînd la pătrat relația  $x + y + z = 1$  și folosind inegalitatea anterioară, obținem:

$$1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \leq (x^2 + y^2 + z^2) + 2(x^2 + y^2 + z^2),$$

deci  $1 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$ , adică  $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$ .

10°. Dezvoltînd determinantul  $\Delta_n$  după prima linie obținem:

$$\Delta_n = (\alpha + \beta) \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ & 1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha + \beta \end{vmatrix} - \alpha\beta \begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha + \beta) \Delta_{n-1} - \alpha\beta \cdot \Delta_{n-2};$$

(am dezvoltat al doilea determinant după prima coloană). Pentru  $n = 1$  obținem  $\Delta_1 = \alpha + \beta$  și pentru  $n = 2$  avem:  $\Delta_2 = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ , deci formula dată se verifică. Presupunem formula adevărată pînă la  $n - 1$  și să o demonstrăm și pentru  $n$ . Avem:

$$\Delta_n = (\alpha + \beta) \Delta_{n-1} - \alpha\beta \Delta_{n-2} = (\alpha + \beta) (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}) - \alpha\beta (\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}\beta + \dots + \alpha\beta^{n-3} + \beta^{n-2}) = \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \dots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n.$$

11°. Expresia se mai poate scrie sub forma:

$$(1) \quad \frac{x}{y} + \frac{2y}{x-2} + \frac{4(x-2)}{x} + 1.$$

Să observăm că oricare din primii trei termeni este strict pozitiv și produsul lor este constant. Aplicînd inegalitatea mediilor:  $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ , unde  $a, b$  și  $c$  sînt numere strict pozitive, deducem că suma primilor trei termeni este minimă atunci cînd:

$$\frac{x}{y} = \frac{2y}{x-2} = \frac{4(x-2)}{x}.$$

Egalînd cu  $k > 0$  fiecare din aceste rapoarte, obținem:  $x = ky$ ,  $2y = k(x - 2)$ ,  $4(x - 2) = kx$  și înmulțind aceste relații, rezultă  $k^3 = 8$ , deci  $k = 2$ . Rezultă că minimul expresiei se obține prin rezolvarea sistemului  $x = 2y$ ,  $2y = 2(x - 2)$ ,  $4(x - 2) = 2x$ , care ne dă soluția:  $x = 4$ ,  $y = 2$ .



12°. Înlocuim  $z = c - ax - by$  în  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  și obținem:

$$F(x, y) = (a^2 + 1)x^2 + 2abxy + (b^2 + 1)y^2 - 2c(ax + by) + c^2.$$

Prin transformări succesive, avem:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{1}{a^2 + 1} [(a^2 + 1)^2 x^2 + 2a(a^2 + 1)(by - c)x] + (b^2 + 1)y^2 - 2bcy + c^2 = \\ &= \frac{1}{a^2 + 1} [(a^2 + 1)x + a(by - c)]^2 - \frac{a^2(by - c)^2}{a^2 + 1} + (b^2 + 1)y^2 - 2bcy + c^2 = \\ &= \frac{1}{a^2 + 1} [(a^2 + 1)x + a(by - c)]^2 + \frac{1}{a^2 + 1} [(a^2 + b^2 + 1)y^2 - 2bcy + c^2]. \end{aligned}$$

Ultima paranteză se poate scrie:

$$(a^2 + b^2 + 1)y^2 - 2bcy + c^2 = (a^2 + b^2 + 1) \left( y - \frac{bc}{a^2 + b^2 + 1} \right)^2 + \frac{c^2(a^2 + 1)}{a^2 + b^2 + 1}.$$

În final, obținem:

$$F(x, y) = \frac{1}{a^2 + 1} [(a^2 + 1)x + a(by - c)]^2 + \frac{a^2 + b^2 + 1}{a^2 + 1} \left( y - \frac{bc}{a^2 + b^2 + 1} \right)^2 + \frac{c^2}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Acastă funcție are valoarea minimă când cele două paranteze se anulează, deci pentru valorile lui  $x$  și  $y$  care sînt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} (a^2 + 1)x + a(by - c) = 0; \\ y - \frac{bc}{a^2 + b^2 + 1} = 0. \end{cases}$$

Se obține:  $x = \frac{ac}{a^2 + b^2 + 1}$ ;  $y = \frac{bc}{a^2 + b^2 + 1}$ ;  $z = \frac{c}{a^2 + b^2 + 1}$  și minimul expresiei este  $\frac{c^2}{a^2 + b^2 + 1}$ .

13°. Să considerăm ecuația dată în variabila  $x$ , cu parametrii  $y$  și  $m$ . Atunci discriminantul ecuației este  $\Delta = (m + 2)^2$ . Se obțin soluțiile:  $x = m - y + 1$  și  $x = -y - 1$  (a doua nu este număr natural). Rezultă că ecuația are soluții numere naturale:  $x_k = m - k + 1$  și  $y_k = k$ , unde  $k \in \{0, 1, 2, \dots, m + 1\}$ .

14°. Se verifică imediat că  $f(x) = x$  satisface relația dată. Să demonstrăm că este unică. Să presupunem că mai există o funcție  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care satisface relația:

$$(1) \quad g(x)g(y) = xg(y) + yg(x) - xy$$

și  $f \neq g$  ceea ce înseamnă că există  $x_0 \in \mathbb{R}$  astfel încît  $g(x_0) \neq x_0$ . Înlocuim  $x = y = x_0$  în relațiile satisfăcute de  $f$  și  $g$ . Prin scădere obținem:  $(f(x_0) - g(x_0))(f(x_0) + g(x_0) - 2x_0) = 0$ . Înlocuind  $f(x_0) = x_0$ , obținem  $g(x_0) = x_0$ , ceea ce contrazice presupunerea făcută.

15°. Facem substituția  $y = tx$  în cele două ecuații și eliminăm necunoscuta  $x$ . Se obține:  $t^5 - 4t^3 + t^2 - t - 2 = 0$ . Se observă că  $t_1 = 2$  este o soluție a ecuației și avem descompunerea:  $(t - 2)(t^4 + 2t^3 + t + 1) = 0$ . Avînd în vedere că  $x$  și  $y$  sînt numere întregi,  $t$  trebuie să fie rațional pozitiv. Rădăcinile întregi ale ecuației  $t^4 + 2t^3 + t + 1 = 0$  sînt printre divizorii termenului liber, deci eventual  $\pm 1$ , ceea ce nu se verifică. Ecuația  $t^4 + 2t^3 + t + 1$  nu admite nici soluții raționale. Deci singura soluție acceptabilă pentru  $t$  este  $t = 2$ . Înlocuind  $y = 2x$  în prima ecuație, după simplificare obținem  $x = 2k$ . În concluzie, pentru orice  $k$  natural,  $x = 2k$  și  $y = 4k$  verifică cele două ecuații.



16°. Considerăm identitatea:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Înlocuind  $x$  cu  $i$  și cu  $-i$ , obținem:

$$(i - x_1)(i - x_2)(i - x_3)(i - x_4) = 1 - ai - b + ci + d;$$

$$(i + x_1)(i + x_2)(i + x_3)(i + x_4) = 1 + ai - b - ci + d.$$

Înmulțind aceste două relații, obținem relația cerută.

17°. Fie  $x_1, x_2$  și  $x_3$  rădăcinile ecuației date. Scriem relațiile lui Viète:

$$(1) \quad x_1 + x_2 + x_3 = -p;$$

$$(2) \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0;$$

$$(3) \quad x_1x_2x_3 = q^2.$$

Ecuația fiind de gradul III, apar două cazuri: *Cazul 1.* O rădăcină reală  $x_1$  și două rădăcini complexe  $x_2$  și  $x_3$ , complex conjugate, adică  $x_3 = \bar{x}_2$ . Rezultă din (3) că  $x_1$  este pozitivă deoarece  $x_2x_3 = x_2\bar{x}_2 > 0$ .

*Cazul 2.* Toate rădăcinile sînt reale. Din (3) rezultă că una din rădăcini este pozitivă, de exemplu  $x_1 > 0$ . Dacă am avea și  $x_2 > 0$  rezultă din (3) că și  $x_3 > 0$ . Nu putem avea toate rădăcinile strict pozitive din cauza relației (2). Deci și în acest caz avem o singură rădăcină pozitivă. Se poate aplica de asemenea șirul lui Rolle.

18°. Membrul stîng se scrie:

$$[(x + 1)(x + 6)][(x + 2)(x + 3)] = (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 5x + 6).$$

Dacă facem substituția  $x^2 + 6 = y$  obținem ecuația:  $(y + 7x)(y + 5x) = 3x^2$ . Din substituție rezultă  $y > 0$ , iar din ecuație avem  $x \neq 0$ . Împărțind cu  $x^2$  și notînd  $y = tx$ , rezultă ecuația:  $(t + 7)(t + 5) = 3$ , ale cărei soluții sînt:  $t_1 = -4$  și  $t_2 = -8$ . Revenind la substituție, pentru  $t_1 = -4$ , obținem ecuația:  $x^2 + 4x + 6 = 0$ , care are soluțiile complexe:  $x_{1,2} = -2 \pm i\sqrt{2}$ , și pentru  $t_2 = -8$ , rezultă ecuația:  $x^2 + 8x + 6 = 0$ , cu soluțiile:  $x_{3,4} = -4 \pm \sqrt{10}$ .

19°. Suma se poate scrie:

$$F(x) = (x^2 + x^4 + \dots + x^{2n}) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^{2n}}\right) + 2n.$$

Fiecare paranteză este suma unei progresii geometrice cu rația  $x^2$  și respectiv  $\frac{1}{x^2}$ .

Se obține în final:

$$F(x) = \frac{(x^{2n+2} + 1)(x^{2n} - 1)}{(x^2 - 1)x^{2n}} + 2n.$$

20°. Privind trinomul de gradul II în  $x$ , rezultă:  $m^2 - 4y^2 - 4ny - 4 \leq 0$  pentru orice  $y$ , adică  $y^2 + ny + 1 - \frac{m^2}{4} \geq 0$ ; în concluzie,  $m^2 + n^2 \leq 4$ .

21°. Avem, evident,  $\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$  pentru orice  $k \geq 2$ , adică  $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ . Scriind aceste inegalități pentru  $k = 10, 11, 12, \dots, 1000$  și adunîndu-le, rezultă că suma  $S = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{1000^2}$  satisface:  $\frac{1}{10} - \frac{1}{1001} < S < \frac{1}{9} - \frac{1}{1000}$ , adică  $\frac{991}{10010} < S < \frac{991}{9000}$ , deci  $0,099 < S < 0,111$  (făcînd efectiv împărțirea). Aceasta este echivalent cu  $|S - 0,105| < 0,006$ .



22°. a) Notăm  $u = x^2 - x - 2$ ,  $v = 2x + 1$  și ecuația devine  $u^4 + v^4 = (u + v)^4$ , deci  $4u^3v + 6u^2v^2 + 4uv^3 = 0$ , adică  $2uv(2u^2 + 3uv + 2v^2) = 0$ . Rezultă: sau  $u = 0$ , deci  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -1$ ; sau  $v = 0$ , deci  $x_3 = -\frac{1}{2}$ ; sau  $u = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{2}v$  etc.  
b)  $x = 1$  este soluție. Putem presupune  $x \neq 1$  și împărțim inecuația cu  $(x - 1)^2$ , notînd  $u = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$ ; rezultă  $u^2 - u - 2 \geq 0$  etc.

23°. Dacă produsul  $uv$  este constant, suma  $u + v$  este minimă dacă  $u = v$ . În cazul problemei, rezultă (punînd  $u = a \operatorname{tg}^n x$ ,  $v = c \operatorname{tg}^n x$ )  $a \operatorname{tg}^n x = c \operatorname{tg}^n x$ , deci  $\operatorname{tg}^n x = \frac{1}{a}$ . Rezultă  $\operatorname{tg}^n x = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$  și minimul cerut este  $2\sqrt[n]{a}$ .

24°. Deoarece  $a^2 - 1 \geq 0$ ,  $b^2 - 1 \geq 0$  și  $1 - \sqrt{a^2 - 1} > 0$ ,  $1 - \sqrt{b^2 - 1} > 0$ , putem ridica la pătrat. Inegalitatea devine:

$$\frac{a^2 - 2\sqrt{a^2 - 1}}{b^2 - 2\sqrt{b^2 - 1}} > \frac{a^2}{b^2},$$

adică  $b^2\sqrt{a^2 - 1} < a^2\sqrt{b^2 - 1}$ . Ridicînd încă o dată la pătrat, avem de arătat că  $b^4a^2 - b^4 < a^4b^2 - a^4$ , adică  $a^2b^2(b^2 - a^2) < b^4 - a^4$ . Simplificînd cu  $b^2 - a^2 > 0$ , avem de arătat că  $a^2b^2 < a^2 + b^2$ , adică  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} > 1$ , ceea ce este evident,

deoarece  $a^2 < 2$ ,  $b^2 < 2$ , deci  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ .

25°. Din prima inecuație (punînd  $2^x = t$ ), rezultă  $8t + 3t - 33 > 0$ , deci  $t > 3$ , adică  $x > \frac{\ln 3}{\ln 2}$ . Din cea de a doua, rezultă  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ .

Deoarece  $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\ln 3}{\ln 2} < 2 < \frac{7\pi}{4}$ , rezultă  $x \in \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ .

26°. Deci  $x \geq 0$ . Notăm  $\sqrt[3]{x - 1} = t$ , deci  $x = t^3 + 1$  și inecuația devine  $\sqrt{t^3 + 1} - t \geq 1$ , adică  $\sqrt{t^3 + 1} \geq t + 1$ . Deoarece  $x \geq 0$ , rezultă  $t \geq -1$ , deci  $t + 1 \geq 0$  și putem ridica la pătrat:  $t^3 + 1 \geq t^2 + 2t + 1$ ,  $t^3 - t^2 - 2t \geq 0$ , adică  $t(t - 2)(t + 1) \geq 0$ . Așadar: sau  $t \leq 0$ , adică  $x \leq 1$ ; sau  $t \geq 2$ , deci  $x \geq 9$ . În final,  $x \in [0, 1] \cup [9, \infty)$ .

27°. Dacă  $P$  ar fi de grad  $n$ , atunci derivînd de  $n + 1$  ori, s-ar obține o contradicție. Altfel: funcția „sin“ este periodică, iar polinoamele neconstante sînt neperiodice; deci  $P$  ar fi constant, adică „sin“ constantă, absurd.

28°. Rezultă  $x_2 = i$ . Polinomul din membrul întii se divide cu  $X^2 + 1$ . Scriînd că restul este polinomul nul, rezultă, după calcule,  $m = 1$ ,  $n = 1$ , iar citul  $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 = X^2(X^2 + X + 1) + X^2 + X + 1 = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$ .

Rezultă că  $i$ ,  $-i$  sînt rădăcini duble și în plus  $x_{5,6} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ .

29°. Fie  $U$  inversa lui  $I_n - ABAB \Rightarrow U(I_n - ABAB) = I_n$  și  $(I_n - ABAB)U = I_n$ , deci  $U - UABAB = I_n$ . Să notăm  $V = I_n + BUABA$ . După calcule,  $(I_n + BUABA)(I_n - BABA) = I_n + BUABA - BABA - BUABABABA = I_n + BUABA - BABA - B(U - I_n)ABA = I_n + BUABA - BABA - BUABA + BABA = I_n$ ; așadar  $V(I_n - BABA) = I_n$ , deci  $V$  este inversa lui  $I_n - BABA$ .

30°. Ecuația  $\hat{3}\lambda^2 + \hat{5}\lambda + \hat{2} = \hat{0}$  se scrie  $(\hat{3}\lambda + \hat{2})(\lambda + \hat{1}) = \hat{0}$ . Deoarece  $\mathbf{Z}_{13}$  este corp, rezultă că nu are divizori ai lui zero, deci  $\hat{3}\lambda + \hat{2} = \hat{0}$  sau  $\lambda + \hat{1} = \hat{0}$ , de unde  $\lambda = \hat{8}$  sau  $\lambda = \hat{12}$ . Pentru  $\lambda = \hat{12}$ , polinomul  $f$  are gradul I și pentru  $\lambda = \hat{8}$ , are gradul II. Ecuația devine:  $(X^2 + \hat{1})(\hat{2}X + \hat{1}) = 0$ . Se obțin rădăcinile  $\hat{5}$ ,  $\hat{6}$ ,  $\hat{8}$ .





31°. Triunghiurile  $ABD$  și  $ABC$  au aceeași arie, avînd baza comună  $[AB]$  și înălțimile corespunzătoare congruente, deci  $\sigma(ABD) = \sigma(ABC)$  (v. fig. M.C.1). Rezultă  $S_2 = \sigma(ABD) - S_1 = \sigma(ABC) - S_1 = S_4$ . Deoarece triunghiurile  $AOB$  și  $AOD$  au aceeași înălțime din  $A$ , rezultă relația:  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{OB}{OD}$ . Deoarece triunghiurile  $BOC$  și  $DOC$  au aceeași înălțime din  $C$ , rezultă relația:  $\frac{S_4}{S_3} = \frac{OB}{OD}$ . Obținem:  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$ , deci  $S_1 S_3 = S_2 S_4 = S_2^2$ .

32°. Impunem condițiile:  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq 1 - x \leq 1$ ,  $-1 \leq -x \leq 1$ ; rezultă  $x \in [0, 1]$ . Notăm:  $\arccos x = u$ ,  $\arccos(1 - x) = v$  și  $\arccos(-x) = w$ . Deoarece  $x \in [0, 1]$  și  $1 - x \in [0, 1]$ , rezultă  $u$  și  $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , iar  $w \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ .

Avem:  $\cos u = x$ ,  $\cos v = 1 - x$  și  $\cos w = -x$ . Apoi:  $\sin u = +\sqrt{1 - \cos^2 u} = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $\sin v = +\sqrt{1 - \cos^2 v} = \sqrt{1 - (1 - x)^2} = \sqrt{2x - x^2}$ . Ecuația din enunț se scrie sub forma:  $u + v = w$ . Aplicînd funcția cosinus, rezultă:  $\cos(u + v) = \cos w$  sau  $\cos u \cos v - \sin u \sin v = \cos w$ , adică  $x(1 - x) - \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{2x - x^2} = -x$ . Putem scrie:

$$2x - x^2 - \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{2x - x^2} = 0 \text{ sau } \sqrt{2x - x^2} (\sqrt{2x - x^2} - \sqrt{1 - x^2}) = 0$$

(deoarece  $x \in [0, 1]$ ). Obținem ecuațiile:  $\sqrt{2x - x^2} = 0$ , cu soluțiile  $x_1 = 0$  și  $x_2 = 2 \notin [0, 1]$  și  $\sqrt{2x - x^2} = \sqrt{1 - x^2}$ , de unde  $2x - x^2 = 1 - x^2$ , cu soluția  $x_3 = \frac{1}{2}$ . În concluzie, soluțiile ecuației date sînt:  $x = 0$ ;  $x = \frac{1}{2}$ .

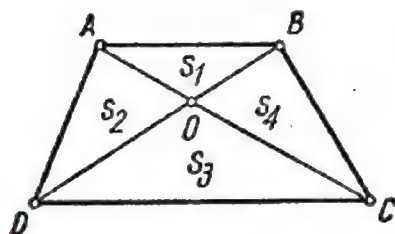


Fig. M.C.1

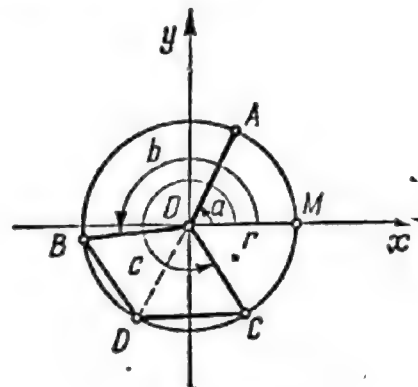


Fig. M.C.2

33°. Vom folosi în rezolvarea problemei numere complexe sub formă trigonometrică și alegem  $OM$  drept axă  $Ox$  (v. fig. M.C.2). Punctelor  $A, B, C$  le corespund numerele complexe:  $z_1 = r(\cos a + i \sin a)$ ,  $z_2 = r(\cos b + i \sin b)$ , respectiv,  $z_3 = r(\cos c + i \sin c)$ . Relațiile din enunț sînt echivalente cu relația:  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ , care se poate scrie sub forma  $z_2 + z_3 = -z_1$ . Dar  $z_2 + z_3$  corespunde vîrfului  $D$  al paralelogramului  $OBDC$  construit pe  $[OB]$  și  $[OC]$ , iar  $-z_1$  corespunde punctului diametral opus lui  $A$  pe cerc. Rezultă că  $D$  aparține cercului de centru  $O$  și este diametral opus lui  $A$ . Rezultă  $OB = OD = BD = OC = r$ , deci  $\triangle OBD$  este echilateral. Atunci  $m(\widehat{BOD}) = 60^\circ$ , deci  $m(\widehat{BOA}) = 120^\circ$ ,  $m(\widehat{AOC}) = 120^\circ$  și  $m(\widehat{BOC}) = 120^\circ$ . Rezultă:  $m(\widehat{BAC}) = m\left(\frac{\widehat{BC}}{2}\right) = 60^\circ$ ,  $m(\widehat{ACB}) = m\left(\frac{\widehat{AB}}{2}\right) = 60^\circ$ , deci  $A, B, C$  sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

34°. Relația  $7 \sin a = 3 \sin(a + b)$  se scrie (succesiv) echivalent:  $4 \sin a = 3(\sin(a + b) - \sin a)$  sau  $4 \sin a = 6 \sin \frac{b}{2} \cos \frac{2a+b}{2}$ . Apoi:  $2 \sin\left(\frac{2a+b}{2} - \frac{b}{2}\right) = 3 \sin \frac{b}{2} \cos \frac{2a+b}{2}$  sau  $2 \sin \frac{2a+b}{2} \cos \frac{b}{2} - 2 \cos \frac{2a+b}{2} \sin \frac{b}{2} = 3 \sin \frac{b}{2} \cos \frac{2a+b}{2}$ , deci  $2 \sin \frac{2a+b}{2} \cos \frac{b}{2} = 5 \sin \frac{b}{2} \cos \frac{2a+b}{2}$ . Deoarece  $\cos \frac{b}{2} \neq 0$ ,  $\cos \frac{2a+b}{2} \neq 0$ , ultima relație poate fi împărțită la  $\cos \frac{b}{2} \cdot \cos \frac{2a+b}{2}$  și obținem relația echivalentă cu cea inițială:  $2 \operatorname{tg} \frac{2a+b}{2} = 5 \operatorname{tg} \frac{b}{2}$ .

35°. Unim  $R$  cu  $P$  și cu  $Q$ . Deoarece  $\widehat{ABP} \equiv \widehat{RBC}$ , rezultă  $\widehat{ABP} + \widehat{ABR} \equiv \widehat{ABR} + \widehat{RBC}$ , deci  $\widehat{PBR} \equiv \widehat{B}$ . Din asemănarea triunghiurilor  $APB$  și  $BRC$  obținem:  $\frac{BP}{BR} = \frac{AB}{BC}$  sau  $\frac{BP}{AB} = \frac{BR}{BC}$  (v. fig. M.C.3). Din cazul II de asemănare, rezultă că  $\triangle PBR \sim \triangle ABC$ . Analog, deoarece  $\widehat{QCA} \equiv \widehat{RCB}$ , rezultă  $\widehat{QCA} + \widehat{ACR} \equiv \widehat{ACR} + \widehat{RCB}$ , deci  $\widehat{QCR} \equiv \widehat{C}$ . Din asemănarea triunghiurilor  $AQC$  și  $BRC$ , obținem:  $\frac{QC}{RC} = \frac{AC}{BC}$  sau  $\frac{QC}{AC} = \frac{RC}{BC}$ . Din cazul II de asemănare rezultă că  $\triangle QCR \sim \triangle ACB$ . Atunci avem:  $\triangle PBR \sim \triangle QRC$ . Dar  $BR \equiv RC$ , deci  $\triangle PBR \equiv \triangle QRC$ . Rezultă  $PB \equiv RQ$  și  $PR \equiv CQ$ . Dar,  $PB \equiv AP$  și  $CQ \equiv AQ$ , deci  $AP \equiv RQ$  și  $AQ \equiv PR$ , adică  $APRQ$  este paralelogram.

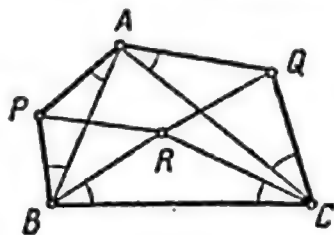


Fig. M.C.3

36°. Din teorema sinusurilor în triunghiul  $ABC$  avem:  $a = 2R \sin A$ ,  $b = 2R \sin B$ ,  $c = 2R \sin C$ . Din teorema sinusurilor în triunghiul  $A'B'C'$  avem:  $a' = 2R' \sin A'$ ,  $b' = 2R' \sin B'$ ,  $c' = 2R' \sin C'$ . Înlocuind în relația dată și ținând seama că  $\hat{A} \equiv \hat{A}'$  rezultă relația:  $\frac{\sin B \sin C}{\sin B' \sin C'} = 1$ , adică  $\sin B \sin C = \sin B' \sin C'$ . Apoi avem:  $\cos(B - C) - \cos(B + C) = \cos(B' - C') - \cos(B' + C')$ . Dar  $B + C = B' + C' = 180 - A$ , deci obținem:  $\cos(B - C) = \cos(B' - C')$ . Rezultă  $B - C = B' - C'$  sau  $B - C = C' - B'$ . Ținând seama că  $B + C = B' + C'$  obținem:  $B = B'$  și  $C = C'$  sau  $B = C'$  și  $B' = C$ . În ambele situații triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$  rezultă asemenea.

37°. Putem scrie inegalitatea astfel:

$2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 - \sin x - \cos 2x > 0$  sau  $(\cos x - \sin x) - (\cos^2 x - \sin^2 x) > 0$ , deci  $(\cos x - \sin x)(1 - \cos x - \sin x) > 0$ . Inecuația obținută este echivalentă cu două sisteme de inecuații:

$$(I) \quad \begin{cases} \cos x - \sin x > 0 \\ 1 - \cos x - \sin x > 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad (II) \quad \begin{cases} \cos x - \sin x < 0 \\ 1 - \cos x - \sin x < 0. \end{cases}$$

Vom rezolva mai întâi ecuațiile  $\cos x - \sin x = 0$  și  $1 - \cos x - \sin x = 0$ . Avem:  $\cos x - \sin x = 0$  sau  $\operatorname{tg} x = 1$ , deci  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Apoi  $1 - \cos x - \sin x = 0$  sau  $\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$ , deci  $2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ , adică  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Obținem:  $x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  sau  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ . Vom studia semnul funcțiilor  $\cos x - \sin x$ , respectiv  $1 - \cos x - \sin x$  pe intervalul  $[0, 2\pi]$  și apoi vom ține seama de periodicitatea funcțiilor  $\sin$  și  $\cos$ . Avem:

$x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$2\pi$
$\cos x - \sin x$	+	0	-	+

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$1 - \cos x - \sin x$	0	-	0	+	+

În intervalul  $[0, 2\pi]$  pentru sistemul (I) avem soluțiile:

$$x \in \left( \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right] \right) \cap \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right), \text{ deci } x \in \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right).$$

În intervalul  $[0, 2\pi]$  pentru sistemul (II) avem soluțiile:

$$x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \cap \left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right). \text{ Rezultă că } x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right).$$

Ținând seama de periodicitate obținem, în final, soluțiile inecuației:

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right) \right).$$

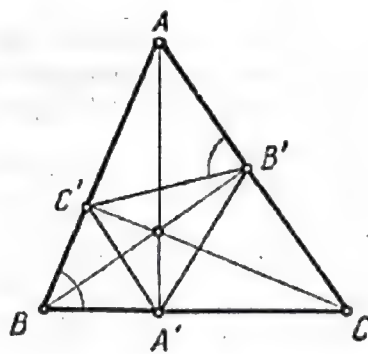


Fig. M.C.4

38°. Fie  $A', B', C'$  picioarele înălțimilor triunghiului  $ABC$ . Deoarece  $m(\widehat{BB'C'}) = m(\widehat{CC'B}) = 90^\circ$ , patrulaterul  $BCB'C'$  este inscriptibil (v. fig. M.C.4). Rezultă  $\widehat{AB'C'} \equiv \widehat{ABC}$ , deci  $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$  (unghiul  $A$  este comun). În  $\triangle ABB'$  avem:  $AB' = c \cos A$ . Din asemănare avem:  $\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \cos A$ , deci  $B'C' = a \cos A$ .



Analog, rezultă  $A'B' = c \cos C$ ,  $A'C' = b \cos B$ . Atunci putem scrie:  $p_1 \cdot R = \frac{R}{2} (a \cos A + b \cos B + c \cos C)$ . Din teorema sinusurilor avem:  $a = 2R \sin A$ ,  $b = 2R \sin B$ ,  $c = 2R \sin C$ , deci obținem:

$$\begin{aligned} p_1 \cdot R &= \frac{R^2}{2} (2 \sin A \cos A + 2 \sin B \cos B + 2 \sin C \cos C) = \frac{R^2}{2} (2 \sin A \cos A + \\ &+ \sin 2B + \sin 2C) = \frac{R^2}{2} (2 \sin A \cos A + 2 \sin (B+C) \cos (B-C)) = \\ &= \frac{R^2}{2} (2 \sin A \cos A + 2 \sin A \cos (B-C)) = R^2 \sin A (\cos (B-C) - \cos (B+C)) = \\ &= 2R^2 \sin A \sin B \sin C = \frac{(2R \sin B)(2R \sin C) \sin A}{2} = \frac{bc \sin A}{2} = S. \end{aligned}$$

39°. Fie  $M$  un punct al locului geometric și fie  $[AB]$ ,  $[CD]$  diametrele în cercurile  $O_1$ ,  $O_2$  determinate de cercul cu centrul în  $M$ . Fie  $r_1$ ,  $r_2$  razele celor două cercuri date și  $d = O_1O_2$ . Deoarece  $[AB]$  este coardă în cercul  $M$  și  $O_1A = O_1B = r_1$ , rezultă că  $MO_1 \perp AB$  (v. fig. M.C.5). Atunci  $MA^2 = MO_1^2 + r_1^2$ . Deoarece  $[CD]$  este coardă în cercul  $M$  și  $O_2C = O_2D = r_2$ , rezultă că  $MO_2 \perp CD$ . Atunci  $MC^2 = MO_2^2 + r_2^2$ .

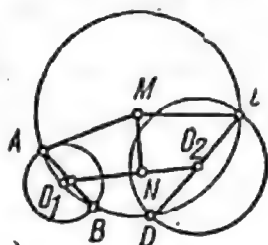


Fig. M.C.5

Dar  $[MA] \equiv [MC]$ , deci  $MO_1^2 + r_1^2 = MO_2^2 + r_2^2$ . Rezultă  $MO_1^2 - MO_2^2 = r_2^2 - r_1^2 = \text{const.}$  Ducem  $MN \perp O_1O_2$  și aplicăm teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul  $MO_1O_2$ . Obținem:  $MO_1^2 = MO_2^2 + d^2 - 2d \cdot O_2N$ , de unde:

$$O_2N = \frac{MO_2^2 - MO_1^2 + d^2}{2d} = \frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d} = \text{const.}$$

Rezultă că punctul  $N$  este fix, deci  $M$  se află pe perpendiculara în  $N$  pe  $O_1O_2$ . Reciproc, fie  $M$  pe perpendiculara în  $N$  pe  $O_1O_2$  (unde  $O_2N = \frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d}$ ). Aplicând teorema lui Pitagora generalizată în  $\triangle MO_1O_2$  obținem:  $MO_1^2 - MO_2^2 = r_2^2 - r_1^2$ . Ducem  $AB \perp O_1M$  ( $A, B \in$  cercului  $O_1$ ) și  $CD \perp O_2M$  ( $C, D \in$  cercului  $O_2$ ). Avem:  $MA^2 = MO_1^2 + r_1^2$  și  $MC^2 = MO_2^2 + r_2^2$ . Din relația anterioară rezultă  $MA^2 \equiv MC^2$ , deci  $MA \equiv MC \equiv MB \equiv MD$ . Atunci cercul cu centrul în  $M$  de rază  $[MA]$  taie cercurile  $O_1$  și  $O_2$  după diametrele  $[AB]$ , respectiv  $[CD]$ , adică  $M$  este punct al locului geometric.

40°. Rezolvăm separat cazurile  $n = 1$  și  $n = 2$ . Pentru  $n = 1$  ecuația devine:  $\cos x - \sin x = 1$  sau  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x = 1$ , adică  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , cu soluțiile:  $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , deci  $x = 2l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$  sau  $x = 2s\pi - \frac{\pi}{2}$ ,  $s \in \mathbb{Z}$ . Pentru  $n = 2$  ecuația devine:  $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$  sau  $\cos 2x = 1$ , deci  $2x = 2k\pi$  și  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Fie acum  $n \geq 3$ . Înlocuind  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  obținem:  $\cos^n x - \sin^n x = \cos^2 x + \sin^2 x$  sau  $\cos^3 x (\cos^{n-2} x - 1) = \sin^2 x (1 + \sin^{n-2} x)$ .

Dar  $\sin^2 x(1 + \sin^{n-2} x) \geq 0$ , iar  $\cos^2 x(\cos^{n-2} x - 1) \leq 0$ , deci egalitatea este posibilă numai în cazul când ambele expresii sînt nule. Obținem sistemul:  $\cos^2 x(\cos^{n-2} x - 1) = 0$  și  $\sin^2 x(1 + \sin^{n-2} x) = 0$ , care este echivalent cu patru sisteme:

$$(I) \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}; (II) \begin{cases} \cos x = 0 \\ 1 + \sin^{n-2} x = 0 \end{cases}; (III) \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos^{n-2} x - 1 = 0 \end{cases}; (IV) \begin{cases} \cos^{n-2} x - 1 = 0 \\ \sin^{n-2} x + 1 = 0 \end{cases}.$$

Deoarece  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  sistemul (I) este imposibil. În cazul sistemului (IV), rezultă  $|\cos x| = 1$  și  $|\sin x| = 1$ , imposibil (deoarece  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ). Pentru rezolvarea sistemelor (II) și (III) considerăm separat cazurile  $n$  par și  $n$  impar. Fie  $n = 2m$ ; atunci  $1 + \sin^{n-2} x > 0$ , deci sistemul (II) este imposibil, iar din sistemul (III) obținem:  $\sin x = 0$ ,  $\cos x = \pm 1$ , deci  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Fie  $n = 2m + 1$ ; din sistemul (II), obținem:  $\cos x = 0$ ,  $\sin x = -1$ , deci  $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , iar din sistemul (III), obținem:  $\sin x = 0$ ,  $\cos x = 1$ , deci  $x = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . În concluzie, pentru orice  $n$  impar ecuația are soluțiile:  $x = 2k\pi$ ,  $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ , cu  $k \in \mathbb{Z}$ , iar pentru orice  $n$  par ecuația are soluțiile:  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

41°. Fie  $A'$ ,  $B'$  picioarele înălțimilor  $h_a$ , respectiv  $h_b$ . În triunghiul  $AA'C$  avem:  $h_a = b \sin C$ , iar în triunghiul  $BB'C$  avem:  $h_b = a \sin C$  (v. fig. M.C.6). Inegalitatea  $a + h_a \geq b + h_b$  se scrie echivalent:  $a + b \sin C \geq b + a \sin C$  sau încă:  $a - b - (\sin C)(a - b) \geq 0$ , adică  $(a - b)(1 - \sin C) \geq 0$ , care este evidentă. Deoarece  $a > b$ , egalitatea are loc doar în cazul  $1 - \sin C = 0$ , deci  $\sin C = 1$ , adică  $m(\hat{C}) = 90^\circ$  (triunghiul  $ABC$  este dreptunghic în  $C$ ).

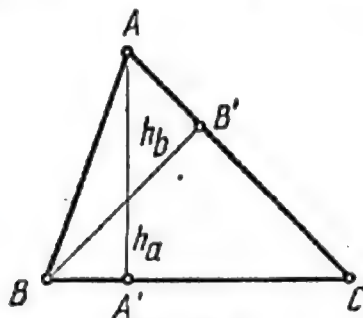


Fig. M.C.6

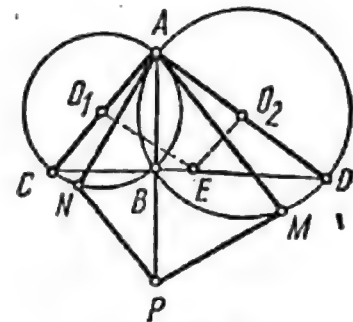


Fig. M.C.7

42°. a) Avem  $m(\widehat{ABC}) = m\left(\frac{\widehat{AC}}{2}\right) = 90^\circ$  și  $m(\widehat{ABD}) = m\left(\frac{\widehat{AD}}{2}\right) = 90^\circ$ . deci

$m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ABD}) = 180^\circ$ , adică  $C, B, D$  sînt coliniare (v. fig. M.C.7).

b) Mediatoarea lui  $[AN]$  este diametrul perpendicular pe coarda  $[AN]$  în cercul  $O_1$ ; fie  $E$  intersecția mediatoarei lui  $[AN]$  cu  $CD$ . Deoarece  $O_1E \perp AN$  și  $DA \perp AN$ , rezultă  $O_1E \parallel AD$ , adică  $O_1E$  este linie mijlocie în triunghiul  $ACD$ , deci  $E$  este mijlocul lui  $[CD]$ . Apoi  $O_2E$  este linie mijlocie în triunghiul  $ACD$ , deci  $O_2E \parallel AC$ , de unde rezultă că  $O_2E \perp AM$  ( $AC \perp AM$ ), adică  $O_2E$  este mediatoarea lui  $[AM]$ . Avem:  $EA \equiv EN$ ,  $EA \equiv EM$  și  $EA \equiv EP$  (deoarece  $CD$  este mediatoarea segmentului  $[AP]$ ). Rezultă că punctele  $A, M, P, N$  sînt egal depărtate de  $E$ , deci se află pe un cerc de centru  $E$  și rază  $[AE]$ .

43°. Avem:  $m(\hat{F}) = 180^\circ - m(\hat{C} + \hat{D})$  și  $m(\hat{E}) = 180^\circ - m(\hat{B} + \hat{C})$ . Fie  $O$  intersecția bisectoarelor unghiurilor  $\widehat{AFB}$  și  $\widehat{AED}$  (v. fig. M.C.8). Atunci  $\widehat{OQA} = \hat{C} + \frac{\hat{E}}{2}$  (unghi exterior triunghiului  $EAQ$ ), deci  $m(\widehat{OQA}) = 90^\circ + m\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) - m\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)$ . Apoi



$m(\widehat{POQ}) = 180^\circ - m\left(\frac{\widehat{F}}{2}\right) - m(\widehat{OQA}) = 180^\circ - 90^\circ + m\left(\frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}\right) - 90^\circ - m\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) +$   
 $+ m\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right) = m\left(\frac{\widehat{B} + \widehat{D}}{2}\right) = 90^\circ$ . În triunghiul  $EMP$ ,  $EO$  este bisectoare și înălțime, deci triunghiul  $EMP$  este isoscel. Rezultă  $EO$  mediană, deci  $OP = OM$ . În triunghiul  $FQN$ ,  $FO$  este bisectoare și înălțime, deci triunghiul  $FQN$  este isoscel. Rezultă  $FO$  mediană, deci  $ON = OQ$ . În concluzie,  $MNPQ$  este paralelogram cu diagonalele perpendiculare, deci este romb.

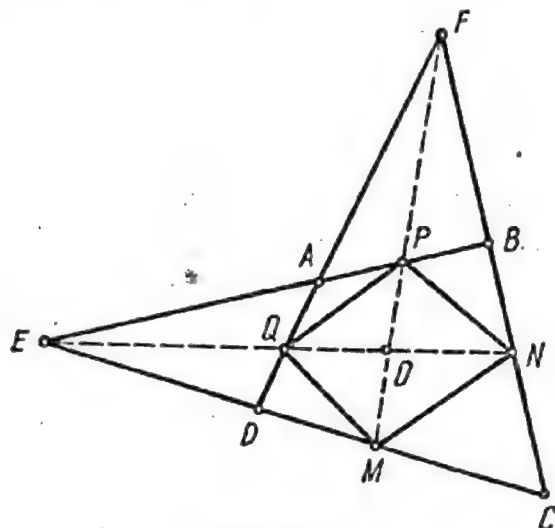


Fig. M.C.8

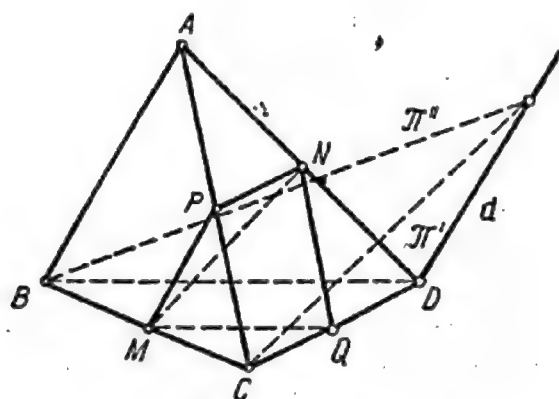


Fig. M.C.9

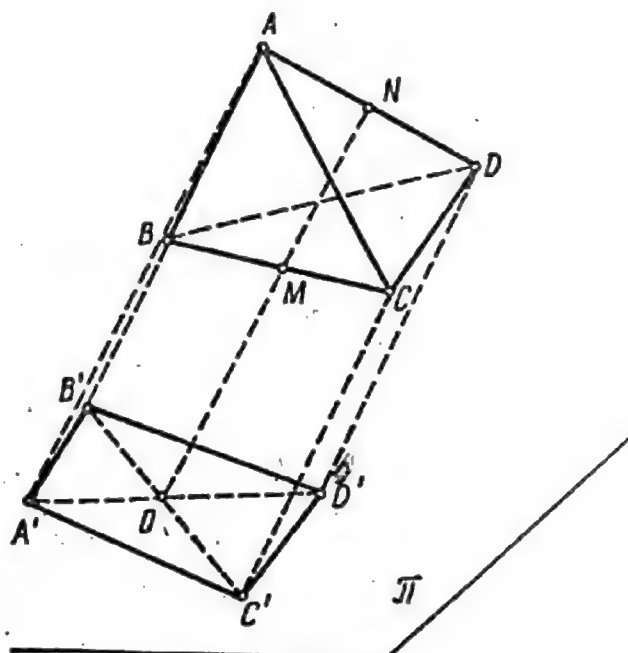


Fig. M.C.10

**44°. a)** Fie  $P$  mijlocul lui  $[AC]$  și  $Q$  mijlocul lui  $[CD]$ . În  $\triangle ABC$ ,  $MP$  este linie mijlocie, deci  $MP \parallel AB$ ; rezultă  $MP \parallel \pi'$  (v. fig. M.C.9). În  $\triangle ACD$ ,  $PN$  este linie mijlocie, deci  $PN \parallel CD$ ; rezultă  $PN \parallel \pi'$ . Atunci planul  $MPN$  este paralel cu  $\pi'$ , deci  $MN \parallel \pi'$ . Analog, în  $\triangle ACD$ ,  $NQ$  este linie mijlocie, deci  $NQ \parallel AC$ ; rezultă  $NQ \parallel \pi''$ . În  $\triangle BCD$ ,  $MQ$  este linie mijlocie, deci  $MQ \parallel BD$ ; rezultă  $MQ \parallel \pi''$ . Atunci planul  $MQN$  este paralel cu planul  $\pi''$ , deci  $MN \parallel \pi''$ .

**b)** Fie  $d$  dreapta de intersecție a planelor  $\pi'$  și  $\pi''$ . Deoarece  $MN \parallel \pi'$  și  $MN \parallel \pi''$ , rezultă  $MN \parallel d$ , deci  $MN \perp \pi$ . Rezultă că punctele  $M$  și  $N$  se proiectează pe planul  $\pi$  în același punct  $O$  (v. fig. M.C.10). Dreapta  $BC$  se proiectează după o dreaptă, deci  $B', O, C'$  sînt coliniare, iar dreapta  $AD$  se proiectează tot după o dreaptă, deci  $A', O, D'$  sînt și ele coliniare. În trapezul  $BCC'B'$ ,  $MO$  este linie mijlocie, deci  $B'O = OC'$ . În trapezul  $ADD'A'$ ,  $NO$  este linie mijlocie, deci  $A'O = OD'$ . Rezultă că  $A'B'D'C'$  este un paralelogram, deoarece diagonalele se taie în părți egale.



45°. Dreptele concurente  $AE, BF$  determină un plan  $(ABG)$ , care taie muchia  $[CD]$  într-un punct  $H$  (v. fig. M.C.11). Deoarece  $AE \perp (BCD)$  și  $AE \subset (ABH)$ , rezultă  $(ABH) \perp (BCD)$ . Cum  $BF \perp (ACD)$  și  $BF \subset (ABH)$ , rezultă  $(ABH) \perp (ACD)$ . Atunci avem  $CD \perp (ABH)$ ; rezultă  $CD \perp AB$ . Fie  $HI$  ( $I \in AB$ ) a treia înălțime în  $\triangle ABH$ . Atunci  $AB \perp HI$  și  $AB \perp CD$  implică  $AB \perp (CDI)$ . Rezultă  $(ABD) \perp (CDI)$ , deci  $CK \subset (CDI)$ . Analog  $(ABC) \perp (CDI)$ , deci  $DL \subset (CDI)$ . Rezultă că  $CK$  și  $DL$  se intersectează într-un punct  $M$  (ortocentrul  $\triangle CDI$ ).

46°. Într-un triunghi  $ABC$  avem:  $(a-b)(m(\hat{A}) - m(\hat{B})) \geq 0$ ;  $(b-c)(m(\hat{B}) - m(\hat{C})) \geq 0$ ;  $(c-a)(m(\hat{C}) - m(\hat{A})) \geq 0$ . Prin adunare obținem:  
 $2[am(\hat{A}) + bm(\hat{B}) + cm(\hat{C})] - [a(m(\hat{B}) + m(\hat{C})) + b(m(\hat{A}) + m(\hat{C})) + c(m(\hat{A}) + m(\hat{B}))] \geq 0$ . Ținând seama că  $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$ , deducem:  $am(\hat{A}) + bm(\hat{B}) + cm(\hat{C}) \geq 60(a+b+c)$ . Avem egalitate dacă și numai dacă primele trei relații devin egalități. Deducem că avem egalitate dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

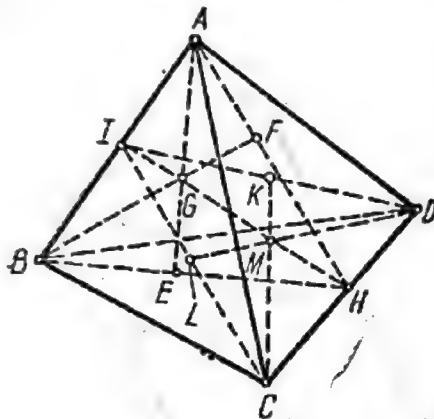


Fig. M.C.11

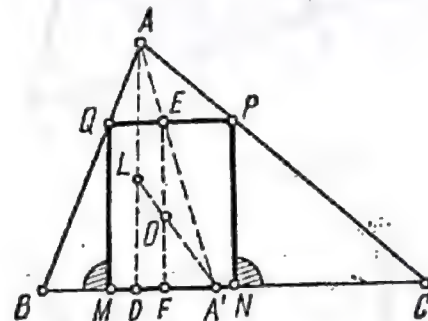


Fig. M.C.12

47°. *Cazul 1.* Fie  $\triangle ABC$  un triunghi și  $MNPQ$  un dreptunghi înscris astfel că  $M$  și  $N$  sînt pe  $[BC]$ ,  $P \in [AC]$  și  $Q \in [AB]$ . Mediana  $[AA']$  intersectează  $[QP]$  în  $E$ . (v. fig. M.C.12). Este evident că  $E$  este mijlocul lui  $[QP]$ . Dacă  $F$  este proiecția lui  $E$  pe  $BC$ , atunci mijlocul  $O$  al segmentului  $[EF]$  este exact intersecția diagonalelor dreptunghiului  $MNPQ$ . Notînd cu  $D$  piciorul înălțimii din  $A$ , constatăm că  $OA'$  intersectează  $[AD]$  în mijlocul  $L$ . Rezultă că  $O$  este un punct care aparține segmentului  $[A'L]$ . Invers, dacă  $O$  este un punct al segmentului  $[A'L]$  se construiește ușor un dreptunghi înscris în triunghiul  $ABC$  cu intersecția diagonalelor în  $O$  (mai întîi se construiește segmentul  $[EF]$ , unde  $F$  este proiecția lui  $O$  pe  $BC$ ). În mod analog putem considera dreptunghiurile care au cîte o latură „așezată” pe celelalte laturi ale triunghiului  $ABC$  și astfel obținem că mulțimea centrelor tuturor dreptunghiurilor este reuniunea a trei segmente.

*Observație.* Cele trei segmente sînt ceviane concurente în triunghiul median  $A'B'C'$  format de mijloacele laturilor triunghiului dat. Ca să verificăm această proprietate este suficient să observăm că punctul  $L$  împarte segmentul  $[B'C']$  în același raport în care  $D$  împarte latura  $[BC]$ .

*Cazul 2.* Considerăm că  $\triangle ABC$  este obtuzunghic avînd  $m(\hat{A}) > 90^\circ$ . În acest caz avem dreptunghiuri înscrise avînd laturile pe  $[BC]$ , dar nu putem avea dreptunghiuri cu două vîrfuri pe  $[AC]$  sau pe  $[AB]$ .

48°. Folosind inegalitatea mediilor și teorema cosinusului deducem:

$$a + b + c = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha} + b + c = \sqrt{(b - c)^2 + 2bc(1 - \cos \alpha)} + b + c \geq \sqrt{2bc(1 - \cos \alpha)} + 2\sqrt{bc}.$$

Rezultă că perimetrul este minim când avem egalitate, ceea ce are loc pentru  $b = c$ , deoarece  $bc = \frac{2S}{\sin \alpha} = \text{const.}$

49°. Presupunem că  $A \in \text{int } \mathcal{C}(O, R)$ . Fie  $M \in \mathcal{C}(O, R)$  și  $\alpha = m(\widehat{OMA})$ . Notăm cu  $Q$  al doilea punct de intersecție dintre  $MA$  și cercul dat, iar  $P$  punctul diametral opus lui  $M$  în  $\mathcal{C}(O, R)$ . Atunci avem  $\cos \alpha = \frac{MQ}{MP}$ . Funcția  $\cos$  este descrescătoare pe intervalul  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Deci  $\alpha$  va fi maxim când  $MQ$  are valoarea minimă.

Observăm că  $MA \cdot QA$  ne dă puterea punctului  $A$ , deci produsul segmentelor  $[MA]$  și  $[QA]$  este constant. Atunci suma  $MQ = MA + AQ$  este minimă când  $AM = AQ$ , adică în cazul că  $OA \perp MQ$ . Valoarea minimă a lui  $\alpha$  este zero și se obține când  $M$  este unul din punctele de intersecție ale dreptei  $OA$  cu cercul  $\mathcal{C}(O, R)$ . Dacă  $A$  este pe cerc sau în exteriorul cercului dat, extremele lui  $\alpha$  se obțin considerând intersecțiile lui  $OA$  cu cercul.

50°. Fie  $A_1 A_2 \dots A_n$  un poligon convex cu  $n$  laturi;  $n \geq 4$ . Atunci suma unghiurilor exterioare poligonului este  $360^\circ$ . Deci avem  $m(\widehat{A_1}) + m(\widehat{A_2}) + \dots + m(\widehat{A_n}) = 360^\circ$ , unde  $m(\widehat{A_k})$  pentru  $k \in \{1, \dots, n\}$  reprezintă măsura unghiului exterior în vîrfurile  $A_k$ . Prin ipoteză avem patru unghiuri exterioare drepte. Dacă  $n > 4$ , ar rezulta că celelalte unghiuri exterioare sînt nule, ceea ce este absurd. Deci  $n = 4$  și poligonul este un dreptunghi.

51°. Avem  $\cos A \cos B + \sin A \sin B \leq 1$ , iar prin utilizarea relației date rezultă  $\cos A \cos B + \sin A \sin B \geq \cos A \cos B + \sin A \sin B \sin C = 1$  (deoarece  $0 \leq \sin C \leq 1$ ). Prin urmare obținem:  $\cos A \cos B + \sin A \sin B = 1$  sau  $\cos(A - B) = 1$ , de unde  $A = B$ , deci triunghiul este isoscel. Mai obținem:  $\sin^2 A (\sin C - 1) = 0$ , care implică  $m(\widehat{C}) = 90^\circ$ . Invers, dacă triunghiul  $ABC$  este dreptunghic rezultă imediat că relația este satisfăcută.

52°. Din formula  $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$  rezultă:  $\sin A + \sin B \leq 2 \sin \frac{A+B}{2}$ , așa încît membrul stîng al inegalității se poate scrie:

$$E = \sin A + \sin B + \sin C + \sin D \leq 2 \sin \frac{A+B}{2} + 2 \sin \frac{C+D}{2} \leq 4 \sin \frac{A+B+C+D}{4}.$$

Avem egalitate dacă și numai dacă  $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D}$ , deci în cazul cînd  $ABCD$  este dreptunghi.

53°. Din  $(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2 \geq 0$ , rezultă: (1)  $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x \geq 2$ . Pe de altă parte, avem: (2)  $1 + |\cos x| \cos^2 x \leq 1 + 1 = 2$ . Rezultă că orice soluție a ecuației trebuie să satisfacă simultan (1) și (2) cu semnul egal. Inegalitatea (1) devine egalitate pentru  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , care nu satisface însă a doua egalitate din (2).

54°. Dacă triunghiul este obtuzunghic cu unghiul obtuz  $A$  avem  $\cos A < 0$ ,  $\cos B > 0$ ,  $\cos C > 0$ , deci inegalitatea este trivial satisfăcută. Dacă triunghiul este dreptunghic, de asemenea inegalitatea este satisfăcută deoarece membrul stîng se anulează. În cazul unui triunghi ascuțitunghic toți factorii din expresia



sînt pozitivi, așa încît putem aplica inegalitatea mediilor. Să observăm că membrul din stînga se poate scrie sub forma:

$$\left(\frac{\cos A}{\sin B \sin C}\right) \cdot \left(\frac{\cos B}{\sin A \sin C}\right) \cdot \left(\frac{\cos C}{\sin A \sin B}\right)$$

și să verificăm că suma celor trei factori este o constantă. Într-adevăr, expresia:

$$E = \frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin A \sin C} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B}$$

se mai poate scrie sub forma:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A \sin B \sin C}.$$

Pe de altă parte,  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$ , deci  $E = 2$ .

Reamintim inegalitatea mediilor:  $3\sqrt[3]{xyz} \leq x + y + z$ , în care  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ .

Înlocuind  $x = \frac{\cos A}{\sin B \sin C}$ ,  $y = \frac{\cos B}{\sin A \sin C}$ ,  $z = \frac{\cos C}{\sin A \sin B}$  în inegalitatea mediilor, obținem inegalitatea cerută. Avem egalitate dacă și numai dacă  $x = y = z$ . Rezultă imediat că egalitatea are loc în cazul triunghiului echilateral.

55°. i) Rezultă din teorema sinusurilor.

ii) Notînd cu  $S$  aria triunghiului avem  $2S = ah_a = bh_b = ch_c$ . Din relația  $2b = a + c$  deducem:  $\frac{4S}{h_b} = \frac{2S}{h_a} + \frac{2S}{h_c}$ .

56°. Fie  $x$  lungimea bazei și  $y$  lungimea comună a laturilor congruente. Avem imediat  $x = 2y \cos 15^\circ$  și astfel obținem relația:

$$2y + 2y \cos 15^\circ = 4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

Deducem  $y = 2$ , deci  $AB = AC = 2$  și  $BC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ . Aria triunghiului este:

$$\sigma[ABC] = \frac{1}{2} y^2 \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

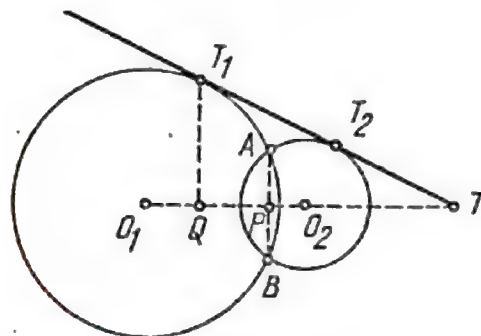


Fig. M.C.13

57°. Să notăm  $x = O_1P$  și  $y = O_2P$ . Punctul  $P$  are puteri egale față de cele două cercuri (v. fig. M.C.13), așa încît rezultă relația:

$$(R_1 + x)(R_1 - x) = (R_2 + y)(R_2 - y).$$

Ținînd seama că  $x + y = d$ , deducem ușor, din aceste două relații:

$$x = \frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{2d}; \quad y = \frac{d^2 + R_2^2 - R_1^2}{2d}.$$



În ipoteza că  $R_1 > R_2$ , să notăm cu  $T$  intersecția lui  $O_1O_2$  cu  $T_1T_2$ . Fie  $Q$  proiecția lui  $T_1$  pe  $O_1O_2$ . Folosind asemănarea triunghiurilor dreptunghice  $TO_1T_1$  și  $TO_2T_2$  obținem:

$$O_1T = \frac{R_1d}{R_1 - R_2} \text{ și } O_2T = \frac{R_2d}{R_1 - R_2}.$$

Mai rezultă:

$$O_1Q = \frac{O_1T_1^2}{O_1T} = \frac{R_1(R_1 - R_2)}{d}.$$

Folosind teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul  $PO_1T_1$  obținem:

$$T_1P^2 = \left( \frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{2d} \right)^2 + R_1^2 - \frac{(d^2 + R_1^2 - R_2^2)(R_1 - R_2)R_1}{d^2}.$$

Analog se calculează  $T_2P$ . Din trapezul dreptunghic  $O_1T_1T_2O_2$  se calculează ușor  $T_1T_2$ .

58°. Fie  $P$  un punct situat pe mediana  $[AD]$  a triunghiului  $ABC$  și  $AD = m$ ,  $PA = x$ ,  $PD = m - x$ . Din formula lungimii medianei rezultă:  $PB^2 + PC^2 = 2(m - x)^2 + \frac{a^2}{2}$ , unde am notat  $BC = a$ . Avem de găsit minimul expresiei:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = x^2 + 2(m - x)^2 + \frac{a^2}{2},$$

care este un trinom de gradul II în variabila  $x$ . Rezultă că minimumul se realizează pentru  $x = \frac{2m}{3}$ , deci când  $P$  este centrul de greutate al triunghiului.

59°. Avem  $\widehat{A'AB'} = \frac{1}{2}(A + B)$ , așa încît aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul  $AA'B'$  deducem: (1)  $A'B' = 2R \sin \frac{1}{2}(A + B)$ , unde  $R$  este raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$  (v. fig. M.C.14). Pe de altă parte, avem  $\widehat{A'IB'} = 180^\circ - \frac{1}{2}(A + B)$ . Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul  $IA'B'$ , deducem  $A'B' = 2R' \sin \widehat{A'IB'}$  sau (2)  $A'B' = 2R' \sin \frac{1}{2}(A + B)$ . Comparînd (1) cu (2), obținem  $R = R'$ .

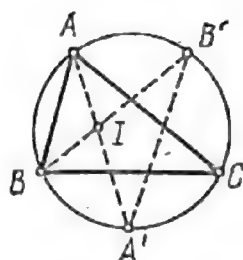


Fig. M.C.14

60°. Fie  $ABCD$  un patrulater inscriptibil. Patrulaterul are cel puțin un unghi ascuțit, dacă nu este dreptunghi. Presupunem că  $m(\widehat{BAD}) < 90^\circ$ . Fie  $B'$  proiecția lui  $B$  pe  $AD$  și  $B''$  proiecția sa pe  $CD$ . Prin ipoteza făcută  $B' \in [AD]$  și  $B'' \notin [DC]$  deoarece  $m(\widehat{BAD}) < 90^\circ$  și  $m(\widehat{BCD}) > 0$  avînd în vedere că  $ABCD$

este inscriptibil. Aplicând teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile  $ABD$  și  $BCD$  obținem (v. fig. M.C.15):

$$(1) \quad BD^2 = a^2 + d^2 - 2d \cdot AB';$$

$$(2) \quad BD^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot CB'';$$

(am notat cu  $a, b, c$  și  $d$  lungimea laturilor  $[AB], [BC], [CD], [DA]$  respectiv). Din asemănarea triunghiurilor  $ABB'$  și  $BCB''$  deducem  $\frac{AB'}{CB''} = \frac{a}{b}$ . Înmulțim (1) cu  $cb$  și (2) cu  $da$ , apoi le adunăm. Rezultă:  $BD^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}$ . La fel se obține  $AC^2$ .

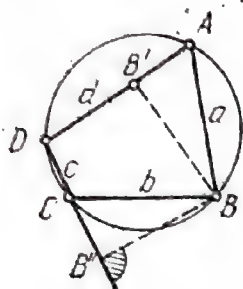


Fig. M.C.15

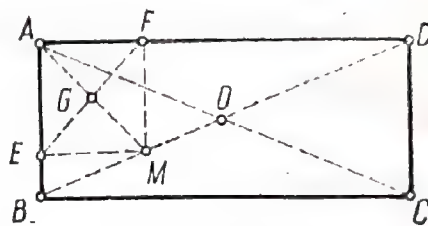


Fig. M.C.16

61°. Fie  $ABCD$  un trapez unde  $AB \parallel CD$ . Notăm  $a = AB$ ,  $b = CD$ ,  $c = BC$ ,  $d = AD$ . Aplicând teorema cosinurilor în triunghiurile  $ABC$  și  $DBC$  obținem:

$$(1) \quad a^2 + d^2 - 2ad \cos A = c^2 + b^2 - 2bc \cos C.$$

În mod analog obținem:

$$(2) \quad a^2 + c^2 - 2ac \cos B = b^2 + d^2 - 2bd \cos D.$$

Pe de altă parte avem:  $\cos C = -\cos B$  și  $\cos D = -\cos A$ , așa încît (1) și (2) ne dau sistemul:

$$(3) \quad \begin{cases} 2ad \cos A + 2bc \cos B = a^2 + d^2 - b^2 - c^2; \\ 2bd \cos A + 2ac \cos B = a^2 + c^2 - b^2 - d^2. \end{cases}$$

Eliminăm  $\cos B$  din (3) și obținem:

$$2d(a^2 - b^2) \cos A = (a + b)[(a - b)^2 + (d + c)(d - c)],$$

$$\text{de unde } \cos A = \frac{(a - b)^2 + (d + c)(d - c)}{2d(a - b)} \text{ etc.}$$

62°. Considerăm cazul cînd se dau virfurile  $B$  și  $C$ . Atunci rezultă că latura  $[BC]$  are lungimea  $a = BC$  constantă și în consecință  $b^2 + c^2$  este o constantă. Din teorema medianei,  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ , deducem că  $m_a$  este o constantă.

Avînd în vedere că piciorul medianei din  $A$  este un punct fix (mijlocul lui  $[BC]$ ) deducem că  $A$  descrie un cerc cu centrul în mijlocul lui  $[BC]$  și rază egală cu  $m_a$ . Dacă  $m_a$  este jumătate din lungimea laturii  $[BC]$ , unghiul din  $A$  este drept. În acest caz se exclude din locul geometric punctele  $B$  și  $C$  care aparțin cercului. Să considerăm acum cazul cînd se dau virfurile  $A$  și  $C$ . Atunci avem determinată latura  $[AC]$  de lungime  $b$ . Din ipoteză rezultă că  $c^2 - a^2$  este o constantă. În acest caz, virful  $B$  descrie o dreaptă.

63°. Alegînd, în particular,  $M = O$  rezultă  $OC \perp EF$  dacă  $OC \perp BD$  (deoarece  $EF \parallel BD$ ), deci  $ABCD$  este un pătrat (v. fig. M.C.16). Reciproc, dacă

$ABCD$  este un pătrat, fie  $G$  intersecția diagonalelor dreptunghiului  $AEMF$ . Rezultă că  $OG \parallel MC$  și  $OG = \frac{1}{2} MC = \frac{1}{2} AM = \frac{1}{2} EF$ , deci punctul  $O$  se află pe cercul circumscris dreptunghiului  $AEMF$ . Dar  $m(\widehat{EAO}) = m(\widehat{\frac{EO}{2}})$  și  $m(\widehat{OAF}) = m(\widehat{\frac{OF}{2}})$ , deci  $\widehat{EO} = \widehat{OF}$ . Rezultă  $OG \perp EF$ , prin urmare  $MC \perp EF$ .

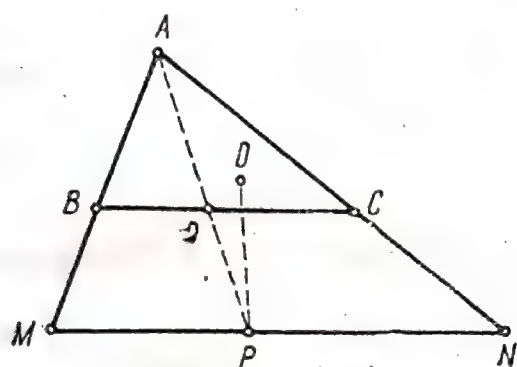


Fig. M.C.17

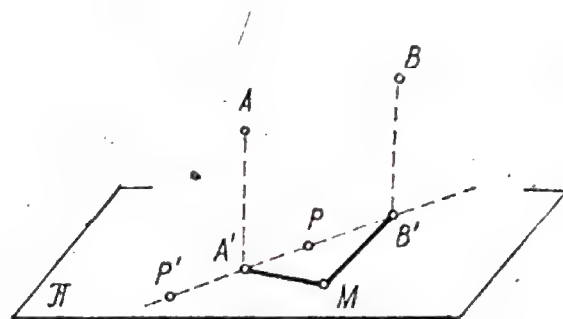


Fig. M.C.18

64°. Fie  $P$  mijlocul lui  $[MN]$ . Rezultă că punctul  $\{D\} = BC \cap AP$  este mijlocul lui  $[BC]$ . Din ipoteză rezultă că  $OP$  este mediatoarea lui  $[MN]$ , așa încît  $OP \perp BC$  (v. fig. M.C.17). Rezultă că  $P$  este intersecția lui  $AD$  cu perpendiculara din  $O$  pe  $BC$ . Punctele  $M$  și  $N$  sînt intersecțiile cu laturile  $[AB]$  și  $[AC]$  ale paralelei prin  $P$  la  $BC$ . În cazul că  $P$  este determinat avem soluție unică. Dacă triunghiul  $ABC$  este isoscel ( $AB = AC$ ) punctul  $P$  nu este determinat dacă  $O \in AD$  (orice paralelă la  $BC$  dă o soluție) iar dacă  $O \notin AD$ , nu avem soluție.

65°. Dacă  $P$  este proiecția lui  $A$  pe planul  $\pi$ , locul geometric este exact punctul  $P$ . Presupunem că proiecția lui  $A$  pe planul este un punct  $B \neq P$ . Fie  $d$  o dreaptă în  $\pi$  care trece prin  $P$  și  $M$  proiecția lui  $A$  pe  $d$ . Aplicînd teorema celor trei perpendiculare deducem că  $BM \perp PM$ . Punctele  $B$  și  $P$  fiind fixe, deducem că  $M$  descrie cercul de diametru  $[PB]$ .

66°. Din asemănarea triunghiurilor  $AMA'$  și  $BMB'$  rezultă  $\frac{MA'}{MB'} = k$ . Bisectoarea unghiului  $A'MB'$  intersectează  $[A'B']$  în punctul  $P$  iar bisectoarea exterioară acestui unghi intersectează  $A'B'$  în  $P'$ . Avem:  $\frac{A'P}{B'P} = \frac{A'P'}{B'P'} = k$ . Punctele  $P$  și  $P'$  sînt fixe și  $m(\widehat{PMP'}) = 90^\circ$ . Deducem că locul este cercul de diametru  $[PP']$ ; v. fig. M.C.18.

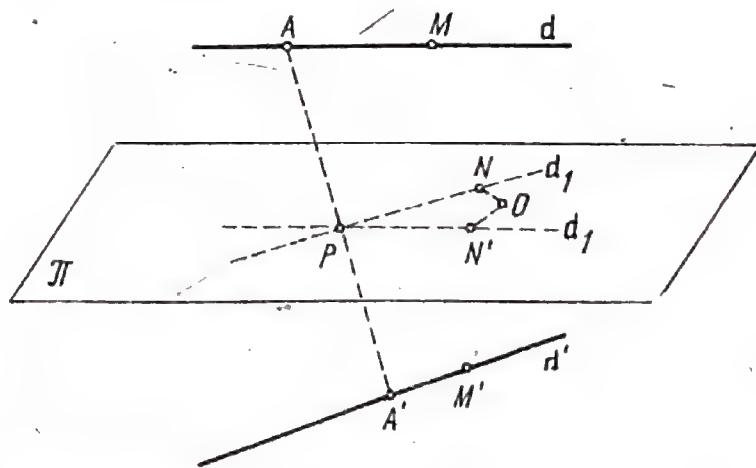


Fig. M.C.19



67°. Perpendiculara comună  $AA'$  ( $A \in d$ ,  $A' \in d'$ ) intersectează planul  $\pi$  în punctul  $P$  (v. fig. M.C.19). Proiecțiile  $(d_1)$  și  $(d'_1)$  ale dreptelor  $(d)$  și  $(d')$  pe planul  $\pi$  se intersectează în  $P$ . Fie  $M$  și  $M'$  punctele de tangență ale sferei de centru  $O \in \pi$  cu  $(d)$ , respectiv  $(d')$ . Notăm cu  $N$  și  $N'$  proiecțiile lui  $O$  pe  $(d_1)$ , respectiv  $(d'_1)$ . Avem  $OM = OM'$  dacă și numai dacă  $ON = ON'$  (din congruența triunghiurilor  $OMN$  și  $OM'N'$ ). Rezultă că  $O$  este situat pe bisectoarea unghiului  $\widehat{NPN'}$ . Deducem că locul căutat este format din bisectoarele unghiurilor determinate de dreptele  $(d_1)$  și  $(d'_1)$ . Dacă  $d \parallel d'$ , dreptele  $(d_1)$  și  $(d'_1)$  sînt de asemenea paralele și în acest caz locul este o dreaptă din  $\pi$  paralelă cu  $(d_1)$  și  $(d'_1)$  avînd distanțele egale la aceste drepte.

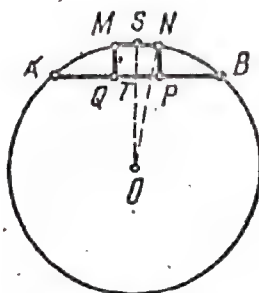


Fig. M.C.19

68°. Fie  $x$  distanța de la centrul sferei la planul de secțiune  $\pi$ . Raza cercului de intersecție a planului  $\pi$  cu sfera  $\mathcal{S}(O, R)$  este  $r = \sqrt{R^2 - x^2}$ . Diferența ariilor celor două calote sferice este  $2\pi R(R+x) - 2\pi R(R-x)$ , iar aria cercului este  $\pi(R^2 - x^2)$ . Rezultă că  $x$  satisface ecuația:  $4\pi Rx = \pi(R^2 - x^2)$ . Soluția reală acceptabilă este:  $x = R(\sqrt{5} - 2)$ .

69°. Fie  $MNPQ$  pătratul cerut și  $MN = x$  ( $P, Q$  pe coarda  $AB$ ). Fie  $S$  mijlocul lui  $MN$  și  $T$  mijlocul lui  $PQ$ . Se consideră  $\triangle OSN$ , în care  $OS = ST + OT = x + \frac{R\sqrt{3}}{2}$ . Scriind că  $ON^2 = OS^2 + SN^2$ , rezultă că  $R^2 = \left(x + \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{4}$  etc.

70°. Avem:  $AB + CD = (AM + MB) + (CP + DP) = (AQ + BN) + (DQ + CN) = (AQ + DQ) + (BN + CN) = AD + BC$ . Fie apoi  $E = AC \cap MP$  și  $m(\widehat{AMP}) = \alpha$ . Atunci avem  $m(\widehat{MPC}) = \pi - \alpha$  și  $\frac{AE}{EC} = \frac{AM}{PC}$ . În același raport  $AC$  taie  $NQ$ , deci  $AC, MP, NQ$  sînt concurente etc.

71°. Fie  $O_1, O_2$  centrele,  $O_1O_2 = a$  și  $\widehat{O_1AO_2} = \alpha$ . Atunci  $m(\widehat{BAC}) = \frac{\alpha}{2}$ . Ducem  $O_2M \parallel BC$ ,  $M \in O_1B$ , deci  $BC = O_2M = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$ . Din  $\triangle AO_1O_2$ ,  $\cos \alpha = \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2Rr}$  și raza cerută este  $\frac{BC}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$  și după calcule, este egală cu  $\sqrt{Rr}$ .

72°. Se verifică mai întîi prin inducție că:

$$|\sin a_1 \sin a_2 \dots \sin a_n| + |\cos a_1 \cos a_2 \dots \cos a_n| \leq 1,$$

pentru  $n \geq 2$ . Pasul de inducție este imediat, căci:

$$|\sin a_1 \dots \sin a_n \sin a_{n+1}| + |\cos a_1 \dots \cos a_n \cos a_{n+1}| = |\sin a_1 \dots \sin a_n| \cdot |\sin a_{n+1}| + |\cos a_1 \dots \cos a_n| \cdot |\cos a_{n+1}| \leq |\sin a_1 \dots \sin a_n| + |\cos a_1 \dots \cos a_n| \leq 1;$$

iar pentru  $n = 2$ , se consideră diverse cazuri, care conduc la  $\cos(a_1 \pm a_2) \leq 1$

sau  $-\cos(a_1 \pm a_2) \leq 1$ , inegalități evidente. Deoarece  $x \leq |x|$ , pentru orice  $x$  real, rezultă:

$$\sin a_1 \sin a_2 \dots \sin a_n + \cos a_1 \cos a_2 \dots \cos a_n \leq |\sin a_1 \dots \sin a_n + \cos a_1 \dots \cos a_n| \leq |\sin a_1 \dots \sin a_n| + |\cos a_1 \dots \cos a_n| \leq 1.$$

73°. Scriem  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x)$  și prima inegalitate devine:

$$\sin^2 x + \cos^2 x \leq 2 \sin^2 x + 6 \sin x \cos x + 10 \cos^2 x, \text{ adică } \sin^2 x + 6 \sin x \cos x + 9 \cos^2 x \geq 0, \text{ deci } (\sin x + 3 \cos x)^2 \geq 0. \text{ Similar, } \frac{11}{2} = \frac{11}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x) \text{ etc.}$$

O generalizare este să determinăm marginile lui  $f(x) = a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$  etc.

74°. Fie  $P' = VP \cap AD$ ,  $Q' = VQ \cap BC$ . Planele  $VBD$  și  $VP'Q'$  se intersectează după dreapta  $VL$ , unde  $L = BD \cap P'Q'$ . Punctul cerut este intersecția lui  $PQ$  cu  $VL$ .

75°. Fie  $P(\lambda, 0)$ ,  $Q(0, \mu)$  și  $\lambda + \mu = a$  (presupunem  $\lambda > 0$ ,  $\mu > 0$ );  $m_{PQ} = -\frac{\mu}{\lambda}$ , deci ecuația perpendicularei din  $R$  pe  $PQ$  va fi  $y - \mu = \frac{\lambda}{\mu}(x - \lambda)$ , adică  $(a - \lambda)(y - a + \lambda) = \lambda(x - \lambda)$  sau, echivalent,  $\lambda x + (\lambda - a)y - 2a\lambda + a^2 = 0$ . Dacă  $(x_0, y_0)$  este punctul fix, rezultă că pentru orice  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda x_0 + (\lambda - a)y_0 - 2a\lambda + a^2 = 0$ , adică  $\lambda(x_0 + y_0 - 2a) + a^2 - ay_0 = 0$ , de unde  $x_0 + y_0 - 2a = 0$  și  $a^2 - ay_0 = 0 \Rightarrow x_0 = a$ ,  $y_0 = a$ .

76°. Cercul  $\gamma$  are ecuația de forma  $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ . Axa radicală se obține prin scăderea ecuațiilor lui  $\odot$  și  $\gamma$ , deci are ecuația  $(m+1)x + (n+1)y + p+2 = 0$  cu  $m, n, p \in \mathbb{R}$ . Condiția să coincidă cu  $D$  este  $\frac{m+1}{2} = \frac{n+1}{2} = \frac{p+2}{2}$ , deci  $n = m$ ,  $p = -m - 3$ . Deci ecuația comună a cercurilor  $\gamma$  va fi  $x^2 + y^2 + mx + my - m - 3 = 0$ ; centrele lor au coordonatele  $x = -\frac{m}{2}$ ,  $y = -\frac{m}{2}$  și sînt situate pe dreapta  $y = x$ .

77°. Avem:

$$a_n = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2n-1) \cdot 2n}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n}.$$

Atunci  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$ , deci  $a_{n+1} < a_n$ , adică  $(a_n)$  este descrescător. Rezultă

$0 < a_n \leq a_1 = \frac{1}{2}$ , deci  $(a_n)$  este mărginit. Atunci șirul  $(a_n)$  este convergent.

Putem scrie:

$$a_n = \frac{\sqrt{1} \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{4} \cdot \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}}{6} \dots \frac{\sqrt{2n-3} \cdot \sqrt{2n-1}}{2n-2} \cdot \frac{\sqrt{2n-1}}{2n}.$$

Dar  $\frac{\sqrt{1} \cdot \sqrt{3}}{2} < 1$ ,  $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{4} < 1$ , ...,  $\frac{\sqrt{2n-3} \cdot \sqrt{2n-1}}{2n-2} < 1$  (deoarece media geometrică este mai mică decît media aritmetică), deci obținem:

$$a_n < \frac{\sqrt{2n-1}}{2n}. \text{ Cum } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n-1}}{2n} = 0, \text{ rezultă } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

78°. Avem:

$$\sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) = \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1} - \pi n + \pi n) = (-1)^n \sin \pi(\sqrt{n^2 + 1} - n) = (-1)^n \cdot \sin \left( \pi \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \right) = (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n}. \text{ Dar } \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \rightarrow 0, \text{ deci}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) = 0.$$

79°. Înmulțind relațiile:  $a_2 = \alpha a + \beta$ ,  $a_3 = \alpha a_2 + \beta$ , ...,  $a_{n-1} = \alpha a_{n-2} + \beta$ ,  $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta$  respectiv, cu  $\alpha^{n-2}$ ,  $\alpha^{n-3}$ , ...,  $\alpha$ , 1 obținem:

$$\begin{aligned}\alpha^{n-2}a_2 &= \alpha^{n-1}a + \alpha^{n-2}\beta; \\ \alpha^{n-3}a_3 &= \alpha^{n-2}a_2 + \alpha^{n-3}\beta; \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha a_{n-1} &= \alpha^2 a_{n-2} + \alpha\beta; \\ a_n &= \alpha a_{n-1} + \beta.\end{aligned}$$

Adunând cele  $(n - 1)$  relații obținute și reducând termenii, rezultă:

$$a_n = a \cdot \alpha^{n-1} + \beta(1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-2}) = a \cdot \alpha^{n-1} + \beta \cdot \frac{1 - \alpha^{n-1}}{1 - \alpha}$$

Deoarece  $|\alpha| < 1$ , avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{n-1} = 0$ , deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\beta}{1 - \alpha}$ .

80°. Pentru orice  $k = 1, 2, \dots, n$  avem dubla inegalitate:

$$\frac{1}{2^n + n} \leq \frac{1}{2^n + k} \leq \frac{1}{2^n + 1}.$$

Rezultă inegalitățile:

$$\frac{C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n}{2^n + n} \leq \frac{C_n^1}{2^n + 1} + \dots + \frac{C_n^n}{2^n + n} \leq \frac{C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n}{2^n + 1}.$$

Notînd șirul dat cu  $a_n$ , avem:  $\frac{2^n - 1}{2^n + n} \leq a_n \leq \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$ . Dar,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{n}{2^n}} = 1$$

$$\text{și } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^n}} = 1, \text{ deci } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

81°. Avem:  $a_0 = 1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , deci  $a_1 = \sin a_0 \in (0, 1) \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Presupunem că  $a_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  și atunci rezultă  $a_{n+1} = \sin a_n \in (0, 1) \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , deci  $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$ ,  $(\forall) n \geq 0$ , adică  $(a_n)$  este mărginit. Pentru orice  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  avem  $\sin x < x$ , deci  $a_{n+1} = \sin a_n < a_n$ , adică șirul  $(a_n)$  este descrescător. Rezultă  $(a_n)$  convergent și fie  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Trecînd la limită în relația  $a_{n+1} = \sin a_n$  obținem:  $l = \sin l$ . Dar ecuația  $l = \sin l$  are singura soluție  $l = 0$ , deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .



82°. Considerăm funcția ajutătoare  $f: \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x}$  și calculăm  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Aplicând l'Hôpital de două ori rezultă:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin^2 x + 2x^2 \sin x \cos x}{2x - 2 \sin x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin^2 x + x^2 \sin 2x}{2x - \sin 2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x + 4x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x}{2 - 2 \cos 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + 2x \sin 2x + x^2 \cos 2x}{2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \cos 2x \right) = \\ &= \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 3 \quad \left( \text{deoarece } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \right). \end{aligned}$$

Alegând în particular șirul  $x_n \rightarrow 0$ , rezultă că:

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 \sin^2 x_n}{x_n^2 - \sin^2 x_n} \rightarrow 3, \text{ deci } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 \sin^2 x_n}{x_n^2 - \sin^2 x_n} = 3.$$

83°. Observăm că  $\left(x^2 \sin \frac{1}{x^2}\right)' = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ , pentru  $x \neq 0$ . Dacă

$f$  are primitive, atunci primitivele sale au forma:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} + C_1 & \text{dacă } x \in (0, 1], \\ C_2 & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

deci pentru  $x \neq 0$  avem într-adevăr  $F'(x) = f(x)$ . Funcția  $F$  trebuie să fie continuă în punctul  $x = 0$  (fiind derivabilă), deci  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = C_2$ . Dar  $0 \leq x^2 \left| \sin \frac{1}{x^2} \right| \leq x^2$ ,

deci  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = C_1$ . Se obține condiția  $C_1 = C_2 = C$  și  $F$  are forma:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} + C & \text{dacă } x \in (0, 1], \\ C & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Avem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \sin \frac{1}{x^2} = 0,$$

deci există  $F'(0)$  și avem  $F'(0) = f(0) = 0$ . Rezultă că  $f$  are primitive pe  $[0, 1]$  și acestea au forma indicată mai sus. Funcția  $f$  nu este integrabilă pe  $[0, 1]$  deoa-

rece nu este mărginită pe  $[0, 1]$ . Într-adevăr, alegînd şirul  $x_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}} \rightarrow 0$ ,  $x_n \in (0, 1)$ , obţinem:  $f(x_n) = 2\sqrt{(2n+1)\pi} \rightarrow +\infty$ , deci  $f$  nu este mărginită pe  $[0, 1]$ .

84°. Avem:  $f'(x) = \left| \cos \frac{1}{x} \right| \cdot \frac{1}{x^2} \geq 0$ , [pentru  $x \in \left[\frac{1}{\pi}, \infty\right)$ , deci funcţia  $f$  este crescătoare. Pentru  $t \in \left[\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$ , avem  $\frac{1}{t} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ , deci  $\left| \cos \frac{1}{t} \right| = -\cos \frac{1}{t}$ . Obţinem:

$$f(x) = \int_{1/\pi}^x \cos \frac{1}{t} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \sin \frac{1}{t} \Big|_{1/\pi}^x = \sin \frac{1}{x} \quad \text{dacă } x \in \left[\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right].$$

Pentru  $x > \frac{2}{\pi}$  obţinem:

$$f(x) = \int_{1/\pi}^{2/\pi} \cos \frac{1}{t} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt + \int_{2/\pi}^x \left(\cos \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2} dt = 1 - \sin \frac{1}{t} \Big|_{2/\pi}^x = 2 - \sin \frac{1}{x}$$

(deoarece  $\left| \cos \frac{1}{t} \right| = \cos \frac{1}{t}$ , pentru  $t > \frac{2}{\pi}$ ). Pentru  $n \geq 1$  rezultă:  $f(n) = 2 - \sin \frac{1}{n}$  şi  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 2$ .

85°. Pentru  $x \in [1, e]$  avem:  $0 \leq \ln x \leq 1$ , deci  $0 \leq (\ln x)^n \leq 1$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}$ . Rezultă că:  $0 \leq \int_1^e (\ln x)^n dx \leq \int_1^e dx$ , deci  $0 \leq I_n \leq e - 1$ , adică şirul  $(I_n)_{n \geq 0}$  este mărginit. Deoarece  $(\ln x)^n \leq (\ln x)^{n-1}$ , rezultă că  $\int_1^e (\ln x)^n dx \leq \int_1^e (\ln x)^{n-1} dx$ , deci  $I_n \leq I_{n-1}$ , adică şirul  $(I_n)_{n \geq 0}$  este descrescător. Rezultă  $(I_n)_{n \geq 0}$  convergent şi fie  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ . Calculăm  $I_n$  prin părţi alegînd:  $f(x) = (\ln x)^n$ ,  $g'(x) = 1$ . Rezultă  $f'(x) = n (\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x}$  şi  $g(x) = x$ , deci avem:

$$I_n = x(\ln x)^n \Big|_1^e - n \int_1^e (\ln x)^{n-1} dx = e - nI_{n-1},$$

pentru  $n \geq 1$ . Împărţind la  $n$ , relaţia de recurenţă se scrie astfel:  $\frac{1}{n} I_n = \frac{e}{n} - I_{n-1}$ . Trecînd la limită ( $n \rightarrow \infty$ ) obţinem:  $0 \cdot l = 0 - l$ , deci  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ .

86°. Avem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + xe^{1-x}} & \text{dacă } x \in (-\infty, 1) \cap D, \\ \frac{x}{1 + xe^{x-1}} & \text{dacă } x \in [1, \infty) \cap D. \end{cases}$$

Pentru  $x \in [1, \infty)$ ,  $1 + xe^{x-1} > 0$ , deci  $[1, \infty) \cap D = [1, \infty)$ . Pentru  $x \in (-\infty, 1)$  vom arăta că  $1 + xe^{1-x}$  se anulează într-un singur punct  $x_0 \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ .

Considerăm funcția ajutătoare  $g(x) = 1 + xe^{1-x}, x \in (-\infty, 1)$  și aplicăm șirul lui Rolle. Avem:  $g'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x} > 0$ , deci avem tabelul:

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$1$
$g(x)$	$-\infty$	$-\left(\frac{e\sqrt{e}}{2} - 1\right)$	$1$	$2$
		$-$	$+$	

rezultă că  $g(x)$  se anulează într-un singur punct  $x_0 \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ . Deci  $D = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$  și, în plus, avem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \frac{x_0}{-0} = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \frac{x_0}{+0} = -\infty;$$

rezultă că  $x = x_0$  este asimptotă verticală pentru  $f$ .

b) Avem:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

deci  $y = 0$  este asimptotă orizontală la ambele ramuri. Calculăm:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1 + x^2 e^{1-x}}{(1 + x e^{1-x})^2} & \text{dacă } x \in (-\infty, 1) \setminus \{x_0\}, \\ \frac{1 - x^2 e^{x-1}}{(1 + x e^{x-1})^2} & \text{dacă } x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Tabloul de variație este următorul:

$x$	$-\infty$	$x_0$	$0$	$1$	$+\infty$					
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$1/2$	$0$	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	$0$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$0$	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	$0$

Graficul este indicat în fig. M.C.20.

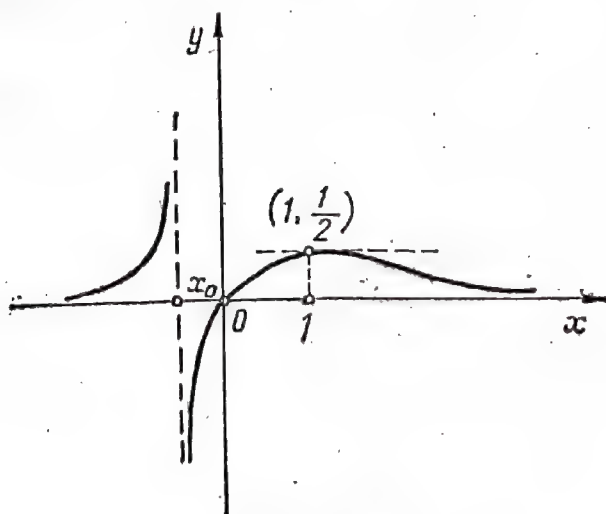


Fig. M.C.20



87°. Se impune schimbarea de variabilă  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , dar aceasta nu este definită pentru  $x = \pi$ . De aceea vom calcula mai întâi primitivele funcției  $f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$  pe intervalul  $[0, 2\pi]$ . Procedăm astfel: considerăm  $f: [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$  și fie  $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \pi)$ ,  $\varphi(t) = 2 \operatorname{arctg} t$  (adică  $x = 2 \operatorname{arctg} t$ ,  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ). Avem  $\varphi'(t) = \frac{2}{t^2 + 1} > 0$  și  $\varphi$  bijectivă. Calculăm funcția:

$$((f \circ \varphi) \cdot \varphi')(t) = h(t) = \frac{1}{3 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} = \frac{1}{t^2 + 2}, \text{ care are primitivele (pe } [0, \infty)):$$

$$H(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C_1. \text{ Atunci } f(x) = \frac{1}{3 + \cos x} \text{ are pe } [0, \pi) \text{ primitivele:}$$

$$(H \circ \varphi^{-1})(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C_1. \text{ Analog, rezultă că } f(x) = \frac{1}{3 + \cos x} \text{ are pe}$$

$(\pi, 2\pi]$  primitivele de forma:  $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C_2$ . Atunci primitivele lui  $f(x)$  pe  $[0, 2\pi]$  (care există, deoarece  $f$  este continuă pe  $[0, 2\pi]$ ) au forma:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C_1 & \text{dacă } x \in [0, \pi), \\ C_3 & \text{dacă } x = \pi, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C_2 & \text{dacă } x \in (\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Deoarece  $F$  este continuă în  $x = \pi$ , rezultă că:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x < \pi}} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_1 = C_3 = \lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x > \pi}} F(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_2,$$

deci, notînd  $C_1 = C$ , obținem:  $C_3 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C$ ,  $C_2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + C$ . Atunci:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C & \text{dacă } x \in [0, \pi), \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C & \text{dacă } x = \pi, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} + C & \text{dacă } x \in (\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Se verifică apoi că  $F'(\pi) = \frac{1}{2} = f(\pi)$ . Aplicînd formula Leibniz-Newton, obținem:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \cos x} = F(2\pi) - F(0) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

88°. Avem cazul de nedeterminare  $1^\infty$ . Putem scrie:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{1 - \cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{x^2 e^x} \cdot \frac{x^2 e^x}{1 - \cos x}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot 2e^x \right)} = e^2,\end{aligned}$$

deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = 1$ .

89°. Integrăm prin părți alegind:  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ,  $g'(x) = 1$ , deci  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$  și  $g(x) = x$ . Obținem:

$$\begin{aligned}I &= \int_2^3 \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) dx = x \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \\ &= 3 \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 2 \ln(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{x^2 - 1} \Big|_2^3 = \ln \frac{(3 + 2\sqrt{2})^3}{(2 + \sqrt{3})^2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{3}.\end{aligned}$$

90°. Aplicăm l'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\cos(n \arccos x) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot n}{\frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{n \cos(n \arccos x)}{x} = n.\end{aligned}$$

91°. Deoarece  $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$  este definită și continuă pe  $\mathbf{R}$ , are primitive pe  $\mathbf{R}$ . Fie  $F(t)$  o primitivă a sa. Atunci avem:  $f(x) = F(2x) - F(x)$ , deci  $f$  este derivabilă pe  $\mathbf{R}$  și:

$$f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

92°. Ținând cont de faptul că  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{nx} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 0, \\ 1 & \text{pentru } x = 0, \\ +\infty & \text{pentru } x > 0, \end{cases}$  obținem:

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + c & \text{pentru } x < 0, \\ c/2 & \text{pentru } x = 0, \\ ax & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

O primitivă  $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  a lui  $f$  are forma:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{bx^3}{3} + cx + k_1 & \text{pentru } x \leq 0, \\ a \frac{x^2}{2} + k_2 & \text{pentru } x > 0, \end{cases}$$

cu  $k_1, k_2$  constante reale. Din continuitatea lui  $F$  obținem  $k_1 = k_2 = k$ . Deci avem forma:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{bx^3}{3} + cx + k & \text{pentru } x \leq 0, \\ \frac{ax^3}{2} + k & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

Evident:  $F' \mid (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = f \mid (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ . Studiem derivabilitatea lui  $F$  în  $x = 0$ :

$$F'_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{bx^3 + cx + k - k}{x} = c,$$

$$F'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{ax^3}{2} + k - k}{x} = 0.$$

$F$  e derivabilă pe  $\mathbb{R}$  pentru  $c = 0$  și în acest caz, avem  $F'(0) = f(0) = 0$ . În concluzie,  $f$  admite primitive pentru  $a, b \in \mathbb{R}$  și  $c = 0$ .

93°. Considerăm funcția  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$g(x) = \begin{cases} 2x e^x \sin \frac{1}{x} + x^2 e^x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0. \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Evident  $g$  este continuă și admite primitive. Fie  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o primitivă pentru  $g$ . O primitivă a funcției  $f$  este  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de forma:

$$F(x) = \begin{cases} G(x) - x^2 e^x \sin \frac{1}{x} + C_1 & \text{pentru } x \neq 0, \\ C_2 & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$$

Avem:  $F' \mid (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = f \mid (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ . Punind condiția de continuitate pentru  $G$  în  $x = 0$  obținem:  $G(0) + C_1 = C_2$ . Fie  $C_1 = C$ . În acest moment avem:

$$F(x) = \begin{cases} G(x) - x^2 e^x \sin \frac{1}{x} + C & \text{pentru } x \neq 0, \\ G(0) + C & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - x^2 e^x \sin \frac{1}{x} + C - G(0) - C}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{G(x) - G(0)}{x} - x e^x \sin \frac{1}{x} \right] = g(0) = 0. \end{aligned}$$

Pentru ca  $F$  să fie primitivă a lui  $f$  pe  $\mathbb{R}$  este necesar ca  $F'(0) = f(0)$ , de unde se obține  $\alpha = 0$ .

94°. Fie  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{e^{\arcsin x} - 1}{e^x - \cos x}$ ; avem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\arcsin x} - 1}{\arcsin x} \cdot \frac{\arcsin x}{e^x - \cos x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{e^x + \sin x} = 1.$$



Am utilizat faptul că  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$  și regula lui l'Hôpital. Deci pentru orice șir  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x_n > 0$ , avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 1$ . Luând  $x_n = \frac{1}{n}$ , obținem:

$$a_n = g(x_n) \text{ și deci } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

95°. Pentru orice  $t \geq 0$  avem  $\ln(1+t) \leq t$ , așa cum se verifică imediat. Notăm  $a_n = \int_n^{n+1} \ln\left(1 + \frac{|\sin x|}{x}\right) dx$ , deci  $0 \leq a_n \leq \int_n^{n+1} \frac{|\sin x|}{x} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln \frac{n+1}{n}$ . Aplicând lema cleștelui, rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

96°. Dacă  $x > 0$  este fixat, atunci  $f(x) = 0$  (deoarece  $e^{ax} \rightarrow \infty$  pentru  $a \rightarrow \infty$ ). Dacă  $x = 0$ , atunci  $f(0) = 0$ . Iar dacă  $x < 0$ ,  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ . Așadar,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2}, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

Graficul este indicat în fig. M.C.21.

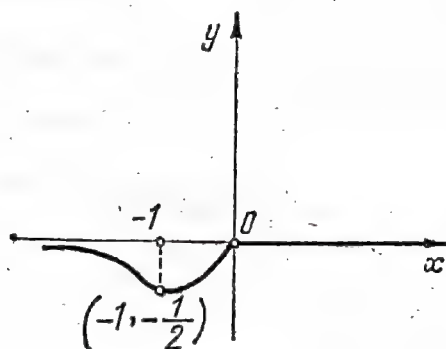


Fig. M.C.21

97°. Deoarece  $x_n - x_{n-1} = -x_{n-1}^2 \leq 0$ , rezultă că  $x_n \leq x_{n-1}$  pentru orice  $n \geq 1$ , deci șirul este monoton descrescător. Apoi, prin inducție se vede că  $0 \leq x_n \leq 1$  pentru orice  $n \geq 0$ . Șirul este monoton și mărginit deci convergent. Fie  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Atunci din relația inițială pentru  $n \rightarrow \infty$ , se obține  $l = l - l^2$ , deci  $l = 0$ .

98°. Folosind regula lui l'Hôpital, limita este egală cu:

$$\lim_{x \rightarrow n} \frac{2(x-n)}{2 \sin \pi x \cdot \cos \pi x \cdot \pi} = \frac{1}{\pi \cos n\pi} \lim_{x \rightarrow n} \frac{x-n}{\sin \pi x} = \frac{1}{\pi \cos n\pi} \cdot \frac{1}{\pi \cos \pi n} = \frac{1}{\pi^2},$$

deoarece  $\cos n\pi = (-1)^n$  și  $\cos^2 n\pi = 1$ .

99°. Se consideră funcția  $g: [0, 1-k] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x+k) - f(x)$ . Avem  $g(0) = f(k) - f(0) \geq 0$  și  $g(1-k) = f(1) - f(1-k) = f(0) - f(1-k) \leq 0$ . Deoarece  $g$  este continuă, există  $u_0 \in [0, 1-k]$  astfel încât  $g(u_0) = 0$ , adică  $f(u_0+k) = f(u_0)$ . Deci punctele de pe graficul lui  $f$  de abscise  $u_0$ ,  $u_0+k$  au aceeași ordonată și determină o coardă de lungime  $k$ .

100°. Fie  $x$  lungimea înălțimii trapezului (în mod necesar isoscel). Atunci lungimea bazei mari va fi  $1 + 2\sqrt{1-x^2}$  și aria trapezului:

$$S(x) = x(1 + \sqrt{1-x^2}), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Scriind că  $S'(x) = 0$ , rezultă  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  și  $\max S = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ .

101°.  $f'(x) = 3x^2 + 2\lambda x$ , ecuația  $f'(x) = 0$  are soluțiile:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = -\frac{2\lambda}{3}$ .

Apar mai multe cazuri:

— presupunem  $\lambda \geq 0$ , deci tabloul de variație al lui  $f$  va fi:

$x$	0	1	3	$\infty$
$f'(x)$	0 +	+	+	+
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\lambda$ $\nearrow$ $26 + 9\lambda$	$\nearrow$ $\infty$

Condiția din enunț devine:  $-1 = 26 + 9\lambda$ , deci  $\lambda = -3$ , imposibil;

— presupunem  $0 < -\frac{2\lambda}{3} \leq 1 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq \lambda < 0$  și tabloul devine:

$x$	0	$-\frac{2\lambda}{3}$	1	3	$\infty$
$f'(x)$	0 -	-	0 +	+	+
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f\left(-\frac{2\lambda}{3}\right)$ $\nearrow$ $\lambda$ $\nearrow$ $26 + 9\lambda$	$\nearrow$	$\nearrow$

și condiția  $f\left(-\frac{2\lambda}{3}\right) = 26 + 9\lambda$  nu poate avea loc;

— dacă  $1 < -\frac{2\lambda}{3} \leq 3$  rezultă  $-\frac{9}{2} \leq \lambda < -\frac{3}{2}$  și în acest caz:

$x$	0	1	$-\frac{2\lambda}{3}$	3	$\infty$
$f'(x)$	0 -	-	-	0 +	+
$f(x)$	-1	$\searrow$ $\lambda$ $\searrow$	$f\left(-\frac{2\lambda}{3}\right)$ $\nearrow$ $26 + 9\lambda$	$\nearrow$	$\nearrow$ $\infty$

Condiția din enunț este  $\lambda = \max(\lambda, 26 + 9\lambda)$ , de unde  $\lambda \geq 26 + 9\lambda$  și  $\lambda \leq -\frac{13}{4}$ .

Așadar  $-\frac{9}{2} \leq \lambda \leq -\frac{13}{4}$ .

— în fine, presupunem  $-\frac{2\lambda}{3} > 3$ , deci  $\lambda < -\frac{9}{2}$  și tabloul de variație devine:

$x$	0	1	3	$-\frac{2\lambda}{3}$	$\infty$
$f'(x)$	0 -	-	-	0 +	+
$f(x)$	-1	$\searrow$ $\lambda$ $\searrow$	$26 + 9\lambda$ $\searrow$	$\nearrow$ $\infty$	$\nearrow$

și condiția impusă este  $\lambda = \lambda$ , deci este îndeplinită. În concluzie,  $\lambda \leq -\frac{13}{4}$ .

102°.  $f'(x) = n \sin^{n-1}x \cos^2x - \sin^{n+1}x = \sin^{n-1}x(n \cos^2x - \sin^2x)$ . Funcția  $f$  fiind periodică de perioadă  $2\pi$ , putem presupune că  $x \in [0, 2\pi]$ . Rezultă că ecuația  $f'(x) = 0$  are soluțiile  $0, \pi, 2\pi, \arctg \sqrt{n}, \pi + \arctg \sqrt{n}, \pi - \arctg \sqrt{n}, 2\pi - \arctg \sqrt{n}$  și tabloul de variația al lui  $f$  va fi:

$x$	0	$\arctg \sqrt{n}$	$\pi - \arctg \sqrt{n}$	$\pi$	$\pi + \arctg \sqrt{n}$	$2\pi - \arctg \sqrt{n}$	$2\pi$
$f'(x)$	0 +	0 -	0 +	0 -	0 +	0 -	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$ 0

Avem:  $\sin(\operatorname{arctg} \sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n}}$ ;  $\cos(\operatorname{arctg} \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{1+n}}$ , deci  $f(\operatorname{arctg} \sqrt{n}) = \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n}}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{1+n}}$ . Apoi  $f(\pi) = 0$  și  $f(2\pi - \operatorname{arctg} \sqrt{n}) = f(\operatorname{arctg} \sqrt{n})$ . În concluzie,  $M_n = \frac{(\sqrt{n})^n}{(\sqrt{1+n})^{n+1}}$ . Limita cerută este:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{n}{n+1}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[1 + \frac{1}{n}]{\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[e]{e}}.$$

103°.  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}} \right)$ . Făcînd  $x = \frac{1}{n}$ , va rezulta:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\frac{x}{x+1}}}{x^2} \stackrel{\text{rH\O p.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - a^{\frac{x}{x+1}} \cdot \ln a \cdot \frac{1}{(x+1)^2}}{2x} = \\ &= \frac{\ln a}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}}{x} = \\ &= \frac{\ln a}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - a^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^4} \ln a + 2a^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^3}}{1} = \frac{\ln a}{2} (\ln a - \ln a + 2) = \ln a. \end{aligned}$$

104°. Derivînd relația dată, rezultă:

$$1 + f(x) = 1 \cdot f'(x) + (x+1)f'(x),$$

deci  $f'(x) = \frac{1}{x+1}$  și  $f(x) = \ln(x+1) + C$ . Făcînd în relația inițială  $x=0$ , rezultă  $0+0=1 \cdot f(0)$ , deci  $f(0)=0$ . Atunci  $C=0$  și, în concluzie,  $f(x) = \ln(x+1)$ .

105°. Trasînd graficul lui  $\varphi(x) = \arcsin(\sin x)$ , care este funcție periodică de perioada  $2\pi$ , se observă imediat că:

$$I = 4 \int_0^\pi |\varphi(x)| dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\pi - x) dx = \pi^2.$$

106°. Echivalent,  $\ln \frac{m}{n} < \frac{m^2 + mn - 2n^2}{mn} = \frac{m}{n} + 1 - \frac{2n}{m}$ . Notăm  $\frac{m}{n} = x$ , deci

$x > 1$ . Avem de arătat că dacă  $x > 1$ , atunci  $\ln x < x + 1 - \frac{2}{x}$ . Din tabloul de variație al lui  $\varphi(x) = \ln x - x - 1 + \frac{2}{x}$  pentru  $x > 1$ , rezultă  $\varphi'(x) < 0$ , deci  $\varphi$  este strict descrescătoare pe  $(1, \infty)$ ; deoarece  $\varphi(1) = 0$ , rezultă  $\varphi(x) < 0$  pentru  $x > 1$ , ceea ce trebuia arătat.



107°.  $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx = \frac{2}{3}$ , făcînd schimbarea  $\sqrt{1-x} = t$ . Apoi,  
 $I_1 = \frac{4}{15}$ . Avem:

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx = \int_0^1 x^n \frac{1-x}{\sqrt{1-x}} \, dx = \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Integrînd prin părți, rezultă:

$$I_n = 2 \int_0^1 [nx^{n-1} - (n+1)x^n] \sqrt{1-x} \, dx = 2nI_{n-1} - 2(n+1)I_n.$$

Așadar,  $\frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{2n}{2n+3}$ . Scriind această relație pentru 1, 2, 3, ..., n și înmulțind

relațiile obținute rezultă:  $I_n = \frac{2n}{2n+3} \cdot \frac{2(n-1)}{2n+1} \dots \frac{2 \cdot 2}{7} \cdot \frac{2 \cdot 1}{5} I_0$ .

108°. Deoarece  $x \in [-2, 2]$  și  $k \rightarrow \infty$ , rezultă  $|x-2| = 2-x$  și  $|x-k| = k-x$ . Atunci:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \frac{2-x+k}{2-k+x} \, dx &= \int_{-2}^2 \left( -1 + \frac{4}{2-k+x} \right) dx = (-x + 4 \ln(x+2-k)) \Big|_{-2}^2 = \\ &= -4 + 4 \ln(k-4) - 4 \ln k \end{aligned}$$

și limita cerută este egală cu -4.

109°. Avem  $e^x > 1+x$  pentru  $x \neq 0$  (verificare imediată) și facem  $x = \frac{\pi}{e} - 1$ . Rezultă:  $e^{\frac{\pi}{e}-1} > \frac{\pi}{e} \Rightarrow e^{\frac{\pi}{e}} \cdot \frac{1}{e} > \frac{\pi}{e}$ , deci  $e^{\frac{\pi}{e}} > \pi$  și  $e^\pi > \pi^e$ .

Altă metodă constă în studiul variației funcției  $f(x) = e \ln x - x$ .

110°. Studiind variația funcției  $\varphi(x) = x - \sin \frac{\pi x}{2}$ , se constată că pentru  $x \in [0, 1]$  avem  $x \leq \sin \frac{\pi x}{2}$  și pentru  $x \in [1, 2]$ ,  $x \geq \sin \frac{\pi x}{2}$ . Atunci:

$$I = \int_0^1 x \, dx + \int_1^2 \sin \frac{\pi x}{2} \, dx = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}.$$

111°. Așadar, pentru orice  $x \in [0, 1]$  avem  $a \leq f(x) \leq b$ , deci  $[f(x)-a] \cdot [f(x)-b] \leq 0$ , adică  $f^2(x) - (a+b)f(x) + ab \leq 0$ . Integrînd pe intervalul  $[0, 1]$ , rezultă:

$$\int_0^1 f^2(x) \, dx - (a+b) \int_0^1 f(x) \, dx + \int_0^1 ab \, dx \leq 0,$$

adică  $\int_0^1 f^2(x) \, dx + ab \leq 0$ , deoarece  $\int_0^1 f(x) \, dx = 0$  prin ipoteză.

# FIZICĂ

Fizica este știința naturii care studiază structura materiei (particulele de substanță și cimpurile fizice), proprietățile generale și legile de mișcare (mecanice, termice, electromagnetice, atomice, nucleare etc.) ale materiei, precum și transformările reciproce ale acestor forme de mișcare.

Fizica clasică utilizează două concepte fundamentale, particula și unda, studiind fenomene care pot fi interpretate corpuscular sau ondulatoriu. Fizica cuantică studiază procese care pot fi interpretate fie corpuscular, fie ondulatoriu, fără a dovedi că în realitate avem de-a face cu particule sau cu unde, deoarece, prin natura lucrurilor, nu se pot determina simultan toate proprietățile care sînt distincte pentru o particulă sau pentru o undă, după cum este cazul.

Fiecare formă generală de mișcare este reprezentată printr-un model, care se realizează printr-un șir nelimitat de aproximații succesive în cadrul metodei de cercetare științifică utilizată. Unui model acceptat pentru o formă generală de mișcare a materiei îi corespund relații esențiale, necesare și reproductibile între mărimile fizice, ca urmare a observațiilor experimentale, relații care exprimate matematic constituie legile domeniului considerat.

În afară de legi, în fizică avem relații de definiție și teoreme, acestea din urmă fiind deduse din legi și din relațiile de definiție.

Forma matematică a legilor fizicii rămîne independentă în raport cu diversele convenții introduse în scopul măsurării mărimilor care intervin în aceste legi (invarianța legilor fizice față de orice schimbare a unităților de măsură).

Simbolurile cuprinse în formulele matematice, care exprimă legile fizice, reprezintă observabile fizice (mărimi fizice). Orice observabilă fizică exprimă o proprietate fizică, ce poate fi mai intensă sau mai puțin intensă, mai mare sau mai mică. A măsura o observabilă fizică înseamnă a stabili de cîte ori se cuprinde în ea o altă mărime de aceeași natură, aceasta din urmă purtînd numele de unitatea mărimii respective.

Formula matematică a unei legi, în care intră numai mărimi, diferă de formula fizică corespunzătoare, care cuprinde numai valori măsurate ale observabilelor fizice, printr-un coeficient parazit. Eliminarea coeficientului parazit din formulele fizice face ca numărul unităților care pot fi definite arbitrar să scadă foarte mult. Asemenea unități, a căror mărime se alege arbitrar, se numesc unități fundamentale. Toate celelalte unități de măsură, a căror mărime nu este arbitrară și este definită cu ajutorul unităților fundamentale (și/sau a unor unități derivate), se numesc unități derivate.

După natura și mărimea unităților fundamentale, se pot alcătui diverse sisteme coerente de unități. În momentul de față se utilizează Sistemul Internațional de Unități, avînd simbolul SI, sistem adoptat la A 11-a Conferință Generală de Măsuri și Greutăți, ținută la Paris în octombrie 1960. Acest sistem se bazează pe următoarele șapte unități fundamentale:



1°. *Metru* (unitate de lungime, avînd simbolul [m]), definit ca lungimea egală cu 1 650 763,73 lungimi de undă în vid ale radiației care corespunde tranziției între nivelele de energie  $2p_{10}$  și  $5d_5$  ale atomului de kripton-86.

2°. *Kilogramul* (unitate de masă, avînd simbolul [kg]), definit ca fiind masa egală cu masa prototipului internațional al kilogramului.

3°. *Secunda* (unitate de timp, avînd simbolul [s]) reprezintă durata a 9 192 631 770 perioade ale radiației care corespunde tranziției între cele două nivele de energie hiperfine ale stării fundamentale a atomului de cesiu-133.

4°. *Ampere* (unitate de intensitate a curentului electric, avînd simbolul [A]), definită ca fiind intensitatea unui curent electric constant, care menținut în două conductoare paralele rectilinii, cu lungimea infinită și cu secțiunea circulară neglijabilă, așezate în vid la o distanță de 1 m unul de altul, ar produce între aceste conductoare o forță de  $2 \cdot 10^{-7}$  newtoni pe o lungime de 1 m.

5°. *Kelvinul* (unitatea de temperatură termodinamică, avînd simbolul [K]), definit ca fiind fracțiunea  $(273,16)^{-1}$  din temperatura termodinamică a punctului triplu al apei.

6°. *Candela* (unitatea de intensitate luminoasă, avînd simbolul [cd]), care reprezintă intensitatea luminoasă, în direcția normalei, a unei suprafețe cu aria  $(600\,000)^{-1}$  metri pătrați a unui corp negru la temperatura de solidificare a platinei la presiunea de 101 325 newtoni pe metru pătrat.

7°. *Molul* (unitatea de cantitate de substanță, avînd simbolul [mol]), definit ca fiind cantitatea de substanță a unui sistem care conține entități elementare cîți atomi există în 0,012 kg de carbon-12.

## 1. MECANICĂ

a. Mecanica clasică este ramura fizicii care studiază schimbarea în timp a poziției relative a corpurilor; precum și interacțiunile dintre corpuri care influențează această mișcare.

Mecanica clasică newtoniană (mecanica clasică nerelativistă), elaborată, în principal de Isaac Newton (1642—1727), descrie mișcarea entităților<sup>1)</sup> numite puncte materiale (particule), concepute ca obiecte macroscopice, făcînd ipoteza că vitezele relative ale acestora sînt mici în comparație cu viteza  $c$  a luminii.

Mișcarea unui corp se studiază alegînd totdeauna un alt corp, numit corp de referință, la care se raportează în fiecare moment poziția corpului studiat. Poziția corpului studiat la diferite momente necesită o riglă și un ceasornic. Astfel, corpul de referință, împreună cu rigla pentru determinarea poziției corpurilor studiate (sistemul de axe trirectangulare, de exemplu, în spațiul lui Euclid) și cu ceasornicul pentru indicarea momentului, constituie un sistem de referință (sau, pe scurt, referențial).

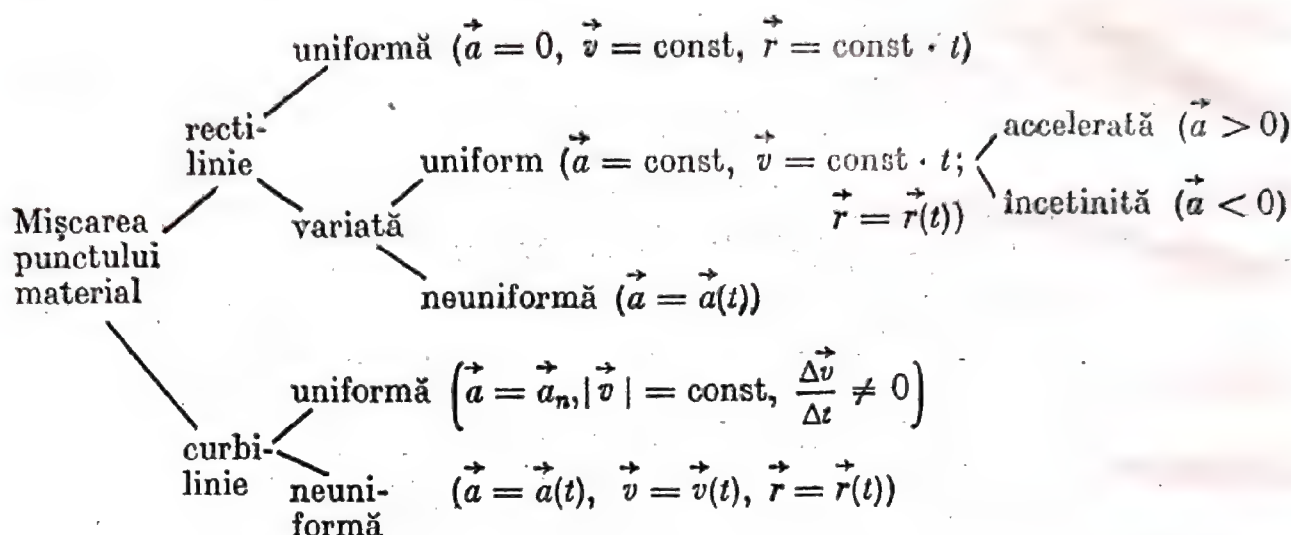
Curba descrisă de un mobil (punctul material, caracterizat numai prin masa sa, adică, avînd dimensiuni neglijabile față de distanțele sale pînă la corpurile înconjurătoare) în timpul mișcării sale se numește traiectorie. Traectoria poate fi:

— rectilinie, cînd pentru a descrie mișcarea mobilului trebuie să cunoaștem poziția mobilului în fiecare moment pe această traiectorie, adică, coordonata sa  $x$  în funcție de timpul  $t$ ,  $x = f(t)$ ;

— curbilinie, în plan sau în spațiu, în cazul mișcării curbilinii în plan mișcarea corpului fiind determinată de două funcții  $x = f_1(t)$  și  $y = f_2(t)$ , iar în cazul mișcării curbilinii în spațiu mișcarea corpului fiind descrisă de trei ecuații,  $x = f_1(t)$ ,  $y = f_2(t)$  și  $z = f_3(t)$ .

<sup>1)</sup> Entitate = ceea ce există.

Dependențele de timp ale coordonatelor poartă numele de ecuații cinematice ale mișcării. Pentru a preciza mai simplu poziția unui mobil se introduce vectorul de poziție al mobilului, care unește originea referențialului cu punctul de pe traiectorie unde se află corpul a cărui mișcare o studiem. Atunci mișcarea este descrisă de  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , iar  $x(t)$ ,  $y(t)$  și  $z(t)$  sînt componentele lui  $\vec{r}(t)$ . Vectorul viteză se definește ca fiind  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ , iar vectorul accelerație prin  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ . Mișcările unui punct material se pot clasifica astfel:



b. Mecanica clasică nerelativistă se bazează pe următoarele principii:

α. Principiul inerției: „Un punct material își menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă, dacă asupra sa nu acționează alte corpuri care să-i schimbe starea respectivă”.

β. Principiul fundamental al dinamicii (legea acțiunii): „Experiențele efectuate cu tot felul de corpuri, aflate în cele mai variate stări de mișcare, cărora li s-au aplicat diferite forțe, arată că vectorul forță este proporțional cu produsul dintre masă și vectorul accelerație,  $\vec{F} = m\vec{a}$ ”.

Principalele tipuri de forțe întâlnite în mecanica clasică nerelativistă sînt:

— Greutatea  $\vec{G}$  a unui corp de masă  $m$  într-un câmp gravitic de accelerație  $\vec{g}$ :

$$\vec{G} = m\vec{g}.$$

— Forța de frecare de alunecare,  $F_f$ , orientată în sensul opus mișcării și proporțională cu forța de apăsare normală exercitată pe suprafața de contact, coeficientul de proporționalitate fiind coeficientul de frecare de alunecare,  $\mu$ :

$$F_f = \mu N.$$

— Forța elastică  $F_e$ , proporțională cu valoarea deformației și orientată în sens opus creșterii deformației:

$$F_e = -kx.$$

Un exemplu de forță elastică este forța care apare într-un resort de oțel supus unei deformări (întindere sau comprimare).



De asemenea, în cazul legii deformărilor elastice (legea lui Hooke), se arată că alungirea relativă,  $\frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon$ , este proporțională cu efortul unitar,  $\sigma = \frac{F}{S_0}$ ,

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma,$$

$E$  fiind modulul de elasticitate longitudinal,  $F$  forța deformatoare,  $\Delta l$  alungirea absolută,  $l_0$  lungimea inițială a firului cilindric, iar  $S_0$  secțiunea transversală a firului. Dacă notăm cu  $k = \frac{ES_0}{l_0}$  constanta de elasticitate a firului, legea lui Hooke se poate scrie sub forma

$$F = kx.$$

— Forța inerțială de tip centrifug, acționând în direcția și sensul razei vectoriale (în raport cu centrul circumferinței parcurse), asupra unui corp aflat în mișcare de rotație:

$$F_{cf} = \frac{mv^2}{r} = m\omega v = m\omega^2 r, \quad \vec{F}_{cf} = m\omega^2 \vec{r},$$

unde  $m$  este masa corpului,  $\omega$  și  $v$  sînt vitezele unghiulară și, respectiv, liniară ale mișcării de rotație, iar  $r$  este raza circumferinței parcurse.

— Forța inerțială de tip centripet, acționind pe direcția forței inerțiale de tip centrifug, dar în sens contrar acesteia, adică

$$\vec{F}_{cp} = -m\omega^2 \vec{r}.$$

— Forța gravitațională dintre două corpuri cu masele  $m_1$  și  $m_2$  considerate punctiforme față de distanța dintre ele, situate la o distanță  $r$  unul față de altul, a cărei expresie este

$$F = K \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

unde  $K = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$  este o constantă universală. Se observă că forța gravitațională este o forță de atracție care acționează de-a lungul liniei ce unește corpurile. Aceasta exprimă legea atracției universale.

7. Principiul acțiunilor reciproce: „Dacă un corp exercită asupra altui corp forța  $\vec{F}_{12}$ , atunci cel de-al doilea corp exercită asupra primului corp forța  $\vec{F}_{21}$ , egală și de sens contrar cu  $\vec{F}_{12}$ , deci  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ”, sau „acțiunile reciproce a două corpuri sînt totdeauna egale ca mărime și dirijate în sensuri opuse”.

8. Principiul suprapunerii forțelor: „Dacă mai multe forțe acționează în același timp asupra unui punct material, fiecare forță produce propria sa accelerație, independent de prezența celorlalte forțe, accelerația rezultantă fiind suma vectorială a accelerațiilor individuale”, adică

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \Rightarrow m\vec{a} = m \sum_i \vec{a}_i.$$

9. Principiul relativității în mecanica clasică newtoniană: „Legile mecanicii sînt aceleași în toate sistemele de referință inerțiale”. Invarianța legilor mecanicii față de sistemele de referință inerțiale este asigurată de transformările lui Galileo Galilei. Dîndu-se două sisteme de referință inerțiale  $S$  și  $S'$ ,  $S'$  mișcîndu-se cu viteza constantă  $v$  față de  $S$ ,  $v$  fiind paralelă atît cu axa  $Ox$ , cît și cu axa  $O'x'$  (figura F.A.1), între coordonatele spațio-temporale  $\vec{r}$  și  $t$ , față de  $S$ , ale unui eveniment, și coordo-



natele spațio-temporale  $\vec{r}'$  și  $t'$ , față de  $S'$ , ale aceluiași eveniment, există relațiile lui Galileo Galilei:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t', \\ t = t', \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t, \\ t' = t, \end{cases}$$

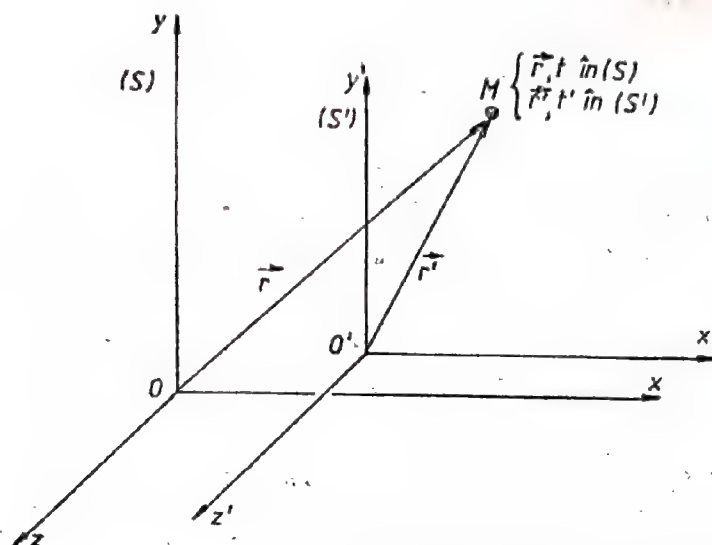


Fig. F.A.1

sau, în coordonate carteziene,

$$\begin{cases} x = x' + vt', \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t', \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x - vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t. \end{cases}$$

Toate celelalte rezultate ale mecanicii newtoniene se deduc din aceste principii ca teoreme.

c. În cazul mișcării rectilinii uniforme a unui punct material ( $\vec{F} = \vec{0}$ ), avem:

$$\vec{a} = \vec{0}, \quad \vec{v} = \vec{v}_0, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0),$$

$t_0$  fiind momentul inițial al mișcării la care vectorul de poziție este  $\vec{r}_0$ . În cazul mișcării după direcția  $Ox$ , avem:

$$a = 0, \quad v = v_0; \quad x = x_0 + v(t - t_0).$$

— Pentru mișcarea uniform variată:

$$\vec{a} = \vec{a}_0, \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0), \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2.$$

Dacă mișcarea are loc după axa  $Ox$ , atunci:

$$a = a_0, \quad v = v_0 + a(t - t_0), \quad x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2.$$

Eliminând timpul  $t$  între expresiile vitezei și coordonatei se obține formula lui Galilei:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

— Pentru mișcarea corpurilor sub acțiunea greutății, alegând axa  $Oy$  orientată vertical în sus, avem:

$a = \pm g$  ( $+g$  în cazul căderii corpurilor și  $-g$  în cazul aruncării pe verticală a acestora),

$$v = v_0 \pm g(t - t_0), \quad y = y_0 + v_0(t - t_0) \pm \frac{1}{2} g(t - t_0)^2.$$

— În cazul mișcării unui corp aruncat cu o viteză inițială  $\vec{v}_0$  care formează un unghi  $\alpha_0$  cu orizontala, traiectoria va fi cuprinsă într-un plan vertical conținând forța  $\vec{G} = m\vec{g}$  și viteza  $\vec{v}_0$  și se descompune în două mișcări: una în direcția orizontală după axa  $Ox$  și alta în direcția verticală după axa  $Oy$ .

d. În mișcarea circulară uniformă traiectoria punctului material este un cerc și pentru unghiul la centru, format de raza vectoare a mobilului cu raza de referință, pentru viteza liniară și pentru accelerația centripetă ale mobilului avem, respectiv, următoarele expresii:

$$\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0), \quad v = R\omega = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R\nu, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \omega v = \omega^2 R = 4\pi^2 \frac{R}{T^2}.$$

La virajul unui tren la curbe, forța centripetă  $\vec{F}_c$ , produsă de șine (asupra cărora se exercită acțiunea roților), se compune cu greutatea  $\vec{G}$  a trenului pentru a da rezultanta  $\vec{R}$ . Dacă unghiul de îmbinare al postamentului șinelor este

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_c}{G} = \frac{mv^2/R}{mg} = \frac{v^2}{gR},$$

rezultanta cade perpendicular pe drum și șinele vor fi egal solicitate.

e. Pentru mișcarea oscilatorie, ecuația elongației este:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Viteza de mișcare a punctului material care efectuează o mișcare oscilatorie este

$$v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

accelerația fiind

$$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x.$$

Faza mișcării oscilatorii este  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ , cu faza inițială  $\varphi_0$  și perioada:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}.$$

Perioada oscilatorului liniar armonic depinde de masa  $m$  și de constanta elastică  $k$ ,  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ , iar pentru pendulul gravitațional, de lungime  $l$ ,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

f. Scriind legea atracției universale pentru un corp de masă  $m$ , aflat la suprafața Pământului, care are raza  $R_P$  și ținând seama că aceasta este dată de legea a doua a mecanicii, din  $mg = k \frac{mM_P}{R_P^2}$ , rezultă:

$$g = k \frac{M_P}{R_P^2},$$

$M_P$  fiind masa Pământului.

Intensitatea cîmpului gravitațional produs de sursa gravifică Pămînt la distanța  $r$  de centrul Pămîntului este:

$$\Gamma(r) = k \frac{M_P}{r^2}.$$

Cînd un satelit descrie o mișcare circulară în jurul Pămîntului, în fiecare punct al traiectoriei, direcția vectorului vitează  $v$  este perpendiculară pe direcția intensității cîmpului gravitațional radial:

$$\frac{mv^2}{r^2} = m\Gamma(r), \quad v = \sqrt{r\Gamma(r)}.$$

Dacă satelitul se află la distanța  $r = R_P + h$  de centrul Pămîntului, iar pentru  $h = 0$  avem  $g = g_0$ , atunci  $\Gamma = g(r) = k \frac{M_P}{(R + h)^2}$ ,  $\Gamma_0 = g_0(R) = k \frac{M}{R^2}$  și rezultă:

$$g(r) = g_0 \frac{R^2}{(R + h)^2} \text{ și } v = R \sqrt{\frac{g_0}{R + h}}.$$

g. Lucrul mecanic al unei forțe constante a cărei direcție formează un unghi  $\alpha$  cu direcția deplasării,  $d$ , este dat de expresia:

$$L = Fd \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{d}.$$

În cazul forței de greutate,  $L = mgh$ ; pentru o forță elastică,  $L = -\frac{1}{2} kx^2$  etc. ...

Prin definiție, puterea este  $P = \frac{L}{t}$ ,

Energia cinetică a unui punct material este  $E_c = \frac{1}{2} mv^2$ , iar variația energiei cinetice a unui punct material, care se deplasează în raport cu un sistem de referință inerțial, este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă care acționează asupra punctului material în timpul acestei variații

$$L_{12} = E_{c_2} - E_{c_1} = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2.$$

Principalele expresii ale energiei potențiale întâlnite în mecanica clasică nerelativiste corespund:

— energiei potențiale a unui corp de masă  $m$ , aflat într-un cîmp gravific de accelerație constantă  $g$  și situat într-un punct de coordonată  $h$  (după o axă avînd direcția accelerației  $g$ , dar sensul opus acesteia):

$$E_p = mgh,$$

— energiei potențiale corespunzătoare unei deformații longitudinale  $x$  (alungire sau comprimare) a unui resort de constantă elastică  $k$ :

$$E_p = \frac{k}{2} x^2.$$

Energia mecanică a unui punct material aflat într-un cîmp de forțe conservativ este:

$$E = E_p + E_c.$$

Energia mecanică,  $E = E_c + E_p$ , a unui sistem izolat în care acționează forțe conservative este constantă, adică energia mecanică a unui sistem izolat se conservă:

$$E_p + E_c = E_{p_0} + E_{c_0}.$$



De exemplu, în cazul mișcării oscilatorii armonice,

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} kA^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2} kA^2.$$

În cazul unui sistem de puncte materiale, energia cinetică a sistemului este egală cu suma energiilor cinetice ale tuturor punctelor din sistem

$$E_c = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

Între două stări date, la momentele  $t_1$  și  $t_2$ , variația energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale este egală cu suma lucrurilor mecanice ale tuturor forțelor, atât interioare cât și exterioare, care acționează asupra punctelor materiale din sisteme, adică:

$$E_{c_2} - E_{c_1} = L_{\text{int.}} + L_{\text{ext.}}$$

h. Produsul  $\bar{H} = \bar{F}_m \Delta t$  se numește impulsul forței,

$$\bar{F}_m \Delta t = \Delta \bar{p} \Rightarrow \bar{F}_m (t_2 - t_1) = \bar{p}_2 - \bar{p}_1 = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1,$$

adică: „Variația impulsului punctului material este egală cu impulsul forței aplicate punctului material” (teorema impulsului pentru punctul material).

Impulsul forțelor externe asupra unui sistem de puncte materiale este egal cu variația impulsului total al sistemului:

$$\bar{F}_m \Delta t = \Delta \bar{P},$$

unde

$$\bar{P} = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 + \dots = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \dots$$

Expresia  $\bar{F}_m \Delta t = \Delta \bar{P}$  se poate transcrie sub forma cunoscută a legii a doua a mecanicii:

$$\bar{F}_m = \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta t} \text{ sau } \bar{F} = \frac{d\bar{P}}{dt}.$$

Dacă  $\bar{F} = 0$ , atunci  $(\bar{P})_f = (\bar{P})_i$ , adică, dacă rezultanta forțelor externe este permanent zero sau dacă sistemul fizic este izolat (nu interacționează cu mediul exterior), impulsul total se conservă (rămâne constant).

Impulsul total al unui sistem fizic este egal cu produsul dintre masa totală a sistemului și viteza centrului de masă:

$$m\bar{v}_{\text{CM}} = \bar{P},$$

unde

$$m = \sum_i m_i, \bar{P} = \sum_i \bar{p}_i \text{ și } \bar{v}_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i \bar{v}_i}{\sum_i m_i}.$$

În cazul ciocnirii plastice (total inelastice) a două particule, de exemplu, o parte din energia cinetică a corpurilor se transformă în alte forme de energie (în special, prin intermediul căldurii):

$$Q = -\Delta E_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} m_r v_r^2,$$

unde  $v_r$  este viteza relativă (a particulei 1 față de particula 2) și  $m_r$  este masa redusă cînd se consideră mișcarea unei particule față de centrul de masă.

Pentru ciocnirea perfect elastică unidimensională a două particule, ecuația de conservare a energiei și ecuația de conservare a impulsului permit să se calculeze vitezele celor două corpuri după ciocnire:

$$v_1' = 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1, \quad v_2' = 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2.$$

i. Momentul unei forțe  $\vec{F}$  în raport cu un punct, numit pol, este definită prin:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad |\vec{M}| = M = rF \sin \alpha,$$

$\vec{r}$  fiind vectorul de poziție al forței față de pol.

Momentul unei forțe  $\vec{F}$  în raport cu o axă este egal cu produsul dintre componenta transversală  $F_{\perp}$  a forței și brațul ei  $b$  până la axă, în planul perpendicular pe axă:

$$M_{\perp} = \pm bF_{\perp}.$$

Momentului cinetic al unui punct material în raport cu un pol este, prin definiție:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v},$$

$\vec{r}$  fiind vectorul de poziție al corpului de masă  $m$ .

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$  cind  $\Delta t \rightarrow 0$ , adică  $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$  (teorema momentului cinetic).

Pentru  $\vec{M} = 0$ ,  $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$  sau  $(\vec{L})_f = (\vec{L})_i$ . Prin urmare, dacă momentul resultant al forțelor externe în raport cu un pol sau în raport cu o axă este permanent nul, atunci momentul cinetic total al sistemului, în raport cu acel pol sau cu acea axă, se conservă.

j. Un corp rigid se află în mișcare de translație, dacă orice dreaptă legată de corp își păstrează orientarea (se mișcă paralel cu ea însăși).

Corpul rigid se află în mișcare de rotație, dacă toate punctele sale descriu cercuri ale căror centre sînt situate pe o dreaptă perpendiculară pe planul cercurilor descrise, dreaptă numită axă de rotație.

Toate punctele corpului rigid în rotație au aceeași viteză unghiulară:

$$\omega = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}.$$

Vitezele liniare ale diferitelor puncte ale rigidului, de rază vectoriale  $\vec{r}_i$ , sînt:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i.$$

Dacă  $\omega$  crește sau scade în timp, mișcarea de rotație a rigidului este neuniformă, accelerația unghiulară fiind:

$$\epsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}.$$

Ținînd seama de expresia momentului de inerție al rigidului față de axa de rotație considerată,

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

energia cinetică totală a solidului aflat în mișcare de rotație cu viteza unghiulară constantă este:

$$E_{\text{crot}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Dacă solidul rigid se află în mișcare de translație și de rotație, energia cinetică a acestuia este:

$$E_c = \frac{1}{2} m_s v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2,$$

$m_s$  fiind masa solidului.

Între momentul  $\bar{M}$  al forțelor, în raport cu axa de rotație și accelerația unghiulară  $\bar{\epsilon}$ , imprimată de forțele exterioare unui rigid care se poate roti în jurul unei axe fixe, există relația:

$$\bar{M} = I \bar{\epsilon}.$$

Pentru  $\bar{M} = 0$ ,  $I \bar{\epsilon} = I \frac{\Delta \bar{\omega}}{\Delta t} = \frac{I(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1)}{\Delta t} = \frac{\bar{L}_2 - \bar{L}_1}{\Delta t} = 0$ , adică momentul cinetic  $\bar{L}$  se conservă.

k. Rezultanta forțelor care acționează asupra unui sistem se obține prin operația de compunere a forțelor.

Rezultanta a două forțe paralele și de același sens, aplicate aceluiași solid, este o forță paralelă și de același sens cu componentele și are modulul egal cu suma modulelor componentelor. Punctul de aplicație al rezultantei împarte segmentul de dreaptă care unește punctele de aplicație ale componentelor în două segmente invers proporționale cu modulele forțelor componente.

În cazul forțelor paralele și de sens opus, forța rezultantă are direcția forțelor componente și sensul forței celei mai mari; modulul forței rezultante este egal cu diferența modulelor forțelor componente, iar punctul de aplicație al rezultantei se află pe dreapta care unește punctele de aplicație ale componentelor fiind situat de partea forței celei mai mari.

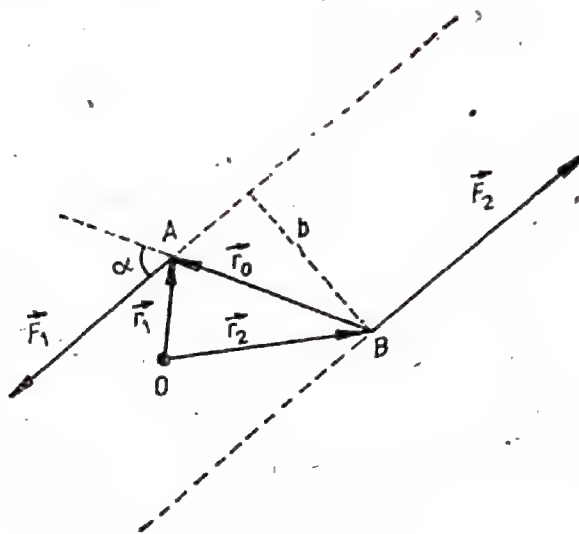


Fig. F.A.2

Momentul unui cuplu de forțe în raport cu un punct oarecare  $O$  din spațiu (fig. F.A.2) este:

$$\bar{M} = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2 = (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times \bar{F} = \bar{r}_0 \times \bar{F},$$

deoarece  $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$  și  $\bar{r}_1 - \bar{r}_2 = \bar{r}_0$ .

1. Echilibrul unui punct material liber este realizat dacă

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = 0.$$



Echilibrul solidului rigid liber se obține dacă:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0$$

și

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i = 0.$$

Coordonatele centrului de greutate pentru un sistem format din  $n$  puncte materiale sînt date de expresiile:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n G_i x_i}{\sum_{i=1}^n G_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n G_i y_i}{\sum_{i=1}^n G_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n G_i z_i}{\sum_{i=1}^n G_i}.$$

m. Presiunea este o observabilă fizică egală cu raportul dintre mărimea forței  $F$ , care apare normal și uniform pe o suprafață și aria  $S$  a acestei suprafețe:

$$p = \frac{F}{S}.$$

Diferența de presiune dintre două puncte dintr-un fluid în echilibru, aflate la distanța  $h$ , este:

$$p_2 - p_1 = \rho g h,$$

$\rho$  fiind densitatea fluidului, iar  $g$  accelerația gravitațională.

Dacă la nivelul (2) presiunea este  $p$ , iar nivelul (1) coincide cu suprafața liberă a fluidului, atunci:

$$p = H + \rho g h,$$

$H$  fiind presiunea atmosferică.

Presiunea hidrostatică este independentă de forma vasului în care se află lichidul și este aceeași în toate punctele aflate la aceeași adîncime în lichid.

Presiunea exercitată pe o suprafață oarecare a unui lichid aflat în repaus se transmite în toate direcțiile și cu aceeași intensitate în tot lichidul cit și la pereții vasului care-l conține (legea lui Pascal). În cazul unei prese hidraulice

$$F_1 = F_2 \frac{S_1}{S_2}.$$

$S_1$  și  $S_2$  fiind ariile suprafețelor pe care se exercită forțele  $F_1$  și, respectiv,  $F_2$ .

Un corp cufundat într-un fluid în repaus este împins cu o forță verticală de jos în sus, egală cu greutatea volumului de fluid deslocuit de corp (legea lui Arhimede).

Cantitatea de fluid care străbate o anumită arie în unitatea de timp reprezintă debitul de fluid prin acea arie. Relația:

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

se numește ecuația de continuitate,  $S_1$  fiind secțiunea transversală a conductei în punctele în care viteza fluidului este  $v_1$ , iar  $S_2$  secțiunea transversală a conductei în punctele în care viteza fluidului este  $v_2$ .

În cazul curgerii staționare a unui fluid ideal, de-a lungul liniei de curent se respectă legea lui Bernoulli:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2.$$

În cazul particular cînd tubul de curent este practic orizontal sau cînd energia potențială este neglijabilă, se obține:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constant, sau } p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2.$$

Forța de rezistență la înaintare în fluide, la viteze pentru care în fața mobilului se produce o zonă de suprapresiune, iar în spatele mobilului o zonă de depresiune, este dată de relația:

$$F = \frac{1}{2} C S \rho v^2,$$

$C$  fiind o constantă adimensională care depinde de forma corpului,  $S$  aria suprafeței obținută prin proiectarea corpului pe un plan perpendicular pe vectorul vitezei (conturul aparent),  $\rho$  densitatea fluidului, iar  $v$  viteza mobilului.

n. Oscilatorul liniar armonic este un punct material care se mișcă rectiliniu sub acțiunea unei forțe de forma:

$$F = -kx,$$

descriind o mișcare oscilatorie armonică a cărei lege are forma:

$$x = A \sin \omega t.$$

Viteza mișcării oscilatorii armonice este

$$v = \omega A \cos \omega t,$$

iar accelerația:

$$a = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 x.$$

Între frecvența  $\nu$ , perioada  $T$  și pulsația  $\omega$  mărimi caracteristice mișcării oscilatorii, există relațiile:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Energia potențială a oscilatorului armonic este

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2 \omega t,$$

iar cea cinetică

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 \omega t,$$

unde

$$k = m\omega^2.$$

Energia totală a oscilatorului liniar armonic este un invariant:

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = 2\pi^2 \nu^2 A^2 m.$$

o. Compunînd două oscilații  $y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$  și  $y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ , se obține oscilația:

$$y = a \sin(\omega t + \varphi),$$

unde

$$a = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]^{1/2}$$

și

$$\varphi = \arctg \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}.$$

- Pentru  $\Delta\varphi = 2k\pi$ ,  $a = a_1 + a_2$ , oscilațiile fiind în fază.
- Pentru  $\Delta\varphi = (2k + 1)\pi$ ,  $a = a_1 - a_2$ , oscilațiile fiind în opoziție de fază.
- Pentru  $\Delta\varphi = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ,  $a = (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}$ , oscilațiile fiind în cvadratură.

p. Prin undă înțelegem fenomenul de transmitere a unei perturbații într-un mediu material. Între lungimea de undă  $\lambda$ , viteza de fază  $v_f$  și perioada  $T$  a undei există relația:

$$v_f = \frac{\lambda}{T}.$$

- Pentru undele transversale care se propagă într-o coardă vibrantă, avem:

$$v_t = \sqrt{\frac{T_m}{\mu}},$$

unde  $T_m$  este tensiunea la care este solicitată coarda, iar  $\mu$  este masa unității de lungime a corzii.

- Pentru undele longitudinale, viteza de propagare este dată de expresia:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

unde  $E$  este modulul de elasticitate, iar  $\rho$  densitatea mediului în care are loc propagarea.

Dacă  $E$  este energia emisă de sursă în timpul  $t$ , atunci puterea emisă de sursă (fluxul de energie emis) este:

$$P = \frac{E}{t} = \Phi.$$

Intensitatea undei va fi:

$$I = \frac{P}{A},$$

$A$  fiind aria suprafeței perpendiculare pe direcția de propagare prin care se face transferul de energie.

Ecuatia unei unde plane este:

$$u = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = A \sin \left( \omega t - \omega \frac{x}{v_f} \right) = A \sin \omega \left( t - \frac{x}{v_f} \right).$$

În cazul reflexiei și refracției, avem următoarele teoreme:

- planul de incidență, cel de reflexie și cel de refracție coincid;

- unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie,  $\hat{i} = \hat{r}$ ;

—  $\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}_e} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = n_{21}$ , unde  $r_e$  este unghiul de refracție,  $v_1$  viteza undei în mediul (1), iar  $v_2$  viteza undei cu mediul (2).

Cind două unde,  $y_1 = A_1 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right)$  și  $y_2 = A_2 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right)$  interferă, amplitudinea undei rezultante este:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1) \right].$$

Astfel, pentru  $\frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1) = 2k\pi$ ,  $A = A_1 + A_2$ , iar pentru  $\frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1) = (2k + 1)\pi$ ,  $A = A_1 - A_2$ .



Sunetul are următoarele proprietăți caracteristice:

- înălțime, determinată de frecvența maximă a undei sonore;
- intensitatea auditivă (tăria sunetului), nivelul de intensitate sonoră,  $L$ , pentru un sunet de intensitate  $I$ , fiind  $L = \lg \frac{I}{I_0}$ ;
- timbrul, determinat de numărul armonicilor care însoțesc sunetul fundamental și nivelul lor de intensitate sonoră.

## 2. FIZICĂ MOLECULARĂ ȘI CĂLDURĂ. TERMODINAMICĂ

a. Legea proporțiilor definite („La formarea unui corp dat, elementele se combină totdeauna între ele într-un raport de masă riguros constantă”) și legea proporțiilor multiple („Cind două elemente pot forma mai mulți compuși, atunci cantitățile dintr-un element care se combină cu una și aceeași cantitate din celălalt element se află într-un raport întreg de numere întregi și mici”) au o contribuție esențială la dezvoltarea concepției privind existența moleculelor și atomilor. Concepția structurii discontinue a substanței s-a impus prin conturarea ipotezei atomo-moleculară a substanței, datorită legii lui Avogadro: „Volume egale de gaze diferite, aflate în aceleași condiții de temperatură și presiune, au același număr de molecule”.

Mișcarea termică constituie o stare permanentă a moleculelor oricărui corp, indiferent de starea lui de agregare.

Pentru a exprima masa atomilor sau a moleculelor, pe cât posibil, cu ajutorul numerelor întregi, s-a definit unitatea atomică de masă ( $u$ ) ca fiind egală cu a 12-a parte din masa atomică a izotopului  $^{12}_6\text{C}$ :

$$1 u = 1,66 \cdot 10^{-26} \text{ kg.}$$

Cantitatea de substanță a cărei masă, exprimată în grame, este numeric egală cu masa moleculară relativă a substanței date se numește mol.

Între masa molară a unor substanțe, numărul lui Avogadro,  $N_A$  și masa absolută  $m$  a substanței, există relația:

$$\mu = N_A m,$$

unde  $N_A$  (numărul lui Avogadro) reprezintă numărul de molecule dintr-un mol de substanță. Astfel, considerind cite un mol din substanțe diferite (1) și (2), de mase molare  $\mu_1$  și, respectiv,  $\mu_2$ , ale căror molecule au masele absolute  $m_1$ , respectiv  $m_2$ , atunci:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{N_{A_1}}{N_{A_2}} \cdot \frac{m_1}{m_2} = \frac{m_{r_1}}{m_{r_2}} = \frac{\frac{12m_1}{m_c}}{\frac{12m_2}{m_c}} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow N_{A_1} = N_{A_2}$$

Numărul lui Avogadro  $N_A$  are valoarea:

$$N_A = (6,022169 \pm 0,000040) \cdot 10^{23} \frac{\text{molecule}}{\text{mol}}.$$

Experimental s-a stabilit că, independent de natura gazului, în condiții normale ( $T = 273,15 \text{ K}$  și  $p = 1 \text{ atm}$ ), volumul unui mol are valoarea

$$V_{\mu} = 22,42 \frac{\text{l}}{\text{mol}} = 22,42 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}.$$

Prin fenomen termic înțelegem orice fenomen fizic legat de mișcarea complet dezordonată care se manifestă la nivelul molecular. Ca exemple de fenomene termice avem: variația proprietăților fizice ale substanței la încălzirea sau la răcirea



ei; schimbul de căldură dintre corpurile încălzite diferit; transformarea căldurii în lucru mecanic; transformarea lucrului mecanic în căldură; trecerea unui corp dintr-o stare de agregare în alta, ș.a.

Fenomenele termice sînt studiate cu ajutorul: termodinamicii, teoriei cinetico-moleculare și fizicii statistice.

b. Termodinamica studiază fenomenele termice folosind mărimi care pot fi măsurate direct (presiune, volumul ș.a.) sau care pot fi calculate cu ajutorul altor mărimi ce pot fi stabilite pe cale experimentală. Termodinamica nu ține seama de structura intimă, atomo-moleculară a corpurilor. Astfel, concluziile termodinamicii fiind independente de reprezentările pe care noi le avem cu privire la structura corpurilor, au o valoare incontestabilă.

În termodinamică avem ca noțiuni de bază: sistem termodinamic, starea sistemului termodinamic, parametri de stare, starea de echilibru termodinamic, proces termodinamic (transformare de stare), procese reversibile și ireversibile ș.a.

Definiția lucrului mecanic este cunoscută din mecanică. În cazul în care o forță  $\vec{F}$  provoacă o variație a volumului sistemului format dintr-un gaz care se află într-un corp de pompă cu piston de suprafață  $S$ , lucrul mecanic efectuat este:

$$L_e = p_e (V_i - V_f) = -p_e \Delta V,$$

unde  $p_e = \frac{F}{S}$  este presiunea externă,  $V_i$  volumul inițial al gazului, iar  $V_f$  volumul final al gazului. Prin convenție, lucrul mecanic primit de sistem din exterior se consideră negativ, iar lucrul mecanic  $L$  cedat de sistem exteriorului se consideră pozitiv, adică:

$$L = -L_e = p_e \Delta V = p_e (V_f - V_i).$$

În cazul unei transformări reversibile avem

$$L_{\text{rev.}}^{i \rightarrow i} = L_{\text{rev.}}^{i \rightarrow f} + L_{\text{rev.}}^{f \rightarrow i} = p(V_f - V_i) + p(V_i - V_f) = 0$$

în cazul unui ciclu închis. Pentru o transformare ireversibilă,  $L_{\text{rev.}}^{i \rightarrow f} \neq L_{\text{rev.}}^{i \rightarrow f}$ .

În general, lucrul mecanic depinde de transformare. În cazul a două transformări,  $i \rightarrow A \rightarrow f$  și  $i \rightarrow B \rightarrow f$ , avem:  $L^{i \rightarrow A \rightarrow f} \neq L^{i \rightarrow B \rightarrow f}$ .

Energia internă a unui sistem termodinamic,  $U$ , este suma dintre energiile cinetice ale mișcării termice, energiile potențiale determinate de forțele intermoleculare și energiile potențiale în câmpurile de forțe exterioare ale tuturor moleculelor din care este format sistemul. Un sistem termodinamic putînd avea o mișcare mecanică de ansamblu, caracterizată de energia cinetică  $E_c$  și energia potențială  $E_p$ , are energia totală:

$$E_t = U + E_c + E_p.$$

Dacă sistemul termodinamic este în stare de repaus mecanic,  $E_t = U$ .

În cazul unei transformări adiabatică (sistemul nu schimbă energie cu exteriorul decît prin intermediul lucrului mecanic), lucrul mecanic și energia internă respectă relația:

$$\Delta U + L^{ABC} = 0,$$

cînd  $\Delta U > 0$ ,  $L^{ABC} < 0$  și invers.

Într-o transformare oarecare (cînd sistemul schimbă energie cu exteriorul nu numai prin intermediul lucrului mecanic), se introduce mărimea:

$$Q^{ABC} = \Delta U + L^{ABC},$$

$Q^{ABC}$  purtînd numele de căldură, mărime care depinde de transformare.

Este de remarcat faptul că energia internă este o mărime de stare, pe cînd atît lucrul mecanic cît și căldura sînt mărimi care se referă la o transformare a sistemului.



Dacă într-o transformare parametrii externi ai sistemului fizic sînt menținuți constanți, avem:

$$Q_{ABC} = \Delta U = U_C - U_A.$$

Admițînd principiul transivității echilibrului termic și folosind faptul că energia internă este o mărime de stare se poate demonstra că pentru determinarea stării de echilibru termodinamic este necesară o singură variabilă în plus, pe lângă parametrii de poziție ai sistemului, aceasta fiind temperatura empirică a sistemului. Astfel, dacă  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sînt parametrii externi, atunci:

$$U = U(t, a_1, a_2, \dots, a_n),$$

aceasta fiind ecuația calorică de stare. Deoarece temperatura  $t$  și parametrii externi  $a_1, a_2, \dots, a_n$  determină starea unui sistem, parametrii de forță vor fi:

$$A_k = A_k(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

acestea fiind ecuațiile termice de stare. Ecuațiile de stare pentru un gaz, vor fi:

$$U = U(t, V) \text{ și } p = p(t, V).$$

c. Expresia matematică între parametrii de stare ai gazului perfect, aflat într-o stare de echilibru, se numește ecuația Clapeyron-Mendeleev și are forma:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT,$$

$\nu = \frac{m}{\mu}$  fiind numărul de moli, iar  $R = 8,3143 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  constanta universală a gazelor. Această relație mai poartă și denumirea de ecuația termică de stare a gazului perfect.

(Notînd cu  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$  densitatea gazului la o presiune și temperatură oarecare și cu  $\rho_0 = \frac{p_0\mu}{RT_0}$  densitatea gazului aflat în condiții normale de temperatură și presiune, avem:

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T}{T_0}.$$

Din ecuația termică de stare a gazului perfect obținem:

— „legea” Boyle-Mariotte sau legea transformării izoterme

$$pV = p_1V_1 = \dots = p_nV_n = \text{const.};$$

— „legea” Gay-Lussac sau legea transformării izobare

$$V = V_0(1 + \alpha t) = V_0 \left[ 1 + \frac{1}{273,15} (T - 273,15) \right] = V_0 \alpha T$$

sau

$$\frac{V}{T} = \text{const.};$$

— „legea” lui Charles sau legea transformării izocore

$$p = p_0(1 + \beta T) = p_0 \left[ 1 + \frac{1}{273,15} (T - 273,15) \right] = p_0 \beta T$$

sau

$$\frac{p}{T} = \text{const.}$$

Gradul centigrad (gradul Celsius) în scara gazului perfect are valoarea  $\frac{p_{100} - p_0}{100}$ . Temperatura gazului, aflat într-o stare în care are presiunea  $p$  se exprimă prin relația

$$t = \frac{p - p_0}{p_{100} - p_0} 100^\circ\text{C}.$$



În scara de temperatură a gazului perfect, temperatura zero absolut (temperatura la care presiunea gazului devine egală cu zero) este egală cu  $-273,15^{\circ}\text{C}$ , deoarece pentru  $p = 0$ ,  $t = \frac{-100p_0}{p_{100} - p_0}$  și, din ecuația lui Charles,  $\frac{p_{100} - p_0}{p_0} = 100\alpha$ , adică  $t = -\frac{1}{\alpha} = -273,15^{\circ}\text{C}$ .

Energia internă a gazului perfect este funcție numai de temperatură,  $U = U(T)$ .

d. În studiul fenomenelor termice intervin corpuri macroscopice aflate în repaus, a căror energie mecanică nu se modifică. În asemenea procese se modifică numai energia internă.

Primul principiu al termodinamicii ne arată cum variază energia internă a unui sistem ce interacționează mecanic sau termic cu mediul exterior:

„Variația energiei interne a unui sistem termodinamic în cursul unui proces, în care sistemul nu schimbă substanță cu exteriorul, este egală cu diferența dintre (cantitatea de) căldură primită și lucrul mecanic efectuat de sistem în cursul respectivului proces:  $U_2 - U_1 = \Delta U = Q_p - L_{ef}$ ”.

Primul principiu al termodinamicii poartă numele și de principiul imposibilității realizării unui perpetuum mobile de speța I (mașină care să producă lucru mecanic fără ca să consume energie din exterior), deoarece:

— dacă  $Q = 0$ , avem  $L_{ef} = -(U_2 - U_1)$ , adică, în cazul în care un sistem termodinamic nu primește căldură din exterior, el poate efectua lucru mecanic asupra corpurilor din jur numai pe seama micșorării energiei interne;

— dacă  $U_2 - U_1 = 0$  (sistemul efectuează o transformare ciclică), atunci  $L_{ef} = Q_p$ , adică sistemul termodinamic poate efectua lucru mecanic într-o transformare ciclică numai pe seama căldurii primite din exterior.

Parametrul fizic definit prin expresia  $c = \frac{\Delta Q}{m\Delta T}$ , în care  $\Delta T$  este variația temperaturii termodinamice (sau a temperaturii în scara Celsius) într-un anumit proces termodinamic, în care o cantitate de substanță de masă  $m$  primește (cantitatea de) căldură  $\Delta Q$ , se numește căldură specifică a substanței, pentru procesul termodinamic considerat.

Mărimea  $C = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{Q}{\Delta T}$  poartă numele de căldură molară și este căldura necesară pentru a crește (micșora) temperatura unui kilomol dintr-o substanță cu un grad. Între căldura molară și căldura specifică avem relația:

$$C = \frac{1}{\frac{m}{\mu}} \cdot \frac{Q}{\Delta T} = \mu \frac{1}{m} \cdot \frac{Q}{\Delta T} = \mu c.$$

Relațiile lui Robert Mayer dintre căldurile molare la presiune constantă,  $C_p$ , și la volum constant,  $C_v$ , respectiv dintre căldurile specifice  $c_p$  și  $c_v$ , au formele:

$$C_p = C_v + R,$$

respectiv

$$c_p = c_v + \frac{R}{\mu}.$$

Principiul întâi al termodinamicii permite atât transformarea integrală a lucrului mecanic în căldură cît și a căldurii în lucru mecanic. Experiența arată că este posibilă transformarea integrală a lucrului mecanic în căldură, însă nu și transformarea integrală a căldurii în lucru mecanic, adică:

$$L \Rightarrow Q \text{ și } Q \not\Rightarrow L.$$

Pentru a exprima imposibilitatea transformării integrale a căldurii în lucru mecanic (imposibilitatea unui perpetuum mobile de speța a II-a) se formulează principiul al doilea al termodinamicii:

„Variația entropiei sistemului termodinamic,  $dS$ , într-un proces elementar (caracterizat de variații „infinit mici” (diferențiale) ale parametrilor) este egală cu raportul dintre (cantitatea de) căldură  $dQ$  primită de sistem și temperatura  $T$  la care primește căldura respectivă”, adică:

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

Randamentul unui motor termic, care funcționează ciclic între temperaturile  $T_1$  (temperatura sursei calde) și  $T_2$  (temperatura sursei reci), este mai mic sau cel mult egal cu randamentul  $\eta_c = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$  al motorului care funcționează între aceleași temperaturi după un ciclu Carnot reversibil format din două transformări izoterme, la temperaturile  $T_1$ , respectiv  $T_2$ , și două transformări adiabatice, reversibile):

$$\eta = \frac{L_{\text{efectuat}}}{Q_{\text{primit}}} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \eta_c = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

unde  $Q_2$  este cantitatea de căldură cedată sursei reci, în condițiile primirii de la sursa caldă a cantității de căldură  $Q_1$  (formularea Carnot a principiului al II-lea al termodinamicii).

La expresia cantitativă a celui de-al doilea principiu al termodinamicii s-a ajuns pornind de la echivalența formulărilor aceluiasi principiu, date de W. Thomson („Într-o transformare ciclică monoterma sistemul nu poate ceda lucru mecanic în exterior. Dacă transformarea ciclică monoterma este și ireversibilă, atunci sistemul primește lucru mecanic din exterior”) și de R. Clausius („Nu este posibilă o transformare care să aibă ca rezultat trecerea de la sine a căldurii de la un corp cu o temperatură dată la un corp cu temperatură mai ridicată”).

Expresiile ecuațiilor parametrilor de stare, ale lucrului mecanic efectuat  $L_{ef} = \int_{V_1}^{V_2} p dV$  și (cantității de) căldură  $Q_p$ , primită de un gaz ideal, corespunzătoare principalelor tipuri de transformări particulare ale acesteia, între stările inițială (1) și finală (2) sînt indicate în tabelul 1.

Tabelul 1

Tipul transformării particulare	Ecuația parametrilor de stare	$L_{ef}$	$Q_p =$
Izotermă	$p_1 V_1 = p_2 V_2 = \text{const.}$ („legea” Boyle-Mariotte)	$RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$	$\nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = T_1 (S_2 - S_1)$
Izobară	$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \text{const.}$ („legea” Gay-Lussac)	$p(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1)$	$\Delta U + \frac{i}{2} \nu R(T_2 - T_1) =$ $= \frac{i+2}{2} \nu R(T_2 - T_1) =$ $= \nu \mu c_p (T_2 - T_1)$
Izocoră	$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} = \text{const.}$ („legea” Charles)	0	$\Delta U = \frac{i}{2} \nu R(T_2 - T_1) =$ $= \nu \mu c_v (T_2 - T_1)$
Adiabatică	$p V^\gamma = \text{const.},$ unde $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$	$-\Delta U = \frac{i}{2} \nu R(T_2 - T_1)$	0



e. Principiile de funcționare ale mașinilor și motoarelor termice se bazează pe ciclurile Carnot, Otto, Diesel ș.a. ale căror randamente sînt date de expresiile:

$$\eta_c = \frac{L}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

$$\eta_o = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}},$$

unde  $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$  este raportul de compresie al motorului;

$$\eta_D = 1 - \frac{\rho^\gamma - 1}{\gamma \varepsilon^{\gamma-1} (\rho - 1)},$$

unde  $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$  și  $\rho = \frac{P_2}{P_1}$  sînt rapoartele de compresie.

f. Teoria cinetico-moleculară studiază procesele termice cît și proprietățile corpurilor macroscopice folosind ipoteza că orice corp macroscopic (indiferent de starea de agregare în care se află) este format dintr-un număr foarte mare de atomi sau molecule, mișcarea acestora supunându-se legilor mecanicii clasice.

Formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculară a gazelor ne arată că presiunea  $p$ , la care se află un gaz ideal, se poate exprima prin una din expresiile:

$$p = \frac{2}{3} n_0 \tilde{E}_{ctr} = \frac{n_0 m \bar{u}^2}{3} n_0 k_B T,$$

unde  $\tilde{E}_{ctr}$  este energia cinetică de translație a moleculelor,  $\bar{u}$  viteza pătratică medie a moleculelor,  $T$  temperatura termodinamică a gazului,  $n_0$  numărul de molecule de gaz din unitatea de volum, iar  $k_B = \frac{R}{N_A}$  constanta lui Boltzmann.

Viteza pătratică medie a moleculelor are expresiile:

$$v_T = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{mN_A}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Pentru un mol de gaz ideal, energia internă a gazului este:

$$U = N_A \varepsilon_i = N_A \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} RT.$$

Temperatura unui gaz ideal este o măsură a intensității mișcării termice a moleculelor din care este constituit:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{m \bar{u}^2}{2} = k_B T,$$

energia cinetică medie a unei molecule în mișcarea de translație, fiind

$$\varepsilon_i = \frac{m \bar{u}^2}{2} = \frac{3}{2} k_B T.$$

Lungimea drumului liber mediu parcurs de moleculele unui gaz este dată de expresiile:

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} n_0 \sigma} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p},$$

unde  $n_0$  este numărul de molecule din unitatea de volum, iar  $\sigma = 4\pi r^2$  ( $r$  fiind raza moleculară efectivă) este secțiunea eficace de împrăștiere pentru ciocnirile moleculă-moleculă.



g. Parametrul fizic definit prin expresie  $q = \frac{Q}{m}$ , unde  $Q$  este cantitatea de căldură degajată prin arderea unei cantități de combustibil de masă  $m$ , se numește putere calorifică a combustibilului.

Ecuatia calorimetrică are forma

$$Q_1 = Q_2,$$

$Q_1$  fiind căldura cedată de corpul mai cald și  $Q_2$  căldura primită de cel mai rece. Această ecuație stă la baza măsurării căldurii și a căldurii specifice.

h. Lichidele sînt sisteme fizice care au volum propriu, fiind practic incompresibile, curg și nu au formă proprie.

Coefficientul de dilatare termică în volum al lichidelor are expresia:

$$\gamma = \frac{\Delta V}{V_0 \Delta t} = \frac{V - V_0}{V_0 \Delta t}.$$

În vecinătatea temperaturii  $0^\circ\text{C}$ , avem:

$$V = V_0(1 + \gamma t).$$

La o temperatură nu prea îndepărtată de  $0^\circ\text{C}$ , pentru densitatea lichidului rezultă:

$$\rho = \frac{m}{V_0(1 + \gamma t)} = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t},$$

$\rho_0$  fiind densitatea lichidului la  $0^\circ\text{C}$ .

Între coeficientul de dilatare a lichidului,  $\gamma$ , coeficientul de dilatare aparentă a lichidului,  $\gamma_a = \frac{\Delta V_a}{V_0 \Delta t}$  și coeficientul de dilatare volumică a vasului,  $\gamma_s$ , există relația:

$$\gamma = \gamma_s + \gamma_a.$$

Lucrul mecanic efectuat asupra moleculelor din lichid care vin în stratul superficial, împotriva forței rezultante, este dat de expresia

$$L = -\sigma \Delta S,$$

$\sigma$  fiind coeficientul de tensiune superficială a lichidului în contact cu vaporii săi și  $\Delta S$  variația suprafeței stratului superficial.

Înălțimea la care urcă (pentru lichidele care udă pereții vasului) sau coboară (pentru lichidele care nu udă pereții vasului) un lichid într-un vas capilar este dată de expresia:

$$h = \frac{2\sigma}{r\rho g} \text{ („legea“ lui Jurin),}$$

unde  $r$  este raza vasului capilar,  $\rho$  densitatea lichidului și  $g$  accelerația gravitațională.

i. Solidele sînt sisteme fizice care au formă proprie și volum propriu.

Variațiile cu temperatura ale lungimii, ariei unei secțiuni și, respectiv, volumului unui corp, cînd temperatura se schimbă în intervalul  $[t_0, t_0 + \Delta t]$ , sînt date de expresiile:

$$\begin{aligned} \Delta l &= l_{(t+\Delta t)} - l_0 = \alpha \cdot l_0 \Delta t, \\ \Delta A &= A_{(t+\Delta t)} - A_0 = \beta \cdot A_0 \Delta t, \\ \Delta V &= V_{(t+\Delta t)} - V_0 = \gamma \cdot V_0 \Delta t, \end{aligned}$$

unde  $l_0$ ,  $A_0$  și  $V_0$  reprezintă lungimea, aria secțiunii și, respectiv, volumul corpului la temperatura  $t_0$ , iar  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$  sînt coeficienții medii, pentru intervalul  $[t_0, t_0 + \Delta t]$

de dilatare liniară, de dilatare de suprafață și, respectiv, de dilatare de volum. Pentru solide izotrope,  $\beta \cong 2\alpha$ , iar  $\gamma \cong 3\alpha$ .

Forța care provoacă o alungire a unei bare solide, de arie  $S$  (a secțiunii transversale) și de modul de elasticitate  $E$ , egală cu cea determinată de dilatarea termică, prin creșterea cu  $\Delta T$  a temperaturii, este dată de expresia

$$F = ES\alpha\Delta T.$$

j. Lichefierea gazelor constituie trecerea din fază de gaz în fază lichidă, spațiile intermoleculare micșorându-se cu câteva ordine de mărime, căldura latentă specifică de lichefiere la temperatură constantă fiind:

$$\lambda_l = \frac{Q}{m},$$

unde  $Q$  este cantitatea de căldură transferată masei  $m$  de substanță.

Vaporizarea are loc în vid sau în atmosferă gazoasă și constituie transformarea unui lichid în gaz. Vaporizarea în volum nelimitat se poate face numai la suprafața lichidului (evaporarea) sau în toată masa lichidului (fierberea). Căldura latentă specifică de vaporizare are expresia:

$$\lambda_v = \frac{Q}{m},$$

fiind o măsură a variației energiei interne de legătură a moleculelor, fără ca sistemul să-și schimbe și temperatura.

Viteza de evaporare (vaporizarea la suprafață) este dată de expresia:

$$v = K \frac{S(p_m - p_1)}{H},$$

unde  $K$  este o constantă care depinde de unitățile de măsură alese și de viteza gazului în contact cu lichidul,  $H$  este presiunea atmosferei de deasupra lichidului,  $S$  aria suprafeței de evaporare,  $p_m$  presiunea vaporilor lichidului, la temperatura mediului, iar  $p_1$  presiunea vaporilor în atmosfera ambiantă, la temperatura mediului.

Condensarea este fenomenul fizic invers vaporizării.

Topirea este procesul de trecere a substanței, la o temperatură bine determinată, din starea solidă în starea lichidă. Procesul de trecere a substanței din starea lichidă în starea solidă, la o temperatură bine determinată, se numește solidificare sau cristalizare. Căldura latentă specifică de solidificare este

$$\lambda_f = \frac{Q}{m}.$$

Procesul de trecere a substanțelor din starea solidă direct în starea gazoasă se numește sublimare, iar procesul invers de trecere a substanțelor din starea gazoasă în starea solidă se numește desublimare.

Dacă se transcriu diagramele de fază pentru cele trei perechi de transformări vaporizare și condensare, topire și solidificare și sublimare și desublimare, punctul aparținând celor trei diagrame, reprezintă starea unică în care se află, în echilibru, toate cele trei faze (solidă, lichidă și gazoasă) ale substanței. Parametrii  $p_t$  și  $T_t$ , care caracterizează acest punct, variază cu natura substanței, dar sînt ficși pentru o substanță dată. Acest punct poartă numele de punct triplu al substanței.

În cazul substanțelor care au mai mult de trei faze (substanțele polimorfe, cristale diferite, stabile în anumite condiții), diagrama stărilor prezintă mai multe puncte triple.

### 3. ELECTRICITATE

Fenomenele electrice și magnetice au la bază existența sarcinii electrice. Sarcina electrică are următoarele proprietăți: este de două feluri (pozitivă și negativă), se conservă (pentru un sistem izolat din punct de vedere electric, suma algebrică a sarcinilor electrice ale corpurilor din sistem rămâne constantă), este o observabilă fizică discontinuă (o sarcină electrică oarecare este egală cu produsul dintre un număr întreg și sarcina elementară  $e \cong 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ) și este invariantă (nu depinde de sistemul de referință inerțial din care se face observarea).

a. Câmpul electrostatic este produs de sarcini electrice în repaus.

O sarcină electrică punctiformă  $q_1$ , situată într-un mediu izotrop și omogen, de constantă dielectrică (permitivitate)  $\epsilon$  exercită asupra altei sarcini punctiforme  $q_2$ , aflată într-un punct de rază vectorie  $\vec{r}$  în raport cu  $q_1$ , forța electrostatică (fig. F.A.3):

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2} \vec{r} \text{ (legea lui Coulomb).}$$



Fig. F.A.3

Permitivitatea mediului,  $\epsilon$ , se exprimă funcție de permitivitatea vidului,  $\epsilon_0$ , și de permitivitatea relativă a mediului,  $\epsilon_r$ , prin relația:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r.$$

Această formă a existenței materiei din jurul corpurilor electrizate, care se manifestă prin acțiuni asupra corpurilor cu sarcină electrică, se numește câmp electric. Considerînd un corp punctual cu sarcina electrică  $Q$ , câmpul electric din jurul acestuia va exercita asupra unui corp de probă care are sarcina  $q$  și este așezat la distanța  $r$ , forța

$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon r^2},$$

raportul  $\frac{F}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$  nedepinzînd de corpul de probă, ci numai de sarcina  $Q$  și de poziția punctului din câmpul generat de aceasta. Acest câmp electric este caracterizat printr-o mărime vectorială  $\vec{E}$ , numită intensitate a câmpului electric în punctul respectiv, dată de expresia

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Astfel, intensitatea câmpului electric generat de un corp punctiform, cu sarcina  $Q$ , la distanța  $r$ , va avea expresia:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{r}.$$



Diferența de potențial electric dintre două puncte, sau tensiunea electrică  $U$  dintre acele puncte este o mărime fizică egală cu raportul dintre lucrul mecanic efectuat de câmp la deplasarea unui corp încărcat între cele două puncte și sarcina electrică a corpului:

$$U = V_M - V_N = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r_M} - \frac{1}{r_N} \right) = \frac{L}{q}.$$

Alegînd punctul de referință pînă la care se face deplasarea, la infinit ( $r_N \rightarrow \infty$ ), atunci  $V_N = 0$  și potențial în punctul  $M$  va fi:

$$V_M = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_M}.$$

În cazul unui câmp electric uniform ( $\vec{E} = \text{constant}$ ), forța electrică ce acționează asupra corpului cu sarcina  $q$  pe o distanță  $d$  este constantă,  $F = qE$ , iar tensiunea electrică va fi:

$$U = \frac{Fd}{q} = \frac{qEd}{q} = Ed.$$

Pentru diferența de potențial dintre armăturile unui condensator, neglijabilă față de aceea care poate provoca fenomene ireversibile de polarizare a dielectricului dintre armături, raportul dintre sarcina electrică a unei armături și diferența de potențial dintre armături, pentru valori constante ale potențialelor conductoarelor învecinate este constant și numit capacitate electrică a condensatorului:

$$C = \frac{Q}{U}.$$

În cazul unui condensator cu armături plane, ale căror dimensiuni sînt mult mai mari decît distanța  $d$  dintre ele (condensator „plan“), intensitatea câmpului electric dintre armături este constantă și dată de expresia  $E = \frac{U}{d}$ , capacitatea condensatorului fiind  $C = \frac{\epsilon S}{d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$ , unde  $U$  este tensiunea dintre armături, iar  $\epsilon$ ,  $\epsilon_r$  și  $\epsilon_0$  sînt permitivitatea absolută, permitivitatea relativă a dielectricului dintre armături și, respectiv, permitivitatea vidului.

Gruparea a  $n$  condensatori legați în serie conduce la o capacitate echivalentă,  $C_e$ , dată de expresia:

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i},$$

iar gruparea a  $n$  condensatori legați în paralel conduce la o capacitate echivalentă:

$$C_e = \sum_{i=1}^n C_i.$$

Energia câmpului electric dintre armăturile unui condensator de capacitate  $C$ , încărcat la o diferență de potențial  $U$ , are expresia:

$$W = \frac{1}{2} CU^2.$$

În cazul unui condensator plan, avem:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon S}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon S d E^2 = \frac{\epsilon}{2} E^2 V,$$

$V$  fiind volumul dintre armăturile condensatorului.

b. Prin definiție, intensitatea curentului electric este o mărime care exprimă sarcina electrică ce străbate secțiunea transversală a circuitului în unitatea de timp.

$$I = \frac{Q}{t}.$$

Existența curentului electric se manifestă prin efectul termic (curentul electric încălzește conductorii prin care trece), efectul chimic (la trecerea curentului electric printr-o soluție de electrolit, la electrodul negativ se depune o anumită cantitate de substanță) și efectul magnetic (aparitia unui cîmp magnetic în jurul unui conductor, cînd acesta este străbătut de un curent electric).

Dacă  $E$  este tensiunea electromotoare a unei surse,  $u$  căderea de tensiune pe sursă, iar  $U$  tensiunea la borne (căderea de tensiune pe circuitul exterior sursei), atunci:

$$E = U + u.$$

Legea lui Ohm ne arată că  $R = \frac{U}{I}$ , raportul  $\frac{U}{I}$  evidențiind o proprietate a fiecărui conductor care poartă numele de rezistență electrică și pentru un conductor cilindric de lungime  $l$  și secțiune transversală  $S$ , ea se exprimă prin:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

unde  $\rho$  este rezistivitatea electrică a conductorului. Pentru o variație de temperatură nu prea mare, rezistivitatea electrică depinde de temperatură, după expresia:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),$$

$\rho_0$  fiind rezistivitatea electrică la temperatura  $0^\circ\text{C}$ ,  $\rho$  rezistivitatea electrică la temperatura  $t^\circ\text{C}$ , iar  $\alpha$  coeficientul de temperatură al rezistivității.

Legea lui Ohm pentru un circuit simplu este:

$$I = \frac{E}{R + r},$$

unde  $r$  este rezistența interioară a sursei de tensiune electromotoare  $E$ , iar  $R$  este rezistența rezistorului exterior sursei.

Într-o rețea electrică sînt valabile următoarele două legi (teoreme) ale lui Kirchhoff:

— Suma algebrică a intensităților curenților într-un nod al unei rețele electrice este nulă:

$\sum_K I_K = 0$  (prima „lege“ a lui Kirchhoff), numărul ecuațiilor scrise fiind egal cu  $n - 1$  ( $n$  = numărul de noduri ale rețelei);

— Suma căderilor de tensiune pe diferitele componente ale unui „ochi“ al unei rețele electrice este egală cu suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale generatoarelor electrice în acest ochi:

$\sum_k (R_k + r_k) I_k = \sum_j E_j$  (a doua „lege“ a lui Kirchhoff), numărul ecuațiilor scrise fiind egal cu  $l - n + 1$  ( $l$  = numărul de laturi active ale rețelei).

Rezistența echivalentă a unei grupări de  $n$  rezistoare (de rezistențe  $R_1, R_2, \dots, R_n$ ) legate:

1°. în serie este  $R_s = \sum_{k=1}^n R_k$ ,

2°. în paralel este  $R_p = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \right)^{-1}$ .

Expresia legii lui Ohm pentru un circuit electric închis, alimentat de o baterie de  $n$  generatoare identice (avind fiecare tensiunea electromotoare  $e$  și rezistența internă  $r$ ) legate:

$$1^\circ. \text{ în serie este } I = \frac{ne}{R + nr},$$

$$2^\circ. \text{ în paralel este } I = \frac{e}{R + \frac{r}{n}},$$

$I$  fiind intensitatea curentului electric debitat în circuitul exterior, de rezistență  $R$ .

Energia electrică transformată de consumator în intervalul de timp  $t$  se poate scrie sub forma

$$W = U_{AB}q \text{ sau } W = U_{AB}It,$$

unde  $U_{AB}$  este căderea de tensiune pe consumator. Dacă consumatorul este un rezistor  $R$ , atunci:

$$W = \frac{U_{AB}^2}{R}t \text{ sau } W = I^2Rt.$$

Puterea electrică dezvoltată de un generator electric de tensiune electromotoare  $E$ , care alimentează, sub tensiunea  $U$  la borne, un circuit electric închis:

$$1^\circ. \text{ pentru un circuit întreg este } P_t = EI,$$

$$2^\circ. \text{ pentru circuitul exterior este } P = U_b I,$$

$$3^\circ. \text{ pentru un consumator de rezistență } R \text{ este } P_R = U_b I_R = \frac{U_b^2}{R} = I^2 R,$$

unde  $I$ ,  $I_R$  și  $U_b$  sînt intensitățile curenților debitați de generator în circuitul exterior, respectiv în rezistor și tensiunea electrică la bornele rezistorului.

Masa de substanță depusă la catodul unui voltmetru într-un proces de electroliză, în cursul căruia ionii respectivei substanțe transportă sarcina  $q$  este

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} q = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} It \text{ (legea lui Faraday a electrolizei),}$$

unde  $A$  și  $n$  sînt masa atomică și, respectiv, valența substanței, iar  $F = eN_A \cong 9,648670(54) \cdot 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$  este constanta lui Faraday ( $e$  = sarcina elementară,  $N_A$  = numărul lui Avogadro).

c. Cîmpul magnetic este o formă a materiei, care se manifestă prin acțiunea asupra „acului” magnetic sau asupra conductoarelor parcurse de curent electric.

Observabila fizică inducție a unui cîmp magnetic (inducția magnetică),  $\vec{B}$ , este definită prin forța exercitată de acest cîmp magnetic:

1°. asupra unui element  $d\vec{l}$  al unui conductor parcurs de un curent electric de intensitate  $I$

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \text{ (expresia forței Laplace),}$$

2°. sau asupra unei sarcini electrice punctiforme  $q$ , în mișcare cu viteza  $\vec{v}$  față de cîmpul magnetic

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \text{ (expresia forței Lorentz).}$$

În cazul unui mediu izotrop, parametrul fizic definit prin expresia:

$$\mu = \frac{B}{H} (= \mu_0 \mu_r),$$

unde  $B$  este inducția magnetică corespunzătoare unui cîmp magnetic de intensitate  $H$ , se numește permeabilitatea (totală) absolută, corespunzătoare intensității



$H$  a cîmpului magnetic ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$ ) este permeabilitatea magnetică absolută a vidului, iar  $\mu_r$  este permeabilitatea relativă, corespunzătoare intensității  $H$  a cîmpului magnetic.

Fluxul unui cîmp magnetic uniform (de inducție  $\vec{B}$  constantă în spațiu, ca valoare, direcție și sens), printr-o suprafață  $\Sigma$  este definit prin expresia:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos(\vec{B}, \vec{S}),$$

unde  $\vec{S}$  este aria orientată (în direcție normală pe direcția fluxului) a suprafeței  $\Sigma$ .

În funcție de forma geometrică a conductorului străbătut de un curent electric de intensitate  $I$ , avem următoarele principale expresii particulare ale intensității cîmpului magnetic:

1°. într-un punct situat la distanța  $d$  față de un conductor rectiliniu, filiform și infinit,

$$H = \frac{I}{2\pi d},$$

2°. în centrul unei spire circulare de rază  $r$ ,

$$H = \frac{2I}{r},$$

3°. în interiorul unui solenoid drept de lungime mult mai mare decît dimensiunile secțiunii transversale,

$$H = \frac{NI}{l} = nI, \left(n = \frac{N}{l}\right),$$

unde  $N$  și  $l$  sînt numărul de spire și, respectiv, lungimea solenoidului, direcția și sensul intensității cîmpului magnetic fiind date în toate cazurile de regula burghiului drept (fig. F.A.4).

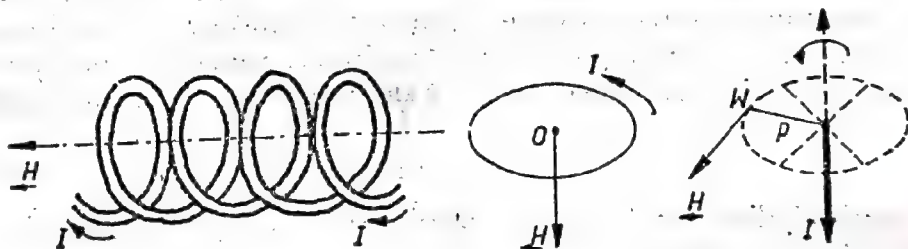


Fig. F.A.4

Forța electromagnetică, exercitată de un conductor rectiliniu parcurs de curentul de intensitate  $I_1$  asupra unei porțiuni de lungime  $l$  dintr-un alt conductor rectiliniu parcurs de curentul de intensitate  $I_2$ , depinde direct proporțional de intensitățile curenților prin cele două conductoare de lungime  $l$  și invers proporțional de distanța dintre conductoare:

$$F_{12} = \frac{\mu_0 \mu_r I_1 I_2}{2\pi r} l.$$

Cu ajutorul acestei expresii se definește amperul ca fiind intensitatea unui curent electric constant, care se stabilește prin două conductoare rectilinii, paralele, foarte lungi, situate în vid la distanța de 1 m unul de altul, între care se exercită o forță de  $2 \cdot 10^{-7}$  N pe fiecare metru de lungime.

d. Studiindu-se mișcarea unui electron care intră într-un cîmp electric uniform, între armăturile unui condensator plan, cu viteza  $v_0$  normală la liniile de

cîmp, deviația electronului,  $y$ , este direct proporțională cu tensiunea  $U$  dintre armături:

$$y = \frac{eE}{2mv_0^3} x^2 = \frac{eU}{2mdv_0^2},$$

axa  $Ox$  fiind paralelă cu  $v_0$ .

În cazul în care o particulă, de masă  $m$  și de sarcină  $q$ , intră într-un cîmp magnetic de inducție  $\vec{B}$ , viteza particulei  $\vec{v}$  fiind normală la liniile de cîmp, traiectoria particulei va fi un cerc a cărui rază se calculează din egalarea expresiei forței Lorentz cu expresia forței centripete, rezultînd:

$$r = \frac{mv}{qB}.$$

Viteza unghiulară  $\omega$  a particulei și frecvența  $\nu$  a mișcării circulare în cîmp magnetic vor fi date de expresiile:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}.$$

e. Variația fluxului unui cîmp magnetic prin suprafața delimitată de conturul închis ( $C$ ) produce o tensiune electromotoare de „inducție electromagnetică“, dată de legea lui Faraday:

$$e = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - \frac{d\Phi}{dt},$$

unde  $\Delta \Phi$  este variația fluxului magnetic prin suprafața delimitată de conturul ( $C$ ), pe durata  $\Delta t$ . Tensiunea electromotoare indusă într-o bobină cu  $N$  spire este de  $N$  ori mai mare decît cea indusă într-o spirală:

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt}.$$

Acțiunea forței Lorentz asupra electronilor liberi dintr-un conductor „deschis“, aflat în mișcare față de un cîmp magnetic, determină de asemenea (de regulă) apariția unor tensiuni electromotoare induse în conductor. Tensiunea electromotoare indusă într-un conductor liniar, de lungime  $l$ , perpendicular pe inducția  $\vec{B}$  a unui cîmp magnetic uniform și pe viteza  $\vec{v}$  de deplasare a conductorului, este dată de expresia:

$$e = Blv \sin \alpha,$$

unde  $\alpha$  este unghiul dintre viteza  $\vec{v}$  de deplasare a conductorului și inducția  $\vec{B}$  a cîmpului magnetic (fig. F.A.5).

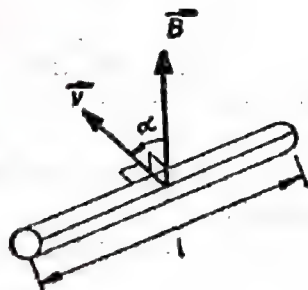


Fig. F.A.5

Pentru valori, ale intensității curentului electric într-un conductor (în particular solenoid), mici în raport cu cele care provoacă fenomene ireversibile de magnetizare, raportul dintre fluxul magnetic  $\Phi(I)$ , produs prin suprafața delimitată de conductor, și intensitatea  $I$  a acestui curent,  $L = \frac{\Phi(I)}{I}$ , este constant și se numește inductanță a conductorului (solenoidului).

Variația fluxului magnetic propriu este  $\Delta\Phi = L\Delta I$  și, ținând seama de legea inducției electromagnetice, tensiunea electromotoare autoindusă este:

$$e = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Expresia inductanței unui solenoid „drept”, de lungime  $l$ , mult mai mare decât dimensiunile secțiunii sale transversale, este:

$$L = \mu \frac{N^2 S}{l},$$

unde  $\mu$  este permeabilitatea absolută a miezului solenoidului, iar  $S$  și  $N$  sînt aria secțiunii transversale și, respectiv, numărul de spire al (înfășurării) solenoidului.

În cazul cuplajului inductiv a două circuite electrice, tensiunile electromotoare induse în acestea se pot scrie:

$$e_1 = -L_m \frac{\Delta I_2}{\Delta t}, \quad e_2 = -L_m \frac{\Delta I_1}{\Delta t}.$$

unde  $L_m = L_{12} = L_{21}$  este coeficientul de inducție mutuală, care depinde numai de mediu și de geometria celor două circuite.

Energia cîmpului magnetic, produs de un curent electric de intensitate  $I$ , se exprimă prin:

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2.$$

f. Curenții electrici produși de tensiuni electromotoare care depind sinusoidal de timp se numesc curenți alternativi sinusoidali.

Expresia intensității curentului electric „debitat” de un generator de curent alternativ, de tensiune la borne  $u(t) = U \sin \omega t$ , într-un

1°) circuit  $RLC$  serie este

$$i(t) = I \sin(\omega t + \varphi_s) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \sin(\omega t + \varphi_s),$$

2°) circuit  $RLC$  derivație este

$$i(t) = I \sin(\omega t + \varphi_p) = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2} \sin(\omega t + \varphi_p),$$

unde  $U$  și  $I$  sînt amplitudinile tensiunii la borne și, respectiv, intensității curentului debitat;  $Z = \frac{U}{I}$ ,  $X_L = L\omega$ ,  $X_C = \frac{1}{C\omega}$  și  $R$  sînt impedanța circuitului, reactanța bobinei de inductanță  $L$ , reactanța condensatorului de capacitate  $C$  (toate pentru un curent alternativ de frecvență  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ) și, respectiv, rezistența rezistorului, iar

$$\varphi_s = \arctg \frac{1}{R} \left( \frac{1}{C\omega} - L\omega \right) \text{ și } \varphi_p = \arctg R \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)$$

sînt defazajele intensității curentului debitat în raport cu tensiunea la borne, în cazul circuitului  $RLC$  serie, respectiv derivație.

În cazul în care frecvența tensiunii alternative la borne devine egală cu  $f_{rez} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  (frecvența de rezonanță a circuitului), amplitudinea intensității



curentului debitat în circuitul  $RLC$  atinge, pentru o valoare dată a tensiunii la borne, mărimea:

- 1<sup>o</sup>) maximă, în cazul circuitului serie,
- 2<sup>o</sup>) minimă, în cazul circuitului derivație.

Raportul

$$Q = \left( \frac{U_L}{U} \right) \omega = \omega_0 = \left( \frac{U_C}{U} \right) \omega = \omega_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC},$$

care arată de câte ori este mai mare, la rezonanță, tensiunea la bornele bobinei sau condensatorului decât tensiunea generatorului, se numește factor de supratensiune sau factor de calitate al circuitului.

Dacă tensiunea la bornele unui circuit de curent alternativ sinusoidal este  $u = U_m \sin \omega t$ , iar intensitatea curentului prin circuit este  $i = I_m \sin (\omega t - \varphi)$ , putere instantanee a circuitului va fi

$$p = ui = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi - \frac{U_m I_m}{2} \cos (2\omega t - \varphi),$$

$\varphi$  fiind defazajul dintre  $u$  și  $i$ .

Valoarea medie a puterii unui circuit de curent alternativ într-o perioadă este:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi = UI \cos \varphi,$$

aceasta purtînd numele de putere activă a circuitului de curent alternativ. Factorul  $\cos \varphi$  poartă numele de factor de putere. Produsul  $S = UI$  se numește putere aparentă (= energia transferată în unitatea de timp circuitului de către sursa de alimentare). Puterea activă este utilizată de consumator, iar cealaltă parte din puterea aparentă,  $P_r = U_x I = UI \sin \varphi$ , poartă numele de putere reactivă, aceasta fiind necesară pentru producerea cîmpului magnetic și a cîmpului electric.

Între puterile aparentă, activă și reactivă există relațiile:

$$P^2 + P_r^2 = S^2, \quad P_r = P \operatorname{tg} \varphi, \quad P = S \cos \varphi, \quad P_r = S \sin \varphi.$$

Între tensiunile de linie  $U_l$ , respectiv de fază  $U_f$ , curenții de linie  $I_l$  și de fază  $I_f$ , și putere există, pentru montajele de curent trifazat, relațiile:

Tipul montajului	$U$	$I$	$P$
În stea	$\sqrt{3} U_f$	$I_f$	$\sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi = 3 U_f I_f \cos \varphi$
În triunghi	$U_f$	$\sqrt{3} I_f$	

g. Tensiunea  $U$  la bornele unui dinam se exprimă prin rezistențele  $r$  a rotorului și  $r_i$  a înfășurării electromagneților inductorului, intensitățile curenților electrici  $I$  prin consumator,  $I_r$  prin rotor,  $I_e$  prin înfășurarea electromagneților inductorului, și tensiunea electromotoare  $E = KN\Phi\omega$  produsă de dinam (unde  $K$  este un coeficient specific dinamului,  $N$  numărul de spire al rotorului,  $\Phi$  fluxul magnetic produs de inductor, iar  $\omega$  frecvența rotațiilor rotorului):

$$U = E - (r + r_i)I \quad (\text{în cazul dinamului serie}),$$

$$U = E - rI_r = R_i I_e \quad (\text{în cazul dinamului șunt}).$$

Pentru utilizarea mașinii de curent continuu ca motor, la bornele sale trebuie aplicată tensiunea  $U = E_c + rI$ , unde  $E_c$  este tensiunea interioară mașinii electrice.

În cazul transformatoarelor uzuale (cu pierderi mici:  $U_2 = e_2$ ,  $P_1 \cong P_2$ ) în sarcină (circuitul secundar închis printr-un consumator), între tensiunile  $U_1$ ,  $U_2$ ,

intensitățile curenților  $I_1, I_2$  și numerele de spire  $N_1, N_2$ , corespunzătoare înfășurărilor primarului, respectiv secundarului, există relațiile:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}.$$

h. Dispozitivele electronice se clasifică, după mediul în care are loc conducția electrică, în: tuburi electronice cu vid, tuburi electronice cu gaz și dispozitive semiconductoare.

În cazul diodei, în regiunea de sarcină spațială, care corespunde funcționării obișnuite a diodelor, variația intensității curentului anodic  $I_A$  cu tensiunea anodică  $U_A$  este bine aproximată de formula lui Langmuir (legea 3/2):

$$I_A = KU_A^{3/2},$$

în care constanta  $K$ , numită perveanță, depinde de geometria sistemului catod-anod.

Parametrii triodei, care îi determină calitățile și funcțiile, sînt:

— panta  $S = \left. \frac{\Delta I_A}{\Delta U_G} \right|_{U_A = \text{const}}$ ,  $\Delta I_A$  fiind creșterea intensității curentului anodic, corespunzătoare creșterii  $\Delta U_G$  a tensiunii de grilă, pentru o tensiune anodică constantă;

— factorul de amplificare,  $\mu = \left. \frac{\Delta U_A}{\Delta U_G} \right|_{\Delta I_A = \text{const}}$ ,  $\Delta U_A$  fiind variația tensiunii anodice, iar  $\Delta U_G$  variația tensiunii de grilă;

— rezistența internă,  $R_i = \left. \frac{\Delta U_A}{\Delta I_A} \right|_{U_G = \text{const}}$ .

Ecuația internă a tubului electronic este  $SR_i = \mu$ .

Amplificarea unui etaj amplificator cu triodă poate fi exprimată în funcție de factorul de amplificare al triodei, de rezistența internă și de rezistența  $R_A$  a rezistorului de sarcină:

$$A = \frac{U_{Ra}}{U_g} = \frac{\mu R_A}{R_i + R_A} = \frac{\mu}{1 + \frac{R_i}{R_A}}.$$

În semiconductoare participă la conducție două feluri de purtători de sarcină mobili: electronii (negativi) și golurile (pozitivi).

Pentru semiconductorii intrinseci, concentrația intrinsecă  $n_i$  este:  $n_i = n_0 = p_0$ , unde  $n_0$  și  $p_0$  sînt concentrațiile de electroni, respectiv de goluri în semiconductorul pur la echilibru termic.

Semiconductorii cu impurități se împart în semiconductorii extrinseci de tip  $n$  (negativ) și de tip  $p$ . Conductivitatea semiconductorului este dată de expresia:

$$\sigma = e(p\mu_p + n\mu_n),$$

unde  $\mu_p$  și  $\mu_n$  sînt mobilitățile golurilor și, respectiv, electronilor,  $p$  fiind concentrația de goluri, iar  $n$  concentrația de electroni.

h. În cazul unui circuit oscilant, legea conservării energiei electromagnetice se exprimă prin:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2 = W_{\text{elmg.}} = \text{const.}$$

În circuitul oscilant, reactanța inductivă  $X_L$  este întotdeauna egală cu reactanța capacitivă  $X_C$ :

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$



Perioada oscilațiilor libere ale circuitului oscilant va fi:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Factorul de calitate,  $Q$ , al circuitului oscilant, este:

$$Q = \left( \frac{L\omega}{R} \right)_{\omega=\omega_0} = \left( \frac{1}{RC\omega} \right)_{\omega=\omega_0}.$$

i. Viteza de propagare a undelor electromagnetice în vid este

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}},$$

iar viteza de propagare a undelor electromagnetice într-un mediu omogen este

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}.$$

Valorile instantanee ale intensității cîmpului electric  $E$  și inducției magnetice  $B$  ale unde electromagnetice, într-un punct avînd coordonata  $y$  pe direcția de propagare, au expresiile:

$$E = E_0 \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda} \right) \right],$$

$$B = \frac{E_0}{v} \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda} \right) \right].$$

Densitatea volumică medie (în timp) a energiei electromagnetice, pentru mediile omogene și izotrope, are expresia:

$$\overline{W} = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 + \frac{1}{2\mu} B_0^2.$$

#### 4. OPTICĂ

Optica studiază interacțiunile undelor electromagnetice cu ele însăși și cu substanța în domeniul infraroșu, vizibil și ultraviolet.

Fenomenele fizice explicate ținînd seama de natura ondulatorie a luminii conduc la optica ondulatorie, iar cele explicate pe baza naturii corpusculare a luminii conduc la optica fonică (corpusculară). Optica geometrică operează cu raze (fascicule foarte înguste) de lumină, fiind un caz particular al opticii ondulatorii, cînd  $\lambda \rightarrow 0$ .

a. Fenomenele de propagare sînt explicate pe baza principiului lui Huygens.

Coincidența dintre valoarea vitezei de propagare a luminii, determinată experimental de Fizeau, și cea a vitezei unde electromagnetice în vid, calculată de Maxwell după formula  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ , a condus la ipoteza naturii electromagnetice a luminii.

Ipoteza naturii electromagnetice a luminii a permis explicarea, în cadrul teoriei clasice, a fenomenelor fizice de interferență, difracție, reflexie și refracție, reflexie și absorbție și dispersie și absorbție.

Relația lui Maxwell care dă legătura dintre indicii de refracție și permitivitatea electrică și permeabilitatea magnetică relative:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon_r \mu_r}{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

este în concordanță cu experiența și în domeniul optic, dacă se ține seama de dispersia luminii.



Pentru a fi explicate fenomenele fizice în care intervine interacțiunea luminii cu molecule, atomi, electroni, este necesară teoria cuantică a luminii, la originea acesteia găsindu-se ipoteza lui Max Planck (1900), că lumina este emisă sub formă de cuante de energie luminoasă sau fotoni, și ipoteza lui Albert Einstein cu privire la noțiunea de foton.

b. Măsurătorile efectuate asupra radiațiilor electromagnetice din domeniul optic (infraroșu, vizibil și ultraviolet) fac obiectul fotometriei.

Caracterizarea luminii din punctul de vedere al energiei transportate de undele luminoase se face cu ajutorul mărimilor energetice, iar din punctul de vedere al percepției acesteia de către ochi lumina este caracterizată prin mărimile fotometrice.

— Energia  $W$  care străbate o secțiune a unui con în vârful căruia se află o sursă  $S$ , în unitatea de timp, se numește flux de energie radiantă:

$$\Phi_e = \frac{W}{t} [\text{W}].$$

— Intensitatea energetică a unei surse punctiforme se definește ca fluxul de radiație emis în unitatea de unghi solid,  $I_e = \frac{\Delta \Phi_e}{\Delta \Omega}$ , unde  $\Delta \Omega = \frac{\Delta A}{r^2}$ ,  $\Delta A$  fiind aria calotei sferice, iar  $r$  raza sferei.

— Iluminarea (iradierea) energetică a unei suprafețe elementare este raportul dintre fluxul de radiație care cade normal pe aceasta și aria suprafeței elementare:

$$E_e = \frac{\Delta \Phi_e}{\Delta A} [\text{W} \cdot \text{m}^{-2}],$$

sau

$$E_e = \frac{I_e}{r^2}, \text{ respectiv } E'_e = E_e \cos \alpha = \frac{I_e}{r^2} \cos \alpha,$$

cînd fasciculul de lumină cade înclinat pe suprafață, axa conului formînd unghiul  $\alpha$  cu normala la suprafață (fig. F.A.6).

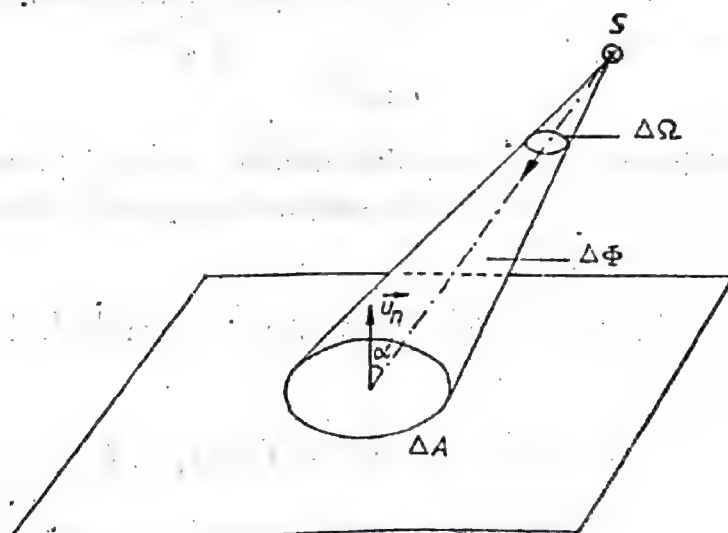


Fig. F.A.6

— Sensibilitatea spectrală relativă a ochiului este dată de expresia

$$V = \frac{\Phi_{\lambda}}{\Phi_e},$$

$\Phi_{\lambda}$ , fiind fluxul constant de energie al radiației cu lungimea de undă  $\lambda = 550 \text{ nm}$  la care apare cea mai puternică senzație vizuală.

— Fluxul luminos, ținând seama de sensibilitatea spectrală a ochiului, este:

$$\Phi = kV\Phi_e,$$

$k$  fiind o constantă care poartă numele de echivalent fotometric al radiației.

— Intensitatea luminoasă a unei surse punctiforme este fluxul luminos emis în unitatea de unghi solid:

$$I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega},$$

aceasta fiind mărimea fundamentală a fotometriei, a cărei unitate de măsură este candela (cd), care este și unitate fundamentală în SI (candela este intensitatea luminoasă în direcția normală, a unei suprafețe cu aria de  $\frac{10^{-6}}{6} \text{ m}^2$  a unui corp negru la temperatura de solidificare a platinei și la presiunea de  $1,01325 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ ).

— Fluxul luminos emis de o sursă în toate direcțiile, cu aceeași intensitate, este:

$$\Phi = 4\pi I,$$

lumenul (lm), fiind fluxul luminos emis într-un unghi solid egal cu un steradian de către un izvor punctiform având intensitatea de 1 cd (adică,  $1 \text{ lm} = 1 \text{ cd} \cdot 1 \text{ sr}$ ).

— Iluminarea este fluxul luminos ce cade normal pe unitatea de arie

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta A} = \frac{I}{r^2},$$

unitatea acestuia fiind luxul (lx), luxul fiind iluminarea unei suprafețe de  $1 \text{ m}^2$  care primește un flux luminos de 1 lm uniform repartizat pe această suprafață ( $1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/m}^2$ ).

c. Interferența luminii reprezintă suprapunerea în același loc a două sau mai multe oscilații luminoase, rezultatul obținut apreciindu-se după intensitatea luminoasă în punctul respectiv:

$$I \approx \tilde{E}^2,$$

$E = E_0 \sin \omega t$  fiind intensitatea cîmpului electric al undei luminoase.

Astfel, dacă într-un punct  $P$  din spațiu se suprapun două unde luminoase  $\tilde{E}_1$  și  $\tilde{E}_2$ , avem  $\tilde{E} = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2$  și

$$I = \tilde{E}^2 = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^2 = \tilde{E}_1^2 + \tilde{E}_2^2 + 2\tilde{E}_1 \cdot \tilde{E}_2 = I_1 + I_2 + 2\tilde{E}_1 \cdot \tilde{E}_2,$$

deosebind cazurile:

$$\alpha) \tilde{E}_1 \cdot \tilde{E}_2 = 0, \text{ adică } I = I_1 + I_2,$$

$$\beta) \tilde{E}_1 \cdot \tilde{E}_2 \neq 0, \text{ adică } I \neq I_1 + I_2,$$

condiția necesară și suficientă pentru ca două unde luminoase să interfere într-un anumit loc din spațiu fiind  $\tilde{E}_1 \cdot \tilde{E}_2 \neq 0$ .

Considerînd două surse de lumină,  $S_1$  și  $S_2$ , punctiforme, care emit radiații de aceeași frecvență:

$$E_1 = E_0 \sin (\omega t + \varphi_1),$$

$$E_2 = E_0 \sin (\omega t + \varphi_2),$$

atunci într-un punct  $P$  oarecare avem:

$$E = 2E_0 \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \sin \left( \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right)$$

$\omega = \omega_1 = \omega_2$  și  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \text{constant}$  în timp, făcând parte din condițiile de interferență.

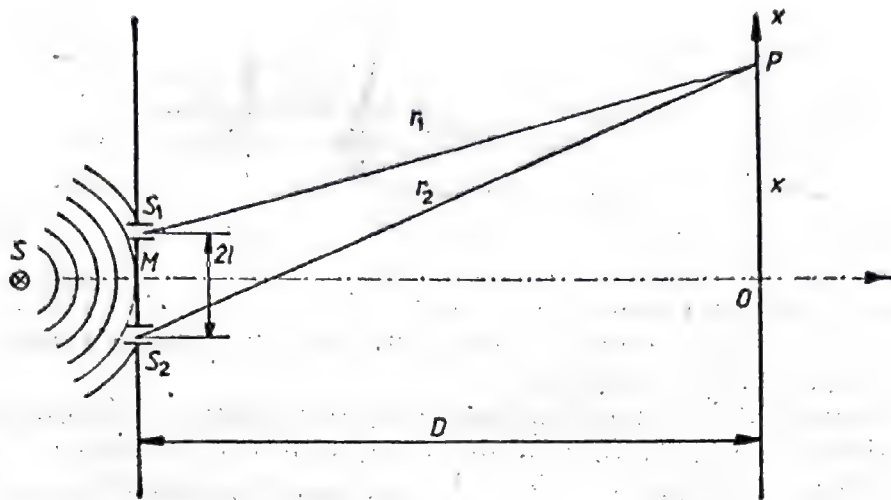


Fig. F.A.7

— În cazul unui dispozitiv Young (fig. F.A.7) avem:

$$I(P) = (\widetilde{E_1 + E_2})^2 = 4E_0^2 \cos \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda},$$

unde

$$E = E_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r_1}{c} \right) \text{ și } E = E_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r_2}{c} \right).$$

Pentru  $r_2 - r_1 = 2k \frac{\lambda}{2}$ , unde  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $I = I_{\max}$ , iar pentru  $r_2 - r_1 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$ ,  $I = I_{\min}$ . Distanța dintre două maxime (sau două minime) consecutive se numește interfranjă și se notează cu  $i$ :

$$i = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda D}{2l}.$$

— În cazul unei lame cu suprafețe plan-paralele, de grosime  $d$  și indice de refracție  $n$ , diferența de drum, dintre raza reflectată pe fața de intrare a lamei și raza care pătrunde în lamă, este reflectată pe suprafața de ieșire și revine în regiunea din fața suprafeței de intrare, este:

$$\delta = 2nd \cos \hat{r} + \frac{\lambda}{2}.$$

$\hat{r}$  fiind unghiul de refracție ( $n \sin \hat{r} = \sin \hat{i}$ ). Pentru  $\hat{i} = 0$  avem  $\hat{r} = 0$  și:

$$\delta = 2nd + \frac{\lambda}{2}.$$



— În cazul unei pene optice, cînd două suprafețe plane ce delimitează lama subțire formează un unghi mic între ele (fig. F.A.8) interferanța este dată de relația:

$$i = \frac{\lambda}{2an}$$

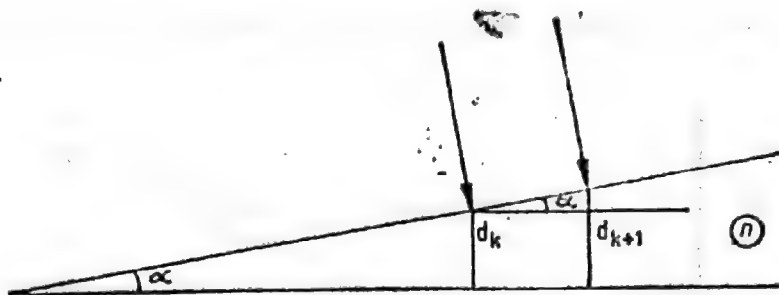


Fig. F.A.8

d. Difrakția luminii constă în esență din „ocolirea” de către lumină a obstacolelor, în anumite condiții îndeplinite de lungimea de undă a radiației luminoase și dimensiunile obstacolelor.

În cazul rețelei de difracție (sistem de fante înguste, rectilinii, egale, paralele, echidistante și foarte apropiate una de alta), avînd  $n$  trăsături pe unitatea de lungime ( $n = \frac{N}{L}$ ) și distanța  $l = \frac{L}{N} = \frac{1}{n}$  între două trăsături succesive, maximele de difracție se obțin pentru

$$l(\sin \hat{i} \pm \sin \alpha) = k\lambda,$$

$\hat{i}$  fiind unghiul de incidență,  $\alpha$  unghiul sub care se difractă undele, iar  $k$  ordinul de difracție.

Pentru  $\hat{i} = 0$ , avem

$$l \sin \alpha = k\lambda$$

și, pentru unghiuri de difracție mici,  $\tan \alpha \approx \sin \alpha$ ,  $n = \frac{1}{l}$ ; punctul  $P$  în care se va forma maximum de ordinul  $k$  se va afla la distanța  $x = f \tan \alpha = f \sin \alpha \approx f k \lambda n$  și deci:

$$\lambda = \frac{x}{kfn},$$

$f$  fiind distanța focală a lentilei.

e. La suprafața de separare a două medii transparente au loc fenomenele de reflexie a luminii (întoarcerea în mediul din care a venit a unei luminoase, atunci cînd întâlnește suprafața de separare a celor două medii) și de refracție a luminii (trecerea luminii în mediul al doilea schimbîndu-și direcția de propagare), care se supun următoarelor „legi”.

— Unda incidentă; normala la suprafață în punctul de incidență, unda reflectată și unda refractată se găsesc în același plan.

— Unghiul de reflexie,  $\hat{r}$ , este numeric egal cu unghiul de incidență,  $\hat{i}$ , adică  $\hat{i} = \hat{r}$ .

—  $\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}_e} = \frac{n_2}{n_1}$ ,  $\hat{r}_e$  fiind unghiul de refracție,  $n_1$  indicele de refracție al primului mediu, iar  $n_2$  indicele de refracție al celui de-al doilea mediu.

Când lumina trece dintr-un mediu optic mai dens într-altul mai puțin dens ( $n_2 < n_1$ ), există un unghi minim de incidență,  $\hat{i}$ , de la care raza refractată nu mai trece în cel de-al doilea mediu, avînd loc fenomenul de reflexie totală. Unghiul limită  $\hat{i} = \hat{i}_l$ , pentru  $\hat{r} = \frac{\pi}{2}$ , are valoarea  $\sin \hat{i}_l = \frac{n_2}{n_1}$ .

f. Indicele de refracție al unui mediu este

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}.$$

Fenomenul de variație a indicelui de refracție cu lungimea de undă se numește dispersie. Astfel, avem dispersie normală ( $n$  crește cu scăderea lui  $\lambda$ ) și dispersie anomală ( $n$  scade cu descreșterea lui  $\lambda$ ).

Unghiul de deviație  $\delta$  (unghiul dintre direcția razei incidente și direcția razei emergente) într-o prismă are valoarea:

$$\delta = \hat{i} + \hat{i}' - (\hat{r} + \hat{r}') = \hat{i} + \hat{i}' - \hat{A},$$

$\hat{A}$  fiind unghiul refringent al prisme. Unghiul de deviație minimă,  $\delta_m$ , corespunde la  $\hat{i} = \hat{i}'$  și  $\hat{r} = \hat{r}'$ , adică:

$$\delta_m = 2\hat{i} - \hat{A}.$$

Ținînd seama de faptul că  $\sin \hat{i} = n \sin \hat{r}$ , avem:

$$n = \frac{\sin \frac{\hat{A} + \delta_m}{2}}{\sin \frac{\hat{A}}{2}}.$$

g. Dacă pe suprafața unui corp cade un fascicul paralel de raze, de intensitate  $I_0$ , experiența arată că intensitatea  $I$  a undeî plane suferă o micșorare după legea

$$I = I_0 e^{-kd},$$

unde  $d$  este grosimea stratului de substanță străbătută și  $k$  este coeficientul de absorbție care, în general, depinde de lungimea de undă.

h. În general, interacțiunea a două fascicule de lumină poate fi pusă în evidență printr-o inegalitate a intensității fasciculelor, o modificare a direcției de propagare, o modificare a spectrelor lor sau o combinație a acestora. Acea caracteristică a luminii la care ochiul nu este sensibil, dar pentru care există elemente optice sensibile, este cunoscută sub numele de stare de polarizare. Când ne fixăm atenția asupra unui punct particular al fasciculului undeî, locul geometric al vârfului vectorului intensitate cîmp electric  $\vec{E}$  constituie o măsură a polarizării.

Lumina în care vectorul intensitate cîmp electric  $\vec{E}$  vibrează haotic în toate direcțiile posibile într-un plan perpendicular pe direcția de propagare se numește lumină naturală. Lumina în care vectorul intensitate cîmp electric  $\vec{E}$  are o singură direcție de oscilație se numește lumină liniar polarizată. Când extremitatea vectorului  $\vec{E}$  descrie un cerc, avem lumină polarizată circular, iar cînd descrie o elipsă, avem lumină polarizată eliptic.

Una dintre metodele de obținere a luminii polarizate o constituie polarizarea prin reflexie. Există un unghi de incidență  $i_B$ , numit unghi Brewster, pentru care lumina reflectată este total polarizată, fiind exprimat prin

$$\operatorname{tg} \hat{i}_B = \frac{n_2}{n_1}.$$

i. Optica geometrică folosește noțiunea de rază (fascicul foarte îngust) de lumină definită ca direcția de-a lungul căreia se propagă lumina, considerându-se că într-un mediu omogen și izotrop lumina se propagă în linie dreaptă. De asemenea, se respectă principiul independenței fasciculelor de lumină și principiul reversibilității drumului razelor de lumină.

Spațiul optic este împărțit în două regiuni: spațiul obiect (regiunea în care se găsește obiectul) și spațiul imagine (regiunea în care se află imaginea).

Suprafața care separă două medii transparente cu indici de refracție diferiți se numește dioptru. În cazul unui dioptru sferic avem următoarele relații fundamentale:

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R},$$

numită relația punctelor conjugate ( $x_1$  fiind distanța de la vârful dioptrului la imagine,  $x_2$  distanța de la vârful dioptrului la obiect, iar  $R$  raza dioptrului), care mai poate avea forma:

$$\frac{f_2}{x_2} + \frac{f_1}{x_1} = 1,$$

$f_1$  fiind distanța focală obiect, iar  $f_2$  distanța focală imagine.

A doua relație dă expresia măririi liniare  $\beta$ :

$$\beta = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{n_1}{n_2}.$$

În cazul oglinzilor sferice, punându-se condiția formală  $n_2 = -n_1$ , avem

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{2}{R},$$

sau, deoarece  $f_1 = f_2 = f = \frac{R}{2}$ , rezultă

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f},$$

iar mărimea liniară este  $\beta = -\frac{x_2}{x_1}$ .

Pentru fasciculele luminoase care străbat o lentilă subțire (de grosime neglijabilă în raport cu razele de curbură  $R_1$  și  $R_2$  ale suprafețelor) și care formează cu axa optică a lentilei (direcția trecind prin centrele de curbură ale celor două suprafețe ale lentilei) unghiuri neglijabile față de un radian (fascicule paraxiale) avem formula fundamentală a lentilelor subțiri

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

în care  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $R_1$  și  $R_2$  se măsoară folosind ca origine centrul optic al lentilei. (Prin convenție, ele sînt pozitive dacă se află în dreapta lentilei și negative dacă se află în stînga ei.)



Folosind definiția distanței focale dată de

$$f = \frac{1}{(n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)},$$

formula fundamentală a lentilelor subțiri devine

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} = C,$$

$C$  purtând numele de puterea optică sau convergența lentilei.

Convergența unui sistem (bloc) optic format din lentile subțiri alipite este egală cu suma convergențelor lentilelor componente:

$$C = \frac{1}{f} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_i}.$$

În cele prezentate s-au făcut anumite presupuneri ca: existența fasciculelor de lumină paraxiale, a unei imagini stigmatice, corespondența unei imagini plane și perpendiculare pe axul optic pentru un obiect mic plan și perpendicular pe ax, nedeformarea imaginii față de obiect, același indice de refracție pentru toate radiațiile (mediu nedispersiv sau lumină monocromatică). Neîndeplinirea acestor condiții duce la anumite imperfecțiuni prezentate de sistemele optice, numite aberații. Există două clase de aberații: aberații geometrice și aberații cromatice.

Un instrument optic este un ansamblu de lentile, oglinzi și diafragme cu ajutorul cărora se obțin imagini ale diferitelor obiecte. Un instrument optic se caracterizează prin mărire, putere, grosiment și puterea separatoare. Există două mari clase de instrumente: instrumente care dau imagini reale (aparatură fotografică, aparatul de proiecție) și instrumente care dau imagini virtuale (lupa, microscopul optic, luneta, telescopul).

j. Experiența lui Fizeau, experiența Michelson-Morley și experiența lui Kaufmann au jucat un rol hotărâtor în elaborarea teoriei relativității restrinse de către Albert Einstein, care are la bază următoarele postulate:

— Fenomenele fizice se desfășoară identic în toate sistemele de referință inerțiale, dacă condițiile inițiale sînt identice (formularea legilor fizicii este aceeași în toate sistemele de referință inerțiale).

— Viteza luminii în vid are aceeași valoare în toate sistemele de referință inerțiale și în toate direcțiile.

De asemenea, se ține seama de faptul că simultaneitatea a două evenimente din locuri diferite este relativă.

Între coordonatele spațio-temporale  $(x, y, z, t)$  ale unui eveniment în sistemul de referință inerțial  $S$  și coordonatele spațio-temporale  $(x', y', z', t')$  ale aceluiași eveniment în sistemul de referință inerțial  $S'$  —  $S'$  mișcându-se cu viteza constantă  $\vec{v} = \vec{u}_x \cdot v$  față de  $S$  și  $Ox$  fiind paralelă cu  $O'x'$  — există relațiile de transformare ale lui Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{cases}$$

Consecințele cinematice ale transformărilor Lorentz constau în existența unor relații între lungimea cinematică (măsurată în sistemul observatorului) și lungimea proprie (măsurată în sistemul în care se află obiectul de studiat),  $\Delta l = \Delta l' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , între timpul cinematic și timpul propriu,  $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  și a teoremei compunerii vitezelor în mecanica relativistă:

$$\begin{cases} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \\ u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \\ u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \end{cases} \quad \begin{cases} u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}, \\ u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}, \\ u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}. \end{cases}$$

Noua concepție despre spațiu și timp, în conformitate cu teoria relativității restrinse a lui Einstein, implică o schimbare fundamentală și în dinamică. Astfel, legea fundamentală a dinamicii capătă forma:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F};$$

masa unui corp în mișcare depinde de viteza sa:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

iar energia cinetică a unei particule de masă de repaus  $m_0$  este dată de expresia:

$$E_c = W - W_0,$$

unde  $W = mc^2$  este energia totală a particulei, iar  $W_0 = m_0 c^2$  este energia de repaus a particulei.

Variației  $\Delta m$  a masei îi corespunde totdeauna o variație de energie,  $\Delta W$ , dată de relația:

$$\Delta W = c^2 \Delta m.$$

## 5. FIZICĂ ATOMICĂ ȘI NUCLEARĂ

Fenomenele fizice în care se manifestă aspectul corpuscular al luminii, cuantificarea în sistemele materiale, radiația termică și fenomenele fizice în care se manifestă aspectul ondulatoriu al microparticulelor constituie originea teoriei cuantice, fiind fenomene fizice, descoperite la finele secolului al XIX-lea și în primul pătrar al secolului al XX-lea, care nu au putut fi explicate pe baza fizicii clasice.

a. Efectul fotoelectric extern este emisia de electrozi de către un corp aflat sub acțiunea radiațiilor electromagnetice. Experimental se constată că: — intensitatea curentului fotoelectric de saturație este direct proporțională cu fluxul radiațiilor electromagnetice incidente, cind frecvența este constantă; — energia cinetică a

fotoelectronilor emiși crește liniar cu frecvența radiațiilor electromagnetice și nu depinde de fluxul acestora și — intensitatea curentului fotoelectric este diferită de zero numai dacă frecvența radiației incidente este mai mare sau cel puțin egală cu o valoare minimă. Aceste rezultate experimentale pot fi explicate cu ajutorul ecuației lui Einstein:

$$h\nu = L + \frac{1}{2} m_e v^2,$$

$h\nu$  fiind energia fotonului cedată electronului,  $L$  lucrul mecanic de extracție al electronului din corp (energia de extracție), iar  $\frac{1}{2} m_e v^2$  energia cinetică a fotoelectronului extras.

Efectul Compton constă în ciocnirea foton-electron, fotonul cedînd numai o parte din energia sa electronului. Aceasta face ca lungimea de undă  $\lambda$  a radiației împrăștiată, față de lungimea de undă  $\lambda_0$  a radiației incidente, să fie dată de expresia

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda_0 + 2\Lambda \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$\Lambda = \frac{h}{m_e c}$  fiind lungimea de undă Compton, iar  $\theta$  unghiul sub care este împrăștiată radiația incidentă.

Energia cinetică a electronului de recul este

$$E_c = \frac{hc}{\lambda_0} \cdot \frac{2\Lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\lambda_0 + 2\Lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}},$$

iar unghiul sub care este difuzat electronul va fi

$$\varphi = \arctg \frac{\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{\Lambda}{\lambda_0}}.$$

Ambele efecte, efectul fotoelectric și efectul Compton, au fost explicate admitînd natura corpusculară a radiației electromagnetice, particula numită foton avînd energia  $\epsilon = h\nu$ , masa de repaus  $m_0 = 0$ , masa de mișcare  $m = \frac{h\nu}{c^2}$ , viteza  $v = c$ , impulsul  $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$  și sarcina electrică  $q = 0$ .

b. Electronul constituent al oricărui atom este particula cu cea mai mică sarcină electrică  $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  C, cu masa de repaus  $m_0 \simeq 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg și cu sarcina specifică  $\frac{e}{m} = -1,76 \cdot 10^{11}$  C·kg<sup>-1</sup>.

c. Ideea lui de Broglie cu privire la proprietățile ondulatorii ale microparticulelor a condus la presupunerea existenței fenomenelor fizice în care se manifestă aspectul ondulatoriu al microparticulelor. Conform lui de Broglie, unei particule de energie  $E$  și impuls  $p$  i se poate asocia o undă avînd frecvența  $\nu = \frac{E}{h}$  și lungimea de undă  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$ . Experiența lui Davisson și Germer confirmă ipoteza lui de Broglie, fiind verificată relația

$$2d \sin \theta = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$



unde  $d$  este distanța interplanară (distanța dintre plane cristalografice),  $\theta$  unghiul de împrăștiere a electronilor pe rețeaua plană cristalină și

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}.$$

d. Interpretarea statistică a dualismului undă-corpusecul înlătură contradicțiile care apar dacă se păstrează noțiunea de stare, pentru un sistem fizic, dată de fizica clasică.

Sistemele fizice cuantice sînt guvernate de relațiile de incertitudine ale lui Heisenberg:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{2},$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{h}{2},$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{h}{2}.$$

e. În cazul atomului de hidrogen avem formula lui Balmer generalizată pentru seriile spectrale:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right),$$

unde  $R$  este constanta lui Rydberg,  $n_1 = 1, 2, 3, \dots$ ,  $n_2$  tot întreg, dar  $n_2 > n_1$ .

Estimarea razei unui atom,  $r_a \approx \left( \frac{M}{\frac{4\pi}{3} \rho N_A} \right)^{1/2}$ ,  $M$  fiind masa unui kilomol,

$\rho$  densitatea corpului considerat, iar  $N_A$  numărul lui Avogadro, a condus la o valoare de  $(1 \div 2) \cdot 10^{-10}$  m.

Experiența lui Rutherford a arătat că raza nucleului atomic este de ordinul a  $(10^{-14} - 10^{-15})$  m.

Modelul planetar al atomului, ținînd seama de postulatele lui Bohr (a. stările legate ale atomului sînt stări staționare; b. la trecerea dintr-o stare staționară,  $m$ , în altă stare staționară,  $n$ , atomii absorb sau emit radiație electromagnetică a cărei frecvență este  $\nu_{mn} = \frac{1}{h} (E_m - E_n)$  și de condiția de cuantificare  $2\pi r = n\lambda = n \frac{h}{p}$ , a condus la expresia razei primei orbite Bohr:

$$r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

și la expresia energiei totale cuantificate a electronului în atomul de hidrogen

$$E_n = - \frac{m_0 e^4}{8h^2} \cdot \frac{1}{\epsilon_0^2 n^2},$$

$n$  fiind numărul cuantic principal. Pentru constanta Rydberg s-a obținut

$$R = \frac{m_0 e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} = 1,097373 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

Pentru un atom hidrogenoid, energia totală cuantificată a electronului este:

$$E_n = - RZ^2 \frac{1}{n^2}.$$

Tabloul periodic al elementelor poate fi explicat cu ajutorul numerelor cuantice (numărul cuantic principal  $n = 1, 2, \dots$ ; numărul cuantic orbital  $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ , numărul cuantic magnetic  $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$ , numărul cuantic de spin  $s = \pm \frac{1}{2}$ ) și principiul de excluziune al lui Pauli, numărul maxim de electroni cu același număr cuantic principal fiind:

$$\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2.$$

e. Nucleul este format din  $Z$  protoni și  $(A-Z)$  neutroni,  $A$  fiind numărul de masă, iar  $Z$  numărul atomic.

Stabilitatea nucleelor atomice este asigurată de energia de legătură (energia necesară pentru a desface un nucleu izolat, în repaus, în nucleoni izolați în repaus):

$$W_{\text{leg.}} = [Zm_p + (A-Z)m_n - M(A, Z)]c^2,$$

unde  $M(A, Z)$  este masa nucleului de număr de masă  $A$  și de număr atomic  $Z$ . Masa atomică este dată de expresia:

$$M_a(A, Z) = M(A, Z) + Zm_e - \frac{1}{c^2} W_{\text{leg.}}^{\text{electroni}},$$

unde  $W_{\text{leg.}}^{\text{electroni}} = 15,73 \cdot Z^{7/3}$  [eV].

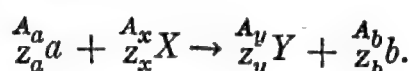
Deoarece masa atomică se poate determina experimental, avem:

$$W_{\text{leg.}} = [Zm_H + (A-Z)m_n - M_a(A, Z)]c^2.$$

Raza unui nucleu atomic este dată de expresia:

$$R = R_0 A^{1/3} = (1,20 \pm 0,01) \cdot 10^{-15} A^{1/3} \text{ [m]}.$$

f. Procesul prin care două particule sau sisteme de particule interacționează prin forțe nucleare, ansamblul desfășurându-se în mai multe particule (nuclee) poartă numele de reacție nucleară:



Legea conservării energiei într-o reacție nucleară conduce la energia de reacție:

$$Q = E_c^b + E_c^Y - E_c^a - E_c^X,$$

unde  $E_c$  sînt energiile cinetice ale componentilor. Dacă  $Q > 0$ , reacția se numește exoenergetică, iar dacă  $Q < 0$ , reacția se numește endoenergetică.

Dacă se ține seama și de legea conservării impulsului, în sistemul laboratorului avînd  $E_c^X = 0$ , se poate obține o legătură între energia de reacție,  $Q$ , și caracteristicile particulei  $b$ , exprimată prin relația:

$$Q = \left(1 + \frac{m_b}{m_X}\right) E_c^b - \left(1 - \frac{m_a}{m_Y}\right) E_c^b - \frac{\sqrt{2m_a m_b E_c^a E_c^b}}{m_Y} \cos \theta,$$

$\theta$  fiind unghiul sub care este împrăștiată particula  $b$  față de direcția de deplasare a particulei  $a$ .

g. Legea dezintegrării radioactive este exprimată prin relația:

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

unde  $N$  este numărul de sisteme în stare excitată la momentul  $t$ ,  $N_0$  numărul de sisteme în stare excitată la momentul inițial ( $t_0 = 0$ ), iar  $\tau$  este viața medie a sistemului;  $\frac{1}{\tau} = \lambda$  poartă numele de constantă radioactivă sau probabilitatea de dezintegrare în unitate de timp:  $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$  se numește timp de înjumătățire.

Legea de atenuare a fotonilor  $\gamma$  se exprimă prin:

$$I(x) = I(0)e^{-\mu x},$$

$x$  fiind grosimea stratului de substanță străbătută de fascicul,  $I(0)$  intensitatea fasciculului la intrarea în strat, iar  $I(x)$  intensitatea fasciculului la ieșirea din strat.

h. Particulele elementare pot să interacționeze, cunoscându-se trei tipuri de interacțiuni elementare: interacțiuni nucleare, interacțiuni electromagnetice și interacțiuni slabe. Aceste interacțiuni satisfac legea de conservare impuls-energie, legea de conservare a momentului cinetic și legea de conservare a sarcinii electrice și barionice. Interacțiunile tari mai satisfac legea de conservare a stranietății etc.



## B. PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR

### ENUNȚURI

1984

#### 1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILURILE: MECANIC, ELECTRIC, ENERGETIC, MINE, PETROL, METALURGIE, CONSTRUCȚII, GEODEZIE, TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA TEXTILELOR, TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA PRODUSELOR ALIMENTARE, FORESTIER (specializarea INDUSTRIALIZAREA LEMNULUI), GEOLOGIE

1.1°. Două corpuri cu masele  $m_1 = 1$  kg și  $m_2 = 0,5$  kg sînt aruncate vertical în sus, din același loc de pe suprafața Pămîntului, cu vitezele inițiale  $v_{01} = 65$  m·s<sup>-1</sup> și, respectiv,  $v_{02} = 100$  m·s<sup>-1</sup>, la momentele  $t_1 = 0$  și  $t_2 = \Delta t$ . În condițiile în care corpurile se ciocnesc plastic în aer, să se determine: a) viteza inițială a corpului format prin ciocnire, dacă  $\Delta t = 7$  s; b) creșterea temperaturii celor două corpuri în urma ciocnirii (în condițiile de la punctul a), dacă înaintea ciocnirii corpurile au aceeași temperatură, iar căldura lor specifică are aceeași valoare,  $c = 1500$  J·kg<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>; c) intervalul de valori ale lui  $\Delta t$  pentru care ciocnirea se produce la o înălțime  $h \geq 180$  m față de suprafața Pămîntului. Se va lua  $g = 10$  m·s<sup>-2</sup>.

2°. O cantitate de heliu ocupă volumul  $V_1 = 21$ , la presiunea  $p_1 = 10^5$  N·m<sup>-2</sup> și temperatura  $T_1 = 280$  K. Gazul este comprimat adiabetic pînă la volumul  $V_2 = V_1/8$  și apoi destins izoterm pînă cînd presiunea sa devine  $p_3 = 1,5 p_1$ . Gazul revine la starea inițială 1 printr-o transformare reprezentată în coordonatele  $p$ ,  $V$  prin segmentul de dreaptă care unește punctele reprezentînd stările 3 și 1. Cînoscînd căldura molară la presiune constantă a heliului  $C_p = \frac{5R}{2}$  (unde  $R$  este constantă universală a gazelor), să se determine: a) exponentul adiabetic al heliului, precum și temperatura și volumul său în starea 3; b) lucrul mecanic și căldura schimbată de gaz cu exteriorul în procesul  $3 \rightarrow 1$ ; c) randamentul motorului termic care ar funcționa după ciclul reversibil considerat. Se dau:  $\lg 2 = 0,301$  și  $\lg 3 = 0,477$ .

3°. Două condensatoare cu capacitățile  $C_1 = 100$  μF și  $C_2 = 250$  μF au câte o armătură unite între ele printr-un fir legat la pămînt, celelalte armături fiind încărcate cu sarcinile  $q_1 = 5 \cdot 10^{-3}$  C și, respectiv,  $q_2 = -3 \cdot 10^{-3}$  C. Se leagă aceste armături printr-un solenoid. Se cere: a) tensiunea electrică dintre armăturile fiecărui condensator, după stabilirea echilibrului electrostatic.

După stabilirea echilibrului, la bornele solenoidului se conectează o sursă de tensiune alternativă. Știînd că rezonanța circuitului  $LC$  considerat se obține pentru frecvența  $\nu_0 = 159$  Hz a tensiunii alternative, să se determine: b) inductanța solenoidului și intensitatea efectivă a curentului debitat pe circuit de sursa cu tensiunea alternativă  $U = 14,1 \sin 3140 t$  (V), dacă — în acest caz — rezistența electrică a solenoidului este neglijabilă; c) valoarea maximă a vitezei de transport a electronilor liberi în conductorul solenoidului, în condițiile punctului b, dacă aria secțiunii conductorului solenoidului este  $A = 0,5$  mm<sup>2</sup>, iar concentrația electronilor liberi din conductor este  $n = 10^{29}$  electroni liberi/m<sup>3</sup>. Se dă sarcina electrică elementară  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C.

4°. Să se deducă: a) teorema variației energiei cinetice a punctului material; b) viteza termică a moleculelor unui gaz ideal, pornind de la formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare a gazelor; c) tensiunea electromotoare indusă într-un conductor rectiliniu care se deplasează cu viteză constantă într-un câmp magnetic uniform.

5°. Să se scrie, indicind semnificațiile mărimilor fizice care intervin: a) legea lui Bernoulli; b) variația densității unui corp solid cu temperatura; c) expresia inductanței unei bobine.

II. 1°. Un corp cu masa  $m = 10 \text{ kg}$  urcă pe un plan înclinat cu unghiul  $\theta = 30^\circ$ , sub acțiunea unei forțe  $F = 100 \text{ N}$ , orientată orizontal, care se aplică corpului din momentul în care acesta se află în repaus, la baza planului înclinat. Știind că în cea de-a doua secundă a mișcării corpul parcurge distanța  $d = 3 \text{ m}$ , să se calculeze: a) accelerația mișcării corpului; b) coeficientul de frecare între corp și plan; c) lucrul mecanic efectuat de forța  $F$  până când corpul ajunge la înălțimea  $h = 10 \text{ m}$ . Se va lua  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

2°. Două vase cu volumele  $V_1 = 10^{-3} \text{ m}^3$  și  $V_2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$  sînt puse în comunicație printr-un tub de volum neglijabil. Vasele conțin heliu la temperatura  $T = 300 \text{ K}$  și presiunea  $p = 1500 \text{ N/m}^2$ . Gazul din vasul 1 este încălzit pînă cînd temperatura sa se dublează, fără ca aceasta să afecteze temperatura gazului din vasul 2. Să se calculeze: a) masa totală de gaz din cele două vase; b) presiunea gazului din vase după încălzire; c) raportul dintre vitezele termice ale moleculelor gazului din cele două vase, în starea finală. Se dau: masa molară a heliului  $\mu = 4 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$  și constanta universală a gazelor perfecte  $R = 8310 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$ . Se neglijează dilatarea vasului 1.

3°. Două sfere metalice, identice, de dimensiuni foarte mici și mase egale  $m = 3 \cdot 10^{-5} \text{ kg}$ , sînt atîrnate de două fire izolatoare, inextensibile, avînd fiecare lungimea  $L = 11 \text{ cm}$ , distanța dintre punctele (aflate la aceeași înălțime) în care sînt fixate celelalte capete ale firelor fiind  $d = 2 \text{ cm}$ . În situația în care firele sînt verticale, sferele sînt încărcate cu sarcini electrice egale și de același semn. După aceasta, sferele se deplasează și rămîn în echilibru cînd tensiunea din fire devine  $T = 6 \cdot 10^{-4} \text{ N}$ . Să se calculeze: a) sarcina electrică de pe fiecare sferă; b) lucrul mecanic efectuat de forțele electrice pentru a aduce sferele din poziția inițială în cea finală; c) știind că o sferă identică cu cele considerate, inițial neîncărcată electric, este adusă în contact pe rînd, separat, cu fiecare dintre cele două sfere încărcate electric, să se determine ce parte din sarcina electrică inițială păstrează fiecare sferă. Se dau:  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$  și  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

4°. Să se deducă expresiile: a) accelerației centripete; b) efortului unitar exercitat de o bară încălzită și fixată la capete; c) forței Lorentz care acționează asupra electronilor, într-un câmp magnetic uniform.

5°. Să se formuleze: a) principiile I, II și III ale mecanicii newtoniene; b) principiul al doilea al termodinamicii; c) legile lui Kirchhoff pentru rețele electrice.

III. 1°. Se consideră sistemul din figura F.B.1. Știind că masele corpurilor 1 și 2 sînt egale ( $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$ ), iar firul care le unește — trecînd peste scripetele S

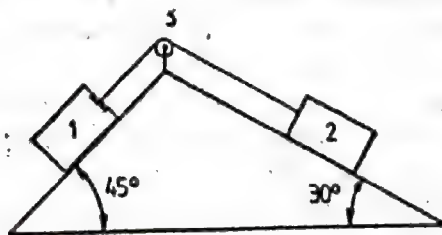


Fig. F.B.1



mobil, fără frecare — este inextensibil, să se determine: a) accelerația sistemului în absența frecărilor; b) accelerația sistemului în cazul în care coeficienții de frecare sint  $\mu_1 = \mu_2 = 0,1$ ; c) căruia dintre corpuri trebuie să i se adauge o masă suplimentară și care este valoarea acestei mase pentru ca sistemul să fie în echilibru sau să se miște uniform (rezolvare atît în condițiile punctului a, cit și în condițiile punctului b). Se va lua  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

2°. Un calorimetru cu capacitatea calorică  $C = 110 \text{ J/K}$  conține  $m_1 = 0,5 \text{ kg}$  apă la temperatura  $t_1 = 30^\circ\text{C}$ . Se introduce în calorimetru o cantitate de gheață la  $t_2 = -10^\circ\text{C}$ , cu masa  $m_2 = 0,2 \text{ kg}$ . Să se determine: a) temperatura finală a amestecului și masa de gheață care se topește; b) căldura necesară pentru aducerea amestecului și calorimetrului la  $t_f = 100^\circ\text{C}$  și vaporizarea întregii cantități rezultate de apă; c) randamentul motorului termic care ar funcționa după un ciclu Carnot reversibil, cu gaz perfect, între temperaturile  $t_f$  și  $t_2$ . Se dau căldurile specifice ale gheții  $c_g = 2100 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$  și apei  $c_a = 4180 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$  și căldurile latente de topire a gheții  $\lambda_t = 334 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ , respectiv de vaporizare a apei  $\lambda_v = 2250 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ .

3°. Un consumator format din 100 becuri identice și o baie de electroliza, conectate toate în paralel, este racordat la un generator de curent continuu cu tensiunea electromotoare  $E = 144 \text{ V}$  și rezistența internă  $r = 0,22 \Omega$ , prin conductoare de rezistivitate  $\rho = 1,75 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ . Știind că generatorul debitează un curent de intensitate  $I = 60 \text{ A}$ , lungimea fiecărui conductor  $d = 325 \text{ m}$ , tensiunea electrică la consumator  $U_c = 120 \text{ V}$ , iar intensitatea curentului în baie  $I_e = 10 \text{ A}$ , să se determine: a) tensiunea la bornele generatorului și aria secțiunii conductorilor de alimentare; b) intensitatea curentului electric prin fiecare bec și puterea disipată într-un bec; c) durata în care baia de electroliză produce o cantitate de  $16 \text{ g}$  oxigen. Se dă echivalentul electrochimic al oxigenului  $K = 0,0829 \text{ mg/C}$ .

4°. Să se scrie, indicind semnificațiile mărimilor fizice care intervin: a) ecuația unei plane; b) ecuația Clapeyron-Mendeleev; c) legea inducției electromagnetice.

5°. Să se deducă expresiile: a) elongației, vitezei și accelerației oscilatorului liniar armonic; b) lucrului mecanic într-o transformare adiabatică a unui gaz perfect; c) inductanței unei bobine.

IV.1°. De tavanul unui ascensor este legat un dinamometru, prevăzut în partea de jos cu un scripete care se poate roti liber. Peste scripete este trecut un fir inextensibil, la capetele căruia sint legate două corpuri cu masele  $m_1 = 0,1 \text{ kg}$  și  $m_2 = 0,2 \text{ kg}$ . Neglijînd frecările, să se determine: a) accelerația sistemului de corpuri cînd ascensorul este în repaus; b) forța indicată de dinamometru cînd ascensorul este în repaus; c) accelerația mișcării ascensorului și accelerația sistemului de corpuri în cazul în care dinamometrul indică forța  $F = 2 \text{ N}$ . Se va lua accelerația gravitațională  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

2°. Un corp de pompă avînd volumul  $V = 30 \text{ l}$  conține  $N = 3,01 \cdot 10^{23}$  molecule de azot, la temperatura  $t = 27^\circ\text{C}$ . Temperatura gazului este mărită cu  $\Delta t = 100^\circ\text{C}$ , printr-o transformare izobară. Să se determine: a) presiunea azotului, volumul ocupat de acesta după încălzirea izobară și lucrul mecanic efectuat de gaz în cursul procesului izobar; b) viteza medie pătratică a moleculelor azotului în starea inițială; c) densitatea inițială a azotului. Se dau: masa molară a azotului  $\mu = 28 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$ , constanta gazelor perfecte  $R = 8310 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$  și numărul lui Avogadro  $N_A = 6,02 \cdot 10^{26} \frac{\text{molecule}}{\text{kmol}}$ .

3°. Se consideră deplasarea uniformă, cu viteza  $v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , a unui conductor  $AB$ , în contact cu conductorii  $AC$  și  $BD$ , așezați într-un același plan orizontal, la



distanța  $d = 0,4$  m unul de celălalt (v. fig. F.B.2). Între punctele  $C$  și  $D$  se conectează o sursă de tensiune electrică, întregul circuit fiind introdus într-un câmp magnetic uniform de inducție  $B$  orientată vertical, de valoare  $B = 2$  T. Utilizând datele înscrise în figură, să se determine: a) tensiunea electromotoare indusă în conductorul  $AB$ ; b) intensitatea curentului electric care străbate circuitul în condițiile în care

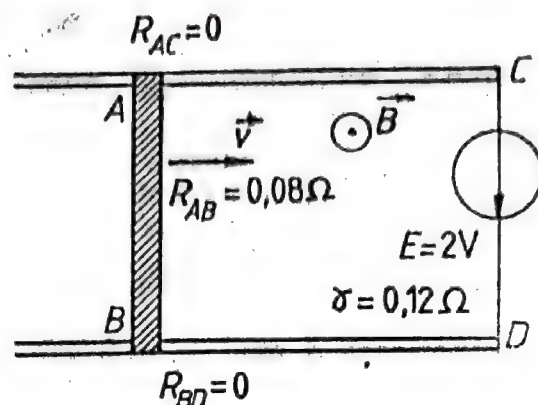


Fig. F.B.2

conductorul  $AB$  se mișcă cu viteza indicată; c) puterea necesară pentru învingerea forței rezistente care face ca mișcarea conductorului  $AB$  să decurgă cu viteza constantă indicată.

4°. Să se scrie expresiile: a) energiilor cinetică, potențială și totală ale unui oscilator linear armonic; b) energiei interne a unui gaz ideal; c) forței de interacțiune dintre două conductoare paralele, parcurse de curenți electrici, indicând semnificațiile fizice ale mărimilor care intervin.

5°. Să se definească: a) coeficientul de frecare la alunecare; b) căldura molară; c) echivalentul electrochimic, indicând semnificațiile mărimilor fizice care intervin.

V.1°. Un corp cu masa  $m = 1$  kg, legat de un resort elastic, efectuează o mișcare oscilatorie armonică cu amplitudinea  $A = \frac{\sqrt{2}}{4}$  m, energia totală a oscilatorului fiind  $E = 4$  J. Să se determine: a) pulsația mișcării oscilatorii; b) elongația și viteza corpului în momentele în care energia sa cinetică  $E_c$  este egală cu energia potențială  $E_p$ ; c) forța elastică datorată resortului, în momentele în care  $E_c = E_p$ .

2°. O cantitate de gaz ideal se află într-o incintă de volum  $V_1 = 1$  m<sup>3</sup>, sub presiunea  $p_1 = 6 \cdot 10^3$  N/m<sup>2</sup>. Dacă gazul se încălzește sub volum constant, până cînd temperatura lui crește cu  $\Delta T = T_2 - T_1 = 120$  K, presiunea gazului crește cu 30% față de presiunea inițială  $p_1$ . Să se determine: a) temperatura inițială  $T_1$  a gazului; b) numărul de molecule de gaz din incintă; c) căldura primită de gaz în cursul încălzirii izocore considerate. Se dau: exponentul adiabatic al gazului  $\gamma = \frac{5}{3}$  și constanta lui Boltzmann  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ .

3°. Un ion pozitiv se mișcă cu viteza  $v = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  într-un câmp magnetic uniform de inducție  $B = 0,4$  T, viteza ionului fiind perpendiculară pe direcția inducției magnetice  $B$ . Să se determine: a) sarcina specifică  $\frac{q}{m}$  a ionului, știind că raza traiectoriei acestuia în câmpul magnetic indicat este  $R = 10,4$  cm; b) timpul în care ionul efectuează o rotație completă în câmpul magnetic; c) tensiunea electrică sub care a fost accelerat ionul pentru a căpăta viteza  $v$ , dacă la începutul accelerării ionul se află în repaus.

4°. Să se scrie, indicind semnificațiile mărimilor fizice care intervin: a) legea mișcării rectilinii uniform variate; b) expresia randamentului unei mașini termice care funcționează după un ciclu Carnot (reversibil); c) legile lui Kirchhoff.

5°. Să se enunțe: a) teorema variației energiei cinetice a punctului material; b) principiul al doilea al termodinamicii în formulările lui W. Thomson și R. Clausius; c) legea Faraday a inducției electromagnetice.

### 3. PROFILURILE: CHIMIE, MECANO-CHIMIC

VI.1°. O masă de aer  $m$  este încălzită izobar cu  $\Delta T = 100$  K, absorbind o cantitate de căldură  $Q = 8\,310$  J. Se cer: a) masa de aer  $m$ ; b) lucrul mecanic efectuat; c) variația energiei interne. Se cunosc: masa molară a aerului  $\mu = 29$  kg/kmol; constanta gazelor  $R = 8\,310$  J/kmol·K; căldura molară la volum constant  $C_V = 5R/2$ .

2°. Diferența de temperatură dintre sursa caldă și cea rece, într-o mașină termică care funcționează după un ciclu Carnot, este  $\Delta T = 420$  K, iar randamentul ei este  $\eta = 0,6$ . La începutul destinderii izoterme gazul ocupă un volum  $V_1 = 1,66 \cdot 10^{-2}$  m<sup>3</sup> la presiunea  $p_1 = 1,4 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup>. Știind că raportul de compresie izotermă este  $V_3/V_4 = 2$ , se cer: a) temperatura sursei reci  $T_2$ ; b) numărul de kilomoli de gaz din mașină; c) concentrația  $n_s$  de molecule la sfârșitul destinderii izoterme. Se dau: constanta gazelor  $R = 8\,310$  J/kmol·K; constanta lui Boltzmann  $k = 1,4 \cdot 10^{-23}$  J/K.

3°. O sursă luminoasă punctiformă  $S$  avind intensitatea  $I = 100$  cd este situată la distanța  $a = 2$  m de un paravan vertical  $P$  și la distanțele  $b = 2$  m și  $c = 3$  m de oglinzile plane  $O_1$  și  $O_2$  perpendiculare una pe cealaltă (v. fig. F.B.3).

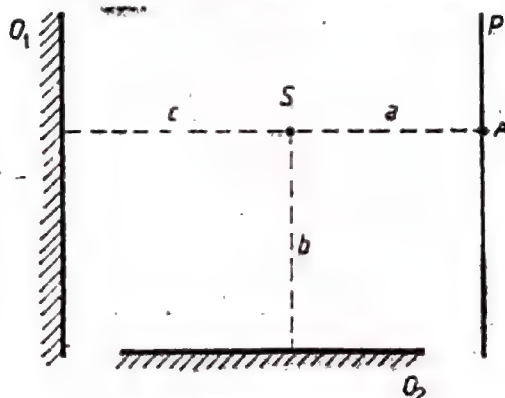


Fig. F.B.3

Se cer: a) fluxul luminos emis de sursa  $S$  în mod egal în toate direcțiile; b) iluminarea în punctul  $A$  de pe paravanul  $P$ ; c) la distanța de 0,6 m de sursa  $S$  și avind drept axă optică direcția  $SA$  se așază o lentilă biconvexă ( $R_1 = R_2$ ) avind indicele de refracție  $n = 1,6$ , astfel încât imaginea sursei  $S$  se formează în punctul  $A$ . Se cere raza de curbură a fețelor lentilei. Se dă:  $20^{1,5} \approx 90$ .

4°. Să se scrie, indicind și semnificația simbolurilor care apar: a) formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare a gazelor; b) condițiile de maxim și de minim de interferență; c) interferența în cazul unei pene optice.

5°. Să se enunțe: 1. a) ce este un sistem telescopic (afocal); b) principiul II al termodinamicii. 2. Să se deducă relațiile care ne dau focarele unui dioptru sferic.

VII.1°. Într-un cilindru cu piston mobil se găsesc 0,1 kmoli de aer. Volumul ocupat de gaz la temperatura  $t_1 = 27^\circ\text{C}$  este  $V_1 = 0,5$  m<sup>3</sup>. Aerul absoarbe izobar o cantitate de căldură  $Q_p$  și se dilată pînă cînd volumul său devine  $V_2 = 0,55$  m<sup>3</sup>. Se cer: a) lucrul mecanic efectuat de gaz; b) căldura  $Q_p$  absorbită; c) variația energiei interne a gazului.



Se dau: constanta gazelor ideale  $R = 8\,310\text{ J/kmol}\cdot\text{K}$  și căldura molară  $C_p = 7R/2$ .

2°. O lentilă plan-convexă, din sticlă are indicele de refracție  $n = 1,5$  și raza de curbură  $R = 20\text{ cm}$ . Se cer: a) distanța focală și convergența lentilei; b) poziția, mărimea și natura imaginii unui obiect înalt de  $10\text{ mm}$  și situat la  $20\text{ cm}$  de lentilă; c) care va fi distanța focală a lentilei când aceasta este cufundată în apă ( $n_a = 4/3$ )?

3°. O cantitate  $\nu = 0,5\text{ kmol}$  de gaz ideal efectuează un ciclu Carnot (reversibil) cu un randament  $\eta = 0,6$ . Știind că diferența dintre temperaturile gazului pe cele două izoterme este  $\Delta T = 420\text{ K}$ , se cer: a) temperaturile gazului în cursul celor două transformări izoterme; b) lucrul mecanic în cursul destinderii izoterme,  $L_{12}$ , dacă raportul volumelor în stările finală, respectiv inițială, este  $V_2/V_1 = 2$ ; c) energia cinetică medie de translație a moleculelor pe izoterma corespunzătoare temperaturii  $T_2$ .

Se dau: constanta universală a gazelor ideale  $R = 8\,310\text{ J/kmol}\cdot\text{K}$ , constanta lui Boltzmann  $k = 1,4 \cdot 10^{-23}\text{ J/K}$ ,  $\ln 2 = 0,693$ .

4°. Să se definească: a) masa moleculară relativă; b) fluxul luminos; c) energia internă a unui sistem termodinamic.

5°. Să se scrie, indicind și semnificația simbolurilor care apar: a) relația relativistă dintre masă și viteză; b) expresia interfranței care se obține cu un dispozitiv Young; c) relația lui Robert Mayer între căldurile molare  $C_p$  și  $C_v$  ale gazului perfect.

### 7. ÎNVĂȚĂMÎNTUL DE SUBINGINERI (3 ani) — toate profilurile; SPECIALIZĂRILE DIN ÎNVĂȚĂMÎNTUL PEDAGOGIC DE CHIMIE-FIZICĂ (3 ani) ȘI MATEMATICĂ-FIZICĂ (3 ani)

VIII.1°. Pe un disc care se rotește în plan orizontal cu turația de  $120$  rotații pe minut, se așază un corp de dimensiuni mici, cu masa de  $3 \cdot 10^{-2}\text{ kg}$ . Coeficientul de frecare la alunecare al corpului pe disc fiind  $0,4$ , să se afle: a) la ce distanță maximă de centrul discului trebuie așezat corpul, pentru ca acesta să nu alunece; b) mărimea, direcția și sensul momentului cinetic al corpului față de centrul discului, când corpul este așezat la distanța  $2 \cdot 10^{-2}\text{ m}$  față de centru; c) mărimea momentului forței de greutate a corpului față de centrul discului, în condițiile de la punctul b.

2°. Un catod incandescent situat într-o incintă vidată, emite un fascicul de electroni. Electronii, avind viteza inițială neglijabilă, sînt accelerați la o tensiune  $U = 1\,000\text{ V}$ , aplicată între catod și un anod situat la distanța  $d = 10^{-2}\text{ m}$  față de catod. Să se afle: a) viteza electronilor la anod; b) după cit timp de la emisie un electron va ajunge la anod; c) numărul de electroni care sosesc pe secundă la anod, dacă între catod și anod trece un curent cu intensitatea  $I = 1,6\text{ mA}$ . Se consideră masa electronului  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$ , iar sarcina electrică elementară  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{ C}$ .

3°. Să se trateze următoarele subiecte: a) cuplul de forțe; b) oscilatorul armonic liniar; c) interacțiunea magnetică a curenților electrici liniari.

4°. Să se scrie, indicindu-se și semnificația mărimilor care intervin: a) ecuația undei plane; b) legea inducției electromagnetice; c) puterea activă, reactivă și aparentă a unui circuit de curent alternativ.

IX.1°. Asupra unui corp cu masa  $m = 2\text{ kg}$ , care se deplasează pe un plan orizontal cu viteza inițială  $v_0 = 4\text{ m/s}$ , se aplică o forță orizontală  $F = 8\text{ N}$ , în sensul deplasării corpului. Coeficientul de frecare dintre corp și plan este  $\mu = 0,2$ . După ce forța  $F$  a efectuat lucrul mecanic  $L = 18\text{ J}$ , acțiunea sa încetează. Să se afle: a) accelerația corpului și timpul după care încetează acțiunea forței; b) spațiul total parcurs de corp pînă la oprire; c) graficele dependenței de timp a vitezei corpului și a spațiului parcurs, de la începutul aplicării forței și pînă la oprire. Se consideră  $g \approx 10\text{ m/s}^2$  și coordonata inițială nulă.



2°. La bornele unui circuit serie de curent alternativ alcătuit dintr-un rezistor cu rezistența  $R = 350 \, \Omega$ , o bobină de inductanță  $L = \frac{4}{\pi} \, \text{H}$  și un condensator cu capacitatea  $C = \frac{2}{\pi} \cdot 10^{-4} \, \text{F}$ , se aplică tensiunea alternativă  $u = 240 \sin 100 \pi t \, (\text{V})$ .

Să se determine: a) expresia intensității instantanee a curentului din circuit; b) puterile activă, reactivă și aparentă; c) frecvența curentului alternativ pentru care are loc rezonanța și intensitatea curentului la rezonanță.

3°. Să se enunțe și să se scrie, indicând semnificația mărimilor care intervin: a) legea atracției universale; b) legea lui Hooke; c) legea lui Ohm pentru un circuit electric simplu.

4°. Să se deducă: a) expresia randamentului unui plan înclinat; b) ecuația de continuitate în cazul curgerii staționare a lichidelor; c) capacitatea unei baterii de condensatori legați în paralel.

X.1°. Un ascensor are masa de 880 kg, iar cablul său de acționare are lungimea inițială de 25 m și masa pe unitatea de lungime de 0,8 kg/m. Accelerația mișcării la pornirea ascensorului în sus este  $2 \, \text{m/s}^2$ . Efortul unitar admisibil în cablu este de  $10^8 \, \text{N/m}^2$ , iar modulul său de elasticitate este  $2 \cdot 10^{11} \, \text{N/m}^2$ . Să se afle: a) forța de tracțiune suportată de cablu la începutul urcării; b) secțiunea cablului pentru a nu se depăși efortul unitar admisibil; c) alungirea absolută a cablului datorată forței de tracțiune aplicată la pornire.

2°. Un circuit serie  $RLC$  cuprinde un rezistor care are  $R = 4 \, \Omega$ , o bobină de inductanță  $L = 6,37 \, \text{mH}$  și un condensator de capacitate  $C = 159 \, \mu\text{F}$  și este alimentat de la o sursă cu tensiunea efectivă  $U = 120 \, \text{V}$  și frecvența  $\nu = 200 \, \text{Hz}$ . Să se afle: a) intensitatea efectivă a curentului în circuit și tensiunile maxime la bornele rezistorului, bobinei și condensatorului; b) tangenta unghiului de defazaj dintre curent și tensiune la bornele circuitului; c) frecvența de rezonanță a circuitului.

3°. Să se trateze următoarele subiecte: a) forța centripetă și forța centrifugă; b) diferența de presiune dintre două puncte din interiorul unui lichid; c) electroliza și legile ei.

4°. Să se scrie, indicându-se și semnificația mărimilor care intervin: a) ecuația lui Bernoulli; b) legile lui Kirchhoff; c) expresia forței Lorentz.

XI.1°. Un corp cu masa  $m = 15 \, \text{kg}$  este pus în mișcare pe o suprafață orizontală sub acțiunea unei forțe  $F = 50 \, \text{N}$ , a cărei direcție face cu orizontala un unghi  $\alpha = 30^\circ$  (v. fig. F.B.4). Acțiunea forței durează  $\Delta t = 4$  secunde. Considerind coefi-

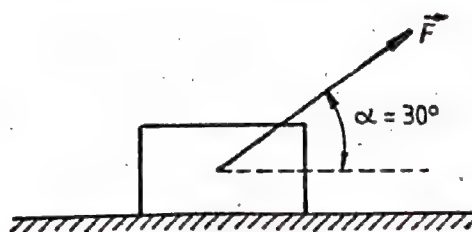


Fig. F.B.4

cientul de frecare  $\mu = 0,1$ , să se afle: a) forța de frecare; b) accelerația corpului; c) lucrul mecanic efectuat de forța  $F$  (se consideră  $g = 10 \, \text{m/s}^2$ ).

2°. Un galvanometru cu rezistența interioară de  $9,5 \, \Omega$  poate măsura curenți pînă la 50 mA. Scala aparatului posedă 50 diviziuni. Să se determine: a) rezistența șuntului pentru a putea măsura curenți pînă la 1 A; b) tensiunea la bornele galvanometrului cînd acul se află la jumătatea scalei; c) ce rezistență trebuie conectată în serie cu galvanometrul, pentru a obține un voltmetru capabil să măsoare tensiuni pînă la 30 V?

3°. Să se trateze următoarele subiecte: a) compunerea forțelor paralele de același sens; b) energia oscilatorului armonic; c) mișcarea purtătorilor de sarcină electrică în câmp magnetic uniform.

4°. Să se scrie, indicând și semnificația fizică a mărimilor care intervin: a) expresiile perioadelor oscilatorului liniar armonic și a pendulului gravitațional; b) expresia fluxului magnetic; c) legea lui Ohm pentru un circuit RLC serie în curent alternativ.

**XII.1°.** În două puncte  $A$  și  $B$  aflate la distanța  $d = 26$  km se găsesc la același moment două mașini  $M_1$  și  $M_2$ . Mașina  $M_1$  are o mișcare rectilinie uniform accelerată, cu viteza inițială  $v_0 = 14,4$  km/oră și se deplasează din  $A$  către  $B$ . Mașina  $M_2$  are o mișcare rectilinie uniformă și se deplasează din  $B$  către  $A$ . În momentul întâlnirii, cele două mașini au aceeași viteză, iar raportul dintre spațiile parcurse de  $M_1$  și, respectiv,  $M_2$  este  $k = \frac{5}{8}$ . Se cer: a) accelerația mașinii  $M_1$  și viteza mașinii  $M_2$ ; b) care este distanța dintre mașini după  $t = 10$  s de la întâlnire; c) expresiile perioadelor de oscilație ale unor pendule gravitaționale de aceeași lungime, care s-ar afla în fiecare mașină.

2°. O baterie cu tensiunea electromotoare  $E = 24$  V este conectată la un rezistor având rezistența  $R = 4$   $\Omega$ . Cunoscând intensitatea curentului prin circuit  $I = 5$  A, să se afle: a) căderea de tensiune pe sursă; b) puterea dezvoltată de sursă și puterea disipată sub formă de căldură în rezistor; c) inducția cimpului magnetic produs de unul dintre firele de legătură ale circuitului, considerat practic infinit lung, la distanța  $r = 1$  cm față de fir. Se consideră  $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$  N/A<sup>2</sup>.

3°. Se cer: a) condiția de echilibru a unui punct material supus la legături; b) definirea fenomenelor de difracție și de interferență a undelor; c) definiția amperului.

4°. Să se deducă: a) conservarea energiei mecanice în mișcarea de cădere liberă; b) expresia inductanței unei bobine; c) expresia t.e.m. induse într-un conductor rectiliniu deplasat cu viteză constantă, perpendicular pe liniile de câmp magnetic.

**XIII.1°.** O forță orizontală  $F = 100$  N menține în echilibru un corp de dimensiuni neglijabile, așezat pe un plan înclinat cu unghiul  $\alpha = 60^\circ$  față de orizontală, la înălțimea  $h = 20$  m față de baza planului ca în figura F.B.5. a) Să se calculeze

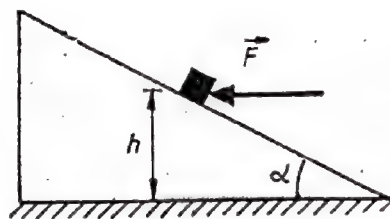


Fig. F.B.5

masa corpului și reacțiunea planului înclinat. b) Îndepărtând forța  $F$ , corpul alunecă fără frecare pe planul înclinat și ajunge apoi pe un plan orizontal, pe care se deplasează cu frecare, oprindu-se după ce a parcurs distanța  $l = 40$  m față de baza planului înclinat. Să se determine coeficientul de frecare dintre corp și planul orizontal. c) Care este energia cinetică a corpului, atunci când acesta a parcurs jumătate din distanța  $l$ , pe planul orizontal? Se consideră  $g \approx 10$  m/s<sup>2</sup>.

2°. Un circuit electric cuprinde două generatoare având tensiunile electromotoare  $E_1 = 4$  V și  $E_2 = 3,2$  V, cu rezistențele interioare  $r_1 = 0,5$   $\Omega$  și, respectiv,  $r_2 = 1,5$   $\Omega$ , legate în serie, precum și un rezistor  $A$  având rezistența  $R_1 = 10$   $\Omega$ . Să se afle: a) căderea de tensiune în circuitul exterior și tensiunea la



bornele fiecărui generator; b) numărul de electroni care trec printr-o secțiune transversală a circuitului în timpul  $t = 10$  s, sarcina electronului fiind  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C; c) intensitățile curenților prin fiecare latură a circuitului, dacă în paralel cu rezistorul A se leagă un alt rezistor B, având rezistența  $R_2 = 5 \Omega$ .

3°. Să se enunțe și să se serie, indicind semnificația mărimilor care intervin: a) teorema variației energiei cinetice a punctului material; b) legea lui Arhimede; c) definiția inducției unui câmp magnetic uniform.

4°. Să se deducă: a) expresia accelerației centripete în mișcarea circulară uniformă; b) expresia potențialului electric creat de o sarcină punctiformă; c) viteza unghiulară a unei particule încărcate electric într-un câmp magnetic uniform.

XIV.1°. Două corpuri alăturate A și B, de mase  $m_1 = 20$  kg și, respectiv,  $m_2 = 5$  kg se află inițial în repaus pe un plan orizontal (fig. F.B.6). Corpul A este

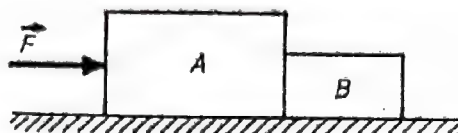


Fig. F.B.6

impins cu o forță orizontală  $F = 100$  N, coeficientul de frecare dintre corpuri și plan fiind  $\mu = 0,1$ . a) Să se calculeze toate forțele care acționează asupra fiecărui corp. b) Care este spațiul total parcurs de corpuri până la oprire, dacă după  $t = 2$  s acțiunea forței  $F$  încetează? c) Să se reprezinte grafic dependențele vitezei și spațiului celor două corpuri în funcție de timp, de la începutul mișcării și până la oprire. Se consideră  $g \approx 10$  m/s<sup>2</sup>.

2°. Un circuit serie de curent alternativ este format dintr-un rezistor cu rezistența  $R = 150 \Omega$ , o bobină de inductanță  $L = 10^{-2}$  H și un condensator având capacitatea  $C = 1 \mu\text{F}$ . Să se determine: a) pulsația de rezonanță a curentului; b) impedanța circuitului pentru o frecvență a curentului alternativ  $\nu = \frac{10^3}{\pi}$  Hz; c) frecvența curentului pentru care defazajul dintre curent și tensiunea la bornele circuitului este  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .

3°. Să se scrie: a) condițiile de echilibru ale solidului rigid liber; b) legea lui Pascal; c) definiția potențialului electric într-un punct.

4°. Să se deducă: a) perioada proprie de oscilație a pendulului gravitațional; b) rezistența echivalentă a doi rezistori legați în paralel; c) deviația unui electron care intră într-un câmp electric uniform cu viteza inițială normală la liniile de câmp.

XV.1°. Într-un calorimetru de capacitate calorică  $C = 120$  J/K se află o masă  $m_a = 1$  kg de apă la temperatura  $t_a = 4^\circ\text{C}$ . Se introduce o bilă de fier de masă  $m_1 = 0,5$  kg și temperatură  $t_1 = 150^\circ\text{C}$ . Se cer: a) temperatura finală  $\theta$ ; b) cu cât se modifică volumul bilei de fier dacă la  $0^\circ\text{C}$  ea are volumul  $V_0 = 6,4 \cdot 10^{-5}$  m<sup>3</sup>; c) denivelarea care apare într-un tub capilar, având diametrul  $d = 0,8$  mm, introdus în apa din calorimetru în starea inițială. Se dau: căldura specifică a apei  $c_a = 4180$  J/kg·K, căldura specifică a fierului,  $c_{Fe} = 500$  J/kg·K, coeficientul de dilatare volumică al fierului  $\gamma = 3,6 \cdot 10^{-5}$  K<sup>-1</sup>, coeficientul de tensiune superficială al apei,  $\sigma = 0,073$  N/m, densitatea apei  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup> și accelerația gravitațională  $g \approx 10$  m/s<sup>2</sup>.

2°. O lentilă biconvexă de sticlă formează o imagine reală și de 3 ori mai mare decât obiectul. Știind că distanța dintre obiect și imagine este de 80 cm, se cer: a) poziția obiectului și a imaginii față de lentilă; b) distanța focală și convergența lentilei; c) indicele de refracție al lentilei, dacă  $R_1 = R_2 = 20$  cm.



3°. Să se scrie, indicind și semnificația simbolurilor care apar: a) formula indicelui de refracție al unei prisme; b) ecuația transformării adiabactice; c) condiția de reflexie totală.

4°. Se cer: a) să se enunțe condiția necesară și suficientă ca două unde să interfere; b) să se definească numărul lui Avogadro; c) să se deducă expresia vitezei termice a unei molecule de gaz ideal.

## 2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL UNIVERSITAR

### (PROFILUL FIZICĂ)

**XVI.1°.** Un automobil de masă  $m = 1000$  kg se mișcă în plan orizontal pe un drum circular cu raza  $R = 100$  m. Coeficientul de frecare la alunecare dintre roți și drum este  $\mu = 0,4$ . Știind că distanța dintre roți este  $d = 1,6$  m, iar centrul de greutate al automobilului se află la înălțimea  $h = 0,4$  m față de planul orizontal, să se afle: a) viteza minimă la care s-ar produce alunecarea laterală a automobilului; b) viteza minimă la care s-ar produce răsturnarea automobilului; c) admitind că se produce răsturnarea, să se afle lucrul mecanic consumat de automobil pentru a se răsturna cu un unghi de  $90^\circ$ ; d) momentul cinetic al automobilului, considerat punct material, față de centrul cercului, în momentul alunecării și în momentul răsturnării. Se va lua  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

2°. O sferă de masă  $M = 2$  kg este suspendată de un fir de lungime  $l = 4,9$  m. Firul este deviat cu un unghi  $\alpha = 60^\circ$  față de verticală și lăsat liber. Cînd sfera trece prin poziția de echilibru, se ciocnește plastic cu o bilă de masă  $m = 80$  g, care se mișcă în sens opus vitezei sferei. Știind unghiul de deviație maxim  $\theta = 30^\circ$  al corpurilor după ciocnire, să se afle viteza bilei înainte de ciocnire, pentru ambele sensuri de deviație față de verticală. Se va lua  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

3°. O mașină termică funcționează după un ciclu format din două izocore  $V_1$  și  $V_2 = eV_1$  ( $e \cong 2,7$  fiind baza logaritmului natural) și două izoterme  $T_1 = 400$  K și  $T_2 = 300$  K, substanța de lucru fiind un gaz ideal. Cînd cîștigînd numărul de kilomoli de gaz  $\nu = 1$  kmol și căldura molară la volum constant  $C_V = \frac{5}{2} R$ , unde  $R = 8,31 \cdot 10^3$  J/kmol·K, să se calculeze: a) căldura absorbită de gaz într-un ciclu; b) căldura cedată de gaz într-un ciclu; c) lucrul mecanic efectuat de mașină într-un ciclu; d) randamentul mașinii; e) randamentul mașinii, dacă ar lucra după un ciclu Carnot între  $T_1$  și  $T_2$ .

4°. Să se enunțe: a) principiul doi al dinamicii (principiul fundamental); b) legea lui Arhimede; c) principiul doi al termodinamicii în formulările lui W. Thomson și R. Clausius.

5°. Să se deducă: a) energia oscilatorului armonic; b) legea lui Jurin pentru tuburile capilare; c) viteza termică a moleculelor unui gaz ideal.

**XVII.1°.** O sursă de curent continuu disipă în circuitul exterior aceeași putere  $P = 100$  W cînd la bornele ei este legat un rezistor cu rezistența  $R_1 = 4 \Omega$  sau un rezistor cu rezistența  $R_2 = 9 \Omega$ .

Să se determine: a) rezistența interioară a sursei; b) tensiunea electromotoare  $E$  a sursei; c) definind randamentul transferului de putere de la sursă la circuitul exterior ca raportul dintre puterea disipată în circuitul exterior și puterea totală debitată de sursă, să se afle pentru care dintre rezistori randamentul transferului de putere de la sursă la circuitul exterior este mai mare și să se calculeze aceste randamente.

2°. Nucleul de  ${}^8\text{Be}^*$  în stare excitată se poate dezexcita pentru a ajunge în starea fundamentală prin emisia unui foton cu energia de 17,600 MeV.

Se cer: a) să se calculeze energia cinetică de recul a nucleului  ${}^8_4\text{Be}$ ; b) să se calculeze energia totală de dezexcitare.

Se dau: masa nucleului de  ${}^8_4\text{Be}$ :  $M({}^8_4\text{Be}) = 8 \text{ u}$ ; echivalentul în energie al unității atomice de masă:  $1 \text{ u} \cdot c^2 = 931,5 \text{ MeV}$ .

3°. Distanța dintre fantele unui dispozitiv Young este  $2l = 1 \text{ mm}$ , iar ecranul de observație se află la  $D = 0,75 \text{ m}$ . Interfranța măsurată pe ecran este de  $0,5625 \text{ mm}$ .

Se cer: a) lungimea de undă a radiației folosite; b) dacă spațiul experienței se umple cu un lichid transparent, valoarea interfranței devine  $4,219 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ . Care este valoarea indicelui de refracție al lichidului?

4°. Să se scrie, indicind semnificația mărimilor fizice care intervin: a) factorul de calitate al circuitelor de curent alternativ serie; b) mărimi și unități fotometrice.

5°. Să se definească: a) tensiunea electrică și potențialul electric; b) energia de ionizare a atomului de hidrogen în stare fundamentală.

### 3. ÎNVĂȚĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC

(PROFILURILE: MEDICINĂ, STOMATOLOGIE)

XVIII.1°. Se cere: a) să se enunțe legile efectului fotoelectric extern; b) să se scrie condiția de reflexie totală; c) să se definească randamentul unei mașini termice care funcționează după un ciclu Carnot.

2°. Să se scrie, indicind semnificația mărimilor fizice care intervin: a) formula oglinzilor sferice; b) energia cinetică maximă pe care o poate atinge o particulă accelerată într-un ciclotron; c) viteza termică.

3°. Să se trateze subiectul: modelul planetar al atomului.

4°. Într-o reacție de fuziune se formează  ${}^4_2\text{He}$  din nuclee de deuteriu,  ${}^2_1\text{H}$ . Ce căldură se degajă la formarea unui gram de  ${}^4_2\text{He}$ ?

Se dau masele atomice  $M({}^4\text{He}) = 4,0026 \text{ u}$ ,  $M({}^2\text{H}) = 2,0141 \text{ u}$ , echivalentul în energie al unității atomice de masă

$$1 \text{ u} \cdot c^2 = 931,5 \text{ MeV}; \quad 1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J},$$

numărul lui Avogadro,  $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$ .

5°. Un kilomol de gaz perfect avînd căldura molară la volum constant  $C_V = \frac{3}{2} R$  efectuează o transformare ciclică formată din două izocore la volumele  $V_1 = 25 \text{ m}^3$  și  $V_2 = 50 \text{ m}^3$  și două izobare la presiunile  $p_1 = 10^5 \text{ N/m}^2$  și  $p_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ .

Același kilomol de gaz perfect efectuează o transformare ciclică Carnot între temperaturile maximă, respectiv minimă atinse în primul ciclu. Gazul primește aceeași căldură de la sursa cu temperatura mai ridicată în ambele cicluri. Se cere să se calculeze: a) randamentul ciclului Carnot; b) căldura primită de la sursa cu temperatura mai ridicată; c) raportul dintre lucrurile mecanice efectuate în cele două cicluri.

XIX.1°. Se cere: a) să se enunțe legile reflexiei; b) să se definească lungimea de undă Compton; c) să se definească exponentul adiabatic.

2°. Să se scrie, indicind semnificația mărimilor fizice care intervin: a) formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare a gazelor; b) variația lungimii de undă a unui foton în efectul Compton; c) legea de atenuare a unui fascicul de fotoni gamma în substanță.

3°. Să se trateze subiectul: determinarea lungimii de undă cu ajutorul rețelei optice.

4°. Care va fi energia cinetică a fotoelectronilor extrași prin efect fotoelectric extern dintr-un catod de fier de către fotoni cu lungimea de undă de  $0,2 \mu\text{m}$ ?



Se dă lungimea de undă corespunzătoare pragului efectului fotoelectric extern, egală cu  $\lambda_0 = 268 \text{ nm}$ .

Se dau: viteza luminii,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , constanta lui Planck,  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ .

5°. Un mol de gaz ideal care efectuează un ciclu Carnot produce un lucru mecanic  $L = 1,2 \cdot 10^5 \text{ J}$  la fiecare ciclu parcurs. Cunoscând temperatura sursei reci,  $T_2 = 280 \text{ K}$ , valoarea minimă  $V_m = 0,014 \text{ m}^3$  atinsă de volumul unui mol de gaz în cursul transformării ciclice și presiunea în starea de volum minim  $p = 4,155 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ , să se determine: a) randamentul mașinii termice; b) căldura cedată sursei reci în fiecare ciclu; c) valoarea maximă atinsă de numărul moleculelor de gaz din unitatea de volum în cursul transformării ciclice. Se dau: constanta gazelor perfecte  $R = 8310 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$ , numărul lui Avogadro,  $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ molecule/kmol}$ .

## ENUNȚURI

1985

### 1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILURILE: MECANIC, ELECTRIC, ENERGETIC, MINE, PETROL, METALURGIE, CONSTRUCȚII, GEODEZIE, TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA TEXTILELOR, TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA PRODUSELOR ALIMENTARE, FORESTIER (specializarea INDUSTRIALIZAREA LEMNULUI), GEOLOGIE

XX.1°. Două corpuri de mase  $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$ , aflate la aceeași înălțime  $h = 5 \text{ m}$  față de pământ și la distanța  $d = 8 \text{ m}$  unul de altul sunt lansate unul spre celălalt cu viteze orizontale egale,  $v_{01} = v_{02} = 10 \text{ m/s}$  în același moment. Să se calculeze: a) după cât timp de la lansare și la ce înălțime se ciocnesc corpurile; b) viteza corpului format, considerînd ciocnirea plastică; c) variația temperaturii corpurilor în procesul de ciocnire. Se cunosc: căldura specifică a materialului corpurilor  $c = 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$  și  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

2°. O cantitate  $\nu = 12$  moli de gaz ideal, aflată în starea 1, caracterizată de presiunea  $p_1 = 10^5 \text{ N/m}^2$ , volumul  $V_1 = 0,5 \text{ m}^3$  și temperatura  $T_1$ , este comprimat izobar pînă în starea 2 și apoi comprimat adiabatic pînă în starea 3, în care  $T_3 = T_1$  și  $V_3 = V_1/8$ . Să se calculeze: a) lucrul mecanic efectuat în transformarea 1-2; b) randamentul unei mașini termice care ar funcționa după ciclul 1-2-3-1,

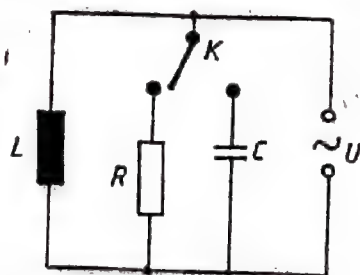


Fig. F.B.7

dacă transformarea 3-1 se face la temperatură constantă; c) viteza termică a moleculelor gazului în starea 2. Se cunosc:  $R = 8310 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$ ,  $\gamma = 1,5$ ,  $\mu = 29 \text{ kg/kmol}$  și  $\ln 2 = 0,693$ .

3°. Se dă circuitul din figura F.B.7. Cînd circuitul este alimentat la tensiunea efectivă  $U = 220 \text{ V}$ , cu frecvența  $\nu = 50 \text{ Hz}$ , reactanța bobinei este  $X_L = 30 \Omega$ .





Se cer: a) valorile  $R$  și  $C$  pentru care, atunci cînd se închide contactul  $k$  pe poziția 1, intensitatea curentului debitat de sursă este de două ori mai mare decît în cazul în care  $k$  este deschis, iar pentru  $k$  pe poziția 2 intensitatea curentului debitat de sursă este  $\alpha = 4/9$  din intensitatea curentului pentru  $k$  deschis; b) intensitatea curentului prin  $R$  și factorul de putere; c) frecvența de rezonanță a circuitului cu  $k$  pe poziția 2.

4°. Să se deducă: a) formula lui Galilei; b) randamentul ciclului Carnot; c) expresia potențialului în cîmpul electric al unei sarcini punctiforme.

5°. Să se enunțe și să se scrie ecuațiile pentru: a) legea lui Bernoulli; b) principiul întâi al termodinamicii; c) legea inducției electromagnetice.

**XXI.1°.** Două corpuri de dimensiuni mici și de mase  $m_1 = 10^{-2}$  kg și  $m_2 = 2,5 \cdot 10^{-2}$  kg sînt suspendate din același punct cu ajutorul unor fire inextensibile, de mase neglijabile și de lungimi egale  $l = 1$  m, formînd două pendule gravitaționale. Pendulele sînt deplasate din poziția de echilibru în sensuri opuse, pînă cînd firele de suspensie, întinse, formează cu verticala (poziția de echilibru) unghiurile  $\alpha_1 = 60^\circ$  și, respectiv,  $\alpha_2 = 30^\circ$ . Se lasă libere cele două pendule, astfel încît corpurile se ciocnesc plastic în poziția comună de echilibru. Să se calculeze: a) viteza inițială a corpului format prin ciocnirea plastică a celor două corpuri; b) cantitatea de căldură care ia naștere în procesul de ciocnire; c) perioada de oscilație a corpului format prin ciocnire. Se va lua  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

2°. O mașină termică ideală funcționează după un ciclu Carnot reversibil între temperaturile  $T_1 = 1\,200$  K și  $T_2 = 300$  K, utilizînd drept gaz de lucru 5 moli de heliu. Știînd că presiunea gazului la sfîrșitul destinderii izoterme este egală cu presiunea gazului la începutul comprimării adiabactice să se determine: a) randamentul mașinii; b) căldura preluată de la sursa caldă în cursul unui ciclu; c) puterea utilă a mașinii dacă se efectuează într-o secundă  $n = 10$  cicluri. Se dau:  $R = 8\,310$  J/kmol·K;  $C_V = \frac{3}{2} R$ ,  $\ln 2 = 0,693$ .

3°. Se consideră o bobină cu rezistența  $R$  și inductanța  $L$ . Cînd aceasta e legată la o sursă de tensiune continuă, cu  $U = 6$  V, prin bobină trece un curent de intensitate  $I_1 = 2$  A, iar cînd se leagă la o sursă a cărei tensiune alternativă are valoarea efectivă  $U = 6$  V și frecvența  $\nu = 10^3$  Hz, intensitatea efectivă a curentului prin bobină este  $I_2 = \sqrt{3}$  A. Să se determine: a) rezistența  $R$  și inductanța  $L$ ; b) defazajul dintre tensiunea la borne și curentul prin bobină și puterea activă consumată de bobină; c) capacitatea unui condensator, care, legat la sursa de tensiune continuă, se încarcă cu o sarcină  $Q = 18$  μC.

4°. Să se deducă: a) expresia accelerației centripete; b) legea lui Jurin; c) expresia impedanței unui circuit  $RLC$  paralel.

5°. Să se scrie și să se menționeze semnificația fiecărei mărimi fizice: a) expresia coeficientului de dilatare termică liniară; b) ecuația undei plane; c) ecuația internă a triodei.

**XXII.1°.** Un proiectil cu masa  $m_p = 2$  g, deplasîndu-se pe direcție orizontală cu viteza  $v_1 = 500$  m/s, străbate un bloc de lemn cu masa  $m_b = 1$  kg, aflat inițial în repaus pe o suprafață orizontală, și iese din acesta cu viteza  $v_2 = 100$  m/s. Consi-derînd neglijabilă deplasarea blocului în timpul interacțiunii cu proiectilul și știînd că blocul alunecă apoi, pînă la oprire, pe o distanță  $d = 20$  cm, se cer: a) coefi-cientul de frecare dintre bloc și suprafață; b) energia cinetică pierdută de proiectil; c) energia cinetică a blocului imediat după trecerea proiectilului. Se dă  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

2°. O cantitate  $\nu = 4$  kmol de gaz ideal efectuează un ciclu format dintr-o comprimare izotermă, o izobară și o izocoră, în această ordine. Cunoscînd că izo-terma este caracterizată de temperatura  $T_1 = 400$  K și că raportul dintre volumul maxim și volumul minim atinse de gaz în cursul ciclului este  $\epsilon = 2$ , se cer: a) lucrul



mecanic efectuat într-un ciclu; b) randamentul ciclului; c) randamentul unui ciclu Carnot care ar funcționa între temperaturile extreme ale ciclului considerat. Se dau:  $\gamma = 5/3$ ,  $R = 8\,310 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$ ,  $\ln 2 = 0,693$ .

3°. Un circuit serie este format dintr-o bobină cu inductanța  $L$  și un rezistor cu rezistența  $R$ . Dacă circuitul este alimentat la o tensiune alternativă cu valoarea efectivă  $U = 100 \text{ V}$ , defazajul dintre tensiune și intensitatea curentului este  $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ . Dacă în circuit se inseriază și un condensator cu reactanța capacitivă

$X_C = 12,7 \, \Omega$ , defazajul devine  $\pi/6$ . Se cer: a) rezistența  $R$ ; b) reactanța bobinei,  $X_L$ ; c) puterile activă, reactivă și aparentă pentru circuitul care conține și condensatorul, în cazul  $X_L > X_C$ .

4°. Să se deducă: a) expresia accelerației în mișcarea circulară uniformă; b) formula vitezei termice a moleculelor unui gaz ideal; c) expresia forței Lorentz.

5°. a) Să se enunțe teorema momentului cinetic pentru punctul material; b) să se scrie formulările principiului II al termodinamicii; c) să se definească unitatea de măsură pentru intensitatea curentului electric în S.I.

XXIII.1°. Un corp cu masa  $m = 0,25 \text{ kg}$  este legat de un resort elastic, orizontal și sub acțiunea unei forțe orizontale de  $100 \text{ N}$  este deplasat la distanța de  $10^{-2} \text{ m}$  față de poziția de echilibru. Lăsat apoi liber, corpul începe să oscileze armonice. Să se afle: a) constanta elastică a resortului; b) frecvența oscilațiilor; c) viteza maximă atinsă de corp; d) ecuația de mișcare, dacă în momentul inițial corpul este în poziția de echilibru.

2°. Un rezistor care are rezistența  $R_1 = 2 \, \Omega$  este conectat la bornele unei surse de curent continuu și este străbătut de un curent  $I_1 = 0,64 \text{ A}$ . Dacă se înlocuiește rezistorul cu un altul, care are rezistența  $R_2 = 6 \, \Omega$ , intensitatea curentului devine  $I = 0,24 \text{ A}$ . Să se afle: a) tensiunea electromotoare și rezistența interioară a sursei utilizate; b) intensitatea curentului prin sursă la legarea celor două rezistoare în paralel între ele și în serie cu sursa; c) cîți kWh se consumă în timp de 10 ore în fiecare rezistor, în situația de la punctul b)?

3°. Să se scrie: a) principiul acțiunilor reciproce; b) formula lui Galilei; c) legile electrolizei, indicind și semnificația mărimilor care intervin.

4°. Să se deducă: a) expresia energiei cinetice a unui punct material; b) capacitatea echivalentă a unei baterii de condensatori grupați în paralel; c) expresia forței electromagnetice care apare între doi conductori parcurși de curent.

XXIV.1°. Un corp cu masa  $m = 0,1 \text{ kg}$  și densitatea  $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$  cade liber, de la înălțimea  $h = 0,8 \text{ m}$ , pe suprafața apei dintr-un lac. Să se afle: a) viteza cu care corpul ajunge la suprafața apei; b) adîncimea lacului, în locul de cădere a corpului, știind că acesta ajunge pe fundul lacului cu viteza zero; c) intervalul de timp după care corpul revine la suprafața apei; d) graficul mărimii impulsului corpului în funcție de timp, din momentul începerii mișcării și pînă în momentul revenirii sale la suprafața apei. Se consideră densitatea apei  $\rho_a = 1\,000 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$  și se neglijează frecările.

2°. În circuitul exterior al unei surse de curent continuu, cu t.e.m.  $E = 20 \text{ V}$  și rezistență interioară neglijabilă, se montează, în paralel, un reșou cu rezistența  $R_1 = 10 \, \Omega$ , un vas pentru electroliza cuprului cu rezistența  $R_2 = 4 \, \Omega$  și un solenoid de rezistență  $R_3 = 5 \, \Omega$ , avînd  $N = 1\,000$  spire, lungimea  $l = 0,4 \text{ m}$  și secțiunea transversală  $S = 10^{-3} \text{ m}^2$ . Dacă echivalentul electrochimic al cuprului este  $K = 0,33 \text{ mg/C}$  și  $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ , să se afle: a) rezistența totală a circuitului realizat; b) masa de cupru depusă la catod într-o oră; c) fluxul magnetic ce străbate solenoidul și inductanța acestuia.

3°. Să se prezinte: a) compunerea a două forțe paralele și de sens opus; b) diferența de presiune dintre două puncte din interiorul unui lichid; c) capacitatea condensatorului plan.

4°. Să se scrie, indicînd și semnificația mărimilor care intervin: a) principiul fundamental al dinamicii; b) legea lui Coulomb; c) legea inducției electromagnetice.

### β. PROFILURILE: CHIMIE, MECANO-CHIMIC

XXV.1°. Prin încălzirea apei dintr-un vas care are temperatura inițială de  $0^\circ\text{C}$ , se obține într-o oră o cantitate  $m_1 = 100\text{ kg}$  de vapori, avînd temperatura de  $100^\circ\text{C}$ . Știindu-se că randamentul instalației de încălzire este  $\eta = 60\%$ , se cere: a) ce cantitate de căldură este necesară pentru funcționarea instalației timp de 2 ore; b) să se calculeze intensitatea curentului electric, care, trecînd prin rezistența electrică  $R = 200\ \Omega$  a unui cuptor cu randamentul  $\eta_1 = 0,9$ , produce într-o oră aceeași cantitate de vapori; c) ce masă de vapori de apă s-a condensat ca urmare a introducerii în atmosfera de vapori a unei bucăți de gheață, care are masa  $m_2 = 1\text{ kg}$  și temperatura inițială  $t_2 = 0^\circ\text{C}$ , dacă temperatura finală de echilibru este  $\theta = 100^\circ\text{C}$ . Se cunosc: căldura specifică a apei,  $c_a = 4180\text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , căldura latentă de topire pentru gheață,  $\lambda_t = 0,335 \cdot 10^6\text{ J/kg}$ ; căldura latentă de vaporizare a apei,  $\lambda_v = 2,257 \cdot 10^6\text{ J/kg}$ .

2°. Două incinte cu azot, care au volumele  $V_1 = 4 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3$  și  $V_2 = 8 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3$ , aflate la temperatura  $T = 300\text{ K}$ , sînt puse în legătură printr-un tub subțire prevăzut cu un robinet. Inițial în incinta 1 presiunea azotului este  $p_1 = 3 \cdot 10^5\text{ N/m}^2$ , iar în incinta 2 presiunea este  $p_2 = 2 \cdot 10^5\text{ N/m}^2$ . a) Să se afle masa totală a gazului aflat în cele două incinte și masele de gaz din fiecare incintă, după deschiderea robinetului, temperatura rămînd neschimbată; b) care este presiunea finală din fiecare incintă, după închiderea robinetului, incinta 1 fiind încălzită la  $400\text{ K}$ ; c) să se calculeze viteza termică și concentrația moleculelor din incinta 2, după închiderea robinetului. Se cunosc: masa molară a azotului,  $\mu = 28\text{ kg/kmol}$ ; constanta gazelor perfecte,  $R = 8,31 \cdot 10^3\text{ J/kmol} \cdot \text{K}$ ; numărul lui Avogadro,  $N_A = 6,02 \cdot 10^{26}\text{ molecule/kmol}$ .

3°. Se consideră circuitul din figura F.B.8, în care pe reostatul de rezistență  $R$  se leagă în paralel două baterii de acumuloare. Prima baterie este formată din

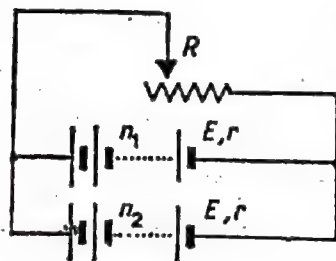


Fig. F.B.8

$n_1 = 8$  elemente legate în serie, iar a doua din  $n_2 = 5$  elemente legate, de asemenea, în serie. Elementele celor două baterii sînt identice, fiecare avînd tensiunea electromotoare  $E = 2\text{ V}$  și rezistența internă  $r = 0,2\ \Omega$ . a) Să se calculeze curenții  $I_1$  și  $I_2$  prin cele două baterii și curentul  $I$  prin rezistența  $R = 4\ \Omega$ ; b) pentru ce valoare a rezistenței  $R$  curentul  $I_2$  se anulează?; c) să se afle valoarea rezistenței  $R$  pentru care puterea disipată de aceasta este maximă și maximul acestei puteri.

4°. Să se definească: a) coeficienții de dilatare termică în volum și aparentă ai lichidelor; b) inducția unui cîmp magnetic și unitatea de măsură a inducției magnetice; c) parametrii triodei.



5°. Să se scrie, indicându-se semnificațiile mărimilor fizice care intervin:  
 a) formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare; b) legea lui Coulomb;  
 c) expresia impedanței circuitului  $RLC$  paralel.

XXVI.1°. O mașină termică avînd ca agent termic 5 moli de gaz perfect funcționează după ciclul Carnot din figura F.B.9. Știind că temperatura sursei calde este  $t_1 = 327^\circ\text{C}$ , temperatura sursei reci este  $t_2 = 27^\circ\text{C}$  și că lucrul mecanic efectuat într-un ciclu este  $L = 4 \cdot 10^3 \text{ J}$ , se cere: a) să se calculeze randamentul ciclului și

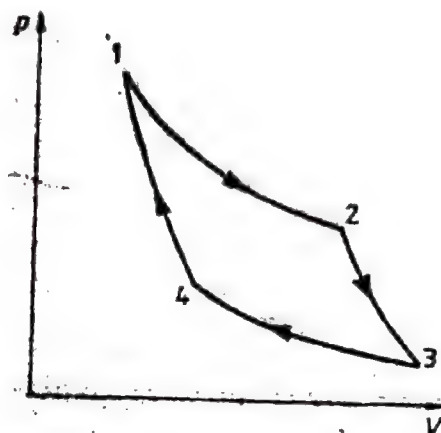


Fig. F.B.9

căldurile primită,  $Q_1$ , și cedată,  $Q_2$ , într-un ciclu; b) care este variația energiei interne  $\Delta U$  în cursul destinderii adiabaticice  $2 \rightarrow 3$ ? c) să se afle raportul de compresie  $\varepsilon = V_4/V_1$ . Se cunosc: constanta gazelor perfecte,  $R = 8,31 \cdot 10^3 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$  și exponentul adiabatic  $\gamma = 1,4$ .

2°. Două surse de tensiuni electromotoare  $E_1 = 130 \text{ V}$  și  $E_2 = 125 \text{ V}$  și de rezistențe interne  $r_1 = 0,5 \Omega$ , respectiv  $r_2 = 0,2 \Omega$  sînt conectate în paralel pe un rezistor care are rezistența  $R = 2 \Omega$ , ca în figura F.B.10. Să se calculeze: a) intensi-

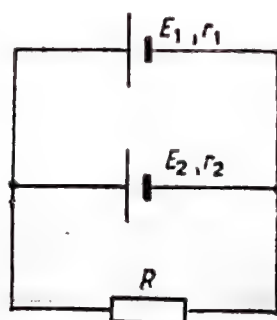


Fig. F.B.10

tățile  $I_1$  și  $I_2$  ale curenților prin cele două surse și căderea de tensiune pe rezistorul  $R$ ; b) energia pe care o disipă rezistorul  $R$  în timp de 2 minute; c) cit trebuie să fie tensiunea electromotoare a sursei  $E_1$ , pentru a se anula curentul  $I_1$  prin această sursă? Dar pentru ca  $I_1 = I_2$ ?

3°. a) Să se definească capacitatea calorică și căldurile specifică și molară ale unui corp; b) să se scrie formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare, arătîndu-se semnificațiile mărimilor fizice; c) să se stabilească formula lui Jurin privind fenomenele capilare.

4°. a) Să se definească intensitatea cîmpului electric și unitatea de măsură corespunzătoare; b) să se scrie expresia inductanței unei bobine, arătîndu-se semnificațiile mărimilor fizice; c) să se stabilească expresia forței Lorentz.

## 2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL UNIVERSITAR

### (PROFILUL FIZICĂ)

**XXVII.1°.** Un corp suspendat de un fir oscilează într-un plan vertical cu o amplitudine unghiulară  $\alpha = 60^\circ$ . Care va fi raportul dintre tensiunea maximă și tensiunea minimă din fir în timpul oscilațiilor?

**2°.** Fie sistemul din figura F.B.11, format din bilele 1, 2, 3 și bilele 4, 5, fixate la capetele unui fir inextensibil, trecut peste un scripete ce se poate roti fără frecare. Bilele, considerate puncte materiale de aceeași masă, se află inițial toate la înălțimea  $h = 13$  m față de sol. Se lasă sistemul să se miște liber. După 2 s se

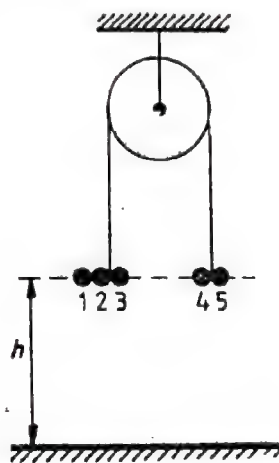


Fig. F.B.11

desprinde bila 1, iar după încă 1 s se desprinde bila 2. Să se determine: a) timpul după care bila 1 va atinge solul; b) timpul după care bila 2 va atinge solul; c) timpul după care bila 3 se va afla la același nivel cu bilele 4 și 5. Se va lua  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

**3°.** Două vase identice ce conțin aer la temperatura  $T = 300$  K sunt legate printr-un tub orizontal cu diametrul  $d = 0,4$  cm, la jumătatea căruia se află o picătură de mercur care împarte sistemul în două volume egale, fiecare având 314 cm<sup>3</sup>. Considerând aerul un gaz ideal, să se determine: a) viteza termică a moleculelor de aer, dacă masa molară a aerului este  $\mu = 29$  kg/kmol, iar  $R = 8310$  J/kmol·K; b) cu cât se va deplasa picătura de mercur dacă unul dintre vase se încălzește cu 3 °C, iar celălalt se răcește cu 3 °C; c) variația energiei interne a întregului sistem.

**4°.** Să se scrie, indicând semnificația fizică a mărimilor: a) momentul unui cuplu de forțe; b) legea lui Charles sau legea transformării izocore; c) expresia cinetico-moleculară a presiunii.

**5°.** Să se studieze: a) compunerea oscilațiilor de aceeași direcție și aceeași frecvență; b) procesul adiabetic din cadrul proceselor simple ale gazului perfect.

**XXVIII.1°.** a) Să se enunțe legile efectului fotoelectric extern.

b) Să se scrie cu semnificații fizice relația interfranței în cazul penei optice.

c) Să se definească unitatea de măsură a intensității curentului electric în S.I.

**2°.** Să se trateze subiectul: legi de conservare în interacțiunile nucleare.

**3°.** Un fascicul de electroni emiși de un tun electronic sunt trimiși pe un cristal pe care suferă fenomenul de difracție pe un sistem de plane cristaline, paralele, distanțate prin  $d = 0,3$  nm. Ce tensiuni de accelerare sunt necesare pentru a pune în evidență comportarea ondulatorie a electronilor prin difracție?

Se dau: constanta lui Planck,  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  J·s; masa electronului,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg; sarcina electronului,  $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  C.



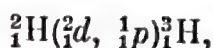
4°. Se dau două oglinzi concave care au aceeași distanță focală  $f$  și fețele reflectoare una spre cealaltă. a) Să se găsească condiția pe care trebuie să o îndeplinească distanța  $d$  dintre virfurile oglinzilor pentru ca imaginea unui punct luminos  $A$  de pe axa principală să se formeze tot în  $A$ , în urma reflexiilor razelor de lumină ce provin de la punctul luminos  $A$ , succesiv pe cele două oglinzi; b) să se construiască imaginea obiectului  $A$  în cele două oglinzi.

5°. Două bile mici, identice, suspendate în același punct de câte un fir de aceeași lungime, se resping datorită electrizării, sarcina lor fiind de aceeași valoare și semn. Cunoscând faptul că uleiul de transformator are densitatea  $0,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  și permitivitatea absolută  $\epsilon = 2,2\epsilon_0$ , să se afle care trebuie să fie densitatea materialului din care trebuie făcute bilele pentru ca unghiul dintre firele de suspensie să fie același pentru bilele situate în aer sau în ulei.

XXIX.1°. Frecvența de rezonanță a unui circuit serie, în curent alternativ, format dintr-un condensator și o bobină, este  $\nu_0 = 2 \text{ kHz}$ . Pentru o frecvență  $\nu = 1 \text{ kHz}$  a tensiunii de alimentare impedanța circuitului este  $Z = 1 \text{ k}\Omega$ . Rezistența bobinei este  $R = 10 \Omega$ . Să se calculeze: a) capacitatea  $C$  a condensatorului; b) inductanța  $L$  a bobinei.

2°. Se dă o oglindă sferică, concavă, cu raza de 2 m. La o distanță de 1,4 m de vârful  $V$  al oglinzii se așază un mic cerc luminos, cu raza de 1 cm, al cărui centru coincide cu axa optică principală. Să se afle la ce distanță de vîrf trebuie să se așeze o oglindă plană, perpendiculară pe axă, pentru ca centrul imaginii să se confunde cu centrul cercului. Care va fi diametrul cercului acestei imagini?

3°. Să se calculeze energia de reacție a reacției nucleare



dacă energia cinetică a deuterionilor incidenti este de 1,2 MeV și protonul care iese la un unghi drept față de direcția de mișcare a deuterionului are energia cinetică de 3,3 MeV și să se precizeze ce fel de reacție este, endoenergetică sau exoenergetică.

4°. Să se deducă variația lungimii de undă în efectul Compton.

5. Să se definească: a) rezistivitatea electrică; b) constanta rețelei de difracție; c) timpul de înjumătățire al unui ansamblu de nuclee radioactive.

### 3. ÎNVĂȚĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC

(PROFILURILE: MEDICINĂ, STOMATOLOGIE)

XXX.1°. a) Să se definească convergența lentilei și unitatea sa în SI.

b) Să se enunțe legea transformării izobare.

c) Să se enunțe regula lui Lenz.

2°. Să se scrie, indicînd semnificația mărimilor fizice care intervin: a) ecuația termică de stare a gazului ideal; b) distanțele focale ale unei lentile subțiri; c) intensitatea cîmpului electric generat de un corp punctiform, electrizat.

3°. Să se trateze subiectul: gruparea condensatorilor.

4°. Două incinte de volume  $V_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$  și, respectiv,  $V_2 = 10^{-2} \text{ m}^3$ , umplute cu același gaz monoatomic și aflate la temperatura  $T_1 = 300 \text{ K}$ , pot comunica între ele printr-un tub de volum neglijabil, închis inițial cu un robinet. În incinta (1) presiunea gazului este  $p_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ , iar în incinta (2) este  $p_2 = 3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ . Se deschide robinetul și se răcește după aceea incinta (2) la temperatura  $T_2 = 250 \text{ K}$ , menținînd incinta (1) la temperatura  $T_1$ .



Să se determine: a) numărul de kilomoli de gaz aflați în fiecare incintă în starea inițială; b) numărul de kilomoli de gaz aflați în fiecare incintă în starea finală; c) variația energiei interne a gazului din ambele recipiente.

Se dau: constanta universală a gazelor,  $R = 8310 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$ ; căldura molară izocoră  $C_V = \frac{3}{2} R$ .

5°. Cu o sursă de curent continuu, două voltmetre identice și două miliampermetre identice, se realizează montajul din figura F.B.12. Instrumentele de măsură legate în paralel indică  $U_1 = 0,25 \text{ V}$  și  $I_1 = 0,75 \text{ mA}$ . Al doilea miliampermetru indică  $I = 1 \text{ mA}$ . Să se calculeze: a) tensiunea  $U$  de la bornele sursei; b) tensiunea

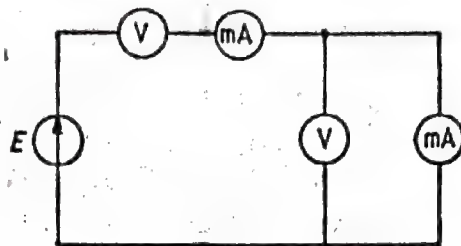


Fig. F.B.12

electromotoare  $E$  a sursei, cunoscând că rezistența interioară a ei este  $r = 100 \Omega$ ; c) rezistența rezistorului șunt pentru ca unul dintre miliampermetre să măsoare curenți pînă la  $10 \text{ A}$ , cunoscând că acesta măsoară curenți pînă la  $1 \text{ mA}$ .

XXXI.1°. a) Să se definească randamentul mașinii termice care funcționează după un ciclu Carnot reversibil.

b) Să se enunțe legile reflexiei.

c) Să se definească unitatea de măsură a intensității curentului electric în SI.

2°. Să se scrie, indicînd semnificația mărimilor fizice care intervin: a) relațiile care exprimă distanțele focale ale unei lentile subțiri; b) viteza termică a moleculelor; c) legea lui Coulomb.

3°. Să se deducă relațiile fundamentale ale dioptrului sferic.

4°. Într-un vas de alamă avînd masa  $m_3 = 200 \text{ g}$  se găsește apă cu masa  $m_2 = 480 \text{ g}$  la temperatura de echilibru  $t_0 = 15^\circ \text{C}$ . Se introduce apoi masa de mercur  $m_1 = 500 \text{ g}$  la temperatura  $t = 100^\circ \text{C}$  și se stabilește o nouă temperatură de echilibru la  $\theta = 17,7^\circ \text{C}$ .

a) Să se calculeze valoarea căldurii specifice a mercurului.

b) Care este temperatura finală a unui amestec format din masa de gheață  $m = 10 \text{ g}$  la temperatura  $t = 0^\circ \text{C}$  și masa de mercur în condițiile de la punctul a)?

Se dau: căldura specifică a apei,  $c_2 = 4180 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ; căldura specifică a alamei,  $c_3 = 386 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ; căldura latentă de topire a gheții,  $\lambda_t = 335000 \text{ J/kg}$ .

5°. Un bec de  $6,3 \text{ V}$ , cu puterea de  $2 \text{ W}$ , trebuie alimentat la o sursă de curent continuu cu tensiunea electromotoare  $12,6 \text{ V}$  și rezistența internă neglijabilă.

a) Să se calculeze valoarea rezistenței rezistorului ce trebuie montat în circuit pentru ca becul să funcționeze normal.

b) Intensitatea curentului ce trece prin bec trebuie măsurată cu un miliampermetru care are rezistența interioară de  $1 \Omega$ , are 100 diviziuni și poate măsura  $1 \text{ mA}$  pe diviziune.

Să se calculeze valoarea rezistenței șuntului ce trebuie montat pentru ca miliampermetrul să măsoare curenți pînă la  $0,5 \text{ A}$ .

# 1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILURILE: MECANIC, ELECTRIC, ENERGETIC, MINE, PETROL, METALURGIE, CONSTRUCȚII, GEODEZIE, TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA TEXTILELOR, TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA PRODUSELOR ALIMENTARE, FORESTIER (specializarea INDUSTRIALIZAREA LEMNULUI), GEOLOGIE

XXXII. 1°. Un corp cu masa  $m = 0,01$  kg, legat de un resort elastic orizontal, oscilează fără frecare pe o masă orizontală, conform ecuației:  $y = 0,2(\sqrt{3} \cos 2t + \sin 2t)$  [m]. Să se determine: a) pulsația, perioada și frecvența oscilației; b) momentele în care elongația este egală cu jumătate din amplitudinea oscilației, precum și faza oscilației la momentul  $t = 0$ ; c) energia potențială elastică maximă pe care o poate atinge corpul în cazul în care — pornind din poziția dată de ecuația oscilației armonice pentru  $t = 0$ , cu viteza corespunzătoare aceluiași moment — s-ar deplasa cu frecare, coeficientul de frecare fiind  $\mu = 0,1$ . Se va lua accelerația gravitațională  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

2°. O mașină termică utilizând drept agent 5 moli de gaz perfect funcționează după un ciclu format din izocora  $AB$ , izobara  $BC$ , izocora  $CD$  și izobara  $DA$ . Știind că  $p_A = 10^5$  N/m<sup>2</sup>,  $V_A = 0,1$  m<sup>3</sup>,  $p_B = 2p_A$  și  $V_C = 4V_A$ , să se determine: temperaturile la care se află gazul în stările  $A, B, C$  și  $D$ ; b) lucrul mecanic efectuat de mașina termică într-un ciclu; c) randamentul mașinii termice. Se dau:  $C_V = \frac{3R}{2}$ ,  $R = 8310$  J/kmol · K.

3°. O bobină realizată din fir de nichelină cu diametrul de 0,5 mm și rezistivitatea  $\rho = 4,5 \cdot 10^{-7}$  Ω · m este înfășurată pe un miez magnetic cilindric cu permeabilitatea  $\mu = 4\pi \cdot 10^{-5}$  N/A<sup>2</sup> și diametrul  $D = 1$  cm. Știind că înfășurarea bobinei are 500 spire pe o lungime de 4 cm și că este alimentată cu tensiunea  $U(t) = 204,4 \sin(100\pi t)$  [V], să se calculeze: a) inductanța bobinei, b) intensitatea efectivă a curentului electric prin bobină, c) puterile activă, reactivă și aparentă.

4°. Să se deducă: a) expresiile vitezei liniare și accelerației centripete în mișcarea circulară uniformă; b) variația cu temperatura și presiunea a densității unui gaz perfect; c) perioada de rotație a unei particule încărcate electric într-un câmp magnetic uniform.

5°. Să se scrie, indicând semnificațiile fizice ale mărimilor care intervin: a) legea lui Hooke; b) formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare a gazelor; c) definiția și expresia factorului de supratensiune (calitate) în curent alternativ monofazat pentru circuitul serie  $RLC$ .

XXXIII. 1°. De un corp de masă  $m = 2$  kg, aflat inițial în repaus pe o suprafață orizontală este legat un resort elastic de constantă  $k = 40$  N/m. Asupra capătului liber al resortului se aplică o forță  $F$  cu sensul spre corp (v. figura F.B. 13). Pentru a scoate corpul din repaus este necesar ca resortul să fie comprimat cu cel puțin  $x_m = 5$  cm. Aplicând o forță  $F$  constantă, astfel încît — pe întreaga durată a mișcării corpului pînă la racordul suprafeței plane cu o trambulină avînd raza de curbura  $R = 84,12$  m — resortul să fie comprimat cu  $x = 0,1$  m, se imprimă corpului o mișcare uniform accelerată pe distanța  $D = 50$  m pînă la trambulină, cînd acțiunea forței  $F$  încetează. Să se determine: a) coeficientul de frecare dintre corp și suprafața orizontală; b) viteza corpului la intrarea pe trambulină; c) lun-



gimea traseului parcurs de corp pe trambulină până la desprinderea sa. Se neglijează frecarea corpului cu trambulina. Se va lua  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

2°. Un mol de hidrogen aflat inițial în starea  $A$ , caracterizată de parametrii  $p_A = 4,155 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $V_A = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$ , ajunge, printr-o destindere izotermă, în starea  $B$  în care volumul gazului este  $V_B = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$ , după care printr-o comprimare izobară  $BC$  revine la volumul inițial ( $V_C = V_A$ ). Să se determine: a) tem-

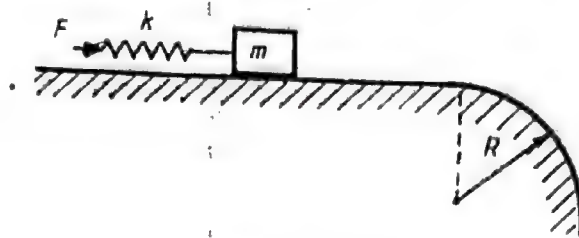


Fig. F.B.13

peraturile și presiunile corespunzând stărilor  $A$ ,  $B$  și  $C$ ; b) lucrul mecanic efectuat și căldura schimbată de gaz cu exteriorul în comprimarea izobară  $BC$ ; c) randamentul motorului termic care funcționează după ciclul  $ABCA$ . Se dau:  $C_p = 7R/2$ ,  $R = 8310 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$ ,  $\ln 2 = 0,693$ .

3°. Pe cadrul metalic orizontal  $MPQS$  din figura F.B.14 se deplasează cu viteza constantă  $v = 2 \text{ m/s}$  conductorul  $NR$ , confecționat din aceleași bare metalice de rezistivitate  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ , densitate  $\rho_m = 8900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  și secțiune  $S = 1 \text{ cm}^2$ , ca și cadrul. Știind că  $PQ = NR = 1 \text{ m}$ , să se determine: a) valoarea și sensul tensiunii electromotoare induse în conductor în prezența unui cîmp mag-

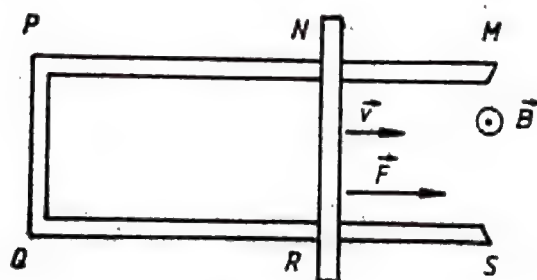


Fig. F.B.14

netic uniform, a cărei inducție  $B = 10 \text{ mT}$  are direcția verticală și sensul indicat în figură; b) intensitatea curentului prin conductor atunci cînd  $\overline{PN} = \overline{QR} = 1,5 \text{ m}$ ; c) coeficientul de frecare dintre conductorul  $NR$  și cadru, știind că pentru a asigura deplasarea conductorului cu viteza indicată trebuie acționat asupra acestuia cu o forță exterioară, în sensul mișcării, a cărei valoare — atunci cînd  $\overline{PN} = \overline{QR} = 1,5 \text{ m}$  — este  $F = 1,4 \text{ N}$ . Se va lua  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

4°. Să se deducă: a) legea (ecuația) lui Bernoulli a dinamicii fluidelor; b) randamentul motorului termic care funcționează după un ciclu Carnot reversibil; c) expresiile impedanțelor circuitelor  $RLC$  serie, respectiv derivație, în curent alternativ.

5°. Să se enunțe și să se serie, indicînd semnificațiile mărimilor care intervin: a) legea lui Newton a atracției universale; b) legile transformărilor termodinamice elementare: izotermă, izobară, respectiv izocoră; c) legile lui Faraday ale electroлізу.

XXXIV. 1°. Un corp cu masa  $m = 0,1 \text{ kg}$  este legat de tavanul unei încăperi cu înălțimea  $H = 2,5 \text{ m}$ , printr-un fir inextensibil de lungime  $L = 1 \text{ m}$ . Se scoate



pendulul din poziția de echilibru, astfel încât firul întins formează un unghi  $\theta = 30^\circ$  cu poziția de echilibru. În această poziție se imprimă corpului o viteză orizontală, în direcția perpendiculară pe fir. Să se determine: a) valoarea vitezei care trebuie imprimată corpului pentru ca unghiul  $\theta$  să rămână constant în timpul mișcării; b) energia necesară pentru aducerea corpului din poziția sa de echilibru în această stare de mișcare; c) în cit timp și cu ce viteză atinge corpul podeaua, dacă la un moment dat se rupe firul. Se va lua  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

2°. Sursa caldă, respectiv sursa rece a unui motor termic, au temperaturile  $t_1 = 527^\circ \text{C}$  și  $t_2 = 127^\circ \text{C}$ . Motorul utilizează 16,28 moli gaz perfect, care parcurg un ciclu Carnot. Știind că, efectuând  $n = 120$  cicluri/minut, motorul dezvoltă o putere de 75 kW, să se determine: a) randamentul termic al motorului; b) căldura primită de la sursa caldă, respectiv căldura cedată sursei reci, în timp de o oră; c) rapoartele de compresie  $V_3/V_4$  al volumului inițial ( $V_3$ ) și volumului final ( $V_4$ ) în comprimarea izotermă, respectiv  $V_4/V_1$  al volumului inițial ( $V_4$ ) și volumului final ( $V_1$ ) în comprimarea adiabatică. Se dau: exponentul adiabatic al gazului perfect  $\gamma = \frac{4}{3}$ , constanta gazelor perfecte  $R = 8,310 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$  și  $\ln 2 = 0,693$ .

3°. În vârful unei piramide regulate cu baza un pătrat cu latura  $a$  se află o sarcină electrică punctiformă  $-2q$ , iar în cele patru colțuri ale pătratului bazei sînt așezate sarcinile electrice punctiforme pozitive identice  $+\frac{q}{2}$ . Știind că sistemul de sarcini se găsește în vid, să se deducă: a) potențialul electric produs de sarcinile bazei în vârful piramidei, știind că înălțimea acesteia este egală cu  $h$ ; b) direcția, sensul și valoarea rezultantei forțelor care acționează asupra sarcinii din vârful piramidei; c) diferența de potențial dintre două armături plane și paralele, de aceeași arie  $A (\gg h^2)$ , distanțate cu  $h$ , știind că pe o armătură se depune sarcina electrică din vârful piramidei, iar pe cealaltă armătură se depun sarcinile din colțurile bazei piramidei.

4°. Să se deducă: a) expresia lucrului mecanic al forței elastice; b) legea lui Jurin a fenomenelor capilare; c) expresia impedanței circuitului serie  $RLC$  în curent alternativ.

5°. Să se scrie, indicînd semnificațiile fizice ale mărimilor care intervin: a) legea conservării energiei mecanice pentru forțe conservative; b) expresia inducției unei bobine; c) formula conductivității electrice a unui semiconductor cu impurități.

XXXV. 1°. Doi cilindri omogeni cu masele  $m_1 = 0,3 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0,2 \text{ kg}$ , avînd o aceeași înălțime  $h = 5 \text{ cm}$ , sînt legați de un fir cu greutatea neglijabilă, care trece peste un scripete. După ce cilindrul 2 este coborît pînă cînd atinge solul, cilindrul 1 ajungînd la înălțimea  $H = 1 \text{ m}$ , se lasă liber sistemul. Să se determine: a) accelerația sistemului și tensiunea în fir în cazul în care ambii cilindri se deplasează în aer; b) durata după care cei doi cilindri ajung la aceeași înălțime, în condițiile specificate mai sus; c) frecvența oscilațiilor pe care le execută sistemul în condițiile în care sub cilindrul 1, aflat la înălțimea  $H$ , se introduce un vas cu lichid cu densitatea  $\rho = \frac{2}{3} \cdot \rho_c$ , unde  $\rho_c$  este densitatea cilindrului 1 (figura F.B.15). Se vor neglija frecările cilindrilor cu aerul și lichidul, precum și a firului cu scripetele. Se va lua  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

2°. O cantitate de gaz perfect efectuează un proces ciclic format din comprimarea adiabatică  $1 \rightarrow 2$ , încălzirea izocoră  $2 \rightarrow 3$ , detenta adiabatică  $3 \rightarrow 4$  și răcirea izocoră  $4 \rightarrow 1$ , raportul de compresie fiind  $V_1/V_2 = 32$ . Știind că variația temperaturii în încălzirea izocoră  $2 \rightarrow 3$  este  $T_3 - T_2 = 200 \text{ K}$ , căldura cedată sursei reci într-un ciclu este  $Q_r = 1600 \text{ J}$ , iar aria ciclului în diagrama presiune-volum este  $4800 \text{ J}$ , să se determine: a) randamentul motorului care funcționează

după acest ciclu; b) variația temperaturii în răcirea izocoră  $4 \rightarrow 1$ ; c) exponentul adiabatic și căldura molară la volum constant  $C_V$  a gazului. Se dă constanta  $R = 8310 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$ .

3°. Un circuit serie de curent alternativ este format dintr-o bobină cu inducția  $L = 3 \text{ mH}$ , un rezistor cu rezistența  $R = 8 \Omega$  și din condensatoarele  $C_1$  și  $C_2$  montate în serie. Condensatorul  $C_1$  are capacitatea  $2 \text{ nF}$ , iar  $C_2$  este un condensator plan cu aer având aria unei armături  $S = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ , iar distanța dintre

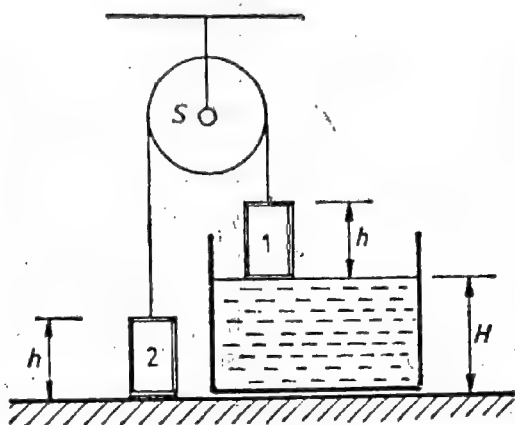


Fig. F.B.15

ele  $d = 3,54 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ . Circuitul este alimentat de o sursă care asigură o aceeași amplitudine a tensiunii alternative la borne pentru frecvențe variabile. Să se determine: a) capacitatea condensatorului  $C_2$ ; b) frecvența tensiunii alternative pentru care se produce rezonanța; c) valoarea maximă a fluxului inducției magnetice în bobină  $\Phi_{\text{max}}$ , la rezonanță, știind că în acest caz valoarea maximă a sarcinii electrice pe armăturile condensatorului  $C_1$  este  $Q_{1,\text{max}} = 2 \mu\text{C}$ . Se dă permittivitatea aerului:  $\epsilon_a = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ .

4°. Să se deducă: a) expresia diferenței de presiune dintre două puncte din interiorul unui lichid; b) expresia vitezei medii pătratice a moleculelor unui gaz ideal; c) capacitatea unei baterii de condensatoare legate în serie.

5°. Să se scrie, indicând semnificațiile fizice ale mărimilor care intervin: a) randamentul planului înclinat; b) ecuația Clapeyron-Mendeleev a gazelor perfecte; c) inducția magnetică în centrul unei spire circulare parcursă de curent electric.

**XXXVI. 1°.** Dintr-un același punct, aflat la înălțimea  $h = 240,1 \text{ m}$  deasupra unei mări, sint lăsate să cadă liber, la un interval de timp  $\Delta t = 2 \text{ s}$ , două corpuri identice, având fiecare masa  $m = 10 \text{ kg}$  și volumul  $V = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$ . Să se determine: a) distanța maximă dintre corpurile, aflate încă în aer; b) accelerația mișcării corpurilor în apă; c) timpul scurs de la lansarea primului corp până la întâlnirea cu celălalt, precum și distanța față de suprafața apei la care are loc întâlnirea. Se dau:  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  și densitatea apei  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Se neglijează frecările și se admite că, în locul considerat, corpurile nu ating fundul mării.

2°. Într-un rezervor cu volumul  $V_1 = 150 \text{ l}$  se găsesc  $10 \text{ moli}$  de heliu la presiunea  $p_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ , rezervorul fiind separat printr-o supapă, inițial închisă, de un recipient vidat, având volumul  $V_2 = 200 \text{ l}$ . Să se determine: a) temperatura inițială a heliului; b) temperatura la care trebuie să fie încălzit gazul pentru ca supapa să se deschidă, știind că forța rezistentă la deschiderea supapei este  $F = 300 \text{ N}$ , iar aria supapei  $S = 10 \text{ cm}^2$ ; c) temperatura finală, precum și viteza medie pătratică finală a moleculelor de heliu, știind că – după realizarea echilibrului termodinamic al gazului în rezervor și recipient (supapa rămânând deschisă)



presiunea finală a gazului este  $p = 10^5 \text{ N/m}^2$ . Se dau:  $R = 8310 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$  și masa molară a heliului  $\mu = 4 \text{ kg/kmol}$ .

3°. O baterie cu tensiunea electromotoare  $E_1 = 60 \text{ V}$ , formată din  $n$  elemente galvanice identice având fiecare rezistența internă  $r = 0,5 \Omega$ , legate în serie, debitează pe un rezistor  $R$  un curent de intensitate  $I_1 = 1,5 \text{ A}$ . Legând în serie, la bornele rezistorului, doar jumătate dintre elementele considerate, intensitatea curentului scade la valoarea  $I_2 = 1 \text{ A}$ . Dacă se înlocuiește rezistorul cu un condensator plan având aria  $S = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$  și distanța dintre armături  $d = 2,95 \text{ mm}$ , în condensator aflându-se o placă dielectrică de grosime  $d$  și arie  $S' = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ , condensatorul se încarcă cu sarcina  $q = 18 \text{ nC}$ . Să se determine: a) rezistența  $R$  a rezistorului și numărul  $n$  de elemente galvanice; b) energia disipată în rezistorul  $R$  străbătut timp de o oră de curentul  $I_1$ ; c) permitivitatea relativă a plăcii. Se da permitivitatea vidului  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ .

4°. Să se deducă: a) expresia randamentului unui plan înclinat; b) înălțimea la care urcă (sau coboară) un lichid într-un vas capilar; c) expresia factorului de supratensiune (de calitate) într-un circuit serie  $RLC$ .

5°. Să se enunțe și să se scrie, indicind semnificațiile mărimilor fizice care intervin: a) legea atracției universale a lui Newton; b) legea Boyle-Mariotte; c) legile electrolizei.

XXXVII. 1°. Un corp cu masa  $m = 1 \text{ kg}$  efectuează o mișcare oscilatorie armonică descrisă de ecuația  $y = 0,1 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) [\text{m}]$ . Să se determine: a) valorile maxime ale vitezei și accelerației corpului în cursul oscilației; b) durata în care corpul se deplasează, în sensul pozitiv al axei  $Oy$ , din poziția de elongație  $y_1 = \frac{A}{2}$  până în poziția de elongație  $y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A$ , unde  $A$  este amplitudinea oscilației; c) energia cinetică, respectiv energia potențială elastică a corpului în poziția corespunzătoare elongației  $y_2$ .

2°. Un circuit electric este format dintr-o bobină cu 1 000 spire și rezistența  $R = 20 \Omega$ , inseriată cu un vas de electroliză cu soluție de sulfat de cupru. Bobina, de lungime  $l = 62,8 \text{ cm}$  are un miez de fier cu permeabilitatea relativă  $\mu_r = 300$  și aria secțiunii  $S = 10 \text{ cm}^2$ . Prin circuit trece un curent electric continuu care transportă la catod  $9 \cdot 10^{20}$  ioni de cupru, producând, totodată, un cîmp magnetic cu inducția  $B = 8 \text{ T}$  în bobină. Să se determine: a) inductanța bobinei; b) intensitatea curentului electric prin bobină și puterea disipată sub formă de căldură în bobină; c) masa de cupru depusă la catod. Se dau: masa atomică a cuprului  $A = 63,6$ , permeabilitatea vidului  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ , numărul lui Avogadro,  $N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ molecule/mol}$ .

3°. Să se deducă: a) dependențele de timp ale vitezei, respectiv coordonatei (spațiului), în mișcarea uniform variată, cu viteză inițială; b) rezistența electrică echivalentă unei grupări serie, respectiv unei grupări derivație (în paralel) de rezistoare; c) expresia forței electromagnetice exercitată de cîmpul magnetic produs de un curent electric care străbate un conductor rectiliniu foarte lung, asupra unei porțiuni dintr-un alt conductor rectiliniu foarte lung, paralel cu primul, parcurs de un alt curent electric.

4°. Să se scrie, indicind denumirile mărimilor fizice care intervin: a) expresia forței centrifuge; b) legea (ecuația) lui Bernoulli a dinamicii fluidelor; c) expresiile puterilor activă, reactivă și — respectiv — aparentă în curent alternativ monofazat.



**XXXVIII. 1°.** O masă  $m = 0,4$  kg de heliu este supusă ciclului din figura F.B.16, în care 1—2 este o transformare izocoră, 3—1 o transformare izobară, iar transformarea 2—3 este reprezentată printr-o dreaptă. Cunoșcând lucrul mecanic pe întreg ciclul  $L = 1,247 \cdot 10^5$  J, densitatea gazului în starea 2,  $\rho_2 = 0,08$  kg/m<sup>3</sup>, presiunea  $p_2 = 2p_1$  și volumul  $V_3 = 2V_1$ , se cer: a) temperatura gazului în starea

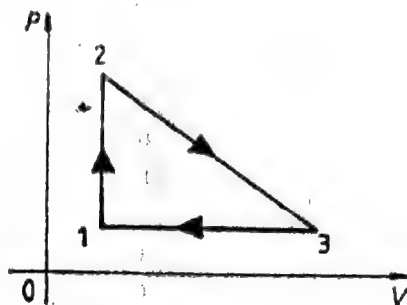


Fig. F.B.16

1; b) variația energiei interne în cursul transformării 2—3; c) presiunea gazului în starea 2. Se dau: masa molară a heliului,  $\mu = 4$  kg/kmol; constanta gazelor perfecte,  $R = 8310$  J/kmol · K;  $C_V = 3/2 R$ .

**2°.** O sursă de tensiune electromotoare  $E = 220$  V alimentează circuitul din figura F.B.17, în care se cunosc  $C_1 = 1 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 3 \mu\text{F}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 80 \Omega$  și  $R_3 = 20 \Omega$ . Să se calculeze: a) sarcinile electrice de pe armăturile condensatorilor  $C_1$  și  $C_2$  atunci când comutatorul  $K$  este deschis; b) sarcinile electrice de pe armăturile condensatorilor atunci când comutatorul  $K$  este închis; c) energiile cîmpului electric dintre armăturile condensatorului  $C_1$  în cele două cazuri.

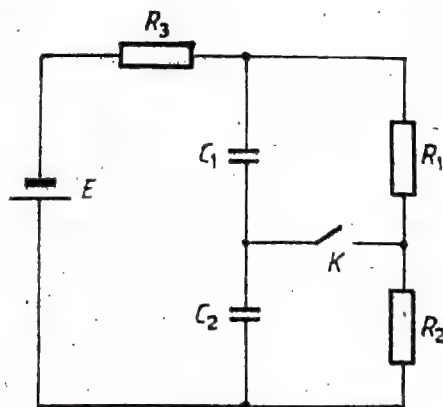


Fig. F.B.17

**3°.** La bornele circuitului din figura F.B.18, în care  $R = 10 \Omega$ ,  $L = \frac{1}{10\pi}$  H și  $C = \frac{10^{-3}}{2\pi}$  F se aplică o tensiune alternativă cu valoarea eficace  $U = 220$  V și frecvența  $\nu = 50$  Hz. Se cer: a) intensitățile curenților din circuit și diagrama fazorială; b) impedanța circuitului și defazajul dintre curent și tensiune la bornele circuitului; c) modificînd frecvența sursei, pentru ce valoare  $\nu_1$  a frecvenței s-ar obține intensitatea minimă și care ar fi valoarea acesteia.

**4°.** a) Să se enunțe principiul al doilea al termodinamicii; b) Să se enunțe legile fierberii; c) Să se definească parametrii unei triode.

5°. Să se scrie, indicînd semnificația simbolurilor care apar: a) ecuația Clapeyron-Mendeleev; b) expresia randamentului ciclului Carnot; c) formula conductivității electrice a unui semiconductor cu impurități.

XXXIX. 1°. Se consideră un corp de pompă vertical cu secțiunea  $S = 0,01 \text{ m}^2$ , prevăzut în partea superioară cu un piston mobil de masă  $M = 50 \text{ kg}$ . În corpul de pompă se află  $m = 14 \text{ g}$  de azot la temperatura  $t_1 = 27^\circ\text{C}$ . Cazul suferă o încăl-

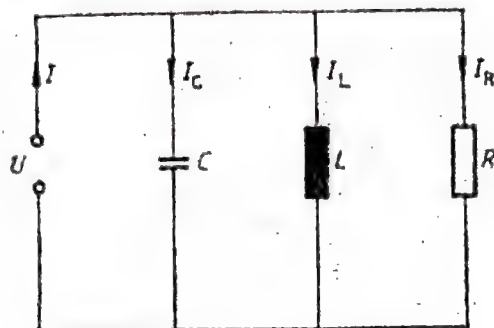


Fig. F.B.18

zire izobară pînă la o temperatură  $T_2 = 400 \text{ K}$ , după care pistonul este blocat și corpul de pompă este pus în legătură cu un vas de volum  $V_2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ , în care se află, de asemenea, azot avînd presiunea  $p_2 = 4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$  și temperatura  $T_2$ . Se cer: a) înălțimea  $h$  la care se găsește pistonul față de baza corpului de pompă în starea inițială; b) lucrul mecanic efectuat de gaz în cursul încălzirii izobare; c) presiunea finală, după stabilirea legăturii între corpul de pompă și vas. Se dau: constanta gazelor perfecte  $R = 8310 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$ ; masa molară a azotului  $\mu = 28 \text{ kg/kmol}$ ; accelerația gravitațională  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ ; presiunea atmosferică  $p_0 = 10^5 \text{ N/m}^2$ .

2°. Un gaz ideal monoatomic se află inițial în starea caracterizată de parametrii:  $p_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $V_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$  și  $T_1 = 400 \text{ K}$ . În starea finală gazul are parametrii:  $p_5 = 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $V_5 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$  și  $T_5 = 300 \text{ K}$ . Din starea inițială se poate ajunge în starea finală pe trei căi distincte: transformare izocoră 1—4 urmată de o transformare izobară 4—5; transformare izotermă 1—2 urmată de o transformare izocoră 2—5; transformare arbitrară 1—3 urmată de o transformare izobară 3—5. Se cer: a) lucrul mecanic și cantitatea de căldură schimbate de gaz pe calea 1—4—5; b) lucrul mecanic și cantitatea de căldură schimbate de gaz pe calea 1—2—5; c) variația energiei interne pe calea 1—3—5. Se dau: constanta gazelor perfecte  $R = 8310 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$ ; căldura molară la volum constant  $C_V = 3R/2$ ;  $\ln 1,5 = 0,4$ .

3°. O diodă este conectată la o tensiune continuă  $U = 20 \text{ V}$  prin intermediul unei rezistențe  $R_1$ , căderea de tensiune pe diodă fiind  $U_d = 9 \text{ V}$ . Se cer: a) valoarea rezistenței  $R_1$  astfel încît curentul prin diodă să aibă valoarea  $I_d = 10 \text{ mA}$ ; b) ce valoare va trebui să aibă rezistența  $R_1$ , dacă în paralel cu dioda se conectează o rezistență de sarcină  $R_s = 600 \Omega$ , astfel încît curentul prin diodă nu se modifică; c) curentul total rămînînd constant, între ce limite variază rezistența de sarcină (pentru  $R_1 = 440 \Omega$ ), astfel încît intensitatea curentului prin diodă să fie cuprinsă între  $I_{d, \text{minim}} = 0,5 \text{ mA}$  și  $I_{d, \text{maxim}} = 19,5 \text{ mA}$ .

4°. Să se scrie, indicînd semnificația simbolurilor care apar: a) legea lui Jurin; b) legile lui Kirchhoff; c) legile electrolizei.

5°. Să se definească: a) energia internă a unui sistem termodinamic; b) unitatea de măsură a fluxului magnetic; c) inductanța unui circuit.



**XL. 1°.** Un circuit  $RLC$  paralel, format dintr-un rezistor  $R = 10 \, \Omega$ , o bobină de inductanță  $L = 10^{-4} \, \text{H}$  și un condensator  $C$  este alimentat de un generator de curent alternativ de frecvență  $f = 10^4 \, \text{Hz}$ . La rezonanță, valoarea efectivă a intensității totale a curentului este  $I = 20 \, \text{mA}$ . Se cer: a) puterea disipată pe rezistorul  $R$  și valoarea capacității  $C$  a condensatorului, la rezonanță; b) impedanța circuitului, dacă frecvența generatorului se dublează; c) care este permeabilitatea magnetică relativă a miezului bobinei știind că are o lungime  $l = 0,1 \, \text{m}$ , secțiunea  $S = 10^{-4} \, \text{m}^2$  și  $N = 100$  de spire. Se da permeabilitatea magnetică a vidului  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \, \text{N/A}^2$ .

**2°.** O bară de fier de masă  $m_1 = 0,05 \, \text{kg}$  și una de aluminiu de masă  $m_2 = 0,1 \, \text{kg}$ , aflate la aceeași temperatură  $t_1 = 100^\circ\text{C}$ , sînt introduse într-un calorimetru de capacitate calorică  $C = 125 \, \text{J/K}$  în care se află o masă  $m_3 = 0,2 \, \text{kg}$  de apă la temperatura  $t_2 = 20^\circ\text{C}$ . Se cer: a) temperatura finală de echilibru; b) care trebuie să fie masa  $m_4$  a unei bucăți de gheață avînd temperatura  $t_4 = -5^\circ\text{C}$  și care, introdusă în calorimetru, face ca, prin topirea ei integrală, noua temperatură de echilibru să fie de  $0^\circ\text{C}$ ; c) cu cît se modifică volumul barei de fier în cursul procesului de la punctul b) ?

Se dau: căldurile specifice:  $c_{\text{Fe}} = 500 \, \text{J/kg} \cdot \text{K}$ ;  $c_{\text{Al}} = 900 \, \text{J/kg} \cdot \text{K}$ ;  $c_{\text{apă}} = 4180 \, \text{J/kg} \cdot \text{K}$ ;  $c_{\text{gheață}} = 2090 \, \text{J/kg} \cdot \text{K}$ ; căldura latentă de topire a gheții  $\lambda = 334000 \, \text{J/kg}$ ; densitatea fierului  $\rho_{\text{Fe}}(0^\circ\text{C}) = 7800 \, \text{kg/m}^3$ ; coeficientul de dilatare în volum al fierului  $\gamma_{\text{Fe}} = 3,5 \cdot 10^{-5} \, \text{K}^{-1}$ .

**3°.** Un cilindru orizontal de volum  $V = 4 \cdot 10^{-3} \, \text{m}^3$  în care se află azot, închis în ambele capete, este împărțit în două compartimente de un piston mobil termoizolant. Echilibrul mecanic al pistonului se realizează atunci cînd raportul volumelor celor două compartimente este  $V_1/V_2 = 5$ , la temperatura  $T_1 = 300 \, \text{K}$ . Se cer: a) cu cîte grade trebuie încălzit un compartiment, știind că prin răcirea celuilalt compartiment cu același număr de grade, volumele celor două compartimente devin egale; b) în ce raport se află presiunea finală față de cea inițială; c) care este viteza termică a moleculelor din compartimentul încălzit.

Se dau: constantă gazelor perfecte  $R = 8310 \, \text{J/kmol} \cdot \text{K}$  și masa molară a azotului  $\mu = 28 \, \text{kg/kmol}$ .

**4°.** Să se definească: a) masa moleculară relativă a unei substanțe; b) intensitatea cîmpului electric într-un punct; c) capacitatea electrică a unui conductor izolat.

**5°.** Să se scrie, indicînd semnificația simbolurilor care apar: a) expresia randamentului ciclului Carnot; b) expresia inducției cîmpului magnetic generat de un curent electric rectiliniu; c) expresia forței Lorentz.

#### Y. ÎNVĂȚĂMÎNTUL DE SUBINGINERII (3 ani) — TOATE PROFILURILE; SPECIALIZĂRILE DIN ÎNVĂȚĂMÎNTUL PEDAGOGIC DE CHIMIE-FIZICĂ (3 ani) ȘI MATEMATICĂ-FIZICĂ (3 ani)

**XLI. 1°.** Într-o incintă de volum  $V = 2 \cdot 10^{-3} \, \text{m}^3$ , prevăzută cu o supapă care se deschide la o presiune  $p = 2 \cdot 10^4 \, \text{N/m}^2$ , se află azot la presiunea  $p_1 = 1,38 \cdot 10^4 \, \text{N/m}^2$  și temperatura  $t_1 = 127^\circ\text{C}$ . Se cere să se determine: a) numărul de molecule din incintă; b) masa de gaz și energia cinetică medie de translație a moleculelor; c) masa de gaz care a ieșit din incintă dacă gazul se încălzește cu  $\Delta T = 300 \, \text{K}$ .

Se dau: masa molară a azotului,  $\mu = 28 \, \text{kg/kmol}$ ; constanta lui Boltzmann,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \, \text{J/K}$ .

**2°.** Un circuit serie  $RLC$  în care  $R = 4 \, \Omega$ ,  $L = 25,48 \, \text{mH}$  și  $C = 637 \, \mu\text{F}$  este alimentat de la un generator de curent alternativ cu tensiunea efectivă  $U = 120 \, \text{V}$  și frecvența  $\nu = 50 \, \text{Hz}$ . Să se calculeze: a) intensitatea curentului din



circuit și tensiunile la bornele rezistorului  $U_R$ , bobinei  $U_L$  și condensatorului  $U_C$ ;  
 b) pentru ce valoare  $C_1$  a capacității condensatorului apare rezonanța în circuit;  
 c) factorul de supratensiune al circuitului dat.

3°. a) Să se enunțe principiul întâi al termodinamicii; b) să se scrie expresia lucrului mecanic într-o transformare izotermă, indicându-se semnificația simbolurilor care apar; c) să se definească coeficientul de dilatare aparentă a lichidelor.

4°. Să se scrie, indicând semnificația simbolurilor: a) legile lui Kirchhoff; b) expresia forței Lorentz; c) expresia energiei immagazinate în câmpul electric dintre armăturile unui condensator.

## 2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL UNIVERSITAR

### (PROFILUL FIZICĂ)

**XLII. 1°** Un vas conține un lichid cu densitatea  $\rho_0 = 1\,000\text{ kg/m}^3$ . Pe marginea superioară a vasului se sprijină liber, la capătul superior, o tijă subțire, omogenă și uniformă, de lungime  $l = 1\text{ m}$  și densitatea  $\rho = 910\text{ kg/m}^3$ , capătul inferior al tijei fiind cufundat în lichid. Capătul superior al tijei se află la înălțimea  $h = 0,15\text{ m}$  față de nivelul lichidului. Să se determine: a) lungimea porțiunii de tijă cufundată în lichid; b) unghiul pe care îl face tija cu suprafața lichidului; c) coeficientul de frecare la alunecare minim, dintre tijă și marginea vasului, pentru ca tija să nu alunece.

**2°.** Un vagon cu masa  $m_1 = 10\text{ t}$  se deplasează pe o cale ferată orizontală și liniară cu viteza  $v_0 = 10\text{ m/s}$ . După un timp  $t = 10\text{ s}$  el se ciocnește și se cuplează (ciocnire plastică) cu un al doilea vagon de masă  $m_2 = 20\text{ t}$  aflat în repaus. În timpul mișcării, atât înainte cit și după ciocnire, asupra fiecărui vagon acționează o forță de rezistență egală cu a  $n = 100$  parte din greutatea respectivului vagon. Să se determine: a) viteza primului vagon înainte de ciocnire; b) viteza vagoanelor cuplate, imediat după ciocnire; c) căldura degajată prin ciocnire; d) timpul și distanța până la oprirea vagoanelor cuplate. Se dă  $g = 10\text{ m/s}^2$ .

**3°.** Un motor termic avînd ca substanță de lucru un gaz ideal funcționează după un ciclu ca cel din figura F.B.19. În starea inițială 1 gazul ideal ocupă volumul  $V_0 = 2\text{ dm}^3$  la presiunea  $p_0 = 100\text{ kPa}$ . Să se determine: a) lucrul mecanic,

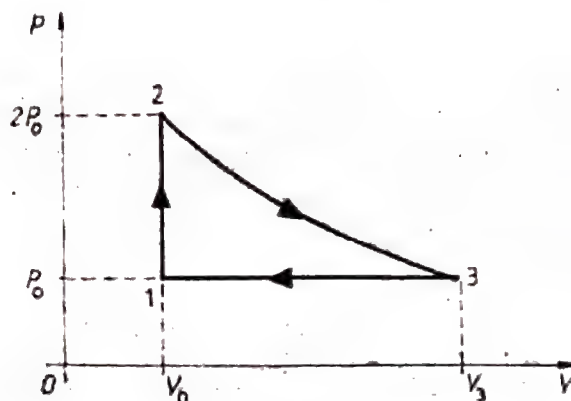


Fig. F.B.19

căldura și variația energiei interne în transformările 1-2, 2-3, 3-1; b) randamentul ciclului. Se dă căldura molară la volum constant a gazului ideal  $C_V = \frac{5}{2} R$ .

4°. Să se scrie indicînd semnificația fizică a mărimilor: a) legea lui Hooke pentru întinderea unei bare; b) viteza termică a moleculelor unui gaz perfect; c) variația densității corpurilor cu temperatura.

5°. a) Să se stabilească expresia accelerației centripete în mișcarea circulară uniformă; b) Să se studieze izotermele lui Andrews. Starea critică; c) Să se enunțe, în diverse formulări, legea lui Gay-Lussac.

**XLIII. 1°.** Un dispozitiv Young având distanța dintre fante  $2l = 0,5 \text{ mm}$  și distanța de la planul fantelor la ecran  $D = 1 \text{ m}$  se iluminează cu lumină albă. Considerînd că lungimile de undă extreme din spectrul vizibil sînt  $\lambda_1 = 0,4 \mu\text{m}$ , respectiv,  $\lambda_2 = 0,7 \mu\text{m}$ , să se calculeze: a) lungimile de undă ale radiațiilor care vor da minime într-un punct de pe ecran situat la distanța  $x = 3,5 \text{ cm}$  de franja centrală; b) în calea unui fascicul, perpendicular pe el, se interpune o lamă de sticlă plan-paralelă de grosime  $d = 13 \mu\text{m}$ , ale cărei indice de refracție variază cu lungimea de undă conform relației  $n = a + b/\lambda^2$ . Știind că pentru  $\lambda_1 = 0,4 \mu\text{m}$  indicele de refracție este  $n_1 = 1,52$ , iar pentru  $\lambda_2 = 0,7 \mu\text{m}$ ,  $n_2 = 1,5$ , să se calculeze la ce distanță față de poziția franjei centrale de ordin zero de la punctul precedent se va forma franja centrală pentru radiația cu  $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$ .

2°. Se consideră circuitul electric din figura F.B.20, în care tensiunea electromotoare a sursei  $E_1 = 2 \text{ V}$ , iar rezistorii au rezistențele  $R_1 = R_3 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = R_4 = 2 \Omega$ . Puterea disipată pe  $R_4$  este  $P_4 = 2 \text{ W}$ . Se cere: a) intensitatea curentului prin fiecare rezistor; b) tensiunea electromotoare a sursei  $E_2$ ; c) puterea furnizată de sursa  $E_1$  circuitului. Rezistențele interne ale surselor sînt neglijabile.

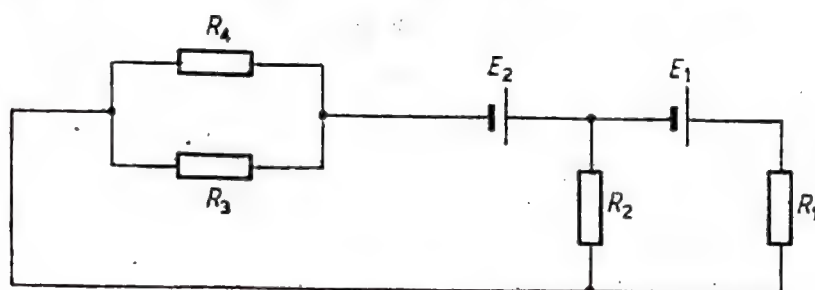


Fig. F.B.20

3°. Radiocobaltul  $^{60}_{27}\text{Co}$  are timpul de înjumătățire  $T_{1/2} = 5,3 \text{ ani}$  și se dezintegrează emițînd o particulă  $\beta^-$  cu energia cinetică medie de  $0,1 \text{ MeV}$  și cite doi fotoni gamma cu energiile  $1,17$  respectiv,  $1,33 \text{ MeV}$ . a) Calculați căldura dezvoltată prin absorbția integrală a fotonilor și electronilor emiși de  $2 \text{ g}$  de radiocobalt timp de  $10,6 \text{ ore}$ . b) Fotonii emiși extrag dintr-o foiță de Pb fotoelectroni. Să se calculeze viteza acestora știind că energia de legătură a electronilor în plumb este de  $88 \text{ keV}$ . Se dau:  $N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ kmol}^{-1}$ ,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ,  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ,  $\ln 2 = 0,693$ .

4°. Scrieți indicînd semnificația fizică a termenilor care intervin: a) parametrul triodei. b) condiția de cuantificare a momentului magnetic în modelul atomic al lui Bohr. c) forța de interacțiune electromagnetică între doi conductori liniari, paraleli și infiniti parcursi de curenți electrici continui.

5°. Tratați subiectele: a) efectul Compton, b) autoinducția; inductanța unui circuit.

### 3. ÎNVĂȚĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC

(PROFILURILE: MEDICINĂ, STOMATOLOGIE)

**XLIV. 1°.** Să se scrie indicînd semnificația fizică a mărimilor: a) ecuația Poisson (ecuația transformării adiabactice); b) legea lui Ohm pentru un circuit  $RLC$  paralel în curent alternativ; c) expresiile pentru intensitatea luminoasă și iluminare, unități de măsură.



2°. Să se deducă: a) expresia efortului unitar exercitat de o bară încălzită și fixată la ambele capete; b) expresia forței Lorentz; c) legătura dintre masă și energie.

3°. Să se trateze subiectul: Relațiile fundamentale ale dioptrului sferic (inclusiv focarele dioptrului sferic).

4°. Un motor termic avînd ca substanță de lucru un gaz ideal funcționează după un ciclu, cum este cel din figura F.B.21. în care transformarea 2 — 3 este izotermă. În starea inițială 1 gazul ideal ocupă volumul  $V_0 = 2 \text{ dm}^3$  la presiunea  $p_0 = 10^5 \text{ N/m}^2$ . Să se determine: a) lucrul mecanic, căldura și variația energiei interne în transformările 1—2, 2—3 și 3—1; b) randamentul ciclului; c) randamentul ciclului Carnot care ar lucra între temperaturile extreme ale ciclului din figură. Se dau: căldura molară la volum constant  $C_V = \frac{5}{2}$ ,  $\ln 2 = 0,693$ .

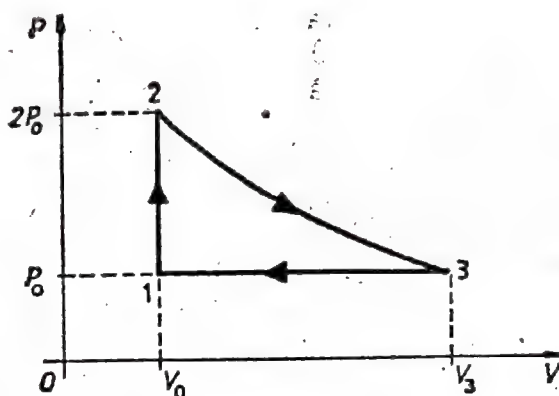


Fig. F.B.21

5°. Un condensator plan, cu aer, care are permitivitatea relativă  $\epsilon_r = 1$ , are distanța dintre armături  $d = 2 \text{ cm}$  și se încarcă sub tensiunea  $U = 20 \text{ kV}$ , după care se deconectează de la sursă. Se introduce între armăturile condensatorului, lipit de una din plăci, o lamă de sticlă plan-paralelă de grosime  $d/2$  cu permitivitatea relativă  $\epsilon_r = 4$ . Tensiunea măsurată la bornele condensatorului devine  $U_1$ . Se scoate lama de sticlă și se umple în întregime jumătate din condensator, tot cu sticlă, astfel că limita de separare aer-sticlă să fie perpendiculară pe armăturile condensatorului. Tensiunea măsurată la bornele condensatorului este acum  $U_2$ . Să se calculeze: a) tensiunile  $U_1$  și  $U_2$ ; b) raportul capacităților  $C_2/C_1$  în cele două cazuri și să se comenteze rezultatul; c) intensitățile cîmpului electric în aer și în sticlă în cele două cazuri.

XIV. 1°. Să se scrie indicînd semnificația fizică a mărimilor: a) expresia vitezei de evaporare pentru vaporizarea la suprafață; b) legile electrolizei; c) legea lui Brewster, semnificație fizică.

2°. Să se demonstreze: a) randamentul motorului Otto; b) legea lui Ohm pentru un circuit  $RLC$  serie în curent alternativ; c) expresia pentru grosimentul unui microscop.

3°. Să se trateze subiectul: Principiile termodinamicii.

4°. Într-un cîmp magnetic omogen de inducție magnetică  $\vec{B}$  se află imobilizată o spirală circulară din cupru, de rază  $r = 12 \text{ cm}$ . Aria secțiunii conductorului este  $S = 1 \text{ mm}^2$ , avînd rezistivitatea electrică  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ . Normala la suprafața spirei este paralelă cu direcția inducției magnetice  $\vec{B}$ . Să se calculeze sarcina totală ce străbate spira circulară la dispariția cîmpului magnetic și valoarea



inducției magnetice  $\vec{B}$ , dacă prin spira circulară imobilă trece un curent cu intensitatea  $I = 2 \text{ A}$ , normala la suprafața spirei fiind perpendiculară pe direcția inducției  $B$ , aflată într-un plan orizontal, atunci un ac magnetic așezat în centrul spirei va fi deviat cu un unghi la  $5^\circ$  față de direcția inducției magnetice  $\vec{B}$ . Se dă: permeabilitatea magnetică a vidului  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$  și se neglijează cîmpul magnetic terestru. Se va lucra în aproximația unghiurilor mici ( $\text{tg } \alpha \simeq \alpha$ ).

5°. Pe o rețea de difracție plană, cade normal un fascicul de lumină paralelă. Rețeaua de difracție este alipită de fața plană a unei lentile plan-convexe în focarul căreia este așezat un ecran, perpendicular pe axa optică. Să se determine: a) ordinul de difracție  $k$  al radiației cu lungimea de undă  $\lambda_1 = 600 \text{ nm}$ , care se suprapune pe ecran, cu ordinul  $k + 1$  al radiației cu lungimea de undă  $\lambda_2 = 400 \text{ nm}$ , la distanța  $x_k = \frac{25}{\sqrt{2}} \text{ cm}$  de franja centrală de difracție; b) constanta rețelei de difracție și distanța focală a lentilei știind că dacă rețeaua se așază la distanța de  $d = 55 \text{ cm}$  de lentilă, imaginea sa va fi de  $n = 10$  ori mai mare decît obiectul; c) ordinul maxim de difracție pentru lungimile de undă  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$ ; d) de cîte ori se suprapune radiația cu lungimea de undă  $\lambda_1$  cu radiația de ordin superior de difracție a radiației cu lungimea de undă  $\lambda_2$ .

## ENUNȚURI

1987

### 1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC

$\alpha$ . PROFILURILE: MECANIC, ELECTRIC, ENERGETIC, MINE, PETROL, METALURGIE, CONSTRUCȚII, GEODEZIE, TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA TEXTILELOR, TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA PRODUSELOR ALIMENTARE, FORESTIER (specializarea INDUSTRIALIZAREA LEMNULUI), GEOLOGIE

**XLVI. 1°.** Se cere: a) să se demonstreze teorema momentului cinetic pentru punctul material; b) să se definească temperatura empirică a unui sistem termodinamic; c) să se trateze subiectul: concentrația purtătorilor de sarcină în semiconductorii cu impurități.

**2°.** Se cere: a) să se trateze subiectul: legea lui Hooke; b) să se prezinte transformarea de fază gaz-lichid, utilizindu-se izotermele Andrews; c) să se definească intensitatea efectivă a curentului electric și să se interpreteze geometric.

**3°.** O particulă este lansată cu viteza inițială  $v_0 = 10 \text{ m/s}$ , sub un unghi  $\alpha$  față de orizontală, în cîmp gravitațional uniform. a) Să se scrie ecuațiile de mișcare ale particulei și să se afle traiectoria acesteia. La ce înălțime maximă ajunge particula pentru  $\alpha = 45^\circ$ ? b) Pentru ce unghi  $\alpha$  de lansare particula cade într-un punct de abscisă  $x = x_1$  de pe axa orizontală  $Ox$ ? Discuție. c) Să se determine în cazul general condiția ca, pentru un anumit  $v_0$ , particula să treacă printr-un punct de coordonate  $x_2$  și  $y_2$  din planul  $xOy$ . Să se afle domeniul de valori  $y_2$  pentru  $x_2 = 4 \text{ m}$  și  $v_0 = 12 \text{ m/s}$ . Se consideră  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

**4°.** O cantitate  $m = 2 \text{ g}$  de gaz ideal, aflată la temperatura inițială  $t_1 = 47^\circ\text{C}$ , se dilată izobar la presiunea  $p = 200 \text{ kN/m}^2$ , volumul final fiind  $V_2 = 2 \text{ l}$ . Să se afle: a) lucrul mecanic efectuat în acest proces și exponentul adiabatic al gazului;



b) căldura absorbită în timpul dilatării izobare și creșterea  $\Delta U$  a energiei interne;  
 c) dacă gazul se destinde după legea  $p = \alpha V$ , unde  $\alpha = 10^8 \text{ N/m}^5$ , de la volumul  $V_1 = 11$  la volumul  $V_2 = 21$ , să se calculeze lucrul mecanic efectuat de gaz, variația energiei interne și capacitatea calorică a gazului în cursul transformării. Se cunosc pentru gazul considerat: masa molară  $\mu = 20 \text{ kg/kmol}$ ; căldura molară la volum constant  $C_V = \frac{3}{2} R$ ; constanta gazelor perfecte  $R = 8310 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$ .

5°. Spațiul dintre armăturile unui condensator plan este umplut cu două straturi de dielectric. Grosimea primului strat este  $d_1 = 0,5 \text{ cm}$ , iar permitivitatea lui relativă este  $\epsilon_{r_1} = 6$ . Al doilea strat dielectric are permitivitatea relativă  $\epsilon_{r_2} = 5$ . Cunoscând capacitatea condensatorului  $C = 100 \text{ pF}$ , suprafața unei armături  $S = 180 \text{ cm}^2$  și sarcina de pe o armătură  $Q = 10^{-7} \text{ C}$ , se cer: a) grosimea stratului al doilea și diferența de potențial dintre armături; b) diferența de potențial dintre fiecare armătură și suprafața de contact a celor două straturi; c) dacă între armăturile condensatorului se introduce în locul straturilor de dielectric o placă metalică de grosime  $d_1$  și se așază simetric în raport cu armăturile, să se calculeze capacitatea condensatorului în acest caz. Variaza energia cîmpului electric din condensator prin această modificare? Se știe:  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ .

XLVII. 1°. Se cere: a) să se formuleze principiile mecanicii newtoniene; b) să se enunțe legile fierberii; c) să se trateze subiectul: clasificarea corpurilor solide în metale, semiconductori și dielectrice, pe baza schemei benzilor energetice.

2°. Se cere: a) să se stabilească expresiile elongației, vitezei și accelerației oscilatorului liniar armonic; b) să se stabilească expresia forței care se dezvoltă în procesul de dilatare liniară a unei bare; c) să se definească permitivitatea electrică și permeabilitatea magnetică a unui mediu.

3°. Pe o scîndură se află un corp cu masa  $m = 1 \text{ kg}$ . Scîndura efectuează oscilații armonice în plan vertical, cu perioada  $T = 1/2 \text{ s}$  și amplitudinea  $A = 2 \text{ cm}$ . Se cer: a) forța de apăsare a corpului pe scîndură și valoarea maximă a acesteia; b) ce amplitudine maximă  $A'$  ar putea să aibă oscilațiile pentru a nu se desprinde de corpul de pe scîndură? c) dacă scîndura oscilează într-un plan orizontal cu perioada  $T = 5 \text{ s}$ , corpul începe să alunece la o amplitudine  $A'' = 0,6 \text{ m}$ . Care este coeficientul de frecare dintre scîndură și corp? Se cunoaște  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

4°. Se formează un sistem fizic din 5 corpuri (subsisteme) de mase  $m_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ , călduri specifice  $c_i$ , temperaturi inițiale  $t_i$ , coeficienți de dilatare volumică  $\gamma_i$  și densități la  $0^\circ\text{C}$ ,  $\rho_{0i}$ . Subsistemele schimbă între ele căldură și se ajunge la o stare de echilibru termic. a) Să se stabilească expresia temperaturii de echilibru. b) Să se particularizeze această expresie pentru cazul unor cantități egale din același lichid  $m_i = 1 \text{ kg}$ , avînd temperaturile corelate prin relația  $t_{i+1} = \eta t_i$ , unde  $\eta = 1,2$  și  $t_1 = 30^\circ\text{C}$ . c) Să se afle expresia variației totale a volumului sistemului, considerat izolat termic față de exterior. d) Să se calculeze în condițiile de la punctul b această variație, dacă se consideră  $\gamma_i = 9 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$  și  $\rho_{0i} = 0,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

5°. Doi condensatori plani,  $C_1$  și  $C_2$ , cu aer, au armăturile de aceeași suprafață,  $S = 1000 \text{ cm}^2$ , situate la distanțele  $d$  și, respectiv,  $d/2$  (cu  $d = 1 \text{ cm}$ ). Condensatorii sînt montați în paralel și încărcăți la o tensiune  $U_0 = 1000 \text{ V}$ . a) Să se calculeze sarcina și energia înmagazinată de fiecare dintre condensatori. b) Dacă  $C_1$  și  $C_2$  rămîn montați în paralel, ansamblul celor doi condensatori fiind izolat de sursa de tensiune, iar una dintre armăturile condensatorului  $C_2$  este mobilă și se deplasează paralel față de poziția inițială pînă la o distanță între armături  $d = 1 \text{ cm}$ , să se calculeze în acest caz capacitățile, sarcinile și diferența de potențial pentru fiecare dintre cei doi condensatori, precum și energia înmagazinată de fiecare dintre ei. Se cunoaște  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ .



**XLVIII. 1°.** Se cere: a) să se trateze subiectul: teorema variației energiei cinetice a punctului material; b) să se stabilească expresia variației densității unui lichid cu temperatura; c) să se stabilească formula conductivității unui semiconductor cu impurități.

**2°.** Se cere: a) să se trateze subiectul: legea lui Pascal; b) să se definească coeficientul de tensiune superficială al lichidelor; c) să se trateze fenomenul de rezonanță pentru circuitul serie *RLC*.

**3°.** Un corp de formă cubică plutește pe suprafața mercurului dintr-un vas cilindric de înălțime  $h_0 = 0,4$  m și secțiune  $S = 6 \cdot 10^{-2}$  m<sup>2</sup>, astfel încât un sfert din volumul său este scufundat. a) Ce fracțiune din volumul corpului se va scufunda în mercur, dacă la suprafața acestuia se toarnă un strat de lichid având densitatea  $\rho_1 = 800$  kg/m<sup>3</sup>, care acoperă la limită corpul? b) Dacă se scoate corpul și se consideră vasul umplut complet numai cu lichidul de densitate  $\rho_1$ , iar la baza vasului se face un orificiu de secțiune  $s = 10^{-4}$  m<sup>2</sup>, să se afle viteza  $v_1$  de coborire a nivelului lichidului în vas și viteza  $v_2$  de ieșire a lichidului prin orificiu și să se particularizeze pentru  $h = h_0/2$ . Se cunosc: densitatea mercurului,  $\rho_{Hg} = 13\,600$  kg/m<sup>3</sup>; accelerația gravitațională,  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

**4°.** Un gaz perfect ocupă în starea *A*, inițială, un volum  $V_A = 1$  l la presiunea  $p_A = 2 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup> și temperatura  $t_A = 27^\circ\text{C}$ . a) Se comprimă izoterm gazul pînă la o presiune de zece ori mai mare decît presiunea inițială, ajungînd în starea *B*; să se calculeze volumul final al gazului, lucrul mecanic și căldura schimbată de sistem cu exteriorul. b) Dacă în continuare gazul se destinde adiabatic pînă la presiunea inițială (starea *C*), să se calculeze volumul gazului, variația de temperatură, lucrul mecanic și variația energiei interne. c) Din starea *C* gazul ajunge în starea *A* printr-o transformare izobară; să se determine variația energiei interne a gazului, lucrul mecanic și căldura schimbată cu exteriorul în această transformare. Se cunoaște căldura molară la volum constant a gazului,  $C_V = 5/2 R$ . (Se va lua  $10^{5/7} = 5,18$ ).

**5°.** Rezistența  $R_1$ , conectată la rețeaua orașului, degajă o cantitate de căldură  $Q$  în 15 minute. Rezistența  $R_2$  degajă, în aceleași condiții, aceeași cantitate de căldură în 30 minute. Se cer: a) timpul în care cele două rezistențe, legate în serie și conectate la rețea, vor degaja împreună cantitatea de căldură  $Q$  pe care o degajă separat fiecare dintre ele; b) timpul în care cele două rezistențe, legate în paralel și conectate la rețea, vor degaja împreună aceeași cantitate  $Q$  de căldură; c) rezistența  $R_1$  este confecționată dintr-un fir cu lungimea  $l = 1$  m, secțiunea  $s = 1$  mm<sup>2</sup>, densitatea  $d = 2,7 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, căldura specifică  $c = 1\,100$  J/kgK, rezistivitatea la  $0^\circ\text{C}$ ,  $\rho_0 = 3 \cdot 10^{-8}$   $\Omega \cdot \text{m}$ ; coeficientul termic al rezistivității  $\alpha = 4 \cdot 10^{-3}$  grad<sup>-1</sup> și temperatura de topire  $650^\circ\text{C}$ . Cunoșcînd temperatura mediului în care se lucrează,  $t = 20^\circ\text{C}$  și pierderile de căldură de 10%, să se afle dacă firul poate suporta un curent  $I = 10$  A, timp de 3 minute, fără să se topească. Se neglijează dilatarea firului.

**XLIX. 1°.** Se cere: a) să se deducă expresia accelerației centripete; b) să se trateze subiectul: vaporizarea la suprafața unui lichid; c) să se trateze subiectul: caracteristica diodei cu vid și legea Langmuir.

**2°.** Se cere: a) să se trateze subiectul: compunerea a două mișcări oscilatorii de aceeași frecvență care se efectuează pe aceeași direcție; b) să se deducă expresia randamentului ciclului Carnot; c) să se demonstreze structura discontinuă a sarcinii electrice utilizîndu-se legile electrolizei.

**3°.** Un pendul conic este format dintr-un mic corp de masă  $m = 0,1$  kg, atîrnat de un fir cu lungimea  $l_1 = 1$  m, ca în figura F.B.22. În timpul rotației firul face unghiul  $\alpha_1 = 45^\circ$  cu verticala. Firul poate fi scurtat printr-un orificiu aflat în suport, astfel încît unghiul format de fir cu verticala devine  $\alpha_2 = 60^\circ$ . Să se afle: a) perioada mișcării înainte de scurtarea firului; b) lungimea  $l_2$  a firului după scurtare;



c) lucrul mecanic efectuat în cursul operației de scurtare, dacă se neglijează frecările. Se consideră  $g = 10 \text{ m/s}^2$  (se va lua  $\sqrt{3} = 1,2$ ).

4°. Un densimetru cilindric (de forma unui tub închis la ambele capete), cu diametrul  $d = 8 \text{ mm}$  și masa  $m = 25 \text{ g}$  plutește în poziție verticală, scufundat parțial într-un lichid cu densitatea la  $0^\circ\text{C}$ ,  $\rho_0 = 10^3 \text{ kg/m}^3$  și coeficientul de dilatare volumică  $\gamma = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ grad}^{-1}$ . a) Să se afle, la temperatura  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , eroarea  $\Delta h$  asupra adâncimii de scufundare care se face prin neglijarea fenomenelor de

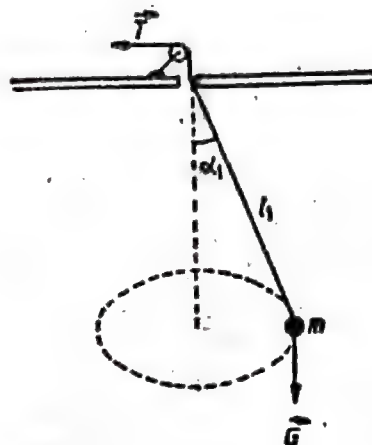


Fig. F.B.22

suprafață, dacă se știe coeficientul de tensiune superficială al lichidului  $\sigma = 0,073 \text{ N/m}$  și că lichidul udă peretele tubului. b) Să se afle cu cât se modifică adâncimea de scufundare, dacă sistemul este încălzit la  $t = 50^\circ\text{C}$ , coeficientul de dilatare liniară al materialului densimetrului fiind  $\alpha = 10^{-5} \text{ grad}^{-1}$  (se neglijează fenomenele de suprafață). c) Dacă densimetrul este ridicat puțin și apoi lăsat liber în lichid, densimetrul va executa o mișcare oscilatorie. Neglijând frecările și fenomenele de suprafață, să se afle perioada oscilațiilor la  $t = 50^\circ\text{C}$ . Se consideră  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

5°. Două sfere mici, conductoare, de aceeași dimensiune, având masele  $m_1 = 20 \text{ g}$  și  $m_2 = 33,3 \text{ g}$  și sarcinile  $Q_1 = 2 \mu\text{C}$  și, respectiv,  $Q_2 = -4 \mu\text{C}$  se află la distanța  $l = 2 \text{ m}$  una de alta. Lăsate liber, sferele se apropie între ele, mișcându-se orizontal și fără frecare. a) Să se afle potențialul și intensitatea câmpului electric, la mijlocul distanței dintre sfere, la momentul inițial. b) Să se afle vitezele sferelor, când acestea se află la distanța  $l/2$  una de alta. c) Se aduce o sferă de aceeași dimensiuni, inițial neîncărcată, în contact cu sfera 1 și apoi cu sfera 2. Se repetă operația de  $n = 3$  ori. Să se afle sarcinile finale de pe cele trei sfere. Se va considera și cazul cu  $n$  foarte mare (sfera a treia este de asemenea conductoare). Se cunoaște:  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ .

L. 1°. Se cere: a) să se stabilească expresia accelerației centripete în mișcarea circulară uniformă; b) să se enunțe principiul al doilea al termodinamicii în formulările lui W. Thomson și R. Clausius; c) să se stabilească ecuația internă a unei triode.

2°. Se cere: a) să se stabilească ecuația undei plane; b) să se enunțe legile fierberii; c) să se definească cîmpul electric și cîmpul magnetic.

3°. La capătul de sus al unui plan inclinat de unghi  $\alpha = 30^\circ$  este fixat un scripete de masă neglijabilă, peste care este trecut un fir inextensibil. La un capăt al firului este legat un corp de masă  $m_1 = 2 \text{ kg}$ , așezat pe planul inclinat, iar la celălalt capăt atîrnă un alt corp de masă  $m_2$ . Coeficientul de frecare dintre corp și plan este  $\mu = 0,1$ . a) Să se determine domeniul de valori ale masei  $m_2$  pentru care sistemul rămîne în repaus, atunci cînd este lăsat liber. b) Să se calculeze forța de

inertie care acționează asupra sistemului pentru  $m_2 = 2,5 \text{ kg}$ . c) Care este tensiunea  $T$  în fir, în cazul în care  $m_2 = 0,5 \text{ kg}$ ? Se consideră  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

4°. O sferă metalică are masa  $m = 20,5 \text{ kg}$  și volumul egal cu  $1,8 \text{ dm}^3$ , la temperatura de  $0^\circ\text{C}$ . Sfera este încălzită pînă cînd volumul ei devine  $1,816 \text{ cm}^3$  și apoi este introdusă într-un vas cu  $4 \text{ kg}$  de apă care are temperatura inițială de  $12^\circ\text{C}$ , ce-și ridică temperatura la  $22^\circ\text{C}$ . Să se afle: a) coeficientul de dilatare liniară a metalului din care este făcută sfera; b) variația densității sferei în cursul răcirii acesteia; c) dependența de temperatură a forței arhimedice exercitată asupra sferei de metal în jurul temperaturii de  $0^\circ\text{C}$ . Se cunosc: căldura specifică a apei,  $c_{\text{apă}} = 4180 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ; căldura specifică a metalului din care e făcută sfera,  $c = 120 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ . Se neglijează capacitatea calorică a vasului.

5°. Un circuit este alcătuit din nouă rezistențe egale, care formează laturile unui hexagon și diagonalele care pleacă din același vîrf, ca în figura F.B.23. Circuitul este alimentat de o baterie de acumulatori cu tensiunea electromotoare

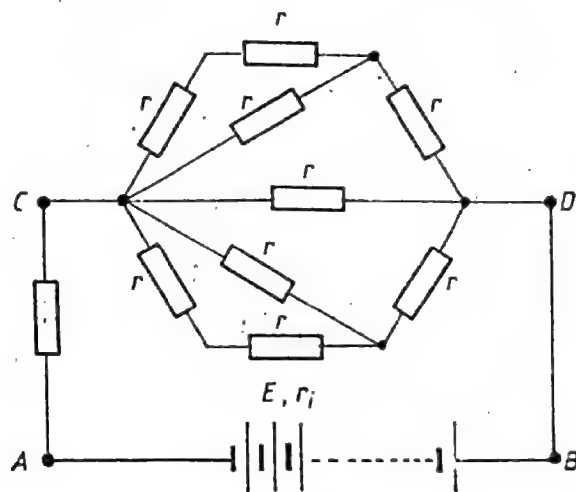


Fig. F.B.23

$E = 110 \text{ V}$  și cu rezistența internă  $r_i = 2 \Omega$ , printr-o rezistență  $R = 7 \Omega$ . Circuitul exterior absoarbe de la sursă o putere de  $968 \text{ W}$ . Se cer: a) curentul debitat de baterie și puterea consumată în rezistențele hexagonului; b) tensiunea la bornele  $CD$  și valoarea rezistențelor care formează hexagonul; c) curenții care trec prin laturile hexagonului.

### β PROFILURILE: CHIMIE, MECANO-CHIMIC

II. 1°. Se cere: a) să se deducă legea lui Jurin; b) să se enunțe legile electrolizei; c) în ce constă anomalia dilatării termice a apei?

2°. Se cere: a) să se deducă sarcina specifică a electronului din devierea în câmpuri electrice și magnetice; b) să se scrie expresia diferenței de potențial electric dintre două puncte, indicînd semnificația mărimilor; c) ce se înțelege prin energie internă?

3°. Un mol de oxigen se găsește la temperatura  $t_1 = 47^\circ\text{C}$ , are densitatea  $\rho = 1,22 \text{ g/dm}^3$  și suferă o destindere izobară, efectuînd lucrul mecanic  $L = 2800 \text{ J}$ . Să se determine: a) presiunea în starea inițială și temperatura în starea finală; b) variația energiei interne în acest proces; c) valorile vitezelor pătratice medii la începutul și la sfîrșitul procesului. Se dau: masa molară a oxigenului  $\mu_{\text{O}_2} = 32 \text{ kg/kmol}$ , exponentul adiabatic  $\gamma = 1,4$ , constanta gazelor ideale  $R = 8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ .

4°. Se consideră circuitul din figura F.B.24, în care  $E$  este o baterie compusă din  $n = 5$  elemente galvanice, fiecare avînd tensiunea electromotoare  $E_i = 2 \text{ V}$  și rezistența internă  $r_i = 0,2 \Omega$ ; rezistoarele au rezistențele  $R_1 = 4 \Omega$ , respectiv



$R_2 = 6 \Omega$ , iar solenoidul are  $N = 200$  spire, diametrul  $D = 4$  cm, rezistența  $R_3 = 3 \Omega$  și inductanța  $L = 2$  m H. Se cer: a) intensitățile curenților prin rezistențele  $R_1$ ,  $R_2$  și  $R_3$ ; b) fluxul magnetic care străbate bobina și inducția magnetică în lungul axei solenoidului; c) căldura degajată în  $R_1$  în timp de o oră.

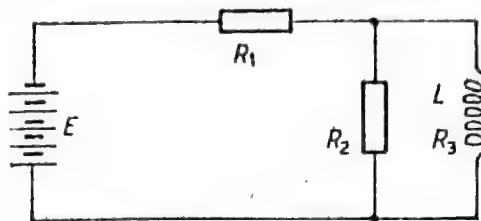


Fig. F.B.24

5°. Un circuit  $RLC$  paralel de curent alternativ este alimentat de o tensiune alternativă cu valoarea efectivă  $U = 60$  V și frecvența  $\nu = 50$  Hz. Știind că inductanța bobinei este  $L = 1$  H, puterea activă în circuit este  $P = 10$  W, iar defazajul dintre curentul total și tensiune este  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ , să se determine: a) valoarea rezistenței  $R$  și a capacității  $C$ ; b) valoarea instantanee a curentului prin bobină; c) inductanța bobinei pentru care curentul total devine minim și valoarea minimă a curentului, frecvența și capacitatea rămânând constante.

III. 1°. Se cere: a) să se enunțe legea lui Coulomb explicând semnificația mărimilor; b) să se deducă expresia vitezei medii pătratice a moleculelor unui gaz ideal; c) suprafața de separare dintre două lichide nemiscibile este întotdeauna plană?

2°. Se cere: a) să se deducă expresia deviației unui electron în câmp electric uniform; b) să se scrie expresia forței Lorentz, indicând semnificațiile mărimilor; c) să se definească coeficientul de tensiune superficială.

3°. O baterie cu tensiunea electromotoare  $E = 9$  V și rezistența internă  $r_i$  este conectată la un circuit alcătuit dintr-o rezistență  $R_1 = 2 \Omega$  și un solenoid cu rezistența  $R_s = 8 \Omega$  format din 100 spire, cu secțiunea  $S = 25$  cm<sup>2</sup> și lungimea  $l = 9,42$  cm. În paralel cu solenoidul se găsește un voltmetru cu sulfat de cupru care are rezistența  $R_v = 4 \Omega$ . Știind că într-un timp de 100 secunde se depun la catodul voltmetrului 32 mg de cupru, se cer: a) intensitatea curentului prin voltmetru; b) valoarea fluxului magnetic care străbate bobina și inductanța bobinei; c) rezistența internă a bateriei. Se dau: echivalentul electrochimic al cuprului  $K = 0,32 \cdot 10^{-6}$  kg/C și permeabilitatea vidului  $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$  N/A<sup>2</sup>.

4°. Un circuit serie de curent alternativ, alimentat de o tensiune  $U = 4,5$  V la frecvența  $\nu = 1$  M Hz este alcătuit dintr-o inductanță  $L$ , o rezistență  $R$  și un condensator variabil  $C$ . Știind că variind condensatorul există două valori  $C_1 = 200$  pF și  $C_2 = 400$  pF pentru care intensitatea curentului are aceeași valoare,  $I = 10$  mA, să se determine: a) valorile inductanței  $L$  și rezistenței  $R$ ; b) puterea consumată în circuit la rezonanță; c) defazajul dintre curent și tensiune corespunzător valorilor  $C_1$ , respectiv  $C_2$ .

5°. Un gaz ideal se găsește în starea definită prin  $p_1 = 10^5$  N/m<sup>2</sup>,  $T_1 = 300$  K,  $V_1 = 1$  dm<sup>3</sup> și suferă un proces ciclic, constind dintr-o comprimare izotermă, cînd presiunea devine  $p_2 = 10 p_1$ , o destindere adiabatică, după care revine în starea inițială printr-o transformare izobară. Să se determine: a) parametrii de stare necunoscuți; b) căldurile implicate în transformările izotermă și izobară; c) randamentul unui ciclu Carnot care ar funcționa între temperaturile extreme ale ciclului dat. Se dau: constanta gazelor perfecte  $R = 8,31$  J/mol K, exponentul adiabatic  $\gamma = 3/2$ ,  $\sqrt[3]{10} = 2,15$ .



**LIII. 1°.** Se cere: a) să se deducă expresia deviației electronului într-un câmp electric uniform; b) să se specifice caracteristicile vaporizării în vid; c) să se scrie expresia capacității echivalente a unei baterii de condensatori în serie, respectiv în paralel.

**2°.** Se cere: a) să se deducă variația cu temperatura a densității unui solid; b) să se enunțe legile lui Kirchhoff; c) să se definească noțiunea de temperatură empirică.

**3°.** O mașină termică funcționează după un ciclu Carnot între temperaturile  $t_1 = 500^\circ\text{C}$  și  $t_2 = 23^\circ\text{C}$  și primește de la sursa caldă într-un minut căldura  $Q_1 = 6 \cdot 10^5 \text{ J}$ . Se cer: a) randamentul mașinii; b) căldura cedată într-un minut sursei reci și puterea mașinii; c) cantitatea de apă cu temperatura inițială  $t_3 = 20^\circ\text{C}$ , care poate fi transformată în vapori la  $t_4 = 100^\circ\text{C}$  folosind o căldură egală cu cea cedată sursei reci în timp de 50 minute. Se dau: căldura specifică a apei  $c_a = 4,18 \text{ kJ/kg K}$  și căldura latentă de vaporizare a apei  $\lambda_v = 2255 \text{ kJ/kg}$ .

**4°.** Un circuit este alcătuit dintr-o sursă cu tensiunea electromotoare  $E = 18 \text{ V}$  și rezistența internă  $r_i = 1 \Omega$  și două rezistoare de rezistențe  $R_1$  și  $R_2$ . Știind că intensitatea curentului este  $I_1 = 2 \text{ A}$ , când rezistoarele sînt montate în serie, și  $I_2 = 7,2 \text{ A}$ , când sînt montate în paralel, să se calculeze: a) valorile rezistențelor  $R_1$  și  $R_2$ ; b) tensiunile la bornele sursei în fiecare caz; c) puterile consumate în rezistoare în cele două cazuri.

**5°.** Un circuit este alcătuit dintr-o bobină cu inductanța  $L = 0,4 \text{ H}$  și rezistența  $R = 17,2 \Omega$  și o sursă de curent continuu care are tensiunea electromotoare  $E = 100 \text{ V}$  și rezistența internă neglijabilă. Bobina conține 500 de spire, are lungimea  $l = 0,1 \text{ m}$  și diametrul  $D = 2 \text{ cm}$ . Să se determine: a) permeabilitatea relativă a miezului bobinei; b) intensitatea curentului prin bobină și fluxul magnetic; c) ce valoare ar trebui să aibă capacitatea unui condensator, care, legat în serie cu bobina, ar lăsa să treacă același curent cînd s-ar aplica tensiunea alternativă  $U = 100 \cdot \sqrt{2} \sin 100 \pi t \text{ (V)}$ . Se dă permeabilitatea vidului  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ .

#### Ț. ÎNVĂȚĂMÎNTUL DE SUBINGINERII (3 ANI) — TOATE PROFILURILE; SPECIALIZĂRILE DIN ÎNVĂȚĂMÎNTUL PEDAGOGIC DE CHIMIE-FIZICĂ (3 ANI) ȘI MATEMATICĂ-FIZICĂ (3 ANI)

**LIV. 1°.** Să se prezinte: a) momentul unei forțe în raport cu un punct; b) pendulul gravitațional; c) fluxul magnetic.

**2°.** Să se scrie, indicînd și semnificația mărimilor care intervin: a) expresia momentului cinetic al punctului material în raport cu un pol; b) ecuația unei plane; c) legile lui Kirchhoff.

**3°.** Un avion cu masa  $m = 8,5 \text{ tone}$  pleacă, din repaus, pe o pistă orizontală de lungime  $l = 800 \text{ m}$ . Presupunînd deplasarea avionului pe pistă uniform accelerată și știind că viteza la sfîrșitul pistei este  $v = 180 \text{ km/h}$ , calculați: a) accelerația și durata deplasării avionului pe pistă; b) mărimea forței de propulsie; c) puterea medie dezvoltată de avion la parcurgerea pistei.

**4°.** Un condensator plan, situat în vid, cu distanța dintre plăci  $d = 3 \text{ mm}$ , are aplicată o tensiune  $U = 100 \text{ V}$ . Să se calculeze: a) viteza cu care un electron, plecat din repaus de pe placa negativă, ajunge la cealaltă; b) timpul de trecere a elec-

tronului de la o placă la alta; c) intensitatea cimpului electric dintre plăcile condensatorului. Se dau masa electronului  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg și sarcina sa  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C.

LV. 1°. Să se prezinte: a) legea lui Hooke; b) compunerea forțelor paralele, de același sens; c) mișcarea unei particule cu sarcina  $q$  într-un cimp magnetic uniform.

2°. Să se scrie, indicînd și semnificația mărimilor care intervin: a) legile de conservare în ciocnirea perfect elastică; b) ecuația lui Bernoulli; c) legile electrolizei.

3°. Un corp cu masa  $m = 0,1$  kg este prins de un resort care are masa neglijabilă și constanta elastică  $k = 10^3$  N/m. Sistemul oscilează armonic în direcția axei orizontale și are la distanța  $x_1 = 3$  cm de poziția de echilibru o viteză  $v_1 = 3\sqrt{3}$  m/s. Să se afle: a) pulsația și amplitudinea oscilațiilor; b) viteza maximă a oscilatorului; c) energia cinetică și energia potențială în momentul în care distanța față de echilibru este  $x_2 = 2$  cm.

4°. La un acumulator cu tensiunea electromotoare  $E = 3$  V și rezistența internă  $r = 1$   $\Omega$  se leagă, în serie, o rezistență  $R_1 = 3$   $\Omega$  și o bobină cu rezistență  $R_2 = 8$   $\Omega$ . Bobina are  $N = 1\,000$  spire, secțiunea  $S = 25 \cdot 10^{-4}$  m<sup>2</sup> și lungimea  $l = 0,314$  m. Să se afle: a) intensitatea curentului; b) inducția cimpului magnetic în interiorul bobinei; c) inductanța bobinei. Se dă permeabilitatea mediului din bobină  $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$  N/A<sup>2</sup>.

LVI. 1°. Să se scrie, indicînd și semnificația mărimilor care intervin: a) legea deformărilor elastice; b) energia mecanică totală a oscilatorului liniar armonic; c) legea lui Ohm pentru circuitul  $RLC$  serie în curent alternativ.

2°. Să se trateze: a) legile reflexiei și refracției; b) forța Lorentz; c) valoarea efectivă a intensității curentului și tensiunii alternative.

3°. Într-un vas cu mercur lichid plutește, cufundat pînă la jumătate, un corp cubic și omogen cu latura  $h = 4$  cm. Densitatea mercurului fiind  $\rho_m = 13\,600$  kg/m<sup>3</sup>, să se afle: a) densitatea corpului; b) fracțiunea din latură cufundată în mercur în cazul în care în vasul cu mercur se toarnă apă pînă cînd corpul este acoperit complet; c) masa apei dislocuite de corp în cazul b. Se dă densitatea apei,  $\rho_a = 10^3$  kg/m<sup>3</sup>.

4°. La bornele unui acumulator cu tensiunea electromotoare  $E = 3$  V și rezistența internă  $1$   $\Omega$  se leagă un rezistor cu rezistența  $R = 32$   $\Omega$ . Să se afle: a) intensitatea curentului prin circuit și căderea de tensiune pe rezistor; b) numărul de kWh disipați în rezistența  $R$  în timp de 8 ore; c) care este valoarea lui  $R$  pentru care puterea disipată în rezistor este maximă?

LVII. 1°. Se cere: a) să se deducă dependența de temperatură și presiune a densității unui gaz; b) să se scrie expresia impedanței și defazajului curent-tensiune pentru un circuit  $RLC$  paralel, de curent alternativ, indicînd semnificația mărimilor; c) cum trebuie deplasată o spiră în cimp magnetic uniform, pentru ca în ea să nu apară curent electric?

2°. Se cere: a) să se deducă expresia capacității echivalente a unei baterii de condensatori în serie, respectiv în paralel; b) să se definească coeficienții calorigici; c) să se enunțe legile referitoare la presiunea maximă a vaporilor saturați.

3°. Se consideră circuitul electric din figura F.B.25, în care sursele  $E_1 = E_3 = 9$  V,  $E_2 = 4,5$  V au rezistențele interioare  $r_1 = r_2 = r_3 = 1$   $\Omega$ , iar  $R = 100$   $\Omega$ . Să se determine: a) curenții prin cele trei ramuri ale circuitului; b) tensiunea dintre punctele A și B; c) puterea disipată în rezistorul  $R$  și puterea totală furnizată de baterii.



4°. O cantitate  $\nu = 0,2$  moli de oxigen, aflată într-o stare inițială (1), caracterizată prin presiunea  $p_1 = 6 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$  și volumul  $V_1 = 3 \text{ dm}^3$ , ajung într-o stare finală (2), aflată pe aceeași izotermă, la presiunea  $p_2 = 3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ . Se cer: a) viteza pătratică medie a moleculelor de gaz; b) lucrul mecanic efectuat cind trecerea din starea (1) în starea (2) se face printr-o transformare izocoră urmată

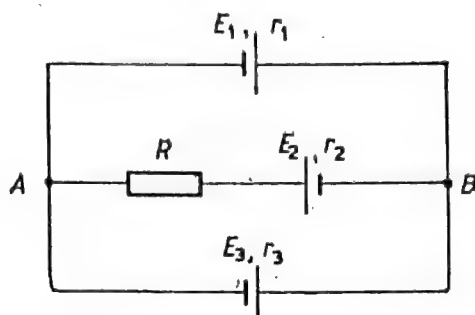


Fig. F.B.25

de una izobară; c) randamentul unui ciclu Carnot care ar funcționa între temperaturile extreme atinse în transformările enunțate. Se dau: constanta gazelor ideale  $R = 8,31 \text{ kJ/kmol K}$  și masa molară a oxigenului  $\mu_{O_2} = 32 \text{ kg/kmol}$ .

## 2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL UNIVERSITAR

### (PROFILUL FIZICĂ)

**LVIII. 1°.** Două baloane de volume egale  $V = 1 \text{ m}^3$ , dar de mase diferite,  $m_1 = 7,2 \text{ kg}$  și  $m_2 = 5,2 \text{ kg}$ , sînt legate între ele printr-un fir lung. Baloanele coboară vertical, în atmosferă liniștită, de la o înălțime foarte mare, întîmpinînd o forță de rezistență care crește cu viteza. a) Aflați tensiunea din fir cînd baloanele ajung în vecinătatea Pămîntului; b) la suprafața Pămîntului primul balon ciocnește perfect elastic acoperișul orizontal al unui bloc; să se determine accelerația acestui balon imediat după ciocnire. Se dau: densitatea aerului  $\rho = 1,3 \text{ kg/m}^3$  și  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

**2°.** Un resort de constantă elastică  $k = 10 \text{ N/m}$  are capătul superior fixat, iar la capătul inferior este prins un corp de masă  $m = 50 \text{ g}$ . Ținem inițial resortul vertical și alungit cu  $y_0 = 10 \text{ cm}$ , apoi îi dăm drumul să oscileze pe verticală. Să se determine: a) amplitudinea oscilațiilor; b) la un moment dat, cînd corpul trece prin poziția extremă inferioară, de corp se lipește un alt corp de masă  $m' = 100 \text{ g}$ , avînd inițial o viteză verticală  $v_0 = 1,2 \text{ m/s}$ ; care va fi noua amplitudine a oscilațiilor? c) căldura disipată prin stingerea oscilațiilor, în cazul punctului b,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

**3°.** Un motor termic funcționează cu un gaz ideal conform ciclului din figura F.B.26, în care  $T_2 = eT_1$ , unde  $e = 2,71$  este baza logaritmilor naturali. Să se calculeze: a) randamentul ciclului; b) randamentul ciclului Carnot care ar lucra între temperaturile extreme ale ciclului.

**4°.** Să se demonstreze: a) teorema momentului cinetic pentru punctul material; b) ecuația Clapeyron-Mendeleev pentru o masă  $m$  de gaz ideal; c) expresia energiei interne a unui gaz ideal monoatomic.

**5°.** Să se răspundă la întrebările: a) cum variază faza mișcării oscilatorii armonice a particulelor mediului de-a lungul unei unde staționare? b) un gaz ideal suferă o transformare ciclică reprezentată în coordonate  $(p, T)$  printr-un cerc; în ce puncte ale ciclului volumul gazului este maxim, respectiv minim? c) un lichid urcă într-un tub capilar la înălțimea  $h$ ; cu cît este egală presiunea în lichid, imediat sub menisc, dacă presiunea atmosferică este  $H$ ?



LIX. 1°. Pe două șine paralele, conductoare, inclinate cu unghiul  $\alpha = 60^\circ$  față de orizontală, formind astfel un plan inclinat, alunecă cu viteza constantă  $v = 10 \text{ m/s}$  o bară conductoare, orizontală, de masă  $m = 50 \text{ g}$  și lungime  $l = 10 \text{ cm}$ , egală cu distanța dintre șine, într-un câmp magnetic de inducție  $B$ , orientată vertical în jos. La bază șinele sunt legate între ele printr-un rezistor de rezistență  $R = 0,1 \Omega$ . Unghiul de frecare dintre șine și bară este  $\varphi = 15^\circ$ . Să se determine:

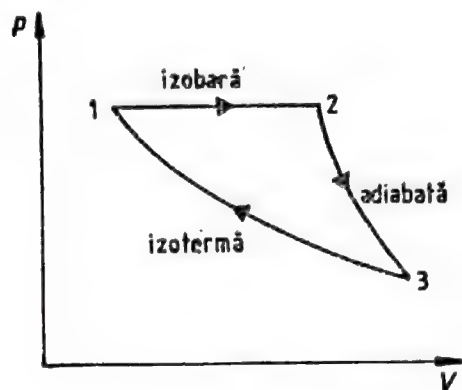


Fig. F.B.25

a) valoarea inducției magnetice  $B$ ; b) puterea calorică totală degajată. Se neglijează rezistența șinelor și a barei, iar  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

2°. Lumina solară directă dă pe un ecran transversal o anumită iluminare. Să se determine: a) în ce raport se schimbă iluminarea ecranului, dacă proiectăm pe ecran imaginea Soarelui cu o lentilă care are distanța focală  $f = 1 \text{ m}$  și diametrul  $D = 40 \text{ mm}$ , dacă unghiul sub care se vede diametrul discului solar este  $\alpha = 30'$ ; b) până la ce diametru trebuie diafragmată lentila pentru a obține aceeași iluminare?

3°. Atomii de hidrogen aflați în stare fundamentală, în repaus, sunt bombardați cu electroni. Când tensiunea de accelerare a electronilor ajunge la  $U_e = 10,2 \text{ V}$ , atomii de hidrogen încep să emită fotoni. Să se determine: a) energia de ionizare (în eV) a atomului de hidrogen; b) tensiunea minimă de accelerare a protonilor incidenți  $U_p$ , pentru ca atomii de hidrogen să înceapă să emită fotoni.

4°. Se cere: a) să se calculeze randamentul cu care un condensator este încărcat de la o baterie; b) să se arate că o lentilă subțire, cu distanța focală  $f_1$ , lipită de o oglindă sferică cu distanța focală  $f_0$ , având aceeași axă principală, reprezintă un sistem echivalent cu o oglindă; calculați distanța focală a oglinzii echivalente; c) să se stabilească relația dintre energia totală și energia potențială a electronului într-un atom hidrogenoid după modelul lui Bohr.

5°. Să se răspundă la întrebările: a) care este schema completă de montaj a unui redresor cu ambele alternanțe cu filtru de netezire  $LC$ ?; b) cât este unghiul dintre raza reflectată și raza refractată în cazul incidenței Brewster?; c) de ce în reacția de anihilare  $e^- + e^+$  apar cel puțin doi fotoni?

### 3. ÎNVĂȚĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC

(PROFILURILE: MEDICINĂ, STOMATOLOGIE)

LX. 1°. Un tub capilar de diametru  $d = 0,5 \text{ mm}$  este introdus într-un lichid care udă pereții vasului. Coeficientul de tensiune superficială a lichidului este  $\sigma = 0,0245 \text{ N/m}$ , înălțimea la care se ridică lichidul în tub este  $h = 2,5 \text{ cm}$ .

a) Care este densitatea lichidului? b) Care este presiunea într-un punct în interiorul capilarului la o înălțime  $H = 1$  cm față de suprafața lichidului din vas? Presiunea atmosferică este  $p_0 = 10^5$  N/m<sup>2</sup>, accelerația gravitațională  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>.

2°. O spiră circulară cu raza  $r = 20$  cm și rezistența  $R = 0,04$   $\Omega$  este plasată într-un câmp magnetic uniform de inducție  $B = 2 \cdot 10^{-3}$  T. Poziția inițială a spirei este paralelă cu liniile de câmp magnetic. Spira se rotește cu un unghi  $\alpha$  în jurul unui diametru perpendicular pe liniile de câmp magnetic. Se cere: a) care este fluxul prin spiră în poziția inițială? ; b) care este sensul curentului indus în bobină? explicați; c) ce sarcină electrică trece prin spiră la rotirea ei cu unghiul  $\alpha = 60^\circ$ ?

3°. Un obiect luminos se găsește la distanța  $d$  de un ecran fix. O lentilă convergentă cu distanța focală  $f$  se poate deplasa între obiectul luminos și ecran. Prin deplasarea ei prindem două imagini clare ale obiectului pe ecran. a) Ce fel de imagini se formează și pentru ce poziții ale lentilei? desenați-le; b) Ce condiții trebuie să îndeplinească  $f$  și  $d$  pentru a putea obține aceste două imagini?; c) Care este raportul dintre mărimile celor două imagini? Aplicație numerică:  $d = 40$  cm,  $f = 10$  cm.

4°. Să se evalueze: a) masa de argint depusă la catod într-o cuvă electrolitică prin care trece un curent cu intensitatea de 1 A, timp de o oră; masa atomică a argintului este 108 și valența 1; b) numărul de molecule dintr-un cm<sup>3</sup> de H<sub>2</sub> în condiții normale de temperatură și presiune. Ce masă are acest volum de gaz? Se dă:  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K; c) ce constantă de rețea are o rețea de difracție cu care prindem, la incidență normală, maximum de difracție de ordinul 2 sub unghiul  $\alpha$ , pentru care  $\sin \alpha = 0,2$ , în lumină monocromatică cu  $\lambda = 500$  nm?

5°. Să se trateze subiectul: transformarea adiabatică a gazului ideal.

LXI. 1°. Se consideră circuitul din figura F.B.27, în care  $E = 120$  V,  $r = 1$   $\Omega$ ,  $R_1 = 19$   $\Omega$ ,  $R_2 = 20$   $\Omega$ . Să se calculeze: a) valorile pe care le poate avea rezistența rezistorului  $X$  pentru ca puterea disipată pe acesta să fie  $P = 80$  W; b) pentru care dintre aceste valori puterea dezvoltată de sursă este mai mare? Calculați valorile puterii sursei.

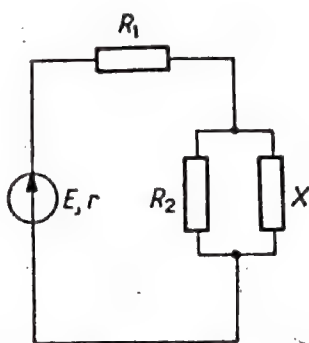


Fig. F.B.27

2°. Un vas de volum  $V = 8$  dm<sup>3</sup> conține o masă  $m = 2,6$  g de gaz ideal, monoatomic, la presiunea  $p = 2 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup>. Vasul este prevăzut cu un tub cu robinet. a) Presupunind că prin deschiderea robinetului are loc destinderea izotermă a gazului cu debitul de masă constant,  $Q = \frac{\Delta m}{\Delta t} = 10^{-3}$  g/s, să se determine variația energiei interne a gazului în intervalul de timp  $\Delta t = 15$  min; b) să se determine temperatura la care are loc procesul. Se dau: constanta gazelor  $R = 8\,310$  J/kmol  $\cdot$  K și masa molară a gazului,  $\mu = 4$  kg/kmol.

3°. O oglindă sferică concavă, așezată în poziție orizontală, este umplută cu apă (un strat subțire de apă). Știind că raza de curbură a oglinzii este  $R = 40 \text{ cm}$  și că indicele de refracție al apei este  $\frac{4}{3}$ , să se determine distanța focală a sistemului apă-oglină.

4°. Să se evalueze: a) Rezistența unei sârme de aluminiu de  $1 \text{ m}$  la  $100^\circ\text{C}$ , dacă secțiunea sa este  $1 \text{ mm}^2$ , rezistivitatea la  $20^\circ\text{C}$  este de  $2,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ , iar coeficientul de temperatură al rezistivității este  $4 \cdot 10^{-3} \text{ grad}^{-1}$ ; b) Lucrul mecanic efectuat de un kmol de gaz ideal într-o transformare adiabatică de la presiunea de  $10^5 \text{ N/m}^2$  între volumele  $V_1 = 10 \text{ cm}^3$  și  $V_2 = 20 \text{ cm}^3$ . Se dă coeficientul transformării adiabatice,  $\gamma = 1,4$ ; c) Grosimea stratului de substanță pentru care intensitatea unui fascicul paralel de lumină care îl străbate scade la jumătate, dacă se știe coeficientul de absorbție,  $k = 0,46 \text{ cm}^{-1}$ . Se dă  $\ln 2 = 0,693$ .

5°. Să se trateze subiectul: dispozitive interferențiale.



I. 1°. a) Pornind de la ecuația spațiului în aruncarea pe verticală, de jos în sus,  $h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ , se determină durata  $t$ , de la aruncarea primului corp, pînă la momentul ciocnirii celor două corpuri, din condiția  $h_1 = v_{01} t - \frac{1}{2} g t^2 = v_{02}(t - \Delta t) - \frac{g}{2} (t - \Delta t)^2 = h_2$ , de unde

$$t = \frac{\Delta t(2v_{02} + g\Delta t)}{2(v_{02} - v_{01} + g\Delta t)} = \frac{7(2 \cdot 100 + 10 \cdot 7)}{2(100 - 65 + 10 \cdot 7)} = 9 \text{ s.}$$

Pe baza ecuației vitezei pentru aruncarea pe verticală, de jos în sus,  $v = v_0 - gt$ , se determină vitezele celor două corpuri în momentul ciocnirii:  $v_1 = 65 - 10 \cdot 9 = -25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  și  $v_2 = 100 - 10(9 - 7) = 80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . În cazul ciocnirii plastice a celor două corpuri, condiția conservării impulsului are expresia  $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_0$ , de unde rezultă că viteza inițială  $v_0$  a corpului format prin ciocnire este

$$v_0 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{-25 \cdot 1 + 80 \cdot 0,5}{1 + 0,5} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b) Conform legii conservării energiei, căldura degajată în ciocnirea plastică a celor două corpuri este

$$Q = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v_0^2}{2} = \frac{1(-25)^2 + 0,5 \cdot 80^2 - 1,5 \cdot 10^2}{2} = 1\,837,5 \text{ J.}$$

Pe baza ecuației calorimetrice,  $Q = (m_1 c_1 + m_2 c_2) \Delta \theta$ , și ținînd seamă că pentru corpurile considerate  $c_1 = c_2 = c$ , obținem

$$\Delta \theta = \frac{Q}{c(m_1 + m_2)} = \frac{1837,5}{1\,500(1 + 0,5)} = 0,817^\circ \text{C.}$$

c) Duratele  $t'_1$  și  $t'_2$  de la lansarea primului corp pînă în momentele cînd acesta se găsește la altitudinea  $h_{\min} = 180 \text{ m}$ , pot fi determinate cu ajutorul ecuației spațiului în aruncarea pe verticală (de jos în sus), obținînd  $v_{01} t' - \frac{1}{2} g t'^2 = h_{\min}$ , de unde

$$t'_{1,2} = \frac{v_{01} \pm \sqrt{v_{01}^2 - 2gh_{\min}}}{g} = \frac{65 \pm \sqrt{65^2 - 2 \cdot 10 \cdot 180}}{10} \rightarrow t'_1 = 4 \text{ s, } t'_2 = 9 \text{ s.}$$

Deci, pentru momente situate după o durată  $t' \in [4; 9] \text{ s}$  de la momentul lansării primului corp, acesta se găsește la o altitudine  $h_1 \geq h_{\min} = 180 \text{ m}$ . Duratele

$(t' - \Delta t)_1$  și  $(t' - \Delta t)_2$  de la lansarea celui de-al doilea corp pînă în momentele cînd acesta se găsește la altitudinea  $h_{\min}$ , pot fi determinate din ecuația analoagă

$$(t' - \Delta t)_{1,2} = \frac{v_{02} \pm \sqrt{v_{02}^2 - 2gh_{\min}}}{g} = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 2 \cdot 10 \cdot 180}}{10},$$

de unde,  $(t' - \Delta t)_1 = 2$  s,  $(t' - \Delta t)_2 = 18$  s.

Prin urmare, pentru momente situate după o durată  $(t' - \Delta t) \in [2; 18]$  s de la lansarea celui de-al doilea corp, acesta se găsește la o altitudine  $h_2 \geq h_{\min} = 80$  m. Deoarece  $(t' - \Delta t)_2 = 18$  s  $>$   $t'_2 = 9$  s, rezultă că duratele minimă  $\Delta t_{\min}$  și, respectiv, maximă  $\Delta t_{\max}$ , de la lansarea primului corp pînă la lansarea celui de-al doilea, care satisfac cerința ca altitudinea  $h$  la care se ciocnesc cele două corpuri să fie  $h \geq h_{\min} = 180$  m, sînt date de expresiile (v. și fig. F.B.28)

$$\Delta t_{\min} = t'_1 - (t' - \Delta t)_1 = 4 - 2 = 2 \text{ s}, \quad \Delta t_{\max} = (t'_2 - (t' - \Delta t)_2) = 9 - 2 = 7 \text{ s}.$$

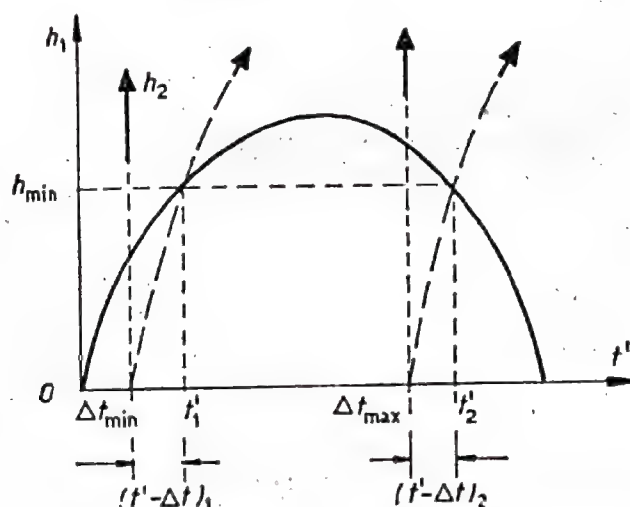


Fig. F.B.28

2°. a) Căldura molară  $C_V$  la volum constant a heliului poate fi determinată în funcție de cea la presiune constantă,  $C_p$ , din relația lui Robert Meyer,  $C_V = C_p - R$ , obținind  $C_V = \frac{5R}{2} - R = \frac{3R}{2}$ . Deci, pentru heliu, exponentul adiabatic  $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$  are valoarea  $\gamma = \frac{5R}{2} : \frac{3R}{2} = \frac{5}{3}$ .

Deoarece heliul (presupus gaz perfect) trece din starea inițială 1 în starea 2 printr-o comprimare adiabatică, avem  $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ . Întrucît gazul trece apoi din starea 2 în starea 3 printr-o destindere izotermă ( $T_2 = T_3$ ), rezultă că temperaturile termodinamice corespunzătoare stărilor 2 și 3 pot fi determinate din relația

$$T_3 = T_2 = T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 280 \cdot 8^{5/3-1} = 280 \cdot 4 = 1120 \text{ K}.$$

Pe baza ecuației de stare a gazelor perfecte,  $pV = \nu RT$ , găsim că  $V_3 = \frac{p_1 V_1}{T_1} \cdot \frac{T_3}{p_3}$ , de unde

$$V_3 = \frac{p_1 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{280} \cdot \frac{1120}{1,5 p_1} = 5,33 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 (= 5,33 \text{ l}).$$

b) Deoarece  $V_1 = 2\text{ l} < V_3 \approx 5,33\text{ l}$ , în procesul  $3 \rightarrow 1$  gazul primește, sub formă de lucru mecanic, o cantitate de energie egală numeric cu aria cuprinsă între segmentul de dreaptă care unește punctele reprezentative ale stărilor 3 și 1 (v. și fig. F.B.29) și axa volumelor ( $V$ ),

$$L_{\text{primit } 31} = \frac{p_1 + p_3}{2} (V_3 - V_1) = \frac{2,5 p_1}{2} (V_3 - V_1) = \frac{2,5 \cdot 10^5}{2} (5,33 - 2) \cdot 10^{-3} = 416,7\text{ J}.$$

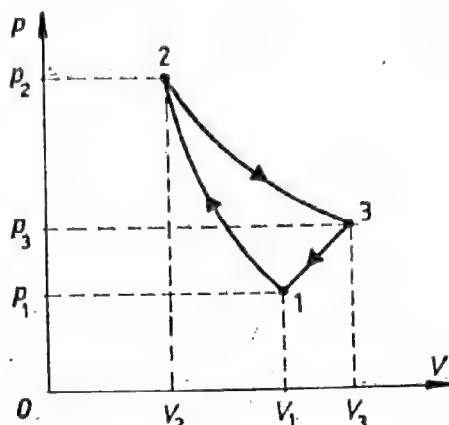


Fig. F.B.29

Primul principiu al termodinamicii poate fi scris — pentru procesul  $3 \rightarrow 1$  — în formele (echivalente)

$$\begin{aligned} Q_{31} &= \frac{3}{2} \nu R (T_1 - T_3) - L_{\text{primit } 31} = \frac{3}{2} p_1 V_1 \left(1 - \frac{T_3}{T_1}\right) - L_{\text{primit } 31} = \\ &= \frac{3}{2} \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} (1 - 4) - 416,7\text{ J} = -1\,316,7\text{ J}, \end{aligned}$$

adică — în procesul  $3 \rightarrow 1$  — cantitatea considerată de heliu cedează o căldură de circa  $1\,316,7\text{ J}$ .

c) În cursul destinderii izoterme  $2 \rightarrow 3$  gazul primește căldura  $Q_{23}$ , egală cu lucrul mecanic  $L_{23}$  efectuat în acest proces ( $\Delta U_{23} = 0$ ), ambele schimburi de energie putînd fi calculate pe baza relației

$$\begin{aligned} Q_{23} &= L_{23} \approx 2,3 \nu R T_2 \log \left( \frac{V_3}{V_2} \right) = 2,3 p_1 V_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} \log \left( \frac{V_3}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} \right) = \\ &= 2,3 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \log \left( \frac{8}{3} \cdot 8 \right) = 1\,840 (6 \log 2 - \log 3) \approx 2\,445,4\text{ J}. \end{aligned}$$

Deoarece, pentru întreg ciclul reversibil considerat, variația  $\Delta U_{1231}$  a energiei interne este nulă, conform principiului întâi al termodinamicii lucrul mecanic  $L_{\text{ef}}$ , efectuat la parcurgerea ciclului, este  $L_{\text{ef}} = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31}$ . Avînd în vedere faptul că, în cadrul procesului ciclic reversibil considerat, gazul primește căldură numai în cursul destinderii izoterme  $2 \rightarrow 3$ , iar în cursul comprimării adiabatică  $Q_{12} = 0$ , randamentul motorului termic, care ar funcționa după ciclul reversibil considerat, (1231), este

$$\eta = \frac{L_{\text{ef}}}{Q_{\text{primit}}} = \frac{Q_{23} + Q_{31}}{Q_{23}} = \frac{2\,445,4 - 1\,316,7}{2\,445,4} = 0,461 = 46,1\%.$$

3°. a) Fie  $Q'_1$  și  $Q'_2$  sarcinile electrice rămase pe armăturile celor două condensatoare, legate prin solenoid, după stabilirea echilibrului electrostatic. Întrucît echilibrul electrostatic se stabilește prin egalizarea potențialelor celor două armături, avem  $\frac{Q'_1}{C_1} = U'_1 = U'_2 = \frac{Q'_2}{C_2} = \frac{Q'_1 + Q'_2}{C_1 + C_2}$ . Pe de altă parte, datorită conservării



sarcinii electrice, avem  $Q'_1 + Q'_2 = q_1 + q_2$ , deci tensiunea electrică  $U'$  dintre armăturile fiecărui condensator, după stabilirea echilibrului electrostatic, este

$$U' = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} = \frac{(5 - 3) \cdot 10^{-3}}{(100 + 250) \cdot 10^{-6}} \approx 5,71 \text{ V.}$$

b) Întrucît și celelalte armături ale celor două condensatoare sînt unite între ele (prin firul legat la pămînt), după conectarea sursei de tensiune la bornele solenoidului, sursa va alimenta un circuit derivație, în care ramura capacitivă include condensatoarele  $C_1$  și  $C_2$  înseriate (v. fig. F.B.30).

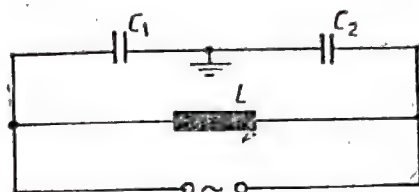


Fig. F.B.30

Capacitatea  $C$ , echivalentă celor două condensatoare înseriate, poate fi determinată cu relația  $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ .

Pe baza formulei Thompson a frecvenței de rezonanță  $\nu_0$  a circuitului  $LC$  derivație considerat,  $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ , rezultă că inductanța solenoidului este

$$L = \frac{1}{C \cdot 4\pi^2 \nu_0^2} = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{1}{4\pi^2 \nu_0^2} = \left( \frac{1}{100 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{250 \cdot 10^{-6}} \right) \frac{1}{(2\pi \cdot 159)^2} \approx 0,014 \text{ H.}$$

Admitanța circuitului  $LC$  derivație este

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2} = \left| C\omega - \frac{1}{L\omega} \right|,$$

deci, ținînd seamă de relația dintre valoarea efectivă  $U_{ef}$  și amplitudinea  $U_m$  a tensiunii la bornele sursei,  $U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ , obținem intensitatea efectivă  $I_{ef}$  a curentului debitat,

$$\begin{aligned} I_{ef} &= \frac{U_{ef}}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \left| C\omega - \frac{1}{L\omega} \right| = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \left| \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \omega - \frac{1}{L\omega} \right| = \\ &= \frac{14,1}{\sqrt{2}} \left| \frac{100 \cdot 10^{-6} \cdot 250 \cdot 10^{-6}}{(100 + 250) \cdot 10^{-6}} \cdot 3140 - \frac{1}{0,014 \cdot 3140} \right| \approx 2,016 \text{ A.} \end{aligned}$$

c) Valoarea maximă a vitezei de transport a electronilor liberi în conductorul solenoidului corespunde amplitudinii  $I_{Lm} = \frac{U_m}{L\omega}$  a intensității curentului prin solenoid, fiind dată — conform relațiilor de bază ale electrocineticii — de expresia

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \frac{I_{Lm}}{neA} = \frac{U_m}{L\omega} \cdot \frac{1}{neA} = \frac{14,1}{0,014 \cdot 3140 \cdot 10^{29} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}} \approx \\ &\approx 3,97 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

4°. a) Pornind de la formula lui Galilei a mișcării rectilinii uniform variate,  $v_2^2 - v_1^2 = 2ad$ , și ținînd seamă că, în conformitate cu legea a doua a dinamicii,  $a = \frac{F}{m}$ , găsim că  $Fd = \frac{m}{2} \cdot v_2^2 - \frac{m}{2} \cdot v_1^2$ . Întrucît produsul  $Fd$  reprezintă lucrul

meccanică  $L$  efectuată în cursul deplasării  $d$ , iar  $\frac{mv_1^2}{2} = E_{c1}$  și  $\frac{mv_2^2}{2} = E_{c2}$  sunt energiile cinetice inițială și, respectiv, finală ale punctului material considerat, rezultă că  $L = E_{c2} - E_{c1}$ , adică variația energiei cinetice a unui punct material care se deplasează în raport cu un sistem de referință inerțial este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă, care acționează asupra punctului material în timpul acestei variații.

b) Ținând seamă că numărul  $\nu$  al kilomolilor unei anumite cantități de substanță poate fi exprimat prin numărul  $N$  al moleculelor respectivei cantități, și numărul Avogadro  $N_A$  prin relația  $\nu = \frac{N}{N_A}$ , ecuația termică de stare a gazelor perfecte:  $pV = \nu RT$  poate fi transcrisă în forma:  $p = \frac{N}{V} \cdot \frac{R}{N_A} \cdot T = n \cdot k \cdot T$ , unde  $n = \frac{N}{V}$  este concentrația moleculelor gazului (în unitatea de volum), iar  $k = \frac{R}{N_A}$  este constanta lui Boltzmann. Comparând ultima expresie de mai sus a ecuației termice de stare a gazelor perfecte cu formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare a gazelor,  $p = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m \overline{v^2}$ , rezultă că energia cinetică medie a fiecărei molecule a gazului este  $\frac{m \overline{v^2}}{2} = \frac{3kT}{2}$ . Rezultă că viteza pătratică medie (viteza termică) a moleculelor unui gaz perfect este dată de expresiile echivalente

$$v_T = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3N_A kT}{N_A m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

unde  $\mu$  este masa (kilo)molară a gazului.

c) Ținând seamă că fluxul unui câmp magnetic uniform de inducție  $\vec{B}$  printr-o suprafață de arie  $A$  și normală  $\vec{n}$ , care formează unghiul  $\theta$  cu inducția  $\vec{B}$  este  $\Phi = B \cdot A \cdot \cos \theta$ , putem transcrie legea Faraday a inducției electromagnetice,

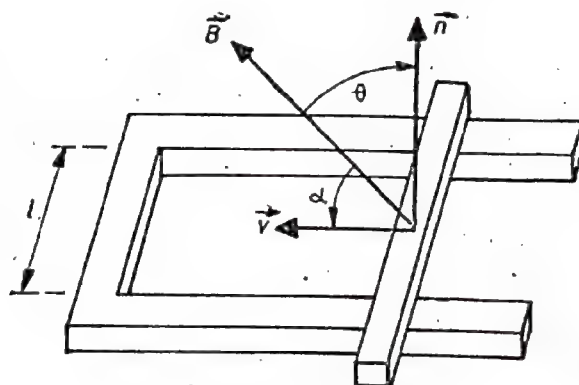


Fig. F.B.31

$\mathcal{E} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ , pentru cazul particular al unui circuit care delimitează o arie  $A$ , variabilă în timp, care se află într-un câmp magnetic de inducție constantă (în timp), în forma:  $\mathcal{E} = - B \cdot \cos \theta \cdot \frac{\Delta A}{\Delta t}$ . În cazul în care variația ariei delimitate de circuitul considerat este datorată deplasării cu viteza  $\vec{v}$  (paralelă cu planul format de vectorii  $\vec{n}$  și  $\vec{B}$ ) a unui conductor de lungime  $l$  (v. fig. F.B.31), avem  $\Delta A = - l \cdot v \Delta t$ , rezultând că  $\mathcal{E} = B \cdot l \cdot v \cdot \sin \alpha$  (deoarece vectorii  $\vec{n}$ ,  $\vec{B}$  și  $\vec{v}$  sînt situați în același plan, iar vectorii  $\vec{n}$  și  $\vec{v}$  sînt perpendiculari, avem  $\cos \theta = \sin \alpha$ ,

unde  $\alpha$  este unghiul format de viteza  $\vec{v}$  a deplasării conductorului cu inducția  $\vec{B}$  a cîmpului magnetic uniform).

Ținînd seamă de faptul că sarcina electronilor este negativă, direcția și sensul forței Lorentz  $\vec{F}_{-e}$  care acționează asupra acestora la deplasarea conductorului într-un cîmp magnetic poate fi determinată cu ajutorul regulii mîinii stîngi, ca în figura F.B.32. Deoarece sensul deplasării electronilor coincide (deoarece aceștia au sarcini electrice negative) cu sensul tensiunii electromotoare induse în conductorul mobil, acest sens poate fi stabilit cu ajutorul regulii mîinii drepte: se așază mîna dreaptă în lungul conductorului, astfel încît vectorul  $\vec{B}$  să iasă din palmă, iar degetul mare să fie în sensul vitezei de deplasare a conductorului; celelalte patru degete vor indica sensul tensiunii electromotoare induse în conductor (dacă mîna dreaptă se așază astfel încît  $\vec{B}$  să intre în palmă, celelalte 4 degete indică sensul (tehnic al) curentului indus în conductor).

Desigur, sensurile forței  $\vec{F}_{+e}$  și tensiunii electromotoare induse pot fi determinate și pornind de la expresia vectorială a forței Lorentz,  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  și a regulii „burghiului drept”: „Se așază burghiul după direcția perpendicularei pe planul format de vectorii  $\vec{v}$  și  $\vec{B}$ , după care se rotește burghiul în sensul suprapunerii — pe drumul cel mai scurt — a vectorului  $\vec{v}$  peste vectorul  $\vec{B}$ . Sensul înaintării burghiului ne dă sensul produsului vectorial  $\vec{v} \times \vec{B}$  (fig. F.B.33).

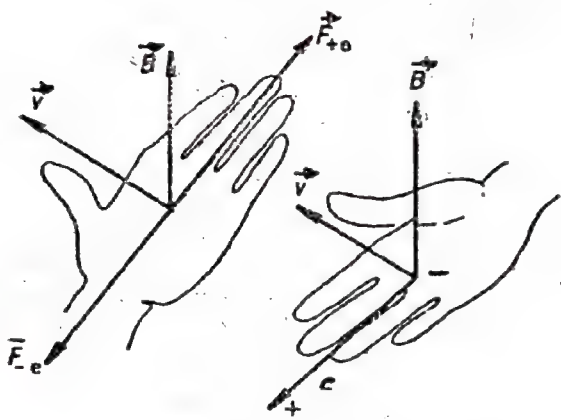


Fig. F.B.32

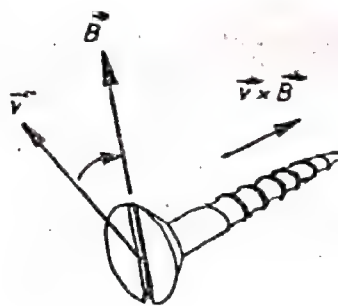


Fig. F.B.33

5°. a)  $p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z = \text{const}$ , unde  $p$  este presiunea statică,  $\frac{1}{2} \rho v^2$  este presiunea dinamică, iar  $\rho g z$  este presiunea de poziție, datorată energiei potențiale.

b)  $\rho = \frac{\rho_0}{1 + \gamma \Delta T}$ , unde  $\rho$  este densitatea sistemului (corpului solid) la temperatura  $T$ ,  $\rho_0$  este densitatea la temperatura  $T_0$  (de regulă,  $t_0 = 0^\circ \text{C}$ ),  $\gamma$  este coeficientul de dilatare termică în volum, iar  $\Delta T = T - T_0$ .

c)  $L = \mu \frac{N^2 S}{l}$ , unde  $\mu$  este permeabilitatea magnetică a miezului bobinei,  $N$  este numărul spirelor bobinei,  $S$  este aria secțiunii bobinei, iar  $l$  este lungimea acesteia.

II. 1°. a) Pornind de la ecuația spațiului în mișcarea uniform-accelerată fără viteză inițială,  $S = \frac{at^2}{2}$ , obținem expresia distanței  $d$  parcurse în intervalul  $[t_1, t_2]$  de la pornire,

$$d = \frac{a}{2} (t_2^2 - t_1^2).$$



Rezultă că accelerația mișcării corpului poate fi calculată pe baza expresiei  $a = \frac{2d}{t_2^2 - t_1^2}$ ; introducând valorile numerice indicate în enunț, găsim  $a = \frac{2 \cdot 3}{2^2 - 1^2} = 2 \frac{m}{s^2}$ .

b) Componentele paralele ( $F_t, G_t$ ), respectiv perpendiculare ( $F_n, G_n$ ) pe planul inclinat ale forței  $\vec{F}$ , respectiv greutății  $\vec{G}$  a corpului, sînt date de expresiile (v. fig. F.B.34):  $F_t = F \cos \theta$ ,  $G_t = G \sin \theta$ ,  $F_n = F \cdot \sin \theta$ ,  $G_n = G \cdot \cos \theta$ . Deoarece forța de apăsare exercitată asupra planului inclinat este  $N = F_n + G_n = F \sin \theta + G \cos \theta$ , forța de frecare între corp și planul inclinat este dată de expresia

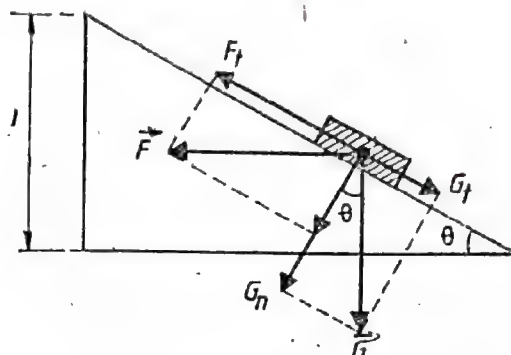


Fig. F.B.34

$F_{tr} = \mu N = \mu(F \sin \theta + G \cos \theta)$ . Forța activă care acționează asupra corpului (la urcarea acestuia pe planul inclinat) fiind  $F_{act} = F_t - G_t = F \cos \theta - G \sin \theta$ , legea a doua a dinamicii capătă — pentru urcarea corpului considerat pe planul inclinat — expresia

$$ma = F_{act} - F_{tr} = F \cos \theta - G \sin \theta - \mu(F \sin \theta + G \cos \theta).$$

Deoarece între greutatea  $G$  și masa  $m$  a corpului există relația  $G = m \cdot g$ , din relația precedentă obținem

$$\mu = \frac{F \cos \theta - mg \sin \theta - ma}{mg \cos \theta + F \sin \theta} = \frac{100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot 2}{10 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 100 \cdot \frac{1}{2}} \simeq 0,1215.$$

c) Fie  $l = \frac{h}{\sin \theta}$  lungimea planului inclinat de înălțime  $h$ . Lucrul mecanic efectuat de forța  $\vec{F}$  în cursul urcării corpului pe planul inclinat este  $L = F_t \cdot l = F \cos \theta \cdot \frac{h}{\sin \theta} = 100 \cdot \sqrt{3} \cdot 10 \simeq 1732 \text{ J}$ .

2°. a) Ținînd seamă că între numărul de kilomoli  $\nu$  și masa  $m$  a unei anumite cantități de substanță există relația:  $\nu = \frac{m}{\mu}$ , ecuația termică de stare a gazelor perfecte,  $pV = \nu RT$ , permite determinarea masei unei cantități de gaz perfect pe baza relației  $m = \mu \cdot \frac{pV}{RT}$ . În cazul în care două cantități ale aceluiași gaz ocupă — la o aceeași temperatură  $T$  și la o aceeași presiune  $p$  — volumele  $V_1$  și  $V_2$ , avem

$$m_1 + m_2 = \frac{\mu p}{RT} (V_1 + V_2) = \frac{4 \cdot 1500(10^{-3} + 3 \cdot 10^{-3})}{8310 \cdot 300} \simeq 9,62 \cdot 10^{-6} \text{ kg}.$$

b) Fie  $p'$  presiunea în cele 2 vase, după încălzirea gazului din primul vas până la temperatura  $T'$ , iar  $m'_1, m'_2$  — masele cantităților de gaz aflate, în cele 2 vase după încălzirea considerată. Deoarece masele  $m'_1, m'_2$  satisfac relațiile:

$$m'_1 = \frac{\mu p'}{RT'} \cdot V_1, \quad m'_2 = \frac{\mu p'}{RT'} \cdot V_2, \quad m'_1 + m'_2 = m_1 + m_2,$$

avem:

$$\frac{\mu p'}{R} \left( \frac{V_1}{T'} + \frac{V_2}{T} \right) = \frac{\mu p}{RT} (V_1 + V_2),$$

de unde

$$p' = \frac{p(V_1 + V_2)}{V_2 + \frac{V_1 \cdot T}{T'}} = \frac{1\,500 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3} + 10^{-3} \cdot \frac{4}{2}} \approx 1\,714 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

c) Deoarece viteza pătratică medie a moleculelor unui gaz perfect aflat la temperatura  $T$  este dată de expresia  $v_T = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ , raportul vitezelor termice ale moleculelor gazului din cele două vase, în starea finală, este:

$$\frac{v_{T1}}{v_{T2}} = \sqrt{\frac{T'}{T}} = \sqrt{2} (\approx 1,4142).$$

3°. a) Tensiunea  $\bar{T}$  din fiecare fir este rezultanta greutatei  $\bar{G}$  și forței coulombiene  $\bar{F}$  care acționează asupra fiecărei sfere,  $\bar{T} = \bar{G} + \bar{F}$ . Deoarece forțele  $\bar{F}$  și  $\bar{G}$  acționează după direcții perpendiculare între ele (v. fig. F.B.35), avem  $F = \sqrt{T^2 - G^2} = \sqrt{36 \cdot 10^{-8} - 9 \cdot 10^{-8}} = \sqrt{27} \cdot 10^{-4} \text{ N}$ . Unghiul  $\theta$  format de firele de suspensie cu verticala în poziția de echilibru este determinat de relația:  $\sin \theta = \frac{F}{T} = \frac{\sqrt{27}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , rezultând că distanța  $r$  dintre cele două sfere, în poziția de echilibru, este  $r = d + 2L \cdot \sin \theta = 2 + 2 \cdot 11 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 21,05 \text{ cm}$ . Din legea lui Coulomb, aplicată aici,  $F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ , reiese că  $Q = r \sqrt{4\pi\epsilon_0 F} \approx 5,05 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ .

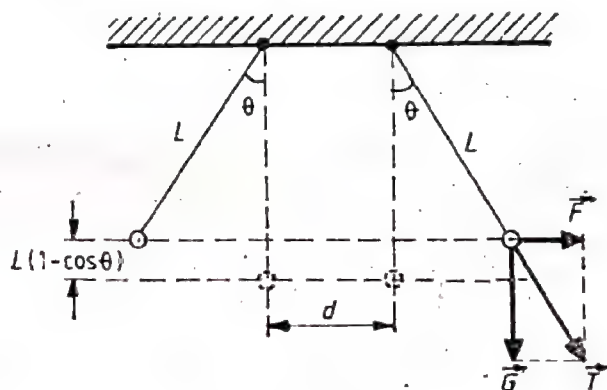


Fig. F.B.35

b) Variația energiei potențiale gravitaționale a celor două sfere între poziția inițială (sfere aflate la distanța  $d$ ) și cea finală este  $\Delta W_{pg} = 2mgL(1 - \cos \theta) = 2 \cdot 3 \cdot 10^{-5} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 10^{-2}(1 - 0,5) = 3,3 \cdot 10^{-5} \text{ J}$ . Variația energiei potențiale coulombiene între starea inițială (sfere încărcate, aflate la distanța  $d$ ) și cea finală este  $\Delta W_{pc} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d} \right) = \frac{q^2(d - r)}{4\pi\epsilon_0 r \cdot d} = \frac{F \cdot r(d - r)}{d} = \frac{\sqrt{27} \cdot 10^{-4} \cdot 21(-19 \cdot 10^{-2})}{2} \approx -103,92 \cdot 10^{-5} \text{ J}$ . Lucrul mecanic  $L$  efectuat pentru aducerea sferelor în

poziția finală poate fi dedus (neglijând frecările) din legea conservării energiei,  $L = -\Delta W_{pg} - \Delta W_{pc} \simeq 100,62 \cdot 10^{-5} \text{ J}$ .

c) Fie  $q$  sarcina electrică aflată pe fiecare dintre cele două sfere identice (1 și 2) considerate. La aducerea în contact cu prima dintre aceste sfere a unei a treia sfere, identică cu precedentă, inițial neîncărcată electric, se atinge un nou echilibru electrostatic (între sferele 1 și 3) la potențialul  $V = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_3}{C_3}$ , unde  $Q_1$  și  $Q_3$  sînt sarcinile pe cele 2 sfere la echilibru electrostatic. Deoarece  $Q_1 + Q_3 = q$ , iar  $C_1 = C_3$ , rezultă că  $Q_1 = Q_3 = \frac{q}{2}$ , de unde  $\frac{Q_1}{q} = \frac{1}{2}$ . La aducere în contact, în continuare, a sferei 3 cu sfera 2, avem  $V' = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3}$ , de unde  $Q_2' = Q_3$  (deoarece  $C_2 = C_3$ ); în plus, din condiția  $Q_3 + q = \frac{q}{2} + q = Q_2' + Q_3' = 2Q_2'$ , rezultă că  $Q_2' = \frac{3q}{4}$ , deci  $\frac{Q_2'}{q} = \frac{3}{4}$ .

4°. a) Variația  $\Delta \bar{v}$  a vitezei unui corp, aflat într-o mișcare circulară, uniformă, într-un interval de timp  $\Delta t$  mult mai mic decît perioada  $T$  a mișcării, poate fi calculată considerînd-o ca bază a unui triunghi isoscel de laturi egale  $v$ , cu unghiul la vîrf  $\Delta \alpha = \omega \Delta t$  neglijabil de mic în raport cu 1 radian (fig. F.B.36).

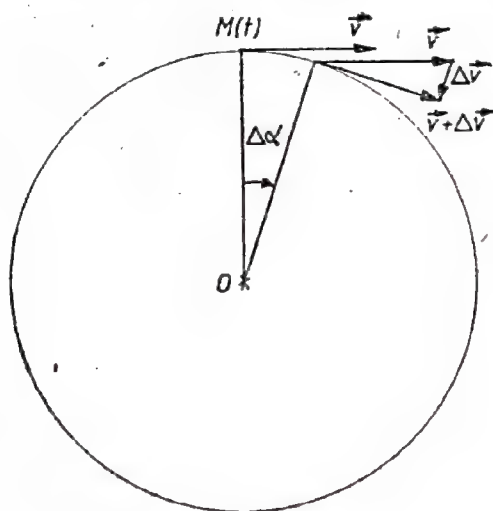


Fig. F.B.36

Rezultă  $|\Delta \bar{v}| = v \cdot \Delta \alpha = v \cdot \omega \Delta t$ .

Deoarece  $\Delta \bar{v}$  are direcția razei și sensul spre centrul mișcării de rotație uniformă, accelerația centripetă are direcția radială, sensul spre centrul mișcării de rotație și valoarea dată de expresia  $a_n = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v \cdot \omega = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$ , unde  $R$  este raza traiectoriei circulare.

b) În conformitate cu legea dilatării liniare, alungirea unei bare — avînd la temperatura de referință lungimea  $l_0$  — în urma creșterii temperaturii cu  $\Delta T$ , este  $\Delta l = l_0 \cdot \alpha \Delta T$ . În conformitate cu legea lui Hooke, efortul unitar corespunzător alungirii cu  $\Delta l$  este  $\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$ , deci efortul unitar exercitat de bara încălzită și fixată la capete este dat de expresia  $\sigma = \frac{F}{S} = E \cdot \frac{l_0 \alpha \Delta T}{l_0} = E \cdot \alpha \cdot \Delta T$ .

c) Intensitatea curentului electric care străbate un conductor este dată de expresiile echivalente  $I = \frac{Q}{t} = \frac{n \cdot e}{t}$ , unde  $n$  este numărul electronilor care traversează secțiunea conductorului (metalic) considerat în durata  $t$ . Forța care acțio-



nează asupra unui conductor rectiliniu, de lungime  $l$ , străbătut de un curent electric de intensitate  $I$  și supus acțiunii unui câmp magnetic de inducție  $B$ , care formează unghiul  $\theta$  cu direcția conductorului, este  $F = BIl \cdot \sin \theta$ . Dacă  $l = v \cdot t$ , unde  $v$  este viteza medie a mișcării ordonate a electronilor, atunci — la un moment dat — în conductorul de lungime  $l$  se vor găsi atîția electroni liberi cîți străbat secțiunea conductorului în durata  $t$ , adică  $n$  electroni liberi; forța (Lorentz) care va acționa asupra fiecărui electron (liber) în mișcare cu viteza  $\bar{v}$ , într-un câmp magnetic a cărui inducție  $\vec{B}$  formează unghiul  $\theta$  cu viteza, rezultă ca fiind  $f_e = \frac{F}{n} = \frac{ne}{t} \cdot \frac{Bl}{n} \cdot \sin \theta = e \cdot \frac{l}{t} \cdot B \cdot \sin \theta = e \cdot v \cdot B \cdot \sin \theta$ .

5°. a) Principiul I: un punct material își menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă atîta timp cît asupra sa nu acționează alte corpuri care să-i schimbe această stare de mișcare. Principiul II: vectorul forță este proporțional cu produsul dintre masă și vectorul accelerație,  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ . Principiul III: fiecărei acțiuni i se opune întotdeauna o reacțiune egală în modul și de sens opus, sau acțiunile reciproce a două corpuri sînt întotdeauna egale ca mărime și dirijate în sensuri opuse.

b) Formularea Thompson: într-o transformare ciclică, monotermă, sistemul nu poate ceda lucru mecanic în exterior. Dacă transformarea ciclică monotermă este și ireversibilă, atunci sistemul primește lucru mecanic din exterior. Formularea Clausius: nu este posibilă o transformare care să aibă ca rezultat trecerea de la sine a căldurii de la un corp cu o temperatură dată la un corp cu temperatura mai ridicată.

c) Legea I: suma algebrică a intensităților curenților electrici care se întîlnesc într-un nod electric este egală cu zero:  $\sum_{i=1}^n I_i = 0$ . Legea a II-a: suma algebrică a tensiunilor electromotoare este egală cu suma algebrică a produselor dintre intensitatea curentului și rezistența totală pentru fiecare ramură:

$$\sum E_i = \sum_{j=1}^m I_j R_j.$$

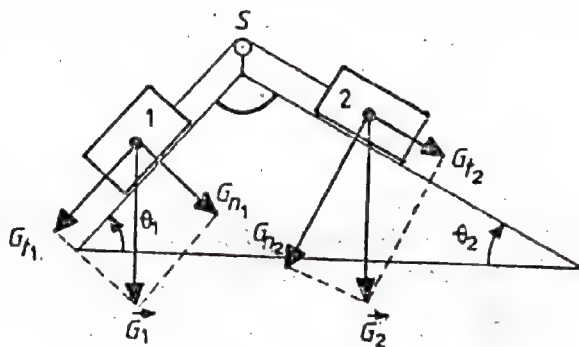


Fig. F.B.37

III 1°. a) Notăm cu  $\theta_1$  și  $\theta_2$  unghiurile formate de planele înclinate pe care se deplasează corpurile 1, respectiv 2, cu planul orizontal. Componentele tangențiale (în lungul planelor înclinate pe care se deplasează respectivele corpuri) ale greutăților celor două corpuri sînt:  $G_{t1} = G_1 \sin \theta_1 = m_1 g \sin \theta_1$ ,  $G_{t2} = m_2 g \sin \theta_2$  (v. și fig. F.B.37). Deoarece masele celor două corpuri sînt egale, forța activă care acționează asupra sistemului format de cele două corpuri este dată de expresia:  $F_{act} = G_{t1} - G_{t2} = mg (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)$ , accelerația mișcării acestui sistem fiind

$$a = \frac{F_{act}}{m_1 + m_2} = \frac{g(\sin \theta_1 - \sin \theta_2)}{2} = \frac{9,8 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right)}{2} \approx 1,015 \frac{m}{s^2}. \text{ Deoarece } G_{t1} > G_{t2},$$

acelerația este dirijată în sensul coborîrii primului corp și al urcării celui de al doilea corp pe planele înclinate corespunzătoare.

b) Deoarece componentele normale (pe planele înclinate corespunzătoare) ale greutateilor corpurilor 1, respectiv 2, sînt date de expresiile  $G_{n1} = G_1 \cos \theta_1 = m_1 g \cos \theta_1$ ,  $G_{n2} = m_2 g \cos \theta_2$ , forțele de frecare între cele 2 corpuri și planele înclinate corespunzătoare sînt:  $F_{f1} = \mu_1 G_{n1} = \mu_1 m_1 g \cos \theta_1$ ,  $F_{f2} = \mu_2 G_{n2} = \mu_2 m_2 g \cos \theta_2$ . În condițiile în care  $m_1 = m_2 (=m)$ ,  $\mu_1 = \mu_2 (= \mu)$ , rezultanta forțelor care acționează asupra sistemului format de cele două corpuri este

$$F = G_{t1} = G_{t2} - F_{f2} = mg[\sin \theta_1 - \sin \theta_2 - \mu(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)],$$

iar accelerația mișcării sistemului,

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{g}{2} [\sin \theta_1 - \sin \theta_2 - \mu(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)] = \\ = \frac{9,8}{2} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} - 0,1 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \approx 0,2439 \frac{m}{s^2}.$$

c) Întrucît  $G_{t1} > G_{t2}$ , pentru echilibrarea forței  $G_{t1}$  este necesar să se atașeze corpului 2 un al treilea corp. În absența frecărilor, masa  $m_3$  a corpului atașat corpului 2 va trebui să satisfacă cerința  $G_{t2} + G_{t3} = (m_2 + m_3)g \sin \theta_2 = G_{t1} = m_1 g \sin \theta_1$ . Rezultă că

$$m_3 = \frac{m_1 \sin \theta_1 - m_2 \sin \theta_2}{\sin \theta_2} = m \left( \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} - 1 \right) = 1 \left( \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} - 1 \right) \approx 0,414 \text{ kg.}$$

În prezența frecărilor, valoarea minimă  $m'_3$  a masei corpului (3) atașat corpului 2, pentru care sistemul format de cele 3 corpuri este în echilibru, corespunde cazului „limită” în care sistemul se deplasează uniform, corpul 1 coborînd, iar corpul 2 urcînd. În acest caz,

$$G_{t1} - G_{t2} - G'_{t3} = m_1 g \sin \theta_1 - (m_2 + m'_3) g \sin \theta_2 = F_{f1} + F_{f2} + F'_{f3} = \\ = \mu_1 m_1 g \cos \theta_1 + \mu_2 (m_2 + m'_3) g \cos \theta_2. \text{ Cum: } m_1 = m_2 (=m), \mu_1 = \mu_2 (= \mu),$$

rezultă că

$$m'_3 = \frac{m(\sin \theta_1 - \mu \cos \theta_1)}{\sin \theta_2 + \mu \cos \theta_2} = \frac{1 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - 0,1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{\frac{1}{2} + 0,1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 0,0849 \text{ kg.}$$

Valoarea maximă  $m''_3$  a masei corpului (3) atașat corpului 2, pentru care sistemul (format de cele 3 corpuri) mai este (încă) în echilibru în prezența frecărilor, corespunde cazului limită în care sistemul se deplasează uniform, corpul 1 urcînd, iar corpul 2 coborînd. În acest caz,  $G_{t2} + G'_{t3} - G_{t1} = (m_2 + m'_3) g \sin \theta_2 - m_1 g \sin \theta_1 = F_{f1} + F_{f2} + F'_{f3} = \mu_1 m_1 g \cos \theta_1 + \mu_2 (m_2 + m'_3) g \cos \theta_2$ , de unde

$$m''_3 = m \left( \frac{\sin \theta_1 + \mu \cos \theta_1}{\sin \theta_2 - \mu \cos \theta_2} - 1 \right) = 1 \left( \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 0,1 \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2} - 0,1 \frac{\sqrt{3}}{2}} - 1 \right) \approx 0,8815 \text{ kg.}$$

Rezultă că valorile masei corpului 3, atașat corpului 2, pentru care în prezența frecărilor — sistemul (format de cele 3 corpuri) este în echilibru — aparțin intervalului  $[m'_3, m''_3]$ , adică  $0,0849 \text{ kg} \leq m_3 \leq 0,8815 \text{ kg}$ .



2°. a) Notind cu  $t_0$  ( $= 0^\circ\text{C}$ ) temperatura de topire a gheții, obținem pentru căldura  $Q_1$  primită de masa  $m_2$  de gheață aflată la temperatura inițială  $t_2$ , pentru a fi adusă la temperatura  $t_0$ ,

$$Q_1 = m_2 c_g (t_0 - t_2) = 0,2 \cdot 2100 \cdot 10 = 4200 \text{ J.}$$

Căldura  $Q_2$ , necesară pentru topirea cantității de gheață, de masă  $m_2$ , este  $Q_2 = m_2 \lambda_t = 0,2 \cdot 334000 = 66800 \text{ J}$ . Pe de altă parte, căldura cedată de calorimetru (de capacitate calorică  $c$ ) și cantitatea de apă (de masă  $m_1$ ) aflată — la temperatura (inițial, de echilibru)  $t_1$  — în acesta este

$$Q_3 = (m_1 c_a + C) (t_1 - t_0) = (0,5 \cdot 4180 + 110) \cdot 30 = 66000 \text{ J.}$$

Deoarece  $Q_3 = 66000 \text{ J} > Q_1 = 4200 \text{ J}$ , căldura cedată de calorimetru și cantitatea de apă aflată inițial la temperatura  $t_1$  este suficientă pentru topirea cantității de gheață considerate (de masă  $m_2$ , aflată inițial la temperatura  $t_2$ ) însă — întrucît  $Q_3 = 66000 \text{ J} < Q_1 + Q_2 = 71000 \text{ J}$  — nu este suficientă pentru topirea întregii cantități de gheață. Rezultă că în calorimetru vom avea în final un amestec de apă și gheață, la temperatura (de echilibru)  $t_f = 0^\circ\text{C}$ .

Masa  $m_1$  a gheții topite poate fi dedusă din ecuația calorimetrică,  $Q_1 + m_1 \lambda_t = Q_3$ , de unde  $m_1 = \frac{Q_3 - Q_1}{\lambda_t} = \frac{66000 - 4200}{334000} \approx 0,185 \text{ kg}$ .

b) Cantitatea de gheață rămasă în calorimetru are masa  $\Delta m_g = m_2 - m_1 = 0,2 - 0,185 = 0,015 \text{ kg}$ . Pentru aducerea amestecului de apă și gheață rezultat în calorimetru la temperatura  $t_f$  și vaporizarea întregii cantități de apă rezultate, la temperatura  $t_f$ , este necesară căldura

$$Q = m_g \cdot \lambda_t + [(m_1 + m_2) c_a + C] (t_f - t_0) + (m_1 + m_2) \lambda_v = 0,015 \cdot 334000 + (0,7 \cdot 4180 + 110) \cdot 100 + 0,7 \cdot 2250000 = 1,883 \cdot 10^6 \text{ J.}$$

c) Randamentul motorului termic care ar funcționa după un ciclu Carnot reversibil, cu gaz perfect, între temperaturile  $t_f$  și  $t_2$  este

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_f} = 1 - \frac{273,15 + t_2}{273,15 + t_f} = 1 - \frac{273,15 - 10}{273,15 + 100} \approx 0,295 \text{ (29,5 \%)}.$$

3°. a) În conformitate cu legea lui Ohm pentru întregul circuit, tensiunea la bornele generatorului este

$$U_b = E - r \cdot I = 144 - 0,22 \cdot 60 = 130,8 \text{ V.}$$

Căderea de tensiune pe conductoarele (linia electrică) care racordează consumatorul la generator este:  $U_l = U_b - U_c = 130,8 - 120 = 10,8 \text{ V}$ .

Deoarece lungimea liniei electrice care racordează consumatorul la generator este egală cu  $2d$ , rezistența electrică a liniei este dată de expresia  $R_l = \rho \cdot \frac{2d}{S}$ . Pe de altă parte, conform legii Ohm pentru o porțiune de circuit,  $R_l = \frac{U_l}{I}$ .

Rezultă că  $S = \rho \cdot \frac{2d}{U_l} \cdot I = 1,75 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{2 \cdot 325}{10,8} \cdot 60 = 6,32 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ .

b) În conformitate cu prima lege a lui Kirchhoff, scrisă pentru unul dintre cele două noduri din care se ramifică baia de electroliză și cele  $n$  ( $= 100$ ) becuri, conectate toate în paralel,  $I = I_c + nI_b$ , rezultă că intensitatea curentului electric prin fiecare bec este

$$I_b = \frac{I - I_c}{n} = \frac{60 - 10}{100} = 0,5 \text{ A.}$$

Puterea disipată într-un bec este  $P_b = U_c \cdot I_b = 120 \cdot 0,5 = 60 \text{ W}$ .



c) Pornind de la prima lege Faraday a electrolizei,  $m = K \cdot I \cdot t$ , rezultă că durata în care baia de electroliză produce o cantitate de oxigen cu masa  $m = 16 \text{ g}$ , este  $t = \frac{m}{K \cdot I_e} = \frac{16 \cdot 10^{-3}}{8,29 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6} \cdot 10} \approx 19\,300 \text{ s}$  (5 h 21 min și 40 s).

4°. a)  $u = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ , sau  $u = A \sin \omega \left( t - \frac{x}{v_f} \right) = A \sin \left( \omega t - \frac{\omega x}{v_f} \right)$ , unde  $u$  este elongația,  $A$  — amplitudinea, iar  $T$  — perioada oscilațiilor undei,  $v_f$  este viteza de fază, iar  $\lambda$  — lungimea de undă.

b)  $pV = \nu RT = \frac{m}{\mu} RT$ , unde  $p$  este presiunea,  $V$  — volumul,  $\nu$  — numărul de kilomoli,  $R$  — constanta universală a gazelor,  $T$  — temperatura termodinamică,  $m$  — masa cantității de gaz considerate, iar  $\mu$  — masa (kilo)molară a gazului.

c)  $\epsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ , unde  $\epsilon$  este tensiunea electromotoare indusă, iar  $\Delta\Phi$  este variația fluxului magnetic, în durata  $\Delta t$ , prin suprafața delimitată de circuitul electric considerat.

5°. a) Mișcarea oscilatorie armonică a unui punct material corespunde proiecției unei mișcări circulare uniforme după o direcție  $Oy$  din planul în care are loc rotația uniformă (v. fig. F.B.38).

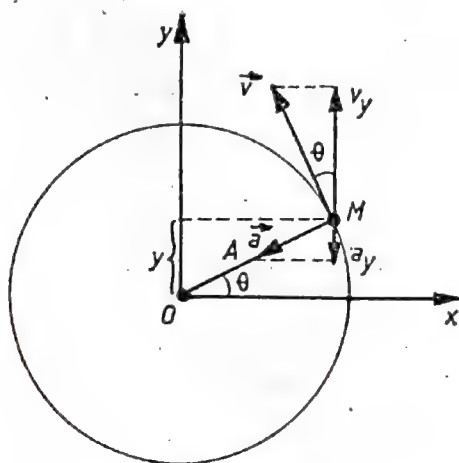


Fig. F.B.38

În cazul în care raza circumferinței în lungul căreia se deplasează punctul material este egală cu  $A$ , ținând seamă de legea mișcării de rotație uniformă:  $\theta = \omega t + \varphi$ , obținem pentru elongația  $y$  (deplasarea față de originea  $O$  a proiecției pe axa  $Oy$  a punctului  $M$ ) expresia  $y = A \sin \theta = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ . Mărimile fizice care intervin în ecuația elongației se numesc:  $A$  — amplitudine,  $\omega$  — pulsație,  $\varphi$  — fază inițială (a oscilației armonice).

Viteza mișcării circulare uniforme este dată de expresia  $v = \omega A$ . Deoarece viteza  $v_y$  în mișcarea oscilatorie armonică este proiecția pe axa  $Oy$  a vitezei  $\vec{v}$  în mișcarea circulară uniformă, din figura F.B.38 obținem:

$$v_y = v \cdot \cos \theta = \omega A \cdot \cos(\omega t + \varphi).$$

Accelerația (centripetă,  $a$ ) mișcării circulare uniforme este dată de expresia  $a = -\omega^2 A$ . Accelerația  $a_y$  în mișcarea oscilatorie armonică fiind proiecția pe axa  $Oy$  a accelerației  $\vec{a}$  din mișcarea circulară uniformă, din figura F.B.38 găsim că:  $a_y = a \cdot \sin \theta = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi)$ . Semnul minus din expresia accelerației  $a_y$  arată că aceasta are sensul opus elongației. De regulă, în simbolurile vitezei și accelerației în mișcarea oscilatorie armonică se omite indicele  $y$ , folosindu-se deci simbolurile simplificate  $v$  și  $a$ .

b) Pornind de la expresia cantitativă a primului principiu al termodinamicii,  $\Delta U = Q - L$ , și, ținând seamă că într-o transformare adiabatică  $Q = 0$ , rezultă că lucrul mecanic efectuat într-o transformare adiabatică este  $L = -\Delta U$ . Pe de altă parte, ținând seamă că — într-o transformare izocoră — lucrul mecanic efectuat este nul ( $L = 0$ ), din expresia primului principiu al termodinamicii rezultă că — într-o transformare izocoră — căldura primită de gaz este  $\nu C_V \Delta T = Q_V = \Delta U$ , unde  $C_V$  este căldura (kilo)molară la volum constant. Obținem astfel, pentru lucrul mecanic efectuat într-o transformare adiabatică a unui gaz perfect, expresia  $L = -\Delta U = -\nu C_V \Delta T = \nu C_V (T_1 - T_2)$ .

c) Ținând seamă că inducția cîmpului magnetic dintr-un solenoid, format prin bobinarea a  $N$  spire pe lungimea  $l$ , este  $B = \mu_0 \mu_r \frac{N}{l} I$  (unde  $\mu_0$  este permeabilitatea vidului,  $\mu_r$  este permeabilitatea relativă a miezului bobinei, iar  $I$  este intensitatea curentului electric care străbate înfășurarea solenoidului), fluxul magnetic care străbate bobina (solenoidul) este:  $\Phi = N \cdot B \cdot S = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S}{l} \cdot I$ . Deoarece inductanța bobinei este definită prin expresia  $L = \frac{\Phi}{I}$ , rezultă că inductanța unui solenoid (bobine) poate fi exprimată prin mărimile fizice caracteristice prin relația

$$L = \mu_0 \mu_r \cdot \frac{N^2 S}{l},$$

unde  $S$  este aria secțiunii transversale a bobinei.

IV.1<sup>o</sup>. a) Deoarece  $m_2 > m_1$ , forța activă care acționează asupra sistemului format de cele două corpuri este  $F_a = G_2 - G_1 = g(m_2 - m_1)$ , accelerația sistemului de corpuri atunci cînd ascensorul este în repaus fiind

$$a = \frac{F_a}{m_1 + m_2} = g \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} = 9,8 \cdot \frac{0,2 - 0,1}{0,1 + 0,2} \approx 3,27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) Porțiunile de fir de care sînt legate cele două corpuri acționează asupra scripetelui (mobil), de o parte și de cealaltă a acestuia (v. și fig. F.B.39), cu forțe

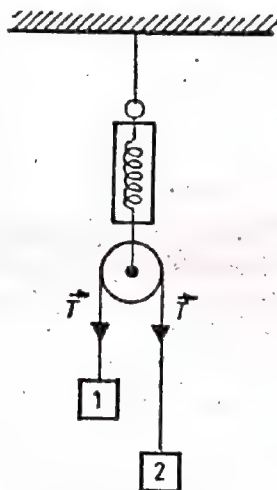


Fig. F.B.39

egale între ele și cu tensiunea din fir:  $T = m_1 g + m_1 a = m_2 g - m_2 a$ . Înlocuind expresia dedusă mai sus pentru accelerația sistemului, atunci cînd ascensorul este în repaus, obținem

$$T = m_1 g + m_1 g \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} = \frac{2 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

Rezultă că forța care acționează asupra dinamometrului, atunci cînd ascensorul este în repaus, este

$$F_d = 2T = \frac{4 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{4 \cdot 0,1 \cdot 0,2 \cdot 9,8}{0,1 + 0,2} \approx 2,61 \text{ N.}$$

c) Considerăm cazul în care accelerația  $a_a$  a mișcării ascensorului are același sens (în jos) ca și accelerația gravitațională. Deoarece la compunerea mișcărilor, vitezele și — implicit — accelerațiile se compun vectorial, accelerația  $a_g$  a unui corp în cădere liberă față de ascensorul care se deplasează cu accelerația  $a_a$ , dirijată în sensul greutății corpului, este  $a_g = g - a_a$ . Repetînd considerațiile anterioare pentru cazul în care ascensorul se mișcă cu accelerația  $a_a$  dirijată în jos, găsim că forța  $F$  care va acționa asupra dinamometrului va fi

$$F = \frac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot a_g = \frac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} (g - a_a).$$

Rezultă că

$$a_a = g - \frac{m_1 + m_2}{4 m_1 m_2} \cdot F = 9,8 - \frac{4 \cdot 0,1 \cdot 0,2}{0,1 + 0,2} \cdot 2 = 2,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ (cu sensul în jos).}$$

Ținînd seama de cele de mai sus, rezultă că accelerația sistemului de corpuri atunci cînd dinamometrul indică forța  $F$ , deci ascensorul se deplasează cu accelerația  $a_a$ , este

$$a' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} (g - a_a) = \frac{0,2 - 0,1}{0,1 + 0,2} (9,8 - 2,3) = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

2°. a) Numărul kilomolilor conținuți de cantitatea de azot considerată este:  $\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{3,01 \cdot 10^{23}}{6,02 \cdot 10^{26}} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ kmol}$ , iar temperatura termodinamică inițială a azotului este  $T = T_0 + t = 273,15 + 27 \approx 300 \text{ K}$ .

Presiunea azotului poate fi dedusă din ecuația termică de stare a gazelor perfecte  $p = \frac{\nu RT}{V} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 8 \cdot 310 \cdot 300}{30 \cdot 10^{-3}} = 41 \, 550 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ . Temperatura  $T_f$  atinsă de azot după încălzirea izobară fiind  $T_f = T + \Delta t \approx 300 + 100 = 400 \text{ K}$ , volumul  $V_f$  ocupat de azot după această încălzire (izobară) va fi  $V_f = V \cdot \frac{T_f}{T} = 30 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{400}{300} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 (= 40 \text{ l})$ . În fine, lucrul mecanic efectuat de gaz în cursul procesului izobar este  $L = p(V_f - V) = 4,155 \cdot 10^4 (40 - 30) \cdot 10^{-3} = 415,5 \text{ J}$ .

b) Viteza medie pătratică a moleculelor azotului în starea inițială este

$$V_T = \sqrt{\frac{3 RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8 \cdot 310 \cdot 300}{28}} \approx 516,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Deoarece masa  $m$  a azotului este  $m = \nu \cdot \mu$ , densitatea inițială a acestuia este  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{\nu \cdot \mu}{V} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 28}{30 \cdot 10^{-3}} \approx 0,467 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

3°. a) Tensiunea electromotoare indusă în conductorul  $AB$  este dată de expresia  $e = B d v \sin \theta$ . Deoarece din figura indicată în enunț rezultă că inducția  $B$  a cîmpului magnetic uniform este perpendiculară pe planul circuitului electric, avem:  $\theta = 90^\circ$ , obținînd  $e = 2 \cdot 0,4 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = 0,8 \text{ V}$ . Deoarece, conform regulii (legii) Lenz, curentul  $I_e$  produs de tensiunea electromotoare indusă „ $e$ ” trebuie să „genereze” o forță (electromagnetică)  $\vec{F}_e = I_e \vec{d} \times \vec{B}$ , care să se opună cauzei fenomenului de inducție electromagnetică (deci mișcării conductorului  $AB$  cu viteza  $\vec{v}$ ),



curentul  $I_e$  și tensiunea electromotoare indusă  $e$  au sensurile indicate în figura F.B.40.

b) Deoarece tensiunile electromotoare  $E$  (a sursei) și  $e$  (indusă) au sensuri opuse, legea Ohm pentru întreg circuitul  $ABCD$  are forma:  $I = \frac{E - e}{R_{AB} + R_{BD} + r + R_{AC}}$  obținind:  $I = \frac{2 - 0,8}{0,08 + 0,12} = 6 \text{ A}$ . Întrucît  $E > e$ , curentul electric care străbate circuitul are sensul opus celui al curentului de intensitate  $I_e$  (v. fig. F.B.41).

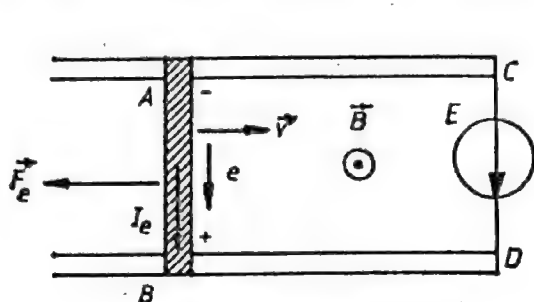


Fig. F.B.40

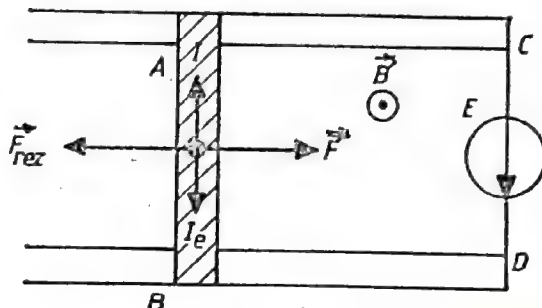


Fig. F.B.41

c) Forța electromagnetică rezultantă, care acționează asupra conductorului  $AB$ , este dată de expresia  $\vec{F} = I\vec{d} \times \vec{B}$  și are valoarea  $F = 6 \cdot 0,4 \cdot 2 \cdot \sin 90^\circ = 4,8 \text{ N}$  și sensul opus celui al forței  $F_e$ . Pentru ca mișcarea conductorului  $AB$  să decurgă uniform, asupra acestui conductor trebuie să acționeze o forță rezistentă  $F_{rez} = -F$ , iar pentru ca mișcarea conductorului să decurgă cu viteza  $\vec{v}$  (constantă), va fi necesară (pentru învingerea forței rezistente) puterea

$$P = -\vec{F}_{rez} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v} = 4,8 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 4,8 \text{ W}.$$

4°. a)  $E_c = \frac{mA^2\omega^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi)$ ,  $E_p = \frac{mA^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi)$ ,  $E_t = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$ , unde  $E_c$ ,  $E_p$  și  $E_t$  sînt energiile cinetică, potențială, respectiv totală, ale oscilatorului liniar armonic,  $m$  este masa, iar  $k$  este constanta elastică corespunzînd oscilatorului considerat și — în fine —  $A$  este amplitudinea,  $\omega$  — pulsația proprie, iar  $\varphi$  — faza inițială a oscilațiilor oscilatorului liniar armonic.

b)  $U = \nu C_V T$ , unde  $U$  este energia internă,  $\nu$  este numărul de kilomoli,  $C_V$  este căldura (kilo)molară la volum constant, iar  $T$  este temperatura termodinamică. Pentru gaze ideale cu molecule monoatomice  $C_V = \frac{3R}{2}$  (pentru gaze ideale cu molecule liniare  $C_V = \frac{5R}{2}$ , iar pentru gaze ideale cu molecule neliniare  $C_V = 3R$ ).

c)  $F = \mu \frac{I_1 I_2 l}{2\pi d}$ , unde  $F$  este forța cu care un conductor rectiliniu filiform și infinit, străbătut de un curent electric de intensitate  $I_1$ , acționează asupra unei porțiuni de lungime  $l$  a altui conductor rectiliniu filiform și infinit, așezat — într-un mediu de permeabilitate (magnetică)  $\mu$  — în poziție paralelă cu primul, la distanța  $d$  de acesta, în condițiile în care cel de al doilea conductor este străbătut de un curent electric de intensitate  $I_2$ .

5°. a)  $\mu = \frac{F_f}{F_n}$ , unde  $F_f$  este forța de frecare la alunecarea corpului pe o anumită suprafață,  $F_n$  este componenta normală pe suprafața respectivă, a forței de apăsare a corpului pe suprafață, iar  $\mu$  este coeficientul de frecare la alunecare.

b)  $C = \frac{Q}{\nu \Delta T}$ , unde  $Q$  este căldura primită de sistemul termodinamic considerat într-un proces în cursul căruia temperatura sistemului crește cu  $\Delta T$ ,  $\nu$  este numărul de kilomoli de substanță, conținuți de sistem, iar  $C$  este căldura molară a sistemului pentru procesul termodinamic considerat.

c)  $k = \frac{m}{It}$ , unde  $m$  este masa de metal depusă la catodul unui electrolizor, în durata  $t$  în care electrolizorul este străbătut de un curent electric de intensitate  $I$ .

V.1°. a) Pornind de la expresia energiei totale a oscilatorului armonic  $E_t = \frac{m}{2} A^2 \omega^2$ , se obține  $\omega = \sqrt{\frac{2E_t}{mA^2}} = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

b) Ținând seamă de expresiile energiei cinetice  $E_c$ , respectiv energiei potențiale  $E_p$ , a oscilatorului armonic, condiția  $E_c = E_p$  capătă forma  $\frac{m}{2} A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi)$ . Deoarece  $m\omega^2 = k$ , din relația de mai sus reiese că  $\sin(\omega t + \varphi) = \pm \cos(\omega t + \varphi)$ , de unde  $\sin(\omega t + \varphi) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  și  $\cos(\omega t + \varphi) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Rezultă valorile elongației  $y$  și vitezei  $v$  ale corpului în momentele în care  $E_c = E_p$ ,

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) = \pm \frac{1}{4} = \pm 0,25 \text{ m}, \quad v = A \omega \cos(\omega t + \varphi) = \pm 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Pe baza aceleiași relații,  $k = m\omega^2$ , găsim că  $F_e = ky = m\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) = \pm 16 \text{ N}$ .

2°. a) Pornind de la legea lui Charles a transformărilor izocore ale gazelor ideale,  $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$ , se găsește că  $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2 - p_1}{T_2 - T_1}$ , de unde  $T_1 = \frac{p_1}{\Delta p} \cdot \Delta T = \frac{120}{0,3} = 400 \text{ K}$ .

b) Ținând seama de relația dintre numărul lui Avogadro  $N_A$ , constanta  $R$  a gazelor perfecte și constanta  $k$  a lui Boltzmann,  $R = N_A \cdot k$ , ecuația termică de stare a gazelor ideale capătă forma  $pV = \nu RT = \nu N_A kT = NkT$ . Reiese că numărul moleculelor de gaz din incintă este

$$N = \frac{p_1 V_1}{kT_1} = \frac{6 \cdot 10^5 \cdot 1}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 400} \simeq 1,09 \cdot 10^{24} \text{ molecule.}$$

c) Din relația Robert Mayer,  $C_p - C_v = R$  și expresia exponentului adiabatic,  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ , găsim că  $C_v = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{3R}{2} = \frac{3}{2} N_A k$ . Rezultă căldura primită de gaz în cursul încălzirii izocore,

$$Q = \nu C_v \Delta T = \frac{3}{2} \nu N_A k \Delta T = \frac{3}{2} Nk \Delta T = \frac{3}{2} p_1 V_1 \frac{\Delta T}{T_1} = 2700 \text{ J.}$$

3°. a) Pentru ca traiectoria ionului într-un câmp magnetic uniform să fie circulară, forța centrifugă trebuie să fie egală cu forța Lorentz care acționează asupra ionului,  $\frac{mv^2}{R} = qvB$ , de unde  $\frac{q}{m} = \frac{v}{RB} \approx 4,8 \cdot 10^7 \frac{\text{kg}}{\text{C}}$ .

b)  $T = \frac{2\pi R}{v} \approx 3,27 \cdot 10^{-7} \text{ s} (= 0,327 \mu\text{s})$ .

c) Din condiția de conservare a energiei ionului,  $qU = \frac{mv^2}{2}$ , reiese că  $U = \frac{mv^2}{2q} \approx 4,1 \cdot 10^4 \text{ V} (= 41 \text{ kV})$ .

4°. a)  $x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2$ , unde  $x$  este coordonata de poziție la momentul  $t$ ,  $x_0$  și  $v_0$  sunt coordonata, respectiv viteza, la momentul  $t_0$ , iar  $a$  este accelerația mișcării rectilinii uniform-variate.

b) Expresia randamentului unei mașini termice care funcționează după un ciclu Carnot este  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ , unde  $T_1$  și  $T_2$  sunt temperaturile absolute (termodinamice) ale sursei calde, respectiv sursei reci.

c) Acest subiect a fost tratat la II.5°.c.

5°. a) Variația energiei cinetice a unui punct material, care se deplasează în raport cu un sistem de referință inerțial, este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă asupra punctului material în timpul acestei variații,

$$E_c = E_{c2} - E_{c1} = L.$$

b) Acest subiect a fost tratat la II.5°.b.

c) Tensiunea electromotoare indusă într-un circuit este egală cu viteza de variație a fluxului magnetic prin suprafața aceluși circuit, luată cu semn schimbat,  $\mathcal{E} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ .

VI.1°. a) Din relația lui Robert Mayer  $C_p - C_v = R$ , reiese că pentru aer  $C_p = C_v + R = \frac{7R}{2}$ . Căldura  $Q$  primită în timpul încălzirii izobare este  $Q = \nu C_p \Delta T = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{7R}{2} \Delta T$ . Rezultă că  $m = \frac{2\mu Q}{7R\Delta T} \approx 0,083 \text{ kg}$ .

b)  $L_{ef} = p\Delta V = \nu R\Delta T = \frac{m}{\mu} R\Delta T = \frac{2Q}{7} \approx 2373 \text{ J}$ .

c) În conformitate cu primul principiu al termodinamicii,  $\Delta U = Q - L_{ef} \approx 8310 - 2373 = 5937 \text{ J}$ .

2°. a) Pornind de la expresia randamentului mașinii termice care funcționează după un ciclu Carnot,  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{\Delta T}{T_1}$ , obținem  $T_1 = \frac{\Delta T}{\eta} = 700 \text{ K}$ ,  $T_2 = T_1 - \Delta T = 280 \text{ K}$ .

b) Din ecuația termică de stare a gazelor perfecte,  $pV = \nu RT$ , rezultă că  $\nu = \frac{p_1 V_1}{RT_1} \approx 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ kmoli}$ .

c) În cazul unei mașini termice care funcționează după un ciclu Carnot, raportul de destindere izotermă  $\frac{V_2}{V_1}$  este egal cu cel de compresie izotermă  $\frac{V_3}{V_4}$ , deci  $V_2 = \frac{V_3}{V_4} \cdot V_1 = 2V_1 = 3,32 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$ . Concentrația  $n_2$  de molecule la sfârșitul destinderii izoterme reiese ca fiind

$$n_2 = \frac{N}{V_2} = \frac{\nu N_A}{V_2} = \frac{\nu R}{V_2 k} \approx 7,2 \cdot 10^{24} \text{ molecule/m}^3.$$

3°. a)  $\Phi = 4\pi I = 1256,6 \text{ lm}$ .

b) Contribuția fascicului luminos incident direct de la sursa  $S$  pe paravanul  $P$  la iluminarea în punctul  $A$  este

$$E_d = \frac{I}{a^2} = \frac{100}{2^2} = 25 \text{ lx}.$$

Fig  $S_1, S_2$  — imaginile sursei  $S$  în oglinzile plane  $O_1$ , respectiv  $O_2$  (v.fig.F.B.42). După cum este cunoscut, prelungirile razelor reflectate de cele două oglinzi se



întâlnesc în imaginile  $S_1$ , respectiv  $S_2$ , ale sursei în cele două oglinzi. În consecință, contribuția razelor reflectate de oglinda  $O_1$  la iluminarea în punctul  $A$  al paravanului este egală cu cea produsă de o sursă cu aceeași intensitate  $I$  ca și sursa  $S$ , plasată în punctul  $S_1$  (oglinnda  $O_1$  fiind îndepărtată),

$$E_{01} = \frac{I}{S_1 A^2} = \frac{I}{(a + 2c)^2} \approx 1,56 \text{ lx.}$$

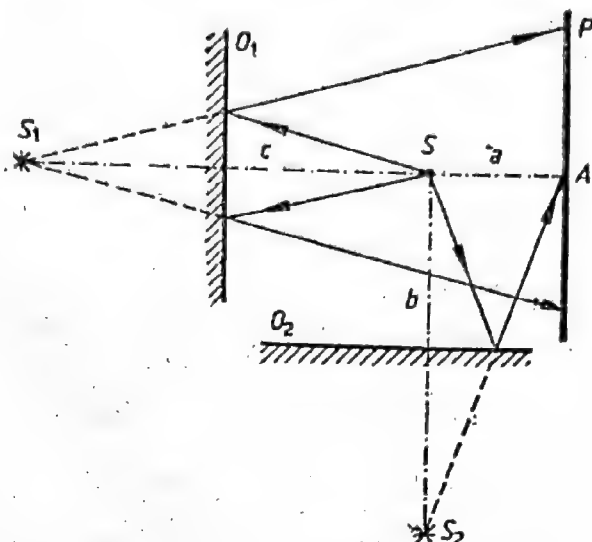


Fig. F.B.42

În fine, contribuția la iluminarea în  $A$  a razelor luminoase reflectate de oglinda  $O_2$  este egală cu cea a unei surse de aceeași intensitate  $I$  ca și  $S$ , aflată însă în punctul  $S_2$  (în condițiile în care oglinda  $O_2$  ar fi îndepărtată),

$$E_{02} = \frac{I}{S_2 A^2} \cos \widehat{S_2 A S} = \frac{I}{a^2 + 4b^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4b^2}} = \sqrt{5} \approx 2,23 \text{ lx.}$$

Iluminarea rezultantă în punctul  $A$  este egală cu suma contribuțiilor datorate fascicului direct, respectiv fasciculelor reflectate de oglinda  $O_1$ , respectiv de oglinda  $O_2$ ,

$$E_{\text{rez}} = E_d + E_{01} + E_{02} \approx 28,79 \text{ lx.}$$

c) Pornind de la formula fundamentală a lentilelor subțiri,  $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$  și observând că  $x_1 - x_2 = -(x_2 - x_1) = -a$ , deci că  $x_2 = a + x_1$ , se determină mai întâi distanța focală a lentilei,

$$f = \frac{x_2 x_1}{x_1 - x_2} = \frac{(a + x_1) x_1}{-a} = \frac{(2 - 0,6)(-0,6)}{-2} = 0,42 \text{ m.}$$

Pentru o lentilă biconvexă simetrică,  $R_1 = R_2 = R$ , expresia convergenței unei lentile subțiri,  $C = \frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ , capătă forma  $\frac{1}{f} = \frac{2}{R} (n - 1)$ , de unde  $R = 2f(n - 1) = 2 \cdot 0,42 \cdot 0,6 = 0,504 \text{ m.}$

4°. a)  $p = \frac{2}{3} n \cdot \frac{m \bar{v}^2}{2}$ , unde  $p$  este presiunea gazului,  $n$  este numărul de molecule din unitatea de volum a gazului,  $m$  este masa unei molecule, iar  $\bar{v}^2$  este valoarea medie a pătratului vitezei (moleculelor gazului).

b)  $r_2 - r_1 = k\lambda$  (pentru maxime de interferență), respectiv  $r_2 - r_1 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$  (pentru minime de interferență), unde  $r_2 - r_1$  este diferența de drum (geometric)

între fasciculele care interferă,  $k$  este un întreg numit ordin de interferență, iar  $\lambda$  este lungimea de undă a radiațiilor care interferă.

c)  $i = \frac{\lambda}{2\alpha n}$ , unde  $i$  este interfranja,  $\lambda$  este lungimea de undă a radiației utilizate,  $\alpha$  este valoarea în radiani ( $\alpha \ll 1$ ) a unghiului (de la virful) penei, iar  $n$  este indicele de refracție al mediului din care este formată pana.

5°.1. a) Un sistem telescopic este un dispozitiv pentru observarea obiectelor îndepărtate, al cărui obiectiv este constituit dintr-o oglindă sferică sau parabolică. Imaginea formată de obiectiv este preluată de o oglindă plană și trimisă spre sistemul convergent (cu corecție a aberațiilor), îndeplinind rolul de ocular.

b) Acest subiect a fost tratat la 11.5°.b.

2. Focarele dioptrului sferic sînt acele puncte în care: a) fiind situat un izvor punctiform, razele care pornesc de la acest izvor părăsesc dioptrul paralel cu axa optică, b) se întîlnesc razele refractate provenite dintr-un fascicul incident paralel. Există deci, pe axa optică principală, două focare — numite focare principale, iar pe axele secundare, vor exista focare secundare. Dacă focarele se află la intersecția razelor reale, ele se numesc focare reale (fig.F.B.43a), iar dacă se găsesc la intersecția prelungirilor razelor, se numesc focare virtuale (fig.F.B.43b).

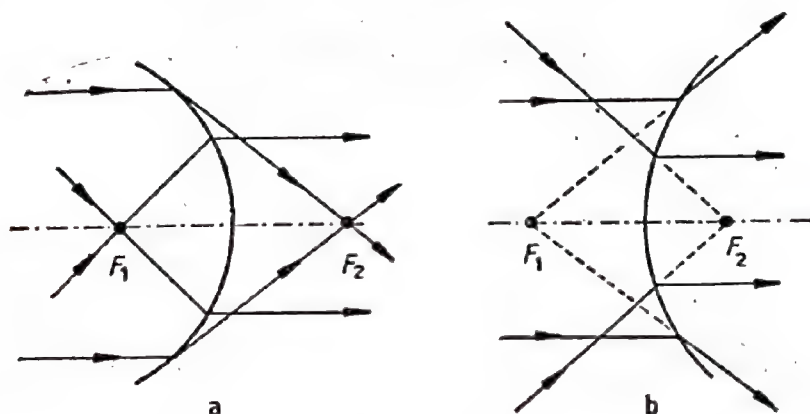


Fig. F.B.43

b) Coordonatele  $x_1, x_2$  ale focarelor  $F_1, F_2$  (deci, valorile particulare ale lui  $x_1$ , respectiv  $x_2$ , cînd  $x_2$  sau  $x_1$  devin infinite) se numesc distanțe focale (simboluri  $f_1, f_2$ ).

Pornind de la prima relație fundamentală a dioptrului sferic (relația punctelor conjugate),  $\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$ , rezultă

$$f_1 = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} x_1 = -\frac{n_1 R}{n_2 - n_1} \text{ (distanța focală obiect),}$$

$$f_2 = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} x_2 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1} \text{ (distanța focală imagine).}$$

Amplificînd prima relație fundamentală a dioptrului sferic cu  $\frac{R}{n_2 - n_1}$ , se obține

$$\frac{n_2 R}{n_2 - n_1} \cdot \frac{1}{x_2} - \frac{n_1 R}{n_2 - n_1} \cdot \frac{1}{x_1} = 1, \text{ de unde } \frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} = 1.$$

Menționăm că, datorită indicilor de refracție  $n_1$  și  $n_2$  diferiți, distanțele focale  $f_1$  și  $f_2$  au — în general — valori diferite, deci distanțele pînă la virful dioptrului sferic ale focarelor principale sînt — în general — diferite.

VII.1°. a) Pornind de la legea Gay-Lussac a proceselor izobare,  $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ , găsim  $T_2 = (t + 273,15) \cdot \frac{V_2}{V_1} \approx 330 \text{ K}$ . Rezultă că  $L_{ef} = p\Delta V = \nu R(T_2 - T_1) \approx 2,493 \cdot 10^4 \text{ J} (= 24,93 \text{ kJ})$ .

b) Căldura primită de gaz în cursul încălzirii izobare este  $Q_p = \nu C_p \Delta T = \nu \frac{7R}{2} (T_2 - T_1) \approx 8,725 \cdot 10^4 \text{ J} (= 87,25 \text{ kJ})$ .

c) În conformitate cu primul principiu al termodinamicii,  $\Delta U = Q - L_{ef} \approx 6,232 \cdot 10^4 \text{ J} (= 62,32 \text{ kJ})$ .

2°. a) Pornind de la expresia convergenței unei lentile subțiri,  $C = \frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$  și ținând seamă că pentru o lentilă plan-convexă;  $\frac{1}{R_1} = 0$ , iar  $R_2 \rightarrow R$ , găsim  $C = \frac{n - 1}{R} = \frac{0,5}{0,2} = 2,5$  dioptrii,  $f = \frac{1}{C} = 0,4 \text{ m}$ .

b) Pe baza formulei fundamentale a lentilelor subțiri,  $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$ , se găsește că  $x_2 = \frac{x_1 f}{x_1 + f} = \frac{-0,2 \cdot 0,4}{-0,2 + 0,4} = -0,4 \text{ m}$  (imagine virtuală). Mărimea imaginii se găsește prin relația  $y_2 = \beta y_1 = \frac{x_2}{x_1} y_1 = \frac{-0,4}{-0,2} \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} (= 2 \text{ cm})$ .

c) În cazul în care lentila este cufundată în apă, indicele său relativ de refracție (față de apă) este  $n_r = \frac{n}{n_a}$ , deci  $\frac{1}{f_a} = \left( \frac{n}{n_a} - 1 \right) \frac{1}{R}$ , de unde  $f_a = \frac{R}{\frac{n}{n_a} - 1} = 1,6 \text{ m}$ .

3°. a) Întrucît pentru un ciclu Carnot  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{\Delta T}{T_1}$ , găsim că  $T_1 = \frac{\Delta T}{\eta} = 700 \text{ K}$  și  $T_2 = T_1 - \Delta T = 280 \text{ K}$ .

b) Lucrul mecanic efectuat în cursul destinderii izoterme este dat de expresia  $L_{12} = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$ , de unde — efectuînd calculele — găsim

$$L_{12} = 0,5 \cdot 8310 \cdot 700 \cdot \ln 2 \approx 2 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

c) Energia cinetică medie de translație a moleculelor la temperatura sursei reci este

$$\bar{E}_{c,tr} = \frac{3}{2} k T_2 \approx 5,8 \cdot 10^{-21} \text{ J}.$$

4°. a) Se numește masă moleculară relativă numărul care arată de cîte ori masa unei molecule este mai mare decît a 12-a parte din masa atomului de carbon  $^{12}_6\text{C}$ .

b) Fluxul luminos  $\Phi$  este definit prin relația:  $\Phi = K V \Phi_e$ , în care  $K$  este echivalentul fotometric al radiației ( $= 675 \text{ lm/W}$ ),  $V$  este sensibilitatea spectrală relativă a ochiului, iar  $\Phi_e$  este fluxul de energie radiantă.

c) Prin energie internă a unui sistem termodinamic se înțelege suma dintre energiile cinetice ale mișcării termice, energiile potențiale determinate de forțele intermoleculare și energiile potențiale în câmpurile de forțe exterioare ale tuturor moleculelor din care este format sistemul.

5°. a)  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , unde  $m$  este masa de mișcare (la viteza  $v$ ) a corpului,  $m_0$  este masa de repaus a corpului, iar  $c$  este viteza luminii în vid.



b)  $i = \frac{\lambda D}{2l}$ , în care  $i$  este interfranja,  $\lambda$  este lungimea de undă a radiației utilizate,  $D$  este distanța de la planul surselor coerente (cele două fante, în cazul dispozitivului Young) la ecranul de observație, iar  $2l$  este distanța dintre sursele coerente.

c)  $C_p - C_v = R$ , unde  $C_p$  este căldura molară la presiune constantă,  $C_v$  este căldura molară la volum constant, iar  $R$  este constanta universală a gazelor perfecte.

VIII.1°. a) Frecvența de rotație a discului este  $\nu = \frac{n}{60} = 2 \text{ Hz}$ . Pentru a nu se produce alunecarea corpului la rotația discului, este necesar ca forța centrifugă care acționează asupra sa să nu depășească forța corespunzătoare de frecare,  $F_{cf} = m\omega^2 r = m \cdot 4\pi^2 \nu^2 r \leq F_f = \mu mg$ . Rezultă că distanța maximă de centrul discului la care trebuie așezat corpul, pentru ca acesta să nu alunece este

$$r_{\max} = \frac{\mu g}{4\pi^2 \nu^2} = \frac{0,4 \cdot 9,8}{4 \cdot 3,14^2 \cdot 2^2} \approx 2,47 \text{ cm}.$$

b)  $L = r m v = m r^2 \omega = 2\pi m r^2 \nu \approx 1,51 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$

Deoarece raza vectorie  $\vec{r}$  a corpului față de axa de rotație și viteza  $\vec{v}$  a corpului sint „cuprinse” în planul discului, direcția momentului cinetic  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$  este perpendiculară pe planul discului, iar sensul momentului cinetic este dat de sensul înaintării burghiului drept rotit în sensul mișcării corpului (echivalent cu sensul rotației razei vectorie pentru a o suprapune — pe drumul cel mai scurt — peste direcția vitezei), în cazul mișcării în sens direct trigonometric, sensul  $L$  reiese ca fiind spre partea discului de unde mișcarea corpului este observată ca avînd acest sens (v. și fig.F.B.44).

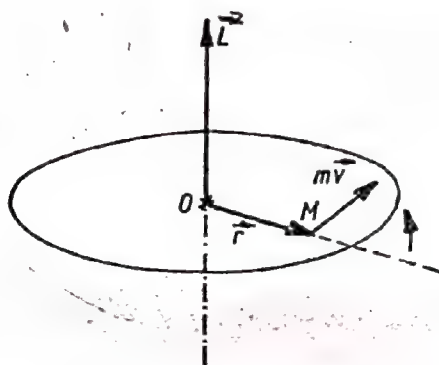


Fig. F.B. 44

c)  $|\vec{M}_F| = |\vec{r} \times \vec{G}| = mgr = 5,88 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}.$

2°. a) Din condiția de conservare a energiei electronului,  $0 = \frac{mv^2}{2} - eU$ ,

găsim că  $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \approx 1,87 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

b) Deoarece mișcarea electronilor între catod și anod este uniform accelerată ( $a = \frac{eE}{m}$ ), iar viteza inițială a electronilor este presupusă neglijabilă, viteza medie  $v_m$  a electronilor între catod și anod este  $v_m = \frac{v}{2}$ , deci timpul de „trecere”

a electronului de la catod la anod este  $t = \frac{d}{v_m} = \frac{2d}{v} \approx 10,6 \cdot 10^{-10} \text{ s}.$

c)  $N = \frac{I}{e} \approx 10^{16}$  electroni/s.

3°. a) Un sistem de două forțe paralele, de sensuri contrare, avind același modul, însă suporturi diferite, aplicate aceluiași solid, se numește cuplu de forțe. Deoarece  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}$ , rezultanta forțelor care formează un cuplu este nulă,  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ , în schimb momentul rezultat al forțelor care formează un cuplu,  $\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$  (v. și fig. F.B.45) este independent de poziția aleasă pentru punctul  $O$  (originea) de referință, și diferit de zero,

$$|\vec{M}| = rF \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{F}}) = Fb.$$

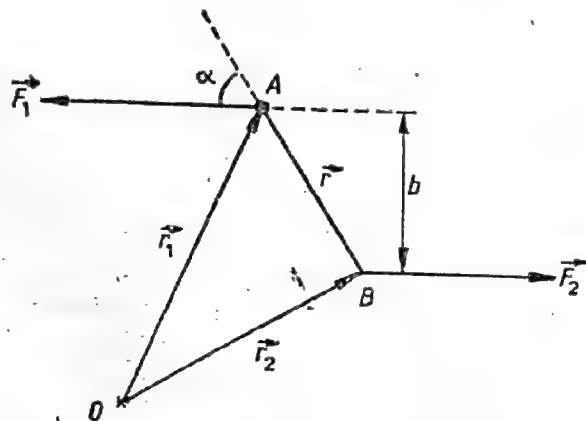


Fig. F.B.45

unde  $b = r \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{F}})$  este brațul cuplului (distanța dintre suporturile forțelor  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$ ). Datorită momentului cuplului  $\vec{M}$  (momentul rezultat al forțelor  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$ ), cuplul rotește corpul asupra căruia este aplicat în jurul unei axe perpendiculare pe planul celor două forțe (planul cuplului). Cuplurile care au același moment produc același efect, dacă sînt aplicate succesiv aceluiași corp (se spune că aceste cupluri sînt echivalente). În cazul corpurilor rigide, un cuplu poate fi rotit, deplasat în propriul său plan sau într-un plan paralel, fără ca efectul său să se modifice (deoarece nici momentul cuplului nu se modifică, în aceste condiții).

Drept exemple simple de cupluri de forțe pot fi date acțiunile minilor asupra unui volan de automobil sau asupra ghidonului unei biciclete, acțiunea vîrfului (lamei) unei șurubelnițe asupra creștăturii unui șurub ș.a.

b) Un punct material care se mișcă rectiliniu sub acțiunea unei forțe de forma  $F = -ky$  (sau  $F = -kx$ ) se numește oscilator liniar armonic. Mișcarea sa de oscilație este numită mișcare oscilatorie armonică. Oscilatorul liniar armonic este un oscilator ideal (fără frecare).

Ecuatiile mărimilor care caracterizează mișcarea oscilatorie armonică se obțin din ecuațiile mărimilor corespunzătoare mișcării circulare uniforme (figura F.B.46). Proiecția mișcării circulare uniforme pe un diametru reprezintă o mișcare oscilatorie armonică,  $OM' = y = r \sin \varphi = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ , unde am notat  $r = A$  și am ținut seamă că  $\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}$ . Viteza în mișcarea oscilatorie armonică reiese ca fiind

$v = v_t \cos \varphi = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$ , unde  $v_t = \omega r = \omega A$  este viteza tangențială în mișcarea circulară uniformă. În fine, pornind de la expresia accelerației centripete,  $a_c = -\omega^2 r = -\omega^2 A$  (este orientată în sens opus razei vectoriale), se poate deduce și expresia accelerației într-o mișcare oscilatorie armonică,  $a = a_c \sin \varphi = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0)$  [v. eventual și figura F.B.46].

Ecuatia principiului II al dinamicii,  $F = ma$ , capata, pentru un oscilator armonic linear realizat prin legarea unui corp de mici dimensiuni si masa  $m$  de un resort elastic de masa neglijabila si constanta elastica  $k$ , expresia  $-ky = -m\omega^2 y$ , de unde reiese ca pulsatiya  $\omega$  a oscilatorului elastic este  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Deoarece intre frecventa  $\nu$ , perioada  $T$  si pulsatiya  $\omega$  a oscilatorului armonic linear exista aceleasi relatii ca si intre  $\nu$ ,  $T$  si viteza unghiulara  $\omega$  a miscarii circulare uniforme, pentru un oscilator elastic (armonic),

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

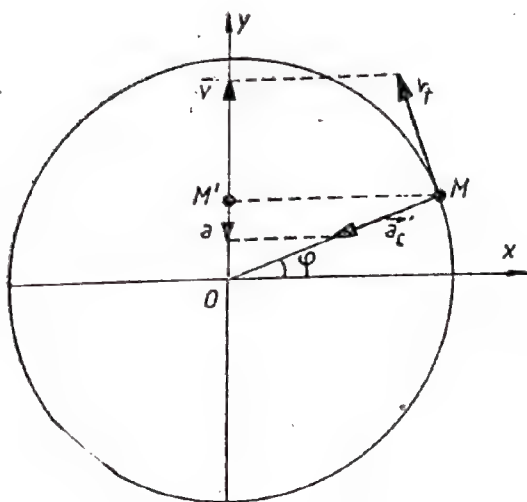


Fig. F.B.46

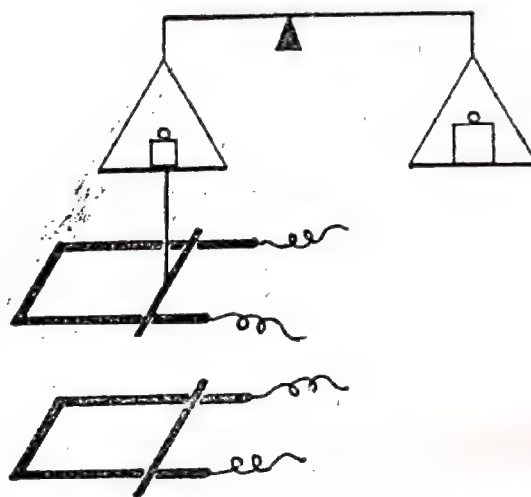


Fig. F.B.47

c) Doua circuite parcurse de curent electric interactioneaza prin cimpurile magnetice din jurul lor. Experienta arata (v., spre exemplu, fig. F.B.47) ca, daca doua conductoare paralele sint parcurse de curenti electrici de acelasi sens, ele se atrag, iar daca sint parcurse de curenti electrici de sensuri opuse, se resping.

Fora de interactiune dintre doua conductoare paralele parcurse de curent electric reprezinta fora electromagnetica cu care fiecare conductor interactioneaza cu cimpul magnetic generat de celalalt conductor; astfel  $F_1 = I_1 l B_2$  va reprezenta fora care se exercita pe o lungime  $l$  a conductorului 1, parcurs de curentul  $I_1$ .

Considerind conductoarele foarte lungi, atunci cimpul magnetic generat de conductorul prin care circula curentul  $I_2$  la distanta  $r$  (distanta dintre conductoare) este caracterizat de inducția  $B_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I_2}{2\pi r}$ , unde  $\mu_0$  este permeabilitatea vidului, iar  $\mu_r$  este permeabilitatea relativa a substantei. Introducind in expresia fortei, rezulta  $F_1 = \frac{\mu_0 \mu_r I_1 I_2}{2\pi r} \cdot l$ . Fora  $F_2$  care actioneaza asupra conductorului parcurs de curentul  $I_2$  va avea aceeași expresie, dar va fi de sens opus (este satisfăcut principiul actiunii si reactiunii).

4°. a) Acest subiect a fost tratat la III.4°. a.

b) Acest subiect a fost tratat la III.4°. c.

c)  $P = UI \cos \varphi$ ,  $P_r = UI \sin \varphi$ ,  $S = UI$ , unde  $P$ ,  $P_r$  si  $S$  sint respectiv puterea activa, puterea reactiva si puterea aparenta,  $U$  si  $I$  sint valorile efective ale tensiunii la borne, respectiv intensitatii curentului prin circuitul de curent alternativ considerat, iar  $\varphi$  este defazajul dintre tensiunea la borne si intensitatea curentului in circuit ( $\cos \varphi$  se numeste si factor de putere).



IX.1°. a) Deoarece rezultanta  $R$  a forțelor care acționează asupra corpului este egală cu diferența dintre forța „activă”  $F$  și forța de frecare  $F_{fr} = \mu G = \mu mg$  dintre corp și planul orizontal,  $R = F - F_{fr}$ , accelerația mișcării corpului sub acțiunea forței  $F$  este  $a = \frac{R}{m} = \frac{F - F_{fr}}{m} = \frac{F}{m} - \mu g = 2 \frac{m}{s^2}$ . Distanța  $d$  străbătută de corp sub acțiunea forței  $F$  este  $d = \frac{L}{F} = 2,25$  m. Durata  $t_F$  în care este străbătută această distanță (durata acțiunii forței  $F$ ) poate fi determinată din ecuația spațiului în respectiva mișcare uniform-accelerată,  $d = v_0 t_F + \frac{a}{2} t_F^2$ , de unde,

$$t_F = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2ad} - v_0}{a} = 0,5 \text{ s.}$$

b) Viteza „finală”, atinsă de corp la încetarea acțiunii forței  $F$ , este:  $v_f = v_0 + at_F = 5 \frac{m}{s}$ . După încetarea acțiunii forței  $F$  asupra corpului acționează numai forța de frecare, ceea ce face ca accelerația corpului să devină:  $a_{fr} = \frac{-F_{fr}}{m} = -\mu g = -2 \frac{m}{s^2}$ . Rezultă că spațiul suplimentar străbătut de corp de la încetarea acțiunii forței  $F$  și pînă la oprire este  $s_{fr} = \frac{v_f^2}{-2a_{fr}} = 6,25$  m, deci spațiul total parcurs de corp pînă la oprire este  $s = d + s_{fr} = 8,5$  m.

c) Durata de la încetarea acțiunii forței  $F$  pînă la oprirea corpului este  $t_{fr} = \frac{v_f}{-a_{fr}} = 2,5$  s. Ecuațiile vitezei corpului în cele două părți ale mișcării sînt:

$$v(t) = v_0 + at = 4 + 2t, \text{ pentru } t \in [0, t_F],$$

$$v(t) = v_f + a_{fr}(t - t_F) = 5 - 2t, \text{ pentru } t \in [t_F, t_F + t_{fr}],$$

iar ecuațiile spațiului în cele două părți ale mișcării sînt:

$$x(t) = v_0 t + \frac{at}{2} = 4t + t^2, \text{ pentru } t \in [0, t_F],$$

respectiv

$$x(t) = d + v_f(t - t_F) + \frac{a_{fr}}{2}(t - t_F)^2 = -t^2 + 6t - 0,5, \text{ pentru } t \in [t_F, t_F + t_{fr}].$$

Reprezentările grafice cerute ale dependențelor de timp ale vitezei corpului, respectiv spațiului parcurs, de la începutul aplicării forței și pînă la oprirea corpului, sînt date în figurile F.B.48, a și b.

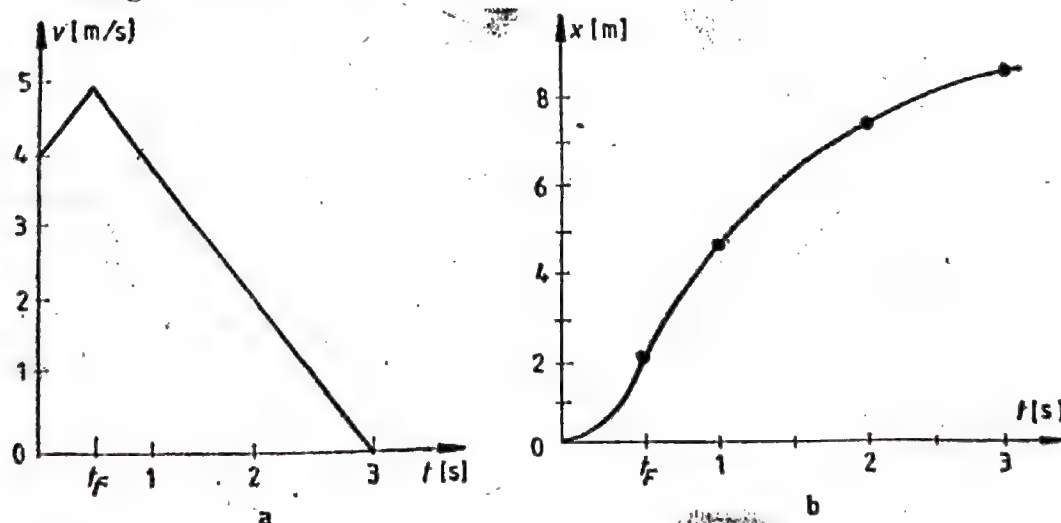


Fig. F.B.48

2°. a) Din expresia  $u = 240 \sin 100 \pi t$  (V) a (valorilor instantanee ale) tensiunii alternative aplicate la bornele circuitului se determină pulsația curentului alternativ  $\omega = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Rezultă că reactanțele inductivă, respectiv capacitivă, sînt  $X_L = L\omega = 400 \Omega$ ,  $X_C = \frac{1}{C\omega} = 50 \Omega$ , iar impedanța circuitului  $RLC$  serie este

$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = 350 \sqrt{2} \Omega$ . Din relația  $\tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$  rezultă că defazajul între tensiunea la bornele circuitului și intensitatea curentului electric care îl străbate este  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  radiani. Se obține expresia intensității instantanee a curentului din circuit  $i = \sqrt{2} I \sin(100 \pi t - \varphi) = \frac{\sqrt{2} U}{Z} \sin\left(100 \pi t - \frac{\pi}{4}\right)$ , de unde, în final  $i = \frac{240}{350\sqrt{2}} \sin\left(100 \pi t - \frac{\pi}{4}\right)$  (A).

b) Comparînd expresiile de mai sus ale intensității instantanee a curentului din circuit, găsim că valoarea efectivă a intensității curentului este  $I = \frac{240}{700}$  A. În mod asemănător, comparînd expresia din enunț a tensiunii instantanee la bornele circuitului cu cea teoretică,  $u = \sqrt{2} U \sin \omega t$ , reiese că tensiunea efectivă la bornele circuitului este  $U = \frac{240}{\sqrt{2}}$  V. Obținem valorile cerute ale puterilor activă, reactivă și aparentă,  $P = UI \cos \varphi = \frac{576}{14} \approx 41,14$  W,  $P_r = UI \sin \varphi = \frac{576}{14} \approx 41,14$  VAR,  $S = UI = \frac{576}{14} \sqrt{2} \approx 58,18$  VA.

c) Frecvența curentului alternativ pentru care are loc rezonanța este  $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{100\sqrt{2}}{8} \approx 17,7$  Hz. Valoarea efectivă a intensității curentului electric la rezonanță este

$$I = \frac{U}{R} = \frac{240}{350\sqrt{2}} \approx 0,485 \text{ A.}$$

3°. a) Forța gravitațională dintre două corpuri cu masele  $m_1$  și  $m_2$ , considerate punctiforme față de distanța dintre ele, situate la o distanță  $r$  unul față de altul, este o forță de atracție care acționează de-a lungul liniei ce unește corpurile și are valoarea  $F = K \frac{m_1 m_2}{r^2}$ , unde  $K$  este o constantă universală, care are aceeași valoare pentru orice pereche de corpuri din univers.

b) Alungirea unui corp de forma unei tije (fir) sub acțiunea unei forțe deformatoare este proporțională cu forța  $F$  deformatoare și cu lungimea  $l_0$  a corpului nedeformat, și invers proporțională cu aria  $S_0$  a secțiunii transversale a corpului nedeformat,  $\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{Fl_0}{S_0}$ , unde  $E$  este modulul de elasticitate longitudinal, numit și modulul lui Young.

c) Intensitatea  $I$  a curentului electric printr-un circuit este direct proporțională cu tensiunea electromotoare  $E$  din circuit și invers proporțională cu rezistența totală a circuitului,  $I = \frac{E}{R + r}$ , unde  $R$  este rezistența circuitului exterior, iar  $r$  este rezistența internă a sursei (surselor) de tensiune electromotoare din circuit.



4°. a) Greutatea  $G = mg$  a unui corp aflat pe un plan înclinat de unghiul  $\alpha$  se descompune într-o componentă „tangentială” (în lungul planului înclinat),  $G_t = G \sin \alpha$  și o componentă „normală” (perpendiculară pe planul înclinat)  $G_n = G \cos \alpha$  (v. și fig. F.B.49). În condițiile în care deplasarea corpului pe planul înclinat se face cu frecare (coeficientul de frecare fiind  $\mu$ ), forța de frecare cu planul înclinat este  $F_{fr} = \mu G_n = \mu G \cos \alpha$ . Rezultă că, pentru a ridica uniform corpul de greutate  $G$ , pe planul înclinat, în prezența frecării, este necesar ca forța de tracțiune să fie egală cu  $F_{tr} = G_t + F_{fr} = G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$ . Dacă lungimea planului înclinat este  $l$ , iar înălțimea planului este  $h (= l \sin \alpha)$ , lucrul mecanic efectuat de forța de tracțiune pentru a ridica pe planul înclinat corpul considerat este  $L_{ef} = F_{tr} l = G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) l$ . Lucrul mecanic util pentru ridicarea corpului înclinat fiind egal cu cel efectuat în absența frecării,  $L_u = G_t l = G \sin \alpha \cdot l$ , reiese că randamentul mașinii simple-plan înclinat este

$$\eta = \frac{L_u}{L_{ef}} = \frac{G \sin \alpha \cdot l}{G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) l} = \frac{1}{1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha}.$$

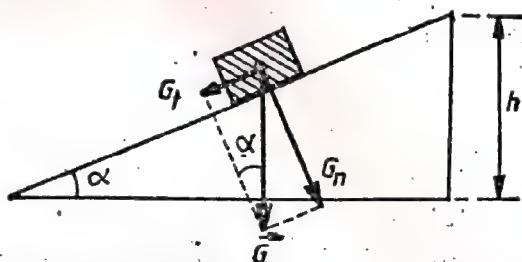


Fig. F.B.49

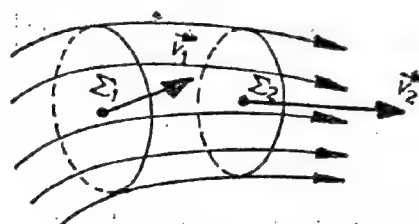


Fig. F.B.50

b) În condițiile unei curgeri staționare, masele  $\Delta m_1$ ,  $\Delta m_2$  ale cantităților de fluid care traversează într-o aceeași durată  $\Delta t$  două secțiuni oarecare  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  (fig. F.B.50) ale unui tub de curent sînt egale,  $\Delta m_1 = \Delta m_2$ , deci și debitele masice prin cele două secțiuni sînt, de asemenea, egale,

$$Q_{m1} = \frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t} = Q_{m2}.$$

Dacă, în plus, curgerea fluidului are loc în regim de incompresibilitate, cu alte cuvinte densitatea  $\rho_1$  a cantității de fluid (de masă  $\Delta m_1$ ) care a traversat secțiunea  $\Sigma_1$  în durată  $\Delta t$  este aceeași cu densitatea  $\rho_2$  a cantității de fluid (de masă  $\Delta m_2$ ) care a traversat secțiunea  $\Sigma_2$  în aceeași durată  $\Delta t$ , atunci și debitele volumice prin cele două secțiuni sînt, de asemenea, egale,

$$Q_{V1} = \frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_1}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\rho_1} = \frac{Q_{m1}}{\rho_1} = \frac{Q_{m2}}{\rho_2} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\rho_2} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t} = Q_{V2}.$$

În cazul în care secțiunile  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ , de arii  $S_1$ , respectiv  $S_2$ , sînt perpendiculare pe liniile de curent (deci pe direcțiile vitezelor  $v_1$ , respectiv  $v_2$ , din zonele secțiunilor), atunci

$$Q_{V1} = \frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{S_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} = S_1 v_1 = Q_{V2} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t} = \frac{S_2 v_2 \Delta t}{\Delta t} = S_2 v_2.$$

În concluzie, ecuația de continuitate, care corespunde curgerilor staționare, poate fi exprimată prin: constanța debitului masic, prin orice secțiune,  $Q_{m1} = Q_{m2}$  (cazul general), constanța debitului volumic,  $Q_{V1} = Q_{V2}$  (cazul curgerilor în regim de incompresibilitate), respectiv prin ecuația (utilă pentru stabilirea unor relații între vitezele de curgere prin diferite secțiuni),  $S_1 v_1 = S_2 v_2$  (valabilă dacă unghiurile formate de vitezele  $\bar{v}_1$ ,  $\bar{v}_2$  cu planele secțiunilor de arii  $S_1$ , respectiv  $S_2$ , sînt egale).



c) Capacitatea electrică a unui condensator este definită prin raportul dintre sarcina electrică  $Q$  de pe o armătură și diferența de potențial ( $V_A - V_B$ ) dintre cele două armături,  $C = \frac{Q}{V_A - V_B}$ . Deoarece sarcina totală (de un anumit semn) a unei baterii de condensatori legați în paralel este egală cu suma sarcinilor armăturilor legate la o aceeași bornă a bateriei (fig. F.B.51),

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = \sum_{i=1}^n Q_i$$

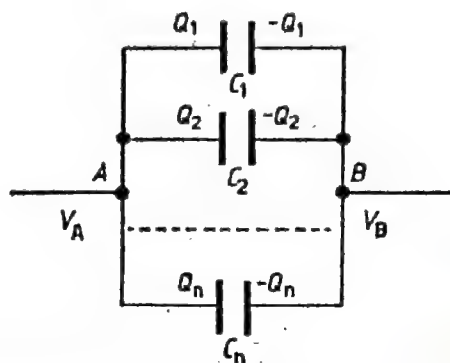


Fig. F.B. 51

capacitatea bateriei de condensatori legați în paralel, definită prin aceeași expresie ca și capacitatea unor condensatori, reiese ca fiind

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n}{V_A - V_B} = \frac{Q_1}{V_A - V_B} + \frac{Q_2}{V_A - V_B} + \dots + \frac{Q_n}{V_A - V_B} = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i$$

În concluzie, capacitatea unei baterii de condensatori legați în paralel este egală cu suma capacităților condensatorilor componenți.

X.1°. a) Masa cablului de acționare a ascensorului este  $m = \rho_l l_0 = 0,8 \cdot 25 = 20$  kg. Deoarece, la pornirea ascensorului, accelerația mișcării are sensul în sus, forța de inerție  $F_i = (M + m)a$  are sensul în jos, deci forța de tracțiune suportată de cablu la pornire este  $F_{tr} = G_{tot} + F_i = (M + m)(g + a) = (880 + 20)(9,8 + 2) = 10\,620$  N.

b) Pentru ca efortul unitar la tracțiune să nu depășească efortul unitar maxim admisibil este necesar ca  $\sigma_{tr} = \frac{F_{tr}}{S_0} \leq \sigma_{max}$ , de unde  $S_0 \geq \frac{F_{tr}}{\sigma_{max}} = 1,062 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ , deci ca aria secțiunii cablului (nedeformat) să fie mai mare sau cel puțin egală cu  $1,062 \text{ cm}^2$ .

c) Din legea lui Hooke, obținem  $\Delta l = \frac{F_{tr} l_0}{S_0 E} \leq \frac{\sigma_{max} l_0}{E} = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ . Rezultă că, în funcție de secțiunea aleasă pentru cablul ascensorului (mai mare sau cel puțin egală cu secțiunea minimă admisibilă  $S_{min} = 1,062 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ), alungirea absolută a cablului la pornire va fi mai mică sau cel mult egală cu alungirea maximă admisibilă,  $\Delta l_{max} = 1,25 \text{ cm}$ .

2°. a) Pulsatia tensiunii alternative, dată de sursă, este  $\omega = 2\pi\nu \approx 1\,256 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

Reactanțele inductivă, respectiv capacitivă, sînt  $X_L = L\omega \approx 8\Omega$ ,  $X_C = \frac{1}{C\omega} \approx 5\Omega$ ,

iar impedanța circuitului  $RLC$  serie considerat este  $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \approx 5\Omega$ . Rezultă că intensitatea efectivă a curentului în circuit este  $I = \frac{U}{Z} = 24 \text{ A}$ .

Pe această bază, pot fi determinate și tensiunile maxime la bornele rezistorului bobinei și, respectiv, condensatorului,  $U_{R, \max} = \sqrt{2}IR = 96\sqrt{2} \approx 135,8 \text{ V}$ ,  $U_{L, \max} = \sqrt{2}IX_L = 192\sqrt{2} \approx 271,5 \text{ V}$  și  $U_{C, \max} = \sqrt{2}IX_C = 120\sqrt{2} \approx 169,7 \text{ V}$ .

b) Tangenta unghiului de defazaj dintre tensiunea la bornele circuitului și intensitatea curentului în circuit este dată de expresia:  $\tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$ . Deoarece în enunț se cere tangenta unghiului de defazaj dintre curent și tensiunea la bornele circuitului (în ordinea inversată), avem

$$\tan \varphi_{IV} = -\tan \varphi = \frac{X_C - X_L}{R} = -0,75.$$

c) Frecvența de rezonanță a circuitului este dată de formula lui Thomson,

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 158 \text{ Hz}.$$

3°. a) Forța a cărei acțiune asupra unui corp determină mișcarea circulară uniformă a corpului se numește forță centripetă. În conformitate cu principiul al doilea al dinamicii, între această forță și accelerația centripetă  $\vec{a}_c$  există relația  $\vec{F}_c = m\vec{a}_c = -m\omega^2\vec{r}$ , este raza vectoare a corpului,  $\omega$  este viteza unghiulară a rotației sale, iar  $\vec{r}$  este raza vectoare a corpului față de punctul (sau axa) în jurul căruia se produce rotația. Forța centripetă este o forță reală (de interacțiune). Spre exemplu, pot îndeplini rolul de forță centripetă: forța elastică de tensiune a unui fir legat de corpul aflat în mișcare de rotație, forța gravitațională exercitată de către corpul central (în cazul sistemelor stelare), forța electrică exercitată de nucleul atomic asupra electronilor ș.a.

Principiile mecanicii sînt formulate pentru sisteme de referință inerțiale. Forțele inexistente în cadrul sistemelor de referință inerțiale, care nu corespund deci unor interacțiuni, dar care se manifestă totuși — și trebuie luate în considerație pentru a extinde domeniul de aplicare al principiului mecanicii (și) — în sistemele de referință neinerțiale, se numesc forțe complementare (pseudoforțe sau forțe de inerție). Forța complementară care se manifestă față de un sistem de referință neinerțial, aflat în mișcare de rotație față de un sistem de referință inerțial, se numește forță centrifugă (simbol  $\vec{F}_{cf}$ ). Deoarece un corp solidar legat de un sistem de referință neinerțial, aflat în rotație cu viteza unghiulară  $\omega$  față de un referențial inerțial, este în repaus — deci are o accelerație nulă — față de sistemul neinerțial considerat, deși asupra sa acționează forța reală (de interacțiune) centripetă  $\vec{F}_c = -m\omega^2\vec{r}$ , rezultă că — pentru a aplica principiul al doilea al dinamicii în acest caz — forța centrifugă  $\vec{F}_{cf}$  trebuie să îndeplinească relația  $\vec{F}_c + \vec{F}_{cf} = m\vec{a} = 0$ , de unde  $\vec{F}_{cf} = -\vec{F}_c = +m\omega^2\vec{r}$ .

Existența și chiar dependențele forței centrifuge de masa corpului, de viteza unghiulară  $\omega$  a rotației și de raza  $r$  a traiectoriei circulare pot fi evidențiate și studiate cu ajutorul unor experimente, în particular folosind mașina centrifugă (v. fig. F.B.52). Menționăm și aplicațiile forței centrifuge: separatorul centrifugal, suprainălțarea șinei exterioare pentru evitarea solicitării inegale a șinelor și chiar răsturnării vagoanelor la curbe ș.a.



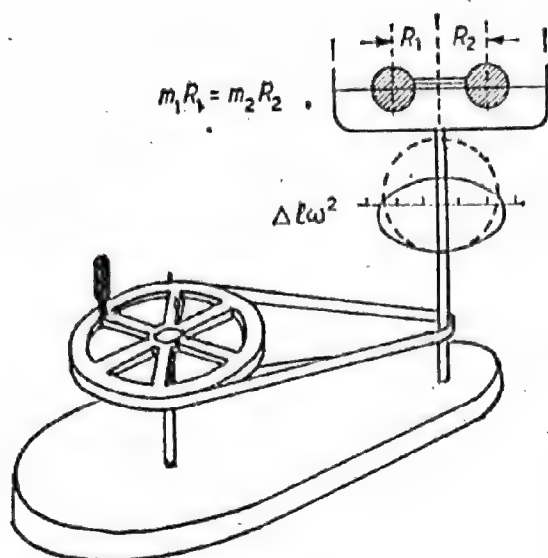


Fig. F.B.52

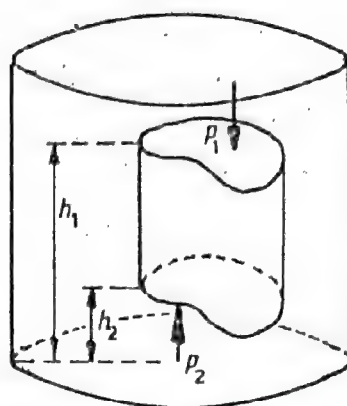


Fig. F.B.53

b) Se consideră un element de volum al lichidului de forma unui cilindru, ale cărui baze (având fiecare aria  $S$ ) sînt situate în plane orizontale, situate la înălțimile  $h_1$ , respectiv  $h_2$ , deasupra fundului vasului. Dacă  $p_1$  și  $p_2$  sînt presiunile exercitate de lichid asupra celor două baze (fig. F.B.53), diferența forțelor  $F_1 = p_1 S$ ,  $F_2 = p_2 S$  datorate acestor presiuni va trebui să fie egală — în cazul în care lichidul este în echilibru — cu greutatea  $G = mg = \rho Vg = \rho S(h_1 - h_2)g$  a elementului de lichid considerat ( $\rho$  este densitatea lichidului), astfel încît rezultanta forțelor care acționează asupra elementului de fluid să fie nulă,  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} = 0$ . Rezultă că  $F_2 - F_1 = (p_2 - p_1)S = G = \rho S(h_1 - h_2)g$ , de unde:  $p_2 - p_1 = \rho gh$ , unde  $h = h_1 - h_2$  este diferența de nivel dintre suprafețele la nivelul cărora se exercită, în lichid, presiunile  $p_1$  și  $p_2$ . Rezultatul obținut (numit și principiul fundamental al hidrostaticii) poate fi enunțat astfel: Diferența de presiune dintre două puncte dintr-un lichid în echilibru este numeric egală cu greutatea unei coloane din acel lichid care are ca bază unitatea de suprafață și ca înălțime distanța dintre planele care conțin punctele respective.

Dacă nivelul 1 corespunde suprafeței libere a lichidului la care presiunea coincide cu cea atmosferică  $H$ , iar nivelul 2 se găsește la adîncimea  $h$  în lichid, atunci presiunea  $p_2$  este  $p_2 = p_1 + \rho gh = H + \rho gh$ .

c) Procesul de dirijare — de către cîmpul electric aplicat între plăcile metalice (electrozii) unui vas cu soluție — a ionilor din soluție către electrozi și transformarea lor în atomi sau radicali prin neutralizare se numește electroliză.

Prin cîntărirea electrozilor înainte și la sfîrșitul electrolizei, efectuată pentru diferite durate  $t$  și intensități diferite  $I$  ale curentului electric care străbate vasul cu soluție, se constată că masa  $m$  de substanță separată dintr-un electrolit este proporțională cu intensitatea curentului prin vasul de electroliză și cu durata acesteia,  $m = KIt$  (prima lege a lui Faraday a electrolizei),  $K$  fiind echivalentul electrochimic al substanței separate din electrolit.

Studiul dependenței echivalentului electrochimic al diferitelor substanțe de masa atomică  $A$  și valența  $n$  a acestora evidențiază proporționalitatea echivalentului electrochimic cu masa atomică a substanței, invers proporționalitatea cu valența  $n$ , precum și faptul că valoarea expresiei  $\frac{Kn}{A}$  este o constantă universală

( $F \approx 96\,400$  C/echivalent-gram), numită număr al lui Faraday (prin echivalent-gram al unei substanțe se înțelege cantitatea din respectiva substanță, a cărei masă exprimată în grame este numeric egală cu raportul dintre masa atomică  $A$  și valența  $n$



a substanței). Dependențele constatate mai sus pot fi exprimate prin relația  $K = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n}$ , numită a doua lege (a lui Faraday) a electrolizei.

După cum a fost arătat prima dată de către Helmholtz (1881), legile electrolizei pot fi explicate dacă se admite că fiecare ion simplu are sarcina electrică  $e$ , fiecare ion dublu (corespunzând valenței  $n = 2$ ) are sarcina electrică  $2e$ , iar fiecare ion  $n$  — multiplu are sarcina electrică,  $ne$ , unde  $e = \frac{F}{N_A}$ ,  $N_A$  fiind numărul lui Avogadro.

Într-adevăr, trecerea prin soluție a unei sarcini electrice  $Q = It$  corespunde străbaterii soluției (între electrozi) de către  $\frac{Q}{ne}$  ioni cu valența  $n$ , deci depunerii la electrozi a unei cantități de substanță cu masa  $m = \frac{Q}{ne} \cdot m_c = \frac{N_A \cdot m_c}{nF} \cdot Q = \frac{A}{nF} \cdot It$ , unde  $m_c$  este masa ionului cu valența  $n$ . Se constată astfel că ipoteza lui Helmholtz conduce la sinteza celor două legi ale lui Faraday ale electrolizei. Sarcina electrică  $e = \frac{F}{N_A} \approx 1,602 \cdot 10^{-19}$  C se numește sarcină electrică elementară (ulterior, particula elementară cu sarcina electrică  $-e$  a fost numită electron).

Printre principalele aplicații ale electrolizei se numără: obținerea anumitor substanțe pe cale electrolitică (sodă caustică, sodă, hipoclorati, hidrogen ș.a.), obținerea unor metale din combinațiile lor naturale (electrometalurgia), obținerea de depuneri metalice pe suprafețele unor corpuri, în scopul protejării lor anticorozive (galvanostegia), modelarea metalelor și reproducerea — după anumite tipare — a unor obiecte (galvanoplastia).

4°. a) Acest subiect a fost tratat la I.5°.a.

b) Acest subiect a fost tratat la II.5°.c.

c)  $\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}$ , unde  $f$  este forța Lorentz care acționează asupra unei particule încărcate cu sarcina electrică  $q$ , aflată în mișcare cu viteza  $\vec{v}$  într-un cimp magnetic uniform de inducție  $\vec{B}$ . Menționăm faptul că direcția și sensul forței Lorentz pot fi determinate și cu ajutorul regulii mîinii stîngi (în cazul particulelor încărcate pozitiv), respectiv regulii mîinii drepte (în cazul particulelor încărcate negativ) (v. și fig. F.B.54).

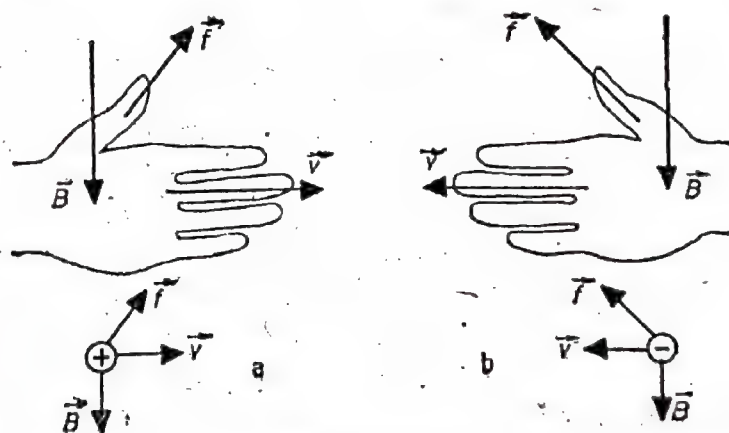


Fig. F.B.54

XI. 1°. a) Forța  $F_n$  de „apăsare” pe plan a corpului este dată de expresia (v. și fig. F.B.4)  $F_n = G - F \sin \alpha = mg - F \sin \alpha$ . Rezultă că forța de frecare dintre corp și suprafața orizontală este  $F_{fr} = \mu F_n = \mu(mg - F \sin \alpha) = 12,5$  N.

b) Deoarece forța activă este egală cu  $F \cos \alpha$ , accelerația imprimată corpului este  $a = \frac{F \cos \alpha - F_{fr}}{m} \approx 2,06 \frac{m}{s^2}$ .

c) Distanța  $d$  străbătută în durata  $\Delta t$  este  $d = \frac{a}{2} (\Delta t)^2 = 16,48 \text{ m}$ . Rezultă că lucrul mecanic efectuat de forța  $F$  este  $L = F \cos \alpha \cdot d \approx 713,6 \text{ J}$ .

2°. a) Introducerea șuntului trebuie să permită creșterea valorii maxime a intensității curentului electric măsurat de galvanometru de  $n = \frac{I'_{\max}}{I_{\max}} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-2}} = 20$  ori. Rezultă că rezistența șuntului trebuie să fie  $R_s = \frac{R_g}{n-1} = \frac{9,5}{19} = 0,5 \Omega$ .

b) În absența șuntului, tensiunea la bornele galvanometrului, când acul se află la jumătatea scalei este  $U = R \frac{I_{\max}}{2} \approx 0,2375 \text{ V}$ . În prezența șuntului, tensiunea la bornele galvanometrului când acul se află la jumătatea scalei este

$$U' = R_{\text{celr}} \frac{I'_{\max}}{2} = \frac{R_g R_s}{R_g + R_s} \cdot \frac{I_{\max}}{2n} = \frac{R_g^2}{R_g \cdot n} \cdot \frac{I_{\max}}{2n} = U$$

(tensiunea la bornele galvanometrului, atunci când acul se găsește la jumătatea scalei, este aceeași, atât în absența, cât și în prezența șuntului).

c) Introducerea rezistenței adiționale trebuie să permită creșterea valorii maxime a tensiunii măsurate cu galvanometrul de la valoarea  $U_{\max} = RI_{\max} = 0,475 \text{ V}$ , la valoarea  $U'_{\max} = 30 \text{ V}$ , deci de  $n' = \frac{U'_{\max}}{U_{\max}} = 63,16$  ori. Reiese că rezistența adițională trebuie să aibă valoarea  $R_A = R_g(n' - 1) = 590,6 \Omega$ .

3°. a) Deducerea din manual a valorii, direcției, sensului și punctului de aplicație al rezultantei a două forțe paralele de același sens se bazează pe „artificiul” adăugării la sistemul celor două forțe studiate a încă două forțe  $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ , avînd punctele de aplicație  $A_1, A_2$ , comune cu forțele  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ , care au direcția în lungul dreptei care unește punctele de aplicație  $A_1$  și  $A_2$ , și satisfac în plus relația  $\vec{f}_1 + \vec{f}_2 = 0$  (în consecință, rezultatele forțelor  $\vec{f}_1$  și  $\vec{f}_2$  și momentelor forțelor respective sînt nule; v. și fig. F.B.55). Fie  $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{f}_1$ ,  $\vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{f}_2$ , iar  $A'$  — punctul de intersecție al suporturilor (direcțiilor) rezultatelor  $\vec{R}_1$  și  $\vec{R}_2$ . Deoarece forțele au caracterul unor vectori „alunecători”, rezultantele  $\vec{R}_1, \vec{R}_2$  pot fi „deplasate” astfel încît punctul lor de aplicație să devină  $A'$  (v. fig. F.B.55). În punctul  $A'$ , rezultantele  $\vec{R}_1, \vec{R}_2$  pot fi descompuse după o direcție paralelă cu  $A_1A_2$  (rezultă componentele  $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ ) și după direcția  $A'A$  paralelă cu direcțiile forțelor  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  (după această direcție se reobțin — drept componente ale lui  $\vec{R}_1$ , respectiv  $\vec{R}_2$  — forțele  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$ ). Deoarece  $\vec{f}_1 + \vec{f}_2 = 0$ , reiese că rezultanta forțelor considerate are direcția  $A'A$ , paralelă cu direcțiile (comune ale) forțelor  $F_1$  și  $F_2$ , și valoarea  $R = F_1 + F_2$ . În figura F.B.55 am notat cu  $A$  — intersecția dreptei  $A_1A_2$  cu paralela dusă prin  $A'$  la direcția forțelor  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ ; deoarece rezultanta  $\vec{R}$  a forțelor  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  este de asemenea un vector alunecător și are direcția  $A'A$ , reiese că punctul  $A$  are și semnificația fizică de punct de aplicație al forțelor  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$ . Din asemănarea triunghiului  $A_1AA'$  cu cel format de forțele  $\vec{f}_1, \vec{F}_1$  și  $\vec{R}_1$  se obține  $\frac{A_1A}{AA'} = \frac{f_1}{F_1}$ , iar din asemănarea triunghiului  $A_2AA'$  cu cel format de forțele  $\vec{f}_2, \vec{F}_2$  și  $\vec{R}_2$ ,  $\frac{A_2A}{AA'} = \frac{f_2}{F_2}$ . Deoarece  $f_1 = |\vec{f}_1| = |\vec{f}_2| = f_2$ , din împărțirea membru cu membru a ultimelor două relații, rezultă că  $\frac{A_1A}{A_2A} = \frac{F_2}{F_1}$ .



cu alte cuvinte, punctul de aplicație  $A$  al rezultantei forțelor paralele și de același sens  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  împarte segmentul  $A_1A_2$  al punctelor de aplicație ale celor două forțe, în părți invers proporționale cu forțele respective (punctul de aplicație  $A$  este mai apropiat de punctul de aplicație  $A_1$  al forței mai mari).

Menționăm că, pornind de la faptul că rezultanta celor două forțe este  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , se poate obține poziția punctului de aplicație  $A$  al rezultantei și în următorul mod (mai simplu). Fie  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  — razele vectoriale ale punctelor de aplicație

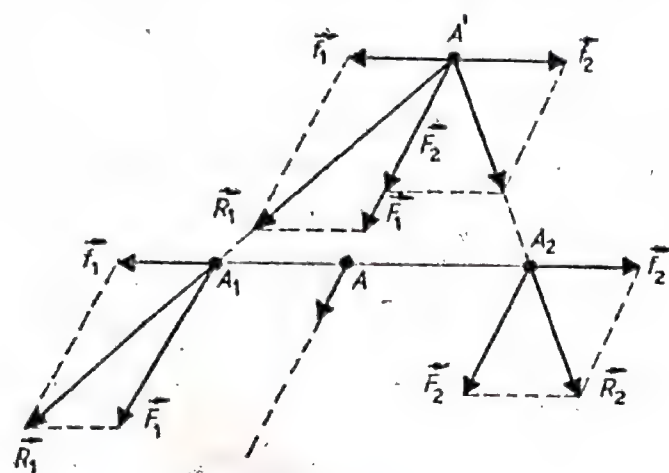


Fig. F.B.55

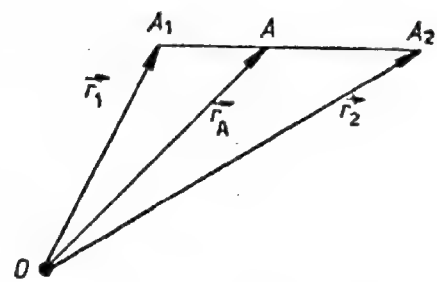


Fig. F.B.56

$A_1, A_2$  (fig. F.B.56), iar  $\vec{1}_F$  — vectorul unitar (versorul) direcției comune a forțelor  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  (v. fig. F.B.55). Rezultanta momentelor celor două forțe este

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = F_1 \vec{r}_1 \times \vec{1}_F + F_2 \vec{r}_2 \times \vec{1}_F = \frac{F_1 \vec{r}_1 + F_2 \vec{r}_2}{F_1 + F_2} \times (F_1 + F_2) \vec{1}_F = \vec{r}_A \times \vec{R},$$

unde  $\vec{r}_A$  este raza vectorială a punctului  $A$  de aplicație al rezultantei  $R$  a forțelor, față de aceeași origine  $O$ , arbitrar aleasă. Atît din relația obținută,  $\vec{r}_A = \frac{F_1 \vec{r}_1 + F_2 \vec{r}_2}{F_1 + F_2}$ ,

cît și din particularizări ale acestei relații prin alegerea convenabilă a originii (spre exemplu, dacă luăm pentru origine poziția  $O' \equiv A_1$ , avem  $\vec{r}_1' = \vec{A_1 A_1} = 0$ ,  $\vec{r}_2' = \vec{A_1 A_2}$  și  $\vec{r}_A' = \vec{A_1 A} = \frac{F_2}{F_1 + F_2} \cdot \vec{A_1 A_2}$ , de unde  $\vec{A A_2} = \vec{A_1 A_2} - \vec{r}_A' = \frac{F_1}{F_1 + F_2} \vec{A_1 A_2}$  și  $\frac{A_1 A}{A A_2} = \frac{F_2}{F_1}$ ), reiese că punctul  $A$  împarte segmentul  $A_1 A_2$  în părți invers proporționale cu forțele paralele, de același sens, care se compun.

b) Pornind de la expresiile elongației și vitezei în mișcarea oscilatorie armonică,  $y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ ,  $v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$ , precum și de la expresia pulsației oscilatorului elastic,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  (v. eventual VIII. 3°. b), deducem pentru energia cinetică, respectiv pentru energia de poziție în cîmpul forțelor elastice, expresiile

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0), \quad E_p = \frac{ky^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0).$$

Reiese că energia totală a oscilatorului armonic (de tip elastic) este dată de expresiile echivalente

$$E_t = E_c + E_p = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} = 2\pi^2 mA^2 \nu^2, \quad \text{unde } \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

este frecvența oscilației armonice. În condițiile în care, în descrierea mișcării oscilatorului armonic nu au fost luate în considerație procesele cu disipare de



energie sub formă de căldură (în particular, frecările) este normal ca energia mecanică totală a oscilatorului ideal (fără frecări) să rezulte constantă (invariantă în timp).

c) Descompunem viteza  $\vec{v}$  a unui purtător de sarcină electrică la intrarea într-un cîmp magnetic uniform în componentele  $\vec{v}_{\parallel}$  (paralelă cu direcția inducției  $\vec{B}$  a cîmpului magnetic) și  $\vec{v}_{\perp}$  (perpendiculară pe direcția inducției  $\vec{B}$ ; v. și fig. F.B.57). Deoarece forța Lorentz care acționează asupra purtătorului de sarcină electrică,  $\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B} = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}$ , este perpendiculară pe direcția inducției  $\vec{B}$ , reiese că asupra particulei nu va acționa nici o forță cu direcția inducției  $\vec{B}$ , deci componenta  $\vec{v}_{\parallel}$  rămîne invariantă în timp. În schimb, forța Lorentz — acționînd ca forță centripetă — provoacă o curbare a traiectoriei particulei din planul perpendicular pe direcția  $\vec{B}$ . Din condiția de echilibru între forța Lorentz și forța centrifugă,  $f = qv_{\perp}B = F_{ct} = \frac{mv_{\perp}^2}{r}$ , reiese expresia razei  $r$  a traiectoriei particulei

din planul perpendicular pe inducția  $\vec{B}$ ,  $r = \frac{mv_{\perp}}{qB}$ , precum și expresiile vitezei unghiulare și frecvenței rotației,  $2\pi\nu = \omega = \frac{v_{\perp}}{r} = \frac{qB}{m}$ . Se constată că mișcarea unei particule încărcate într-un cîmp magnetic uniform are — în cazul în care viteza inițială (la intrarea în zona cîmpului magnetic)  $\vec{v}$  este perpendiculară pe inducția  $\vec{B}$  a cîmpului — caracterul unei mișcări circulare uniforme (avînd mărimile caracteristice date de expresiile deduse mai sus); în cazul general, în care viteza  $\vec{v}$  a particulei încărcate la intrarea în zona cîmpului magnetic nu este perpendiculară pe inducția  $\vec{B}$ , particula prezintă o mișcare elicoidală, rezultată din compunerea precedentei mișcări circulare uniforme (cu viteza  $\vec{v}_{\perp}$ ) din planul perpendicular pe direcția inducției  $\vec{B}$  cu o mișcare uniform-rectilinie (cu viteza  $\vec{v}_{\parallel}$ ) în lungul direcției inducției  $\vec{B}$  (v. și fig. F.B.57). Faptul că, în cazul mișcărilor nerelativiste, frecvența rotației particulei încărcate în jurul direcției inducției  $\vec{B}$  a cîmpului magnetic uniform nu depinde de viteza  $v_{\perp}$  a mișcării particulei (rămînînd aceeași atunci cînd — în particular — viteza  $v_{\perp}$  crește) stă la baza principiului de funcționare al ciclo-tronului (dispozitiv pentru accelerarea particulelor încărcate).

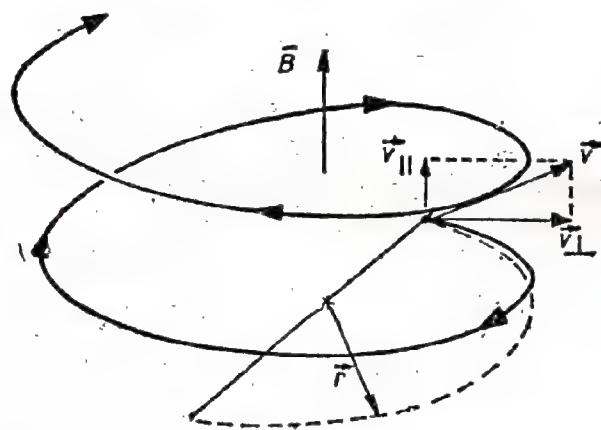


Fig. F.B.57

4°. a)  $T_l = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ , respectiv  $T_g = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ , unde  $T_l$  și  $T_g$  sînt perioada oscilatorului liniar armonic (elastic), respectiv perioada pendulului gravitațional,  $m$  este masa oscilatorului liniar,  $k$  este constanta elastică a resortului de care este legat corpul (oscilatorul) de masă  $m$ ,  $l$  este lungimea pendulului gravitațional, iar  $g$  este accelerația gravitațională.

b)  $\Phi = BS \cos \alpha$ , unde  $\Phi$  este fluxul magnetic într-un cimp magnetic uniform de inducție  $\vec{B}$ , printr-o suprafață de arie  $S$ , a cărei normală  $\vec{n}_S$  formează cu direcția inducției magnetice  $\vec{B}$  unghiul  $\alpha$  ( $=\widehat{\vec{n}_S, \vec{B}}$ ).

c)  $u - L \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{q}{C} + Ri$  sau

$$U \sin \omega t = \omega L I \sin \left( \omega t - \varphi + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{I}{\omega C} \sin \left( \omega t - \varphi + \frac{\pi}{2} \right) + RI \sin (\omega t - \varphi),$$

respectiv (în mărimi efective),  $U = I \sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} = IZ$ , unde  $u$ ,  $i$  și  $q$  sînt valorile instantanee (la momentul  $t$ ) ale tensiunii la bornele circuitului  $RLC$  serie, intensității curentului electric în circuit, respectiv sarcinii electrice de pe armăturile condensatorului,  $L$ ,  $C$  și  $R$  sînt inductanța bobinei, capacitatea condensatorului și, respectiv, rezistența rezistorului,  $U$  și  $I$  sînt tensiunea efectivă la bornele circuitului  $RLC$  serie, respectiv intensitatea efectivă a curentului prin acest circuit,  $\omega$  este pulsația tensiunii alternative aplicate la bornele circuitului,

$\varphi = \arctg \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$  este defazajul dintre tensiunea la bornele circuitului  $RLC$  serie și intensitatea curentului prin acest circuit, iar  $Z$  este impedanța circuitului  $RLC$  serie considerat.

XII. 1°. a) Fie  $M$  locul în care se întilnesc cele două mașini. Deoarece  $\frac{AM}{MB} = \frac{5}{8}$ , reiese că  $\frac{AM}{AM + MB} = \frac{5}{13}$ , deci  $AM = \frac{5}{13} \cdot d = 10$  km, iar  $MB = d - AM = 16$  km. Valoarea în unități SI a vitezei  $v_0$  este  $v_0 = \frac{14,4 \cdot 10^3}{3600} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Notăm cu  $t_i$  durata mișcării mașinilor pînă la întilnirea lor în punctul  $M$ . Conform enunțului, în momentul întilnirii  $v_1(t_i) = v_0 + at_i = v_2$ . Deoarece mișcarea mașinii 1 este uniform-accelerată, viteza sa medie pe distanța  $AM$  este

$$v_{m1} = \frac{v_0 + v_1(t_i)}{2} = v_0 + \frac{at_i}{2}, \text{ deci } \frac{AM}{MB} = \frac{v_{m1}}{v_2} = \frac{v_0 + \frac{at_i}{2}}{v_0 + at_i} = \frac{5}{8}. \text{ Rezultă că } 3v_0 = at_i,$$

de unde  $v_2 = v_0 + at_i = 4v_0 = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}} \left( = 57,6 \frac{\text{km}}{\text{h}} \right)$ . În final, obținem  $t_i = \frac{BM}{v_2} = 10^3$  s

și  $a = \frac{3v_0}{t_i} = 1,2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

b) Distanța  $d'$  dintre mașini după  $t = 10$  s de la întilnire se determină în baza relației  $d' = v_1(t_i)t + \frac{at^2}{2} + v_2t = 2v_2t + \frac{at^2}{2} = 320,6$  m.

c) Deoarece mișcarea mașinii 2 decurge rectiliniu și uniform, asupra pendulului gravitațional aflat în această mașină acționează numai forța greutatei sale,  $F_2 = G_2 = m_2g$ , deci accelerația imprimată pendulului este  $g$ , iar perioada de oscilație a respectivului pendul este dată de expresia uzuală,  $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ , unde  $l$  este lungimea pendulului.

În cazul pendulului gravitațional 1, asupra acestuia acționează, pe lîngă forța corespunzătoare de greutate  $G_1 = m_1g$  (avînd direcția verticalei), și forța de inerție  $\vec{F}_{i1} = -m_1\vec{a}$ , avînd direcția orizontală a accelerației  $\vec{a}$ , însă sensul opus (v. și



fig. F.B.58). Se constată că rezultanta forțelor care acționează asupra pendulului gravitațional aflat în mașina 1,  $\vec{R}_1 = m_1 \vec{g} - m_1 \vec{a}$ , are modulul  $|\vec{R}_1| = m_1 \sqrt{g^2 + a^2}$ , cu alte cuvinte că lucrurile se petrec ca și când pendulul 1 s-ar găsi într-un câmp gravitațional de accelerație (intensitate) efectivă  $\vec{g}_1 = \vec{g} - \vec{a}$ , avînd modulul  $|\vec{g}_1| = \sqrt{g^2 + a^2}$ . Rezultă că expresia perioadei de oscilație a pendulului gravitațional aflat în mașina 1 este  $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{l^2}{g^2 + a^2}}$ .

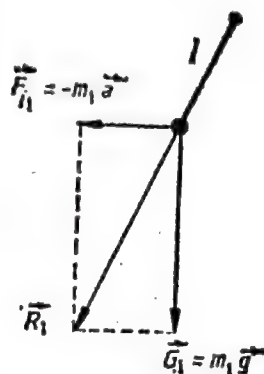


Fig. F.B.58

2°. a) Căderea de tensiune pe sursă  $u = E - RI$  are valoarea  $u = 24 - 4 \cdot 5 = 4V$ .

b) Puterea dezvoltată de sursă este  $P = EI = 120 \text{ W}$ , iar puterea disipată sub formă de căldură în rezistor este  $P_d = RI^2 = 100 \text{ W}$ .

c) Inducția cîmpului magnetic produs de curentul electric de intensitate  $I$  care străbate un conductor practic infinit lung, la distanța  $r$  de conductor este

$$B = \mu \cdot \frac{I}{2\pi r} = 10^{-4} \text{ T}.$$

3°. a) Condiția necesară și suficientă ca un punct material supus la legături să fie în echilibru este ca rezultanta forțelor efectiv aplicate asupra punctului material și a forțelor de legătură să fie egală cu zero (prin forțe de legătură se înțeleg reacțiunile suprafețelor sau curbilor prin care se realizează legăturile).

b) Abaterea unei unde de la direcția inițială de propagare la trecerea pe lângă obstacole și la traversarea fantelor se numește difracție. Suprapunerea (compunerea) neperturbată în același loc, dintr-un mediu, a două sau mai multe unde de aceeași lungime de undă (sau aceeași pulsație) se numește interferență.

c) Un amper este intensitatea unui curent electric constant, care fiind stabilit prin două conductoare rectilinii, paralele, foarte lungi, așezate în vid la distanța de 1 m unul de altul, determină exercitarea unei forțe de  $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$  pe fiecare metru de lungime.

4°. a) Fie  $h$  și  $x (< h)$  înălțimile deasupra Pământului ale punctului  $A$  din care se lasă să cadă un corp de masă  $m$ , respectiv a punctului  $B$  prin care trece corpul considerat în căderea sa liberă. Deoarece energia cinetică a corpului în punctul  $A$  este nulă,  $E_{cA} = 0$ , energia totală a corpului în  $A$  este  $E_{tA} = E_{cA} + E_{pA} = E_{pA} = mgh$ . Deoarece distanța coborită de corp între punctele  $A$  și  $B$  este  $AB = h - x$ , viteza atinsă de corp în punctul  $B$  este  $v_B = \sqrt{2gAB} = \sqrt{2g(h - x)}$ , iar energia cinetică a corpului în  $B$  este  $E_{cB} = \frac{m}{2} v_B^2 = mg(h - x)$ ; reiese că energia totală a corpului (sistemului fizic Pământ-corp) în punctul  $B$  este  $E_{tB} = E_{cB} + E_{pB} = mg(h - x) + mgx = mgh$ . Întrucît poziția punctului  $B$  (în interiorul segmentului parcurs de corp în cursul căderii sale libere, pornind din  $A$ ) este arbitrară (cu alte



cuvinte,  $x$  poate lua orice valoare între 0 și  $h$ ), faptul că energia totală în punctul  $B$  (de „cotă”  $x$ ) nu depinde de înălțimea  $x$  a acestui punct deasupra Pământului arată că energia mecanică (totală) a sistemului fizic Pământ-corp (punct material) considerat se conservă în timpul căderii libere (fără frecare).

b) Pornind de la expresia  $B = \mu \frac{NI}{l}$  a inducției magnetice în interiorul unei bobine cu  $N$  spire, având aria secțiunii egală cu  $S$  ( $l$  este lungimea înfășurării bobinei, iar  $\mu$  este permeabilitatea miezului bobinei), se determină fluxul magnetic  $\Phi_1$  printr-o spirală a bobinei,  $\Phi_1 = BS$ , respectiv fluxul magnetic total prin (toate) cele  $N$  spire,  $\Phi = N\Phi_1 = NBS = \mu \frac{N^2 S}{l} I$ . Deoarece inductanța unui circuit electric este definită prin relația  $L = \frac{\Phi}{I}$ , găsim că inductanța bobinei având mărimile caracteristice indicate mai sus este dată de expresia  $L = \mu \frac{N^2 S}{l}$ .

c) Variația în durata  $\Delta t$  a fluxului magnetic printr-un circuit delimitat de un conductor rectiliniu, de lungime  $l$ , deplasat cu viteza constantă  $\bar{v}$ , perpendiculară pe liniile de câmp magnetic este dată de expresia (v. și fig. F.B.59)  $\Delta\Phi = B\Delta S = -Blv\Delta t$ , unde  $B$  este inducția câmpului magnetic uniform în care se produce deplasarea conductorului. Înlocuind expresia obținută a lui  $\Delta\Phi$  în legea Faraday a inducției electromagnetice,  $e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ , găsim tensiunea electromotoare e indusă în conductorul mobil,  $e = Blv$ .

Sensul t.e.m. este dat de regula mîinii drepte (v. fig.F.B.59).

XIII. 1°. a) Componentele paralele cu planul înclinat („tangențiale”) ale forței  $F$ , respectiv greutateii  $G$ , sînt date de expresiile:  $F_t = F \cos \alpha$ ,  $G_t = G \sin \alpha = mg \sin \alpha$ , iar componentele perpendiculare (normale) pe planul înclinat ale aceluiași forțe sînt (v. fig. F.B.60):  $F_n = F \sin \alpha$ ,  $G_n = G \cos \alpha = mg \cos \alpha$ .

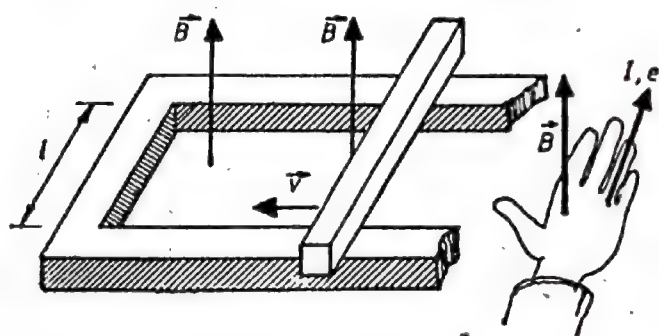


Fig. F.B.59

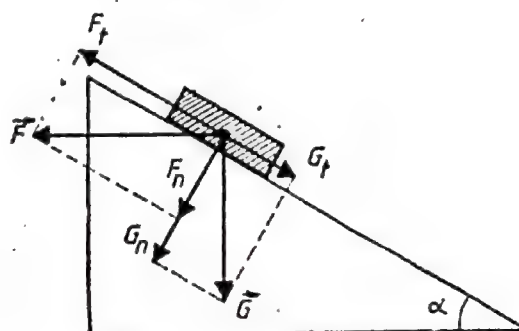


Fig. F.B.60

Pentru ca, în absența frecărilor, corpul să fie menținut în repaus pe planul înclinat, este necesar ca  $F_t = G_t$ , de unde rezultă că  $F \cos \alpha = mg \sin \alpha$  și  $m = \frac{F}{g} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5,77 \text{ kg}$ .

Reacțiunea  $N$  a planului înclinat este dată de expresia

$$N = F_n + G_n = F \sin \alpha + mg \cos \alpha = \frac{200}{\sqrt{3}} \approx 115,5 \text{ N}.$$

b) Forța de frecare a corpului cu planul orizontal este dată de expresia  $F_{fr} = \mu F_n = \mu G_n = \mu mg \cos \alpha$ . Lucrul mecanic efectuat pînă la oprirea corpului, pentru învingerea forței de frecare,  $L_{fr} = F_{fr} l = \mu mgl$ , este egal cu variația energiei potențiale a corpului, luată cu semnul schimbat,  $L = -\Delta E_p$ , deci  $\mu mgl = mgh$ , de unde  $\mu = \frac{h}{l} = 0,5$ .

c) Energia cinetică  $E_{c2}$  a corpului atunci cînd acesta a parcurs jumătate din distanța  $l$ , pe planul orizontal, se determină din legea conservării energiei,

$$E_{t1} = E_{p1} = mgh = E_{c2} + E_{p2} + L_{tr2} = E_{c2} + \mu mg \cdot \frac{l}{2},$$

de unde

$$E_{c2} = mg \left( h - \mu \cdot \frac{l}{2} \right) = \frac{1000}{\sqrt{3}} \approx 577,3 \text{ J.}$$

2°. a) În conformitate cu prima lege a lui Kirchhoff, scrisă pentru circuitul serie considerat,  $E_1 + E_2 = (r_1 + r_2 + R_1)I$ , de unde  $I = \frac{E_1 + E_2}{r_1 + r_2 + R_1} = 0,6 \text{ A}$ . Căderea de tensiune în circuitul exterior este  $U = R_1 I = 6 \text{ V}$ , iar tensiunile la bornele celor două generatoare sînt  $U_{b1} = E_1 - r_1 I = 3,7 \text{ V}$ , respectiv  $U_{b2} = E_2 - r_2 I = 2,3 \text{ V}$ .

b) Numărul de electroni care trec printr-o secțiune a circuitului în durata  $t = 10 \text{ s}$  este  $N = \frac{Q}{e} = \frac{It}{e} = 3,75 \cdot 10^{19}$  electroni.

c) Rezistența echivalentă grupării derivație formată din rezistorii cu rezistențele electrice  $R_1$  și  $R_2$  este  $R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10}{3} \Omega$ . Intensitatea  $I'$  a curentului electric care străbate generatoarele în cazul în care în paralel cu rezistorul  $A$  (de rezistență  $R_1$ ) se leagă rezistorul  $B$  (de rezistență  $R_2$ ) este  $I' = \frac{E_1 + E_2}{r_1 + r_2 + R_p} = 1,35 \text{ A}$ . Ținînd seamă că tensiunea la bornele grupării derivație formate din cei 2 rezistori va fi  $U_p = R_p I'$ , intensitățile  $I'_1, I'_2$  ale curentilor electrice care vor străbate rezistorul  $A$ , respectiv rezistorul  $B$ , vor fi  $I'_1 = \frac{U_p}{R_1} = \frac{R_p}{R_1} \cdot I' = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I' = 0,45 \text{ A}$ ,  $I'_2 = \frac{U_p}{R_2} = \frac{R_p}{R_2} \cdot I' = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I' = 0,9 \text{ A}$ .

3°. a) Variația energiei cinetice a unui punct material, care se deplasează în raport cu un sistem de referință inerțial, este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă care acționează asupra punctului material în timpul acestei variații,

$$\Delta E_c = E_{c2} - E_{c1} = L,$$

unde  $\Delta E_c$  este variația energiei cinetice a punctului material,  $E_{c2}$  și  $E_{c1}$  sînt energia cinetică în starea finală, respectiv energia cinetică în starea inițială de mișcare, iar  $L$  este lucrul mecanic al forței rezultante.

b) Un corp cufundat într-un fluid în repaus este împins cu o forță verticală de jos în sus, egală cu greutatea volumului de fluid dezlucuit de corp,  $F_A = G_f (= \rho h S g)$ , unde  $F_A$  este forța arhimedică,  $G_f$  este greutatea fluidului dezlucuit de corp,  $\rho$  este densitatea fluidului,  $h$  și  $S$  sînt înălțimea, respectiv aria secțiunii corpului de formă cilindrică,  $g$  este accelerația gravitațională (expresia din paranteză dă greutatea fluidului dezlucuit numai în cazul corpurilor de formă cilindrică).

c) Inducția unui cîmp magnetic uniform este o mărime fizică vectorială, al cărei modul este egal cu raportul dintre forța cu care acel cîmp magnetic acționează asupra unui conductor rectiliniu, perpendicular pe liniile cîmpului magnetic, și produsul dintre intensitatea curentului din conductor și lungimea conductorului aflat în cîmp magnetic,  $B = \frac{F}{Il}$ . O definiție mai generală (incluzînd direcția și sensul inducției magnetice, valabilă și pentru cîmpuri magnetice neuniforme) a



inducției magnetice poate fi dată în baza expresiei contribuției  $d\vec{F}$  a unui element foarte scurt (diferențial) de conductor, de lungime  $d\vec{l}$ , străbătut de un curent electric de intensitate  $I$ , la forța cu care cîmpul magnetic studiat acționează asupra conductorului,  $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$  (v. și fig. F.B.61).

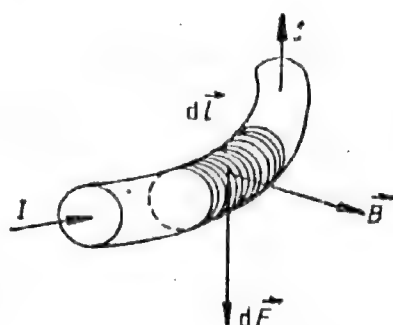


Fig. F.B.61

4°. a) Acest subiect a fost tratat la II.4°.a.

b) Fie  $O$  punctul în care se găsește sarcina punctiformă  $Q$  al cărei potențial electric în punctul  $M$  din spațiu urmează să-l determinăm, iar  $N$  un punct pe semidreapta  $OM$ , îndeplinind condiția  $r_N = ON > OM = r_M$ . Vom împărți segmentul  $MN$  în  $n$  părți de aceeași lungime, prin punctele (situate pe  $MN$ )  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ :

$$MP_1 = P_1P_2 = \dots = P_{n-1}N = \Delta r = \frac{MN}{n} = \frac{r_N - r_M}{n}, \text{ unde } n \text{ este un întreg mult}$$

mai mare decât raportul  $\frac{r_N - r_M}{r_M}$ ,  $n \gg \frac{r_N - r_M}{r_M}$ , deci  $\Delta r = \frac{r_N - r_M}{n} \ll r_M$ . Fie

$k$  un întreg cuprins între  $0$  și  $n-1$ . În condițiile în care  $P_0 = M$ , iar  $P_n = N$ , avem  $r_k = OP_k = OM + MP_k = r_M + k\Delta r$ , respectiv  $r_{k+1} = r_M + (k+1)\Delta r$ . Deoarece  $r_{k+1} - r_k = \Delta r \ll r_k, r_{k+1}$ , distanțele  $r_k$  și  $r_{k+1}$  sînt aproximativ egale; se știe că în aceste condiții ( $r_k \approx r_{k+1}$ ) diferitele tipuri de medii (aritmetică, geometrică, armonică etc.) ale  $r_k$  și  $r_{k+1}$  sînt practic egale, ceea ce permite evaluarea forței medii cu care sarcina  $Q$  acționează asupra unei sarcini punctiforme  $q$ , aflată în interiorul segmentului  $P_kP_{k+1}$  prin expresia  $F_{\text{mediu}, P_kP_{k+1}} = \sqrt{F_{P_k} \cdot F_{P_{k+1}}} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon r_k r_{k+1}}$ .

Lucrul mecanic efectuat asupra sarcinii  $q$ , în cursul deplasării acestei sarcini din  $P_k$  în  $P_{k+1}$  este  $L_{P_kP_{k+1}} = F_{\text{mediu}, P_kP_{k+1}}(r_{k+1} - r_k) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_{k+1}} \right)$ . Rezultă că lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea sarcinii  $q$  între punctele  $M$  și  $N$  este

$$L_{MN} = \sum_{k=0}^{n-1} L_{P_kP_{k+1}} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_n} \right) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{OP_0} - \frac{1}{OP_n} \right) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r_M} - \frac{1}{r_N} \right).$$

Pornind de la definiția potențialului electric într-un punct ca mărimea fizică egală cu raportul dintre lucrul mecanic efectuat de cîmpul electric la deplasarea unui corp de probă încărcat, din acel punct  $M$  în punctul de referință  $N$  arbitrar ales, și sarcina acelui corp  $V_M = \frac{L_{MN}}{q}$  și, alegînd punctul  $N$  de referință la infinit  $r_N \rightarrow \infty$ , obținem pentru potențialul electric creat de o sarcină punctiformă  $Q$  expresia

$$V_M = \frac{L_{q, M \rightarrow \infty}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_M}.$$

c) Din condiția de egalitate a forței Lorentz  $f = qvB$ , care acționează asupra unei particule încărcate electric într-un cîmp magnetic uniform, îndeplinind rolul



de forță centripetă, cu forța centrifugă,  $F_{cf} = \frac{mv^2}{r}$ , obținem:  $qvB = \frac{mv^2}{r}$ , de unde reiese că expresia vitezei unghiulare a mișcării circulare uniforme, efectuată (pe circumferința de rază  $r$ ) de particula încărcată, în condițiile indicate, este

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}.$$

**XIV. 1°.** a) Pornind de la expresia forței de frecare dintre un corp și o suprafață orizontală,  $F_f = \mu G = \mu mg$ , se determină forțele de frecare între planul orizontal și corpul 1,  $F_{f1} = \mu m_1 g = 20$  N, respectiv corpul 2,  $F_{f2} = \mu m_2 g = 5$  N. Rezultanta forțelor care acționează asupra sistemului format de cele două corpuri este  $R = F - F_{f1} - F_{f2} = 75$  N, iar accelerația imprimată sistemului este  $a = \frac{R}{m_1 + m_2} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

Asupra corpului A (de masă  $m_1$ ) acționează forța „activă”  $F$ , iar în sensul opus forței  $F$ , forța de frecare  $F_{f1}$ , forța de frecare  $F_{f2}$  (deoarece corpul A trebuie să „împingă” corpul B) și forța de inerție  $F_{i2} = m_2 a = 15$  N, datorată mișcării accelerate a corpului B. Reiese că rezultanta  $R_1$  a forțelor care acționează asupra corpului A este  $R_1 = F - F_{f1} - F_{f2} - F_{i2} = 60$  N, ceea ce corespunde și valorii obținute pentru accelerația sistemului (deci și a corpului A),  $R_1 = m_1 a$ .

Forța „activă”  $F_2$  care acționează — prin corpul A — asupra corpului B este egală cu diferența dintre forța  $F$  și forțele de frecare  $F_{f1}$ , respectiv de inerție  $F_{i1} = m_1 a = 60$  N, care acționează asupra corpului A,  $F_2 = F - F_{f1} - F_{i1} = 20$  N. Asupra corpului B acționează deci forța „activă”  $F_2$  și — în sensul opus — forța de frecare  $F_{f2}$ . Rezultanta  $R_2$  a forțelor care acționează asupra corpului B este  $R = F_2 - F_{f2} = 15$  N, ceea ce corespunde și valorii obținute pentru accelerația sistemului (deci și a corpului B),  $R_2 = m_2 a$ .

b) Viteza maximă  $v_{\max}$  este atinsă de sistem în momentul  $t$  al încetării acțiunii forței „active”,  $v_{\max} = at = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . După încetarea acțiunii forței „active”  $F$ , asupra sistemului mai acționează numai forțele de frecare  $F_{f1}$  și  $F_{f2}$ , deci corpurile vor avea o mișcare uniform-încetinită, cu accelerația  $a' = -\frac{F_{f1} + F_{f2}}{m_1 + m_2} = -\mu g = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

Spațiul  $s_F$  parcurs în durata  $t$  a acțiunii forței  $F$  este  $s_F = \frac{a}{2} t^2 = 6$  m. Transcriind formula lui Galilei,  $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$  pentru mișcarea sistemului format de cele două corpuri de la încetarea acțiunii forței  $F$  și pînă la oprire, găsim că  $-v_{\max}^2 = 2a's'$ , unde  $s'$  este spațiul parcurs în acest timp. Rezultă că  $s' = -\frac{v_{\max}^2}{2a'} = 18$  m, deci spațiul total parcurs de corpuri pînă la oprire este  $s = s_F + s' = 24$  m.

c) Durata  $t'$  a mișcării uniform-încetinite (sub acțiunea exclusivă a forțelor de frecare) a sistemului este  $t' = -\frac{v_{\max}}{a'} = 6$  s, deci durata totală a mișcării sistemului este  $T = t + t' = 8$  s. Rezultă că dependența  $v(\tau)$  a vitezei sistemului de durata  $\tau$  de la aplicarea forței  $F$  este  $v(\tau) = a\tau$ , pentru  $\tau \in [0, t]$ ,  $v(\tau) = v_{\max} + a'(\tau - t)$ , pentru  $\tau \in [t, T]$ , iar dependența  $x(\tau)$  a spațiului parcurs pentru aceeași durată (moment)  $\tau$  este  $x(\tau) = \frac{a\tau^2}{2}$ , pentru  $\tau \in [0, t]$ , respectiv

$x(\tau) = s_F + v_{\max}(\tau - t) + \frac{a'}{2}\tau^2$ , pentru  $\tau \in [t, T]$ . Reprezentările grafice solicitate ale dependențelor  $v(\tau)$ ,  $x(\tau)$  sînt date în figurile F.B.62, a și b.

2°. a) Pe baza formulei lui Thomson, obținem  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

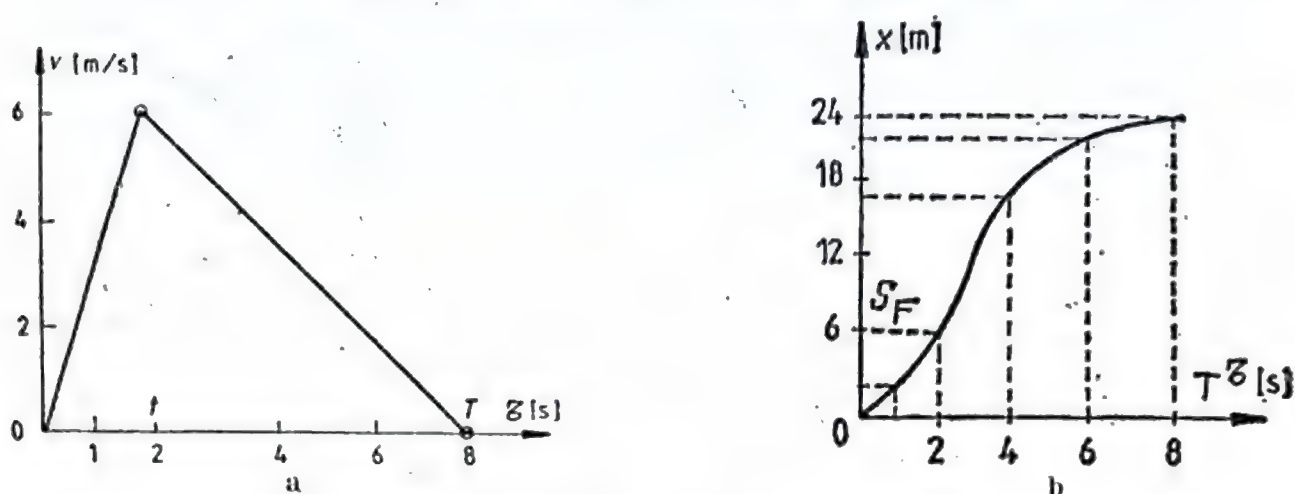


Fig. F.B.62

b) Pulsatia curentului alternativ este  $\omega = 2\pi\nu = 2 \cdot 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Reactanțele inductivă, respectiv capacitivă, sînt  $X_L = L\omega = 20 \Omega$ ,  $X_C = \frac{1}{C\omega} = 500 \Omega$ , iar impedanța circuitului este

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \approx 503 \Omega.$$

c) Pornind de la expresia  $\text{tg } \varphi_{U/I} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$ , unde  $\varphi_{U/I}$  este defazajul între tensiunea la bornele circuitului RLC serie și intensitatea curentului care îl străbate, reiese că pentru defazajul  $\varphi$  dintre curent și tensiunea la bornele circuitului (invers) avem

$$\frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R} = \text{tg } \varphi = 1 \quad \left( \text{pentru } \varphi = \frac{\pi}{4} \right),$$

deci pulsația  $\omega$  a curentului alternativ pentru care  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  îndeplinește condiția  $LC\omega^2 + RC\omega - 1 = 0$ . Singura soluție pozitivă a ecuației de mai sus este  $\omega = \frac{\sqrt{R^2C^2 + 4LC} - RC}{2LC} = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Rezultă că frecvența curentului pentru care defazajul dintre curent și tensiunea la bornele circuitului este  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , este

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{R^2C^2 + 4LC} - RC}{4\pi LC} \approx 795 \text{ Hz}.$$

3°. a) Solidul rigid liber (care nu este supus la legături: nu este suspendat, nu are o bază de sprijin ș.a.m.d.) este în echilibru de translație, cînd rezultanta sistemului de forțe care acționează asupra lui este zero,  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0$ .

Solidul rigid liber este în echilibru de rotație cînd se află în repaus sau cînd se rotește uniform în jurul unei axe. Pentru a fi îndeplinite aceste condiții este necesar și suficient ca momentul resultant al forțelor aplicate solidului să fie nul,  $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = 0$ .



b) Presiunea exercitată pe o suprafață oarecare a unui lichid aflat în repaus se transmite în toate direcțiile și cu aceeași intensitate în tot lichidul, cât și la pereții vasului care îl conține.

c) Potențialul electric într-un punct  $M$  este o mărime fizică egală cu raportul dintre lucrul mecanic efectuat de cîmp la deplasarea unui corp de probă încărcat, din acel punct în punctul de referință arbitrar ales, și sarcina acelui corp,  $V_M = \frac{L}{q}$ .

De regulă, punctul de referință — pînă la care se face deplasarea — este ales la distanță infinită de zona spațială pentru care se definește potențialul electric.

4°. a) Mișcarea oscilatorie a unui corp de masă  $m$ , suspendat de un fir inextensibil de lungime  $l$  (pendul gravitațional) poate fi descrisă prin lungimea orientată ( $x > 0$  pentru deplasări la dreapta, iar  $x < 0$  pentru deplasări la stînga poziției  $O$ , de echilibru)  $x$  a deplasării — în lungul circumferinței de rază  $l$  — față de poziția  $O$  de echilibru a pendulului (v. fig. F.B.63). Componenta tangențială la circumferința descrisă de corp a greutateii  $G$  a acestuia  $G_t = G \sin \theta$  joacă rolul de forță în lungul direcției (curbilinii)  $x$  de mișcare. Pentru ca noțiunea de perioadă proprie de oscilație să-și aibă sens (oscilațiile pendulului gravitațional să fie armonice) este necesar ca forța  $F_x = -G \sin \theta$  să fie proporțională cu deplasarea  $x$ , ceea ce se întîmplă — avînd în vedere că  $\theta = \frac{x}{l}$  (dacă  $\theta$  este măsurat în radiani)

— doar dacă  $\sin \theta \approx \theta \left( = \frac{x}{l} \right)$ , aproximație valabilă pentru  $\theta \ll 1$  radian, deci în cazul micilor oscilații. Constatăm că, în cazul micilor oscilații ale pendulului gravitațional, forța care acționează în lungul direcției  $x$  a circumferinței de rază  $l$ ,

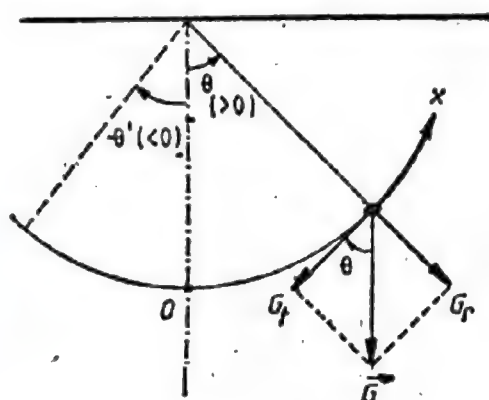


Fig. F.B.63

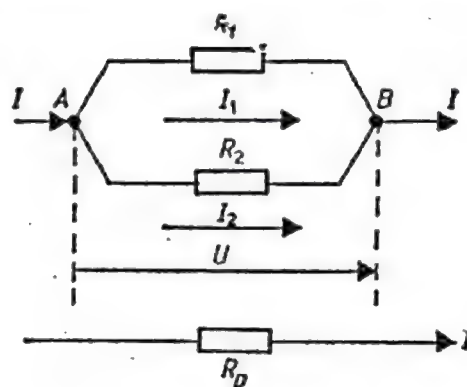


Fig. F.B.64

$F_x = -G \sin \theta \approx -\frac{mg}{l} x$  este echivalentă cu cea exercitată de un resort de constantă elastică  $k = \frac{mg}{l}$ . Rezultă că perioada proprie a micilor oscilații ale pendulului gravitațional poate fi dedusă din expresia perioadei proprii a oscilatorului armonic elastic  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ , dacă pentru constanta  $k$  se ia  $k = \frac{mg}{l}$ ; se obține astfel

$$T_{\text{micl osc. pendul gravitațional}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

b) Intensitățile  $I_1$ ,  $I_2$  ale curenților electrice prin fiecare dintre rezistorii de rezistențe  $R_1$ , respectiv  $R_2$ , legați în paralel (v. fig. F.B.64), se exprimă în funcție de tensiunea  $U$  la bornele grupării, pe baza legii lui Ohm,  $I_1 = \frac{U}{R_1}$ ,  $I_2 = \frac{U}{R_2}$ . Conform primei legi a lui Kirchhoff, între intensitățile  $I_1$ ,  $I_2$  și intensitatea  $I$  a curen-



tului în circuit, există relația  $I = I_1 + I_2$ , deci rezistența  $R_p$  a rezistorului care — înlocuind gruparea derivație a celor doi rezistori considerați — ar determina aceleași valori ale intensității  $I$  a curentului în circuit și tensiunii  $U$  la bornele sale satisface relația

$$I = \frac{U}{R_p} = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}, \text{ de unde } \frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Rezultă că rezistența echivalentă a doi rezistori legați în paralel este dată de expresia  $R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ .

c) Alegem axa  $Ox$  după direcția și în sensul vitezei inițiale  $\bar{v}_0$  a electronului iar axa  $Oy$  — în planul care delimitează zona (acțiunii) cîmpului electric uniform (presupunem această zonă cuprinsă între valorile  $0$  și  $X$  ale coordonatei  $x$ ) — după direcția, dar în sens opus celui al intensității cîmpului electric uniform (v. fig. F.B.65). Deoarece sarcina electrică a electronului este negativă ( $-e$ ), forța care acționează asupra lui în cîmpul electric considerat are direcția și sensul axei  $Oy$ ,

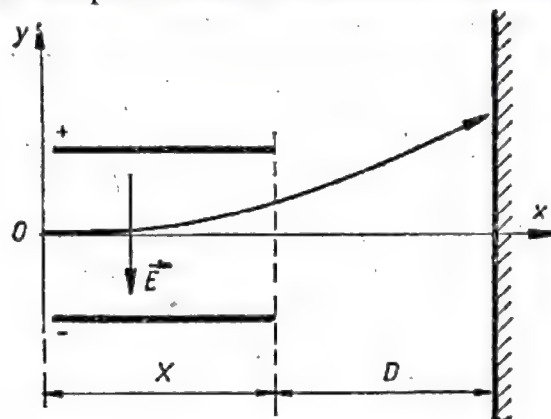


Fig. F.B.65

și valoarea  $F = eE$ , unde  $e$  este sarcina electrică elementară. Rezultă că, în zona cîmpului electric uniform, electronului îi va fi imprimată o accelerație avînd direcția și sensul axei  $Oy$  și valoarea  $a_y = \frac{eE}{m}$ , unde  $m$  este masa electronului. Întrucît pe direcția  $Ox$  asupra electronului nu acționează nici o forță, componenta  $x$  a vitezei sale rămîne constantă și egală cu viteza inițială,  $v_x = v_0$ ; în consecință, durata în care electronul traversează zona cîmpului electric uniform este  $t = \frac{X}{v_0}$ , iar deviația transversală (pe direcția  $Oy$ ) a electronului în zona cîmpului electric uniform este  $y_E = a_y \cdot \frac{t^2}{2} = \frac{eE}{2m} \cdot \frac{X^2}{v_0^2}$ . În cazul în care electronul își continuă mișcarea, ieșind din zona cîmpului electric, pe distanța  $D$  pînă la un ecran (v. fig. F.B.65), ținînd seamă că la ieșirea din zona cîmpului uniform componenta  $y$  a vitezei electronului este  $v_{yE} = a_y t = \frac{eE}{m} \cdot \frac{X}{v_0}$ , iar timpul în care electronul străbate distanța  $D$  este  $t_D = \frac{D}{v_0}$ , deviației  $y_E$  i se adaugă deviația suplimentară  $v_{yE} t_D = \frac{eE}{mv_0^2} \cdot XD$ , deci deviația transversală totală constatată pe ecranul de observație va fi

$$y_{\text{ecran}} = y_E + v_{yE} t_D = \frac{eE}{2mv_0^2} X(X + 2D).$$

În fine, dacă pentru obținerea cîmpului electric uniform se utilizează un condensator plan, între armăturile căruia — aflate la distanța  $d$  — se aplică tensiunea

$U$ , atunci expresia deviației (transversale față de direcția vitezei inițiale  $\vec{v}_0$ ) electronului capătă forma:

$$y = \frac{qU}{2mv_0^2 d} X(X + 2D).$$

XV. 1°. a) Pornind de la expresiile căldurii primite de calorimetru și apa din vas în cursul încălzirii de la temperatura  $t_a$  la temperatura finală  $\theta$ ,  $Q_p = (C + m_a c_a)(\theta - t_a)$ , respectiv căldurii cedate de bila de fier în cursul răcirii de la temperatura sa inițială  $t_1$  la cea finală  $\theta$ ,  $Q_{ced} = m_1 c_{Fe}(t_1 - \theta)$ , obținem ecuația calorimetrică a sistemului în forma

$$(C + m_a c_a)(\theta - t_a) = m_1 c_{Fe}(t_1 - \theta).$$

Rezultă că temperatura finală a ansamblului este

$$\theta = \frac{m_1 c_{Fe} t_1 + (C + m_a c_a) t_a}{m_1 c_{Fe} + C + m_a c_a} \approx 12,02^\circ \text{C}.$$

b) Între temperatura inițială  $t_1$  și cea finală  $\theta$ , volumul bilei de fier se modifică (scade) cu  $\Delta V = V_0(1 + \gamma\theta) - V_0(1 + \gamma t_1) = V_0 \gamma(\theta - t_1) \approx 317,95 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$  ( $\approx 0,318 \text{ cm}^3$ ).

c) În conformitate cu legea lui Jurin, denivelarea care apare în tubul capilar care are raza  $r = \frac{d}{2} = 0,4 \text{ mm}$  este

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r} = 0,0365 \text{ m} (=3,65 \text{ cm}).$$

2°. a) Deoarece imaginea este reală, avem  $x_2 > 0$ . Întrucît în enunț nu se precizează natura obiectului, se subînțelege că și acesta este real,  $x_1 < 0$ , deci mărirea liniară  $\beta = \frac{x_2}{x_1} < 0$ . Cum în enunț se arată că  $|y_2| = 3|y_1|$ , rezultă că

$\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1} = -3$ . Conform enunțului, distanța dintre obiect și imagine este  $d = x_2 - x_1 = 0,8 \text{ m}$ . Rezolvînd sistemul format de cele două ecuații de mai sus în  $x_1$  și  $x_2$ , se obțin pozițiile obiectului,  $x_1 = -0,2 \text{ m}$ , respectiv imaginii,  $x_2 = 0,6 \text{ m}$ , față de lentilă.

b) Din formula fundamentală a lentilelor subțiri și definiția convergenței, găsim că  $C = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{20}{3}$  dioptrii, iar distanța focală  $f$  este  $f = \frac{1}{C} = 0,15 \text{ m}$ .

c) Din expresia convergenței în funcție de mărimile fizice caracteristice unei lentile subțiri,  $C = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ , găsim indicele de refracție al lentilei,

$$n = 1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C = \frac{5}{3} (\approx 1,667).$$

3°. a)  $n = \frac{\sin \frac{A + \delta_{\min}}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$ , unde  $n$  este indicele de refracție (relativ) al pris-

mei,  $A$  este unghiul (refrîgent al) prisme, iar  $\delta_{\min}$  este unghiul de deviație minimă a unei raze de lumină monocromatică care traversează prisma.

b) Ecuația (lui Poisson a) transformării adiabatică este dată de una dintre expresiile echivalente,  $pV^\gamma = \text{const}$ ,  $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ , unde  $p$ ,  $V$  și  $T$  sînt respectiv presiunea, volumul și temperatura absolută (termodinamică) a gazului perfect, iar  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  este exponentul adiabatic al gazului ( $C_p$  și  $C_v$  sînt căldurile molare la presiune, respectiv volum constant, ale gazului).



c)  $i > l = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$ , unde  $i$  este unghiul de incidență,  $l$  este unghiul limită (pentru care unghiul de refracție  $r = \frac{\pi}{2}$ ),  $n_2$  este indicele de refracție al mediului pe suprafața căruia se produce reflexia totală, iar  $n_1$  este indicele de refracție al mediului de incidență (în interiorul căruia are loc reflexia totală). Pentru a se putea produce reflexia totală este necesar ca  $n_1 > n_2$ .

4°. a) Condiția necesară și suficientă pentru ca două unde electromagnetice (în particular, luminoase) să interfere este ca media în timp a produsului scalar al intensităților cimpurilor electrice ale celor două unde să fie diferită de zero (nenulă),  $\langle \vec{E}_1 \vec{E}_2 \rangle \neq 0$ .

b) Numărul de molecule dintr-un mol de substanță se numește numărul lui Avogadro. Deoarece molul este cantitatea de substanță a cărei masă, exprimată în grame (aceasta nu este unitate SI), este numeric egală cu masa moleculară relativă a substanței, în SI numărul lui Avogadro se dă pentru un kilomol,  $N_A \approx 6,023 \cdot 10^{26} \frac{\text{molecule}}{\text{kmol}}$ .

c) Ecuația termică de stare a unui gaz perfect este dată de formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare a gazelor (dedusă exclusiv teoretic, pornind de la ipotezele de bază ale teoriei cinetico-moleculare),  $p = \frac{2}{3} n \cdot \frac{m\bar{v}^2}{2}$ , precum și de ecuația Clapeyron-Mendeleev (obținută pornind de la rezultatele experimentale),  $p = \frac{\nu RT}{V}$ .

Pentru ca rezultatul obținut în baza teoriei cinetico-moleculare să fie compatibil cu cel experimental, este necesar ca  $\frac{2}{3} n \cdot \frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{\nu RT}{V}$ , adică energia cinetică medie de translație a unei molecule să fie dată de expresia  $\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\nu RT}{nV}$ . Întrucît produsul concentrației  $n$  a numărului de molecule în unitatea de volum cu volumul  $V$  al gazului ne dă numărul total  $N$  al moleculelor de gaz,  $N = nV$ , iar raportul dintre acesta și numărul  $\nu$  de (kilo)moli ne dă numărul lui Avogadro,  $\frac{nV}{\nu} = \frac{N}{\nu} = N_A$ , expresia energiei cinetice medii de translație a unei molecule capătă forma  $\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{RT}{N_A} = \frac{3}{2} kT$ , unde  $k = \frac{R}{N_A}$  este constanta lui Boltzmann.

Prin definiție, viteza termică a unei molecule de gaz coincide cu viteza medie pătratică a moleculelor,  $v_T = \sqrt{\bar{v}^2}$ . Din expresia dedusă mai sus a energiei cinetice medii de translație a unei molecule, reiese că

$$v_T = \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

în care  $m$  este masa unei molecule a gazului, iar  $\mu = mN_A$  este masa molară a gazului.

XVI. 1°. a) Alunecarea laterală a automobilului se va produce dacă forța centrifugă depășește forța de frecare la alunecare dintre roți și drum,  $F_{cf} = \frac{mv^2}{R} \geq F_{fr} = \mu F_n = \mu G = \mu mg$ . Reiese că viteza minimă a automobilului pe drumul circular de rază  $R$  la care se produce alunecarea laterală a automobilului este

$$v_{min} = \sqrt{\mu Rg} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



b) Unghiul  $\theta$  format de verticală cu raza vectoare (față de centrul  $C$  de greutate al automobilului) a punctului în care o roată atinge solul este dat de relația (v. și fig. F.B.66):  $\operatorname{tg} \theta = \frac{d/2}{h} = 2$ . Răsturnarea automobilului se produce dacă rezultanta  $\vec{R} = \vec{F}_c + \vec{G}$  a forței centrifuge cu greutatea automobilului iese din baza de sprijin (spațiul dintre roți) a acestuia, ceea ce se întâmplă dacă  $\frac{F_c}{G} = \frac{mv^2}{R} \cdot \frac{1}{mg} = \frac{v^2}{Rg} \geq \operatorname{tg} \theta = \frac{d}{2h}$ . Rezultă că viteza minimă  $v'_{\min}$  a automobilului pe drumul circular de rază  $R$  la care se poate produce răsturnarea vehiculului este

$$v'_{\min} = \sqrt{\frac{d}{2h} \cdot Rg} \approx 44,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

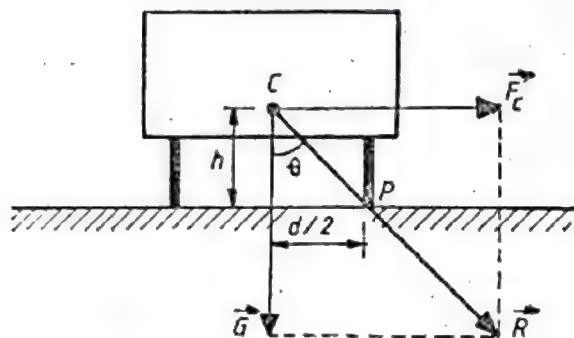


Fig. F.B.66

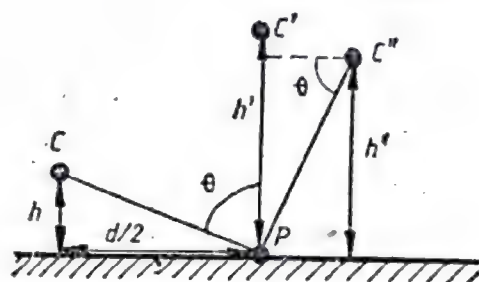


Fig. F.B.67

c) Notăm cu  $P$  punctul de contact cu drumul al roții în jurul căreia se produce răsturnarea automobilului, iar cu  $C'$  și cu  $C''$  — cea mai înaltă poziție atinsă de centrul de greutate  $C$  al automobilului în cursul răsturnării acestuia, respectiv poziția corespunzătoare răsturnării cu un unghi de  $90^\circ$  (v. și fig. F.B. 67), iar  $h'$  și  $h''$  — înălțimile punctelor  $C'$  și  $C''$  deasupra drumului. Din geometria problemei (v. fig. F.B.67), reiese că  $h' = C'P = C''P = CP = \sqrt{h^2 + d^2/4} \approx 0,8944 \text{ m}$ , iar  $h'' = C''P \cdot \sin \theta = CP \cdot \sin \theta = \frac{d}{2} = 0,8 \text{ m}$ .

Rezultă că lucrul mecanic (maxim) consumat de automobil pentru a se răsturna este  $L = mg(h' - h) \approx 10^3 \cdot 10 \cdot 0,4944 = 4944 \text{ J}$ , iar lucrul mecanic consumat pentru a se răsturna cu  $90^\circ$  este de numai (datorită reprimirii unei părți din energia consumată, în timpul coboririi centrului de greutate din  $C'$  în  $C''$ ):  $L'' = mg(h'' - h) = 4000 \text{ J}$ .

d) Deoarece alunecarea pornește din repaus față de direcția radială (oricum, viteza de alunecare are direcția razei vectoare față de centrul drumului circular deci contribuția impulsului de alunecare la momentul cinetic față de centrul cercului,  $\vec{R} \times m\vec{v}_{\text{alun}}$  este nulă), momentul cinetic al automobilului față de centrul cercului, în momentul alunecării, este  $\vec{L} = \vec{R} \times m\vec{v}_{\min}$ . Deoarece viteza  $\vec{v}_{\min}$  a automobilului în momentul alunecării este perpendiculară pe raza vectoară  $\vec{R}$ , momentul cinetic în momentul alunecării are direcția verticalei, sensul dat de regula burghiului drept (v. și fig. F.B.68) și modulul egal cu  $|\vec{L}| = Rmv_{\min} = 2 \cdot 10^6 \text{ J.s}$ . În mod asemănător, momentul cinetic  $\vec{L}'$  al automobilului, considerat punct material, față de centrul  $O$  al drumului circular, în momentul răsturnării automobilului, are aceeași direcție și sens ca și momentul cinetic  $\vec{L}$  din momentul alunecării, având însă valoarea:  $|\vec{L}'| = Rmv'_{\min} \approx 4,47 \cdot 10^6 \text{ J.s}$ .

2°. Fie  $H = l(1 - \cos \alpha)$  și  $h = l(1 - \cos \theta)$  înălțimea sferei, deasupra poziției de echilibru, la momentul inițial, respectiv înălțimea maximă atinsă după ciocnirea

plastică (v. și fig. F.B.69). Viteza  $v_0$  atinsă de sferă (imediat) înaintea ciocnirii plastice poate fi determinată pornind de la legea conservării energiei mecanice,  $\frac{M}{2} v_0^2 = Mgh$ , de unde  $v_0 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

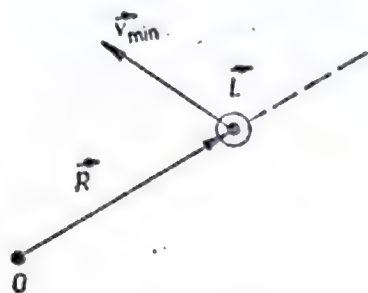


Fig. F.B.68

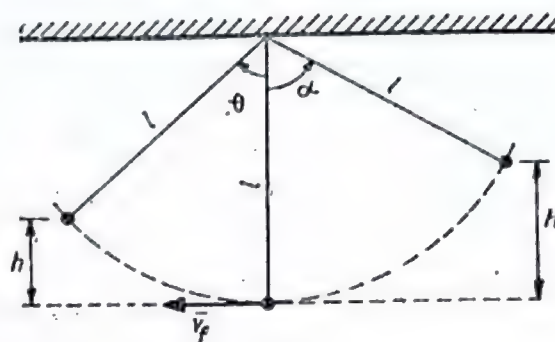


Fig. F.B.69

În mod asemănător, viteza  $v_f$  a ansamblului sferă + bilă imediat după ciocnirea plastică poate fi dedusă din condiția de conservare a energiei mecanice,

$$\frac{(M + m)v_f^2}{2} = (M + m)gh, \text{ obținînd } v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1 - \cos \theta)} \approx 3,62 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Condiția de conservare a impulsului ansamblului sferă și bilă după ciocnirea plastică a acestora are forma  $Mv_0 - mv = \pm(M + m)v_f$ , unde  $v$  este viteza bilei înainte de ciocnire; semnul „+” corespunde cazului în care — după ciocnirea plastică — sensul mișcării sferei se păstrează (situația din figura F.B.69), iar semnul „-” corespunde cazului în care — după ciocnirea plastică — sensul mișcării sferei se inversează. În primul caz (cel din figura F.B.69), se obține următoarea expresie și valoare a vitezei  $v$  a bilei înainte de ciocniri,  $v = \frac{Mv_0 - (M + m)v_f}{m} \approx 80,88 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

În cazul în care, după ciocnirea plastică, sensul mișcării sferei se inversează, se obține pentru viteza  $v$  a bilei înainte de ciocniri următoarea expresie și valoare:

$$v = \frac{Mv_0 + (M + m)v_f}{m} \approx 269,12 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

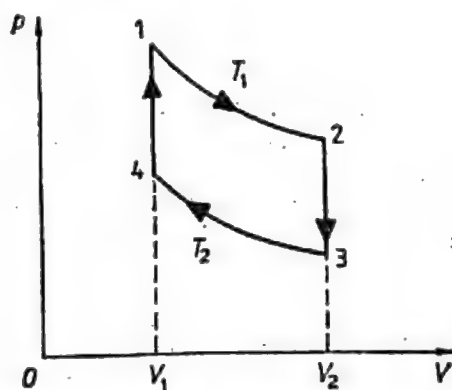


Fig. F.B.70

3°. a) Căldura primită de gaz în cursul încălzirii izocore  $4 \rightarrow 1$  (fig. F.B.70) este  $Q_{41} = \nu C_V(T_1 - T_2) = \frac{5\nu R}{2}(T_1 - T_2) = 2,0775 \cdot 10^6 \text{ J}$ , iar căldura primită în cursul destinderii izoterme  $1 \rightarrow 2$  este

$$Q_{12} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 3,324 \cdot 10^6 \text{ J } (=3,324 \text{ MJ}).$$



Căldura absorbită de gaz într-un ciclu reiese ca fiind

$$Q_1 = Q_{\text{abs}} = Q_{41} + Q_{12} = 5,4015 \cdot 10^6 \text{ J } (= 5,4015 \text{ MJ}).$$

b) Căldura cedată de gaz în cursul răcirii izoterme  $2 \rightarrow 3$  este  $Q_{23} = \nu C_V (T_2 - T_1) = -2,0775 \cdot 10^6 \text{ J}$ , iar căldura cedată în cursul comprimării izoterme  $3 \rightarrow 4$  este  $Q_{34} = \nu R T_2 \ln \frac{V_1}{V_2} = -2,493 \cdot 10^6 \text{ J}$ .

Căldura cedată de gaz într-un ciclu va fi deci  $Q_2 = Q_{\text{ced}} = Q_{23} + Q_{34} = -4,5705 \cdot 10^6 \text{ J}$ .

c) Lucrul mecanic efectuat de mașină într-un ciclu este  $L = Q_1 + Q_2 = 0,831 \cdot 10^6 \text{ J } (= 831 \text{ kJ})$ .

d) Randamentul mașinii termice considerate este

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{2}{13} \approx 0,154 \text{ (15,4\%)}$$

e) În cazul în care mașina termică ar lucra după un ciclu Carnot între temperaturile  $T_1$  și  $T_2$ , randamentul său ar fi

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ (25\%)}$$

4°. a) Acest subiect a fost tratat la II.5°. a.

b) Acest subiect a fost tratat la XIII.4°. b.

c) Acest subiect a fost tratat la II.5°. b.

5°. a) Acest subiect a fost tratat la XI.3°. b.

b) După cum interacțiunea lichidului dintr-un tub capilar, cu peretele tubului, caracterizată de forța de adeziune  $F_a$ , este mai intensă ( $F_a > F_c$ ), respectiv mai slabă ( $F_a < F_c$ ), decît interacțiunea lichid-lichid (caracterizată de forța de coeziune  $F_c$ ), lichidul din capilar urcă deasupra nivelului lichidului din vasul exterior, respectiv coboară față de acest nivel (fig. F.B.71.a și b). În conformitate cu definiția tensiunii superficiale  $\sigma$  a unui lichid, forța  $F$  care acționează asupra acestuia — de-a lungul circumferinței de rază  $r$  egală cu cea a tubului capilar, care constituie conturul meniscului lichidului, la contactul cu pereții tubului — are valoarea  $F = l\sigma = 2\pi r\sigma$ , direcția verticală și sensul în sus (dacă lichidul „udă” peretele tubului, adică  $F_a > F_c$ ), respectiv în jos, dacă lichidul nu „udă” peretele tubului ( $F_a < F_c$ ).

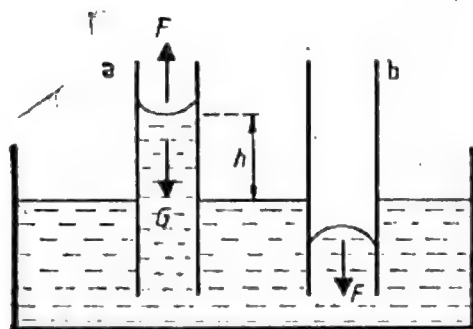


Fig. F.B.71

La echilibru, greutatea  $G$  a lichidului aflat în tubul capilar deasupra nivelului exterior (cazul  $F_a > F_c$ ), respectiv a lichidului dezlăsat sub nivelul exterior (cazul  $F_a < F_c$ ) este egală cu forța  $F$  de tensiune superficială,  $G = \pi r^2 h \rho g = F = 2\pi r \sigma$ , de unde reiese că înălțimea  $h$  cu care urcă lichidul în capilar deasupra nivelului exterior (cazul  $F_a > F_c$ ), respectiv cu care coboară lichidul în capilar sub nivelul exterior (cazul  $F_a < F_c$ ) este  $h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$  (legea lui Jurin).



c) Acest subiect a fost tratat la 1.4°.b.

XVII.1°. a) Intensitățile  $I_1$ ,  $I_2$  ale curenților din circuit în cele două cazuri sint:  $I_1 = \frac{E}{R_1 + r}$ ,  $I_2 = \frac{E}{R_2 + r}$ . Deoarece, conform enunțului, puterea disipată în circuitul exterior este aceeași în ambele cazuri,  $P = R_1 I_1^2 = \frac{E^2 R_1}{(R_1 + r)^2} = R_2 I_2^2 = \frac{E^2 R_2}{(R_2 + r)^2}$ , găsim că  $R_1(R_2 + r)^2 = R_2(R_1 + r)^2$ , de unde:  $r = \sqrt{R_1 R_2} = 6 \Omega$ .

b) Din expresia de mai sus a puterii  $P$  disipate în circuitul exterior, reiese că  $E = (R_1 + r) \sqrt{\frac{P}{R_1}} = 50 \text{ V}$ .

c) Deoarece puterile totale debitate de sursă în cele două cazuri sint  $P_{t1} = \frac{E^2}{R_1 + r}$ ,  $P_{t2} = \frac{E^2}{R_2 + r}$ , randamentele  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  ale transferului de putere în circuitul exterior, definite în enunț, sint  $\eta_1 = \frac{P}{P_{t1}}$ ,  $\eta_2 = \frac{P}{P_{t2}}$ , deci  $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{P_{t2}}{P_{t1}} = \frac{R_1 + r}{R_2 + r} = \frac{2}{3}$ , rezultind că randamentul transferului de putere de la sursă la circuitul exterior este mai mare în cazul conectării rezistorului cu rezistența electrică mai mare ( $R_2$ ). Randamentele  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  ale transferului de putere în circuitul exterior, în cele două cazuri, sint  $\eta_1 = \frac{P}{P_{t1}} = \frac{P(R_1 + r)}{E^2} = 0,4$  (40%), respectiv  $\eta_2 = \frac{P(R_2 + r)}{E^2} = 0,6$ .

2°. a) Din condiția de conservare a impulsului (inițial neglijabil, al nucleului excitat  ${}^8_4\text{Be}^*$ ),  $0 = \bar{p}({}^8_4\text{He}) + \bar{p}_\gamma$ , reiese că  $p({}^8_4\text{Be}) = p_\gamma = \frac{1}{c} \cdot E_\gamma$ , unde  $E_\gamma (=17,6 \text{ MeV})$  este energia fotonului  $\gamma$  rezultat în urma dezexcitării. Deoarece  $p({}^8_4\text{Be}) \cdot c = E_\gamma \approx 17,6 \text{ MeV} \ll m_0({}^8_4\text{Be}) \cdot c^2 = 7452 \text{ MeV}$ , reiese că mișcarea de recul a nucleului  ${}^8_4\text{Be}$  este relativ lentă ( $v \ll c$ ), deci energia cinetică de recul a nucleului  ${}^8_4\text{Be}$  poate fi exprimată nerelativist  $E_c = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{p_\gamma^2}{2m_0} = \frac{E_\gamma^2}{2m_0 c^2} \approx 0,166 \text{ MeV}$ .

b) Condiția de conservare a energiei în dezintegrarea  ${}^8_4\text{Be}^* \rightarrow {}^8_4\text{Be} + \gamma$ , are forma  $W_0({}^8_4\text{Be}^*) = W_0({}^8_4\text{Be}) + E_c + h\nu_\gamma$ , unde  $W_0({}^8_4\text{Be}^*)$ ,  $W_0({}^8_4\text{Be})$  sint energiile de repaus ale nucleului excitat, de beriliu, respectiv a nucleului  ${}^8_4\text{Be}$  în starea fundamentală. Rezultă că energia totală de dezexcitare este  $E_{\text{dez}} = W_0({}^8_4\text{Be}^*) - W_0({}^8_4\text{Be}) = E_c + h\nu_\gamma \approx 17,766 \text{ MeV}$ .

3°. a) Pornind de la expresia  $i = \frac{\lambda D}{2l}$  a interfranței observate în figura de interferență obținută cu un dispozitiv Young, rezultă că lungimea de undă a radiației folosite este

$$\lambda = \frac{2li}{D} = 0,75 \cdot 10^{-6} \text{ m } (= 750 \text{ nm}).$$

b) Deoarece lungimea de undă  $\lambda'$  a radiației considerate într-un mediu de indice de refracție  $n$  este  $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$ , expresia interfranței  $i'$  care este observată pe ecran devine  $i' = \frac{\lambda' D}{2l} = \frac{\lambda D}{n 2l} = \frac{i}{n}$ , unde  $i$  este interfranța observată în absența lichidului. Rezultă că  $n = \frac{i}{i'} \approx \frac{4}{3}$ .

4°. a)  $Q = \left( \frac{U_L}{U} \right)_{\omega=\omega_0} = \left( \frac{U_C}{U} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$ , unde  $U_L$  și  $U_C$  sint tensiunile la bornele bobinei, respectiv, condensatorului (la rezonanță),  $U$  este tensiunea (efectivă) la bornele circuitului,  $\omega$  este pulsația tensiunii aplicate la bornele

circuitului,  $\omega_0$  este pulsația la rezonanță („proprie” a circuitului), iar  $L$ ,  $R$  și  $C$  sînt respectiv inductanța bobinei, rezistența rezistorului și capacitatea condensatorului din circuit.

b)  $\Phi_e = \frac{W}{t}$ , unde  $\Phi_e$  este fluxul de energie radiantă, iar  $W$  este energia care trece prin această suprafață în unitatea de timp. Conform definiției de mai sus a fluxului de energie radiantă, unitatea sa de măsură este wattul.

$I_e = \frac{\Delta\Phi_e}{\Delta\Omega}$ , unde  $I_e$  este intensitatea energetică a unei surse punctiforme, iar  $\Delta\Phi_e$  este fluxul de energie radiantă emis de această sursă în unghiul solid  $\Delta\Omega$ . În conformitate cu definiția dată, unitatea de intensitate energetică este wattul pe steradian (W/sr).

$E_e = \frac{\Delta\Phi_e}{\Delta A}$ , unde  $E_e$  este iluminarea energetică (iradierea) a unei suprafețe elementare de arie  $\Delta A$ , iar  $\Delta\Phi_e$  este fluxul de energie radiantă incident pe suprafața elementară considerată. Pornind de la definiția de mai sus, reiese că unitatea de iluminare energetică este wattul pe metru pătrat (W/m<sup>2</sup>).

$E_e = \frac{I_e}{r^2} \cdot \cos \theta$ , unde  $E_e$  este iluminarea energetică a unui element de suprafață avînd normala  $\vec{n}$ ,  $I_e$  este intensitatea energetică a sursei punctiforme care produce iluminarea elementului de suprafață considerat,  $r$  este distanța de la sursa punctiformă la elementul de suprafață, iar  $\theta$  este unghiul ascuțit format de normala  $\vec{n}$  cu raza vectoare  $\vec{r}$  a elementului de suprafață în raport cu sursa punctiformă (v. și figura F.B.72).

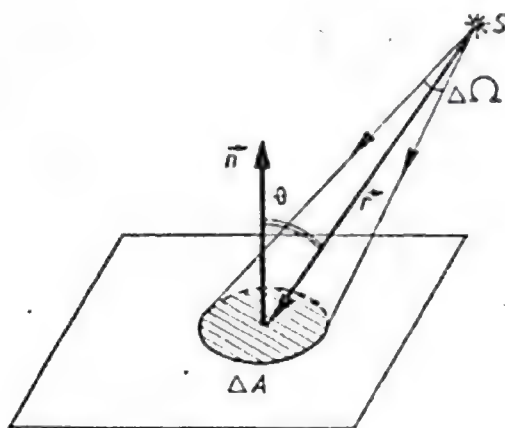


Fig. F.B.72

$V = \frac{\Phi_{e0}}{\Phi_e}$ , unde  $V$  este sensibilitatea spectrală relativă a ochiului,  $\Phi_{e0}$  este fluxul constant de energie al radiației cu lungimea de undă  $\lambda_0 = 550$  nm (lungime de undă la care apare cea mai puternică senzație vizuală), iar  $\Phi_e$  este fluxul de energie al radiației cu lungimea de undă  $\lambda$ , care produce aceeași senzație vizuală ca și  $\Phi_{e0}$ .

$\Phi = KV\Phi_e$ , unde  $\Phi$  este fluxul luminos,  $K$  este echivalentul fotometric al radiației (constantă egală cu  $675 \frac{\text{lm}}{\text{W}}$ ),  $V$  este sensibilitatea spectrală relativă a ochiului, iar  $\Phi_e$  este fluxul de energie radiantă.

$I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega}$ , unde  $I$  este intensitatea luminoasă a unei surse punctiforme, iar  $\Delta\Phi$  este fluxul luminos emis de sursă în unghiul solid  $\Delta\Omega$ . Intensitatea luminoasă este mărimea fundamentală a fotometriei, iar unitatea sa de măsură (candela,



simbol  $\text{cd}$ ) este unitate fundamentală în sistemul internațional (SI). Candela este intensitatea luminoasă, în direcția normalei, a unei suprafețe cu aria  $\frac{1}{600\,000}$  metri pătrați, a unui corp negru, la temperatura de solidificare a platinei la presiunea de  $101\,325 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ . În conformitate cu definiția de mai sus a intensității luminoase, unitatea de măsură a fluxului luminos — lumenul — este fluxul luminos emis într-un unghi solid egal cu un steradian de către un izvor luminos punctiform având intensitatea de 1 candelă ( $1 \text{ lm} = 1 \text{ cd} \cdot 1 \text{ sr}$ ).

$\Phi = 4\pi I$ , unde  $\Phi$  este fluxul luminos emis de o sursă de intensitate  $I$  în toate direcțiile.

$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta A}$ , unde  $E$  este iluminarea unui element de suprafață cu aria  $\Delta A$ , iar  $\Delta\Phi$  este fluxul luminos incident pe elementul de suprafață considerat. În conformitate cu definiția de mai sus, unitatea de măsură a iluminării — luxul (simbol  $\text{lx}$ ) — reprezintă iluminarea unei suprafețe cu aria de  $1 \text{ m}^2$ , care primește un flux luminos de  $1 \text{ lm}$ , uniform repartizat pe această suprafață ( $1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/m}^2$ ).

$E = \frac{I}{r^2} \cos \theta$ , unde  $E$  este iluminarea unui element de suprafață având normala  $\vec{n}$ ,  $I$  este intensitatea luminoasă a sursei punctiforme care produce iluminarea elementului de suprafață considerat,  $r$  este distanța de la sursă la elementul de suprafață, iar  $\theta$  este unghiul ascuțit format de normala  $\vec{n}$  cu direcția de observare a sursei, din elementul de suprafață considerat (v. și figura F.B.72).

5°. a) Potențialul electric într-un punct  $M$  este o mărime fizică egală cu raportul dintre lucrul mecanic efectuat de câmp la deplasarea unui corp de probă încărcat, din acel punct în punctul de referință arbitrar ales, și sarcina acelui corp,  $V_M = \frac{L}{q}$ . De regulă, se alege punctul de referință (până la care se face deplasarea) la infinit.

Diferența de potențial electric  $V_M - V_N$  dintre două puncte  $M$  și  $N$  sau tensiunea electrică  $U$  dintre aceste puncte este o mărime fizică egală cu cîtul dintre lucrul mecanic efectuat de câmp la deplasarea unui corp încărcat între cele două puncte și sarcina electrică a cîmpului,  $U = V_M - V_N = \frac{L}{q}$ .

b) Energia de ionizare a atomului de hidrogen în stare fundamentală este energia minimă care trebuie transmisă acestui atom, aflat în starea fundamentală, pentru a-l ioniza. Reiese că energia de ionizare a atomului de hidrogen în stare fundamentală este egală cu energia de legătură a acestui atom în starea fundamentală și cu valoarea absolută (modulul) energiei totale în starea fundamentală,

$$W_{\text{ion. 1}} = W_{\text{leg. 1}} = -E_1.$$

**XVIII.1°. a)** Intensitatea curentului fotoelectric la saturație este direct proporțională cu fluxul radiațiilor electromagnetice incidente, cînd frecvența este constantă (prima lege a efectului fotoelectric extern).

Energia cinetică a fotoelectronilor emiși crește liniar cu frecvența radiațiilor electromagnetice și nu depinde de fluxul acestora (legea a doua).

Efectul fotoelectric extern se poate produce numai dacă frecvența radiației incidente este mai mare sau cel puțin egală cu o valoare minimă, specifică fiecărei substanțe (legea a treia).

Efectul fotoelectric extern se produce practic instantaneu (legea a patra).

b) Acest subiect a fost tratat la XV.3°. c.



c) Definiția randamentului unei mașini termice este  $\eta = \frac{L}{Q_1}$ , unde  $L$  este lucrul mecanic efectuat de mașina termică într-un ciclu, iar  $Q_1$  este căldura primită de mașina termică într-un ciclu. Expresia randamentului unei mașini termice care funcționează după un ciclu Carnot (reversibil) este  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ , unde  $T_1$  este temperatura termodinamică (absolută) a sursei calde, iar  $T_2$  este temperatura termodinamică a sursei reci a mașinii.

2°. a) Formula oglinzilor sferice este  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R'}$ , unde  $x_1$  și  $x_2$  sînt distanțele de la obiect, respectiv de la imagine, la vîrfurile oglinzii sferice (v. și fig. F.B.73),  $R$  este raza de curbură a oglinzii sferice ( $R < 0$  pentru oglinzi concave, cum este cea din figura F.B.73,  $R > 0$  pentru oglinzi convexe), iar  $f = \frac{R}{2}$  este distanța focală a oglinzii sferice.

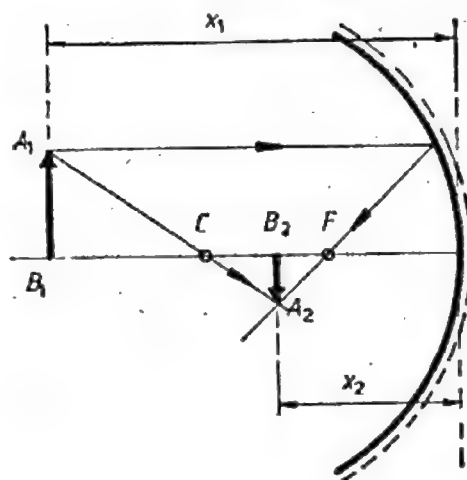


Fig. F.B.73

b) Energia cinetică maximă pe care o poate atinge o particulă accelerată într-un ciclotron este dată de expresia

$$E_{\max} = \frac{m}{2} v_{\max}^2 = \frac{1}{2m} R_{\max}^2 q^2 B^2,$$

unde  $m$  și  $q$  sînt masa, respectiv sarcina electrică a particulei accelerate,  $v_{\max}$  și  $R_{\max}$  sînt valorile maxime atinse de viteza, respectiv raza traiectoriei circulare a particulelor accelerate ( $R_{\max}$  este practic egală cu raza duanților), iar  $B$  este inducția cîmpului magnetic uniform aplicat în zona duanților.

c)  $v_T = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$ , unde  $\overline{v^2}$  este valoarea medie a pătratului vitezei moleculelor gazului,  $m$  și  $\mu$  sînt masa unei molecule, respectiv masa molară a gazului,  $T$  este temperatura termodinamică (absolută) a gazului,  $k$  este constanta lui Boltzmann, iar  $R$  este constanta universală a gazelor.

3°. Modelul atomic planetar presupune că întreaga sarcină pozitivă (și aproape toată masa) atomului este concentrată într-un nucleu, în jurul căruia se rotește electronii. Neglijînd spațiile „libere” existente între atomi în fază condensată (solide, lichide), reiese că raza atomilor unei substanțe de densitate  $\rho$  și masă (kilo)molară  $M$  este de ordinul  $r_a = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho N_A}} \sim 10^{-10}$  m, deci și faptul că razele orbitelor electronice dintr-un atom sînt de acest ordin de mărime ( $10^{-10}$  m). Experimentele efectuate de Ernest Rutherford cu privire la absorbția particulelor  $\alpha$  au dovedit

că aproape întreaga masă a atomului este concentrată într-un nucleu de dimensiuni considerabil mai mici decât cele ale atomului, iar experiențele efectuate cu privire la împrăștierea particulelor au arătat că întreaga sarcină pozitivă a atomului este concentrată în nucleu, precum și faptul că raza nucleului este de ordinul a  $10^{-14}$  m. Deoarece masa nucleului este mult mai mare decât cea a electronilor (de cel puțin 1837 ori, în cazul atomului primului izotop al hidrogenului), de regulă (într-o primă aproximație), în cadrul modelului planetar al atomului, nucleul este considerat fix.

După cum este cunoscut, energia potențială a unui corp într-un câmp de forțe este egală cu lucrul mecanic efectuat de câmp pentru deplasarea corpului din punctul considerat într-un punct de referință arbitrar ales. Deoarece în cazul câmpurilor de forțe coulombiene, punctul de referință este ales la infinit, energia potențială a sistemului nucleu (al atomului de hidrogen)—electron se poate deduce pornind de la expresia potențialului electric  $V$  (produs de nucleu) pe baza relației  $U(r) = q_{\text{electron}} V = (-e) \cdot \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ , unde  $r$  este distanța dintre electron și nucleu.

După cum energia totală a sistemului format de nucleul atomului de hidrogen și un electron,

$$E_{\text{tot}} = U(r) + E_{\text{cin}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{m_0 v^2}{2},$$

este pozitivă, respectiv negativă, traiectoria electronului este o curbă deschisă (hiperbolă), respectiv are forma unei elipse, având nucleul într-unul din focare (în ultimul caz, spunem că sistemul nucleu-electron se găsește într-o stare legată; v. și fig. F.B.74).



Fig. F.B.74

Prin definiție, energia de legătură a unui sistem este egală cu lucrul mecanic efectuat pentru a desface sistemul în componentele sale izolate, aflate în stare de repaus. Deoarece energia totală finală a componentelor izolate ale sistemului, aflate în repaus, este nulă, avem  $W_{\text{leg}} = E_f - E_i = -E_{\text{tot}}$ . Spunem că sistemul este legat dacă energia sa totală este negativă, deci dacă energia de legătură a sistemului este pozitivă.

Pentru ca o orbită circulară a electronului în jurul nucleului atomului de hidrogen să fie stabilă, este necesar ca forța centrifugă să fie egală cu cea coulombiană, care îndeplinește în acest caz rolul de forță centripetă  $\frac{m_0}{r} v^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ . Reiese că, în cazul unei orbite circulare stabile a electronului în jurul nucleului, energia totală a atomului de hidrogen este dată de expresia  $E_{\text{tot}} = \frac{m_0 v^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{r}{2} \cdot \frac{m_0 v^2}{r} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -\frac{m_0}{2} v^2$ .

În mișcarea sa în jurul nucleului, electronul este o particulă încărcată electric, aflată într-o mișcare accelerată. Or, conform electromagnetismului clasic, o sarcină



accelerată emite energie sub formă de radiații (unde) electromagnetice. În consecință, energia totală a electronului ar trebui să scadă continuu, fapt care ar determina „căderea” lui pe nucleu și dispariția sistemului nucleu-electron, deci a atomului; calculele efectuate pe baza electromagnetismului clasic arată că durata acestei „căderi” a electronului de la orbita sa normală (cu dimensiuni de ordinul a  $10^{-10}$  m) până la nucleu ar trebui să fie foarte scurtă (de ordinul a  $10^{-11}$  s). Faptul că această prevedere teoretică privind modelul planetar al atomului nu este confirmată experimental (în realitate, atomii sînt stabili) constituie una dintre principalele deficiențe ale acestui model atomic. O altă deficiență importantă a modelului planetar al atomului o constituie faptul că acesta nu poate explica seriile spectrale, în particular ale atomului de hidrogen. Un progres important în direcția eliminării unora dintre deficiențele modelului planetar al atomului a fost înregistrat prin formularea de către Niels Bohr a modelului „cuantificat” (cuantificarea veche, premergătoare fizicii cuantice propriu-zise) al atomului.

4°. Din ecuația de conservare a energiei,  $2 M({}_1^2\text{H}) \cdot c^2 = M({}_2^4\text{He}) \cdot c^2 + Q$ , reiese valoarea căldurii  $Q_g$  degajate la formarea unui gram de  ${}_2^4\text{He}$ ,

$$Q_g = \frac{10^{-3} \text{ kg}}{M({}_2^4\text{He})} \cdot Q = \frac{10^{-3} \text{ kg}}{M({}_2^4\text{He})} [2 M({}_1^2\text{H}) - M({}_2^4\text{He})] \cdot c^2.$$

Pentru a deduce valoarea  $c^2$  din datele enunțului, se utilizează relația dintre unitatea atomică de masă  $u$  și numărul lui Avogadro  $u = \frac{1 \text{ kg}}{N_A}$ , obținind

$$c^2 = \frac{u \cdot c^2}{1 \text{ kg}} \cdot N_A = \frac{0,9315 \cdot 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1} \cdot 6,023 \cdot 10^{26} \approx 9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2 \text{ și}$$

$$Q_g = \frac{10^{-3}}{4,0026} \cdot 2,56 \cdot 10^{-2} \cdot 9 \cdot 10^{16} \approx 5,76 \cdot 10^{11} \text{ J } (= 576 \text{ GJ}).$$

5°. a) În conformitate cu notațiile din enunț și din figura F.B.75, avem

$$\eta_c = 1 - \frac{T_D}{T_B} = 1 - \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = 0,75.$$

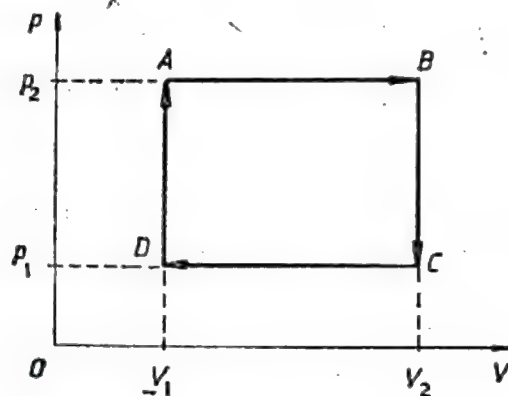


Fig. F.B.75

b) Gazul primește căldură de la sursa cu temperatura mai ridicată în cursul încălzirilor izobară  $DA$  și izocoră  $AB$ . Deoarece  $C_p = C_v + R = \frac{5R}{2}$ , căldura  $Q_1$  primită de gaz într-un ciclu este

$$\begin{aligned} Q_1 &= \nu C_v (T_A - T_D) + \nu C_p (T_B - T_A) = \nu \cdot \frac{3R}{2} (T_A - T_D) + \nu \cdot \frac{5R}{2} (T_B - T_A) = \\ &= \frac{1}{2} (3p_2 V_1 - 3p_1 V_1 + 5p_2 V_2 - 5p_1 V_2) = 1,625 \cdot 10^7 \text{ J } (= 16,25 \text{ MJ}). \end{aligned}$$



c) Deoarece lucrul mecanic efectuat într-un proces ciclic este egal (numeric) cu aria suprafeței interioare ciclului în diagrama presiune-volum, avem

$$L = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = 2,5 \cdot 10^6 \text{ J } (= 2,5 \text{ MJ}).$$

Pe de altă parte, lucrul mecanic efectuat într-un proces ciclic Carnot este  $L_C = Q_1 \cdot \eta_c$ , deci

$$\frac{L_C}{L} = \frac{Q_1 \cdot \eta_c}{L} = 4,875,$$

raport care corespunde valorii (de 4,125 ori mai mare, a) randamentului ciclului Carnot, față de randamentul celui alt ciclul considerat.

**XIX.1°.** a) Unda incidentă (raza incidentă), normala la suprafață în punctul de incidență și unda reflectată (raza reflectată) se găsesc în același plan.

Unghiul de reflexie  $r$  este — numeric — egal cu unghiul de incidență  $i$ .

b) Lungimea de undă Compton este egală cu diferența lungimilor de undă corespunzând unui foton împrăștiat (prin efect Compton) sub unghiul  $\theta = 90^\circ$  față de direcția de incidență, respectiv fotonului incident,  $\Delta\lambda = \lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c}$ , unde  $h$  este constanta lui Planck,  $m_0$  este masa de repaus a electronului, iar  $c$  este viteza luminii în vid.

c) Exponentul volumului în ecuația lui Poisson (exprimată prin presiune și volum) a transformării adiabatică a unui gaz perfect,  $pV^\gamma = \text{const}$ , se numește exponent adiabatic. Exponentul adiabatic are expresia  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ , unde  $C_p$  și  $C_v$  sînt căldurile molare la presiune constantă, respectiv la volum constant, ale gazului.

2°. a) Acest subiect a fost tratat la VI.4°.a.

b)  $\Delta\lambda = 2\lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}$ , unde  $\Delta\lambda = \lambda(\theta) - \lambda_0$  este variația lungimii de undă a unui foton în urma efectului Compton,  $\lambda = \frac{h}{m_0 c}$  este lungimea de undă Compton (v. și mai sus), iar  $\theta$  este unghiul de împrăștiere format de direcția după care este „împrăștiat“ fotonul cu direcția de incidență (v. fig. F.B.76).

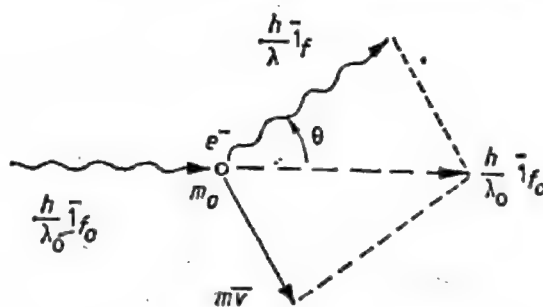


Fig. F.B.76

c)  $I(x) = I(0) \cdot \exp(-\mu x)$ , unde  $I(0)$  este intensitatea fasciculului de fotoni  $\gamma$  la intrarea într-un strat de substanță,  $I(x)$  este intensitatea fasciculului la ieșirea din strat,  $x$  este grosimea stratului, iar  $\mu$  este coeficientul de atenuare liniară.

3°. Dispozitivul experimental constă dintr-un banc optic pe care sînt aliniate suporturile sursei luminoase  $S$ , filtrului de culoare (spectral)  $FC$ , fantei simple  $F$ , lentilei  $L_1$  cu ajutorul căreia se obține un fascicul paralel incident pe rețea (în acest scop, fanta  $F$  este așezată față de lentila  $L_1$  la o distanță egală cu distanța focală  $f_1$  a acestei lentile), rețelei plane de difracție  $R$ , celei de a doua lentile convergente  $L_2$  și panoului  $P$  cu diviziuni (așezat față de  $L_2$  la o distanță egală cu distanța focală  $f_2$  a acestei lentile).

Schema de principiu a instalației experimentale este prezentată în fig. F.B.77. Deoarece în acest caz incidența fasciculului luminos pe rețeaua de difracție este normală, relația care ne dă unghiurile  $\alpha$  pentru care se obțin maxime de difracție capătă forma  $l \sin \alpha = k\lambda$ , unde  $k$  este ordinul maximului de difracție, iar  $l$  este perioada („constantă”) rețelei de difracție. În cazul unghiurilor de difracție  $\alpha$  mici (pentru maxime de difracție situate la distanțe  $x$  (față de centrul panoului  $P$ ) mici față de distanța focală  $f_2$  a lentilei  $L_2$ ), avem  $\sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{x}{f_2}$ , reieșind că lungimea de undă a radiației care trece prin filtrul  $FC$  este

$$\lambda = \frac{l \sin \alpha}{k} \approx \frac{x}{k f_2}$$

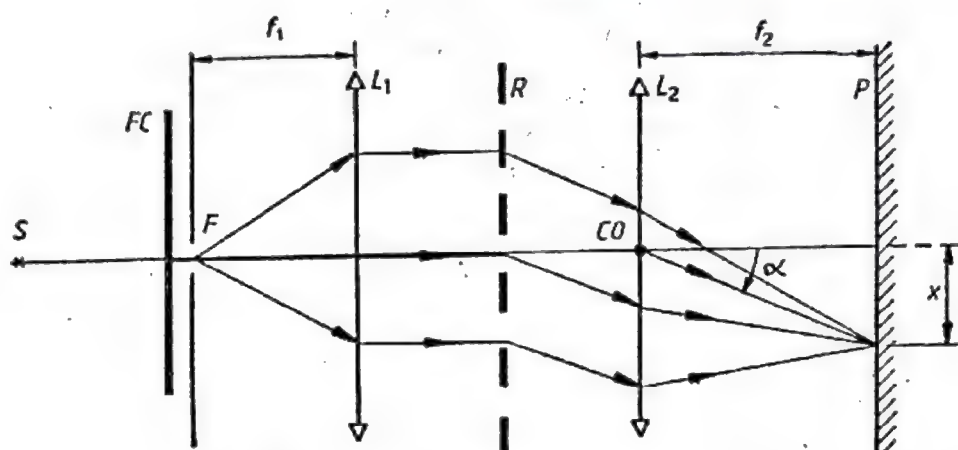


Fig. F.B.77

unde  $n = \frac{1}{l}$  este numărul de trăsături pe unitatea de lungime a rețelei. Determinând experimental distanța  $x$  până la centrul ecranului divizat  $P$  care corespunde maximului de difracție de ordinul  $k$  și cunoscând distanța focală  $f_2$  a lentilei  $L_2$ , precum și numărul  $n$  de trăsături pe unitatea de lungime a rețelei, se calculează (determină) lungimea de undă a radiației studiate.

4°. Energia cinetică a fotoelectronilor extrași  $\frac{m_0 v^2}{2}$  poate fi determinată pornind de la energia  $h\nu = h \frac{c}{\lambda}$  a fotonilor incidenti și energia de extracție  $L$  a unui electron din catod, pe baza relației  $\frac{m_0 v^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - L$ . Deoarece energia de extracție  $L$  a unui electron din catod poate fi exprimată prin frecvența de prag  $\nu_0$ , respectiv lungimea de undă  $\lambda_0$  corespunzând pragului efectului fotoelectric, prin relația  $L = h\nu_0 = h \frac{c}{\lambda_0}$ , obținem

$$\frac{m_0 v^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0} \approx 2,537 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

5°. a) Întrucât starea de volum minim atinsă de un gaz în cursul unui proces ciclic Carnot corespunde temperaturii  $T_1$  a sursei calde, avem  $T_1 = \frac{pV_m}{\nu R} = 700 \text{ K}$ . Rezultă că randamentul mașinii termice care efectuează ciclul Carnot descris în enunțul problemei este

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0,6.$$

b) Din definiția randamentului unei mașini termice:  $\eta = \frac{L}{Q_1}$ , reiese că  $\frac{\eta}{1-\eta} = \frac{L}{Q_1-L} = \frac{L}{|Q_2|}$ . În cazul problemei de față, căldura  $Q_2$  cedată sursei reci în fiecare ciclu va fi

$$|Q_2| = \frac{1-\eta_c}{\eta_c} \cdot L = 8 \cdot 10^4 \text{ J } (= 80 \text{ kJ}).$$

c) Numărul moleculelor de gaz din unitatea de volum își va atinge valoarea maximă pentru starea în care volumul gazului este minim

$$n_{\max} = \frac{N}{V_m} = \frac{\nu N_A}{V_m} \approx 4,28 \cdot 10^{25} \frac{\text{molecule}}{\text{m}^3}.$$

XX.1°. a) Situația în momentul ciocnirii celor două corpuri este arătată în figura F.B.78. Fiecare corp va parcurge pe orizontală distanța  $\frac{d}{2}$  până în momentul ciocnirii, deci

$$t = \frac{d}{2v_{01}} = \frac{8}{20} = 0,4 \text{ s.}$$

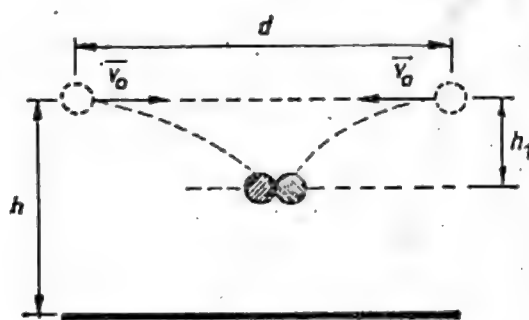


Fig. F.B.78

Distanța pe care cad corpurile în acest timp este

$$h_1 = \frac{gt^2}{2} = \frac{10}{2} \cdot 0,4^2 = 0,8 \text{ m.}$$

Înălțimea la care se produce ciocnirea este

$$h' = h - h_1 = 5 - 0,8 = 4,2 \text{ m.}$$

b) Ciocnirea este simetrică. Conservarea impulsului se scrie

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

Pentru proiecția pe orizontală,

$$p_x = p_{1x} + p_{2x} = 0, \text{ deoarece } p_{1x} = -p_{2x}.$$

Pe verticală  $p_y = p_{1y} + p_{2y} = 2p_{1y} = 2mv_y = 2m\sqrt{2gh_1}$ .

Componentele vitezei corpului format prin ciocnire vor fi

$$v_x = 0 \text{ și } v_y = \sqrt{2gh_1},$$

deci

$$v = v_y = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,8} = 4 \text{ m/s.}$$



c) Conservarea energiei în procesul de ciocnire se scrie:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} + Q.$$

Intrucît

$$m_1 = m_2 = m,$$

$$Q = \frac{m}{2} (v_1^2 + v_2^2 - 2v^2) = \frac{m}{2} (v_0^2 + v_y^2 + v_0^2 + v_y^2 - 2v_y^2) = mv_0^2.$$

Această cantitate de căldură duce la creșterea temperaturii corpurilor cu  $\Delta T$ , dat de  $Q = 2mc\Delta T$ , deci

$$\Delta T = \frac{mv_0^2}{2c} = \frac{100}{2 \cdot 10^3} = 0,05 \text{ grade.}$$

2°. a) Transformările descrise în text sînt arătate în figura F.B.79.

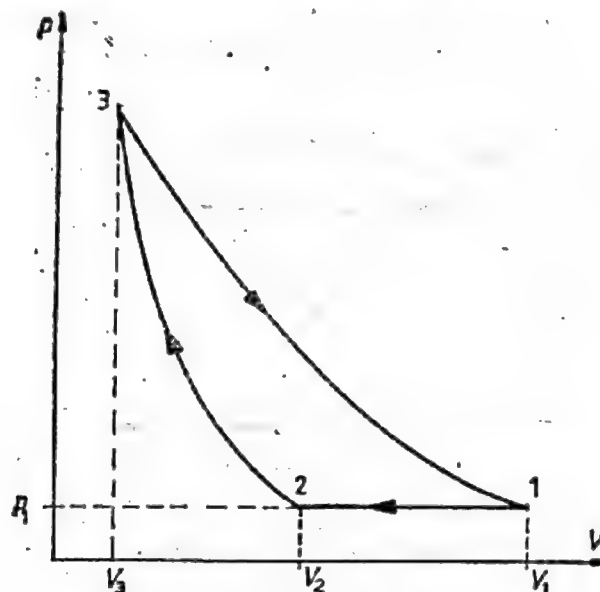


Fig. F.B.79

Transformarea  $1 \rightarrow 2$  se face la presiunea  $p_1$  (izobară) deci

$$L_{12} = p\Delta V = p_1(V_2 - V_1). \quad (1)$$

Pentru a afla  $V_2$  scriem ecuațiile celor 2 transformări,

$$T_1 V_3^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1},$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

Înmulțindu-le membru cu membru, rezultă

$$V_1 V_3^{\gamma-1} = V_2^{\gamma},$$

de unde

$$V_2 = V_1^{\frac{1}{\gamma}} \cdot V_3^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = V_1^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \frac{V_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{8^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \frac{V_1}{\sqrt[8]{8}}.$$

Ecuția (1) devine

$$L_{12} = p_1 \left( \frac{V_1}{2} - V_1 \right) = -\frac{p_1 V_1}{2} = -\frac{10^5 \cdot 0,5}{2} = -25 \cdot 10^3 \text{ J.}$$

Sistemul primește lucru mecanic ( $L_{12} < 0$ ).

$$b) \eta = \frac{L}{Q_1}.$$

Sistemul primește căldură în transformarea  $3 \rightarrow 1$ , deci

$$Q_1 = Q_{31} = \nu R T_1 \ln \frac{V_1}{V_3}.$$

Lucrul mecanic este primit de sistem în transformările  $1 \rightarrow 2$  și  $2 \rightarrow 3$  și efectuat în transformarea  $3 \rightarrow 1$ , astfel încît

$$L = L_{31} + L_{12} + L_{23} = \nu R T_1 \ln \frac{V_1}{V_3} - \frac{p_1 V_1}{2} - \nu C_v (T_3 - T_2).$$

Din ecuația transformării izocore  $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$  rezultă

$$T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1 = \frac{V_1}{2V_1} T_1 = \frac{T_1}{2}.$$

Expresia randamentului devine

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{\frac{\nu R T_1}{2} + \frac{\nu R}{\gamma - 1} \cdot \frac{T_1}{2}}{\nu R T_1 \ln \frac{V_1}{V_3}} = 1 - \frac{1 + \frac{1}{\gamma - 1}}{2 \ln \frac{V_1}{V_3}} = 1 - \frac{1 + \frac{1}{0,5}}{2 \ln 8} = \\ &= 1 - \frac{1}{2 \ln 2} = 0,28 = 28\%. \end{aligned}$$

În obținerea acestui rezultat am utilizat ecuația termică de stare a gazului ideal,  $pV = \nu RT$  și ecuațiile  $\gamma = C_p/C_v$  și  $C_p = C_v + R$ , de unde se obține  $C_v = R/(\gamma - 1)$ .

$$c) v_T = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3RT_2}{\mu}} = \sqrt{\frac{3RT_1}{2\mu}} = \sqrt{\frac{3p_1 V_1}{2\mu\nu}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^5 \cdot 0,5}{2 \cdot 29 \cdot 12 \cdot 10^{-3}}} = 464 \text{ m/s.}$$

3°. a) Notăm cu  $I$  intensitatea curentului cînd comutatorul  $K$  din figura F.B.7 este deschis și cu  $I_1$  și  $I_2$  intensitățile corespunzătoare pozițiilor 1 și, respectiv, 2 ale comutatorului. Condițiile din textul problemei sînt:  $I_1 = 2I$  și  $I_2 = \frac{4}{9} I$ .

Conform figurii F.B.7,  $I_1$  este intensitatea curentului prin circuitul paralel format din inductanță și rezistență, iar  $I_2$  intensitatea în circuitul paralel format din capacitate și inductanță, deci

$$I = \sqrt{\left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left(\frac{U}{L\omega}\right)^2} = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2\omega^2}}. \quad (1)$$

$$I_2 = \left| \frac{U}{L\omega} - UC\omega \right| = U \left| \frac{1}{L\omega} - C\omega \right|. \quad (2)$$

În sfîrșit,  $I = \frac{U}{L\omega}$ . Utilizînd aceste expresii, relația  $I_1 = 2I$  devine

$$\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2\omega^2}} = 2 \frac{1}{L\omega} \text{ sau } \frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2\omega^2} = \frac{4}{L^2\omega^2}.$$

de unde

$$R = \frac{L\omega}{\sqrt{3}} = \frac{X_L}{\sqrt{3}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = 17,32 \, \Omega.$$

Pentru ecuația (2) există 2 posibilități

$$\frac{1}{L\omega} - C\omega = \frac{4}{9L\omega}, \text{ dacă } \frac{1}{L\omega} > C\omega; \quad (3)$$

$$C\omega - \frac{1}{L\omega} = \frac{4}{9L\omega}, \text{ dacă } \frac{1}{L\omega} < C\omega. \quad (4)$$

În primul caz,

$$C'\omega = \frac{5}{9L\omega} \Rightarrow C' = \frac{5}{9\omega X_L} = \frac{5}{9 \cdot 2\pi \nu \cdot X_L} = \frac{5}{9 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 30} = 58,9 \, \mu\text{F}.$$

În cazul al doilea,

$$C''\omega = \frac{13}{9L\omega} \Rightarrow C'' = \frac{13}{5} C' = 153,14 \, \mu\text{F}.$$

b) Evident acest punct se referă la situația în care comutatorul  $K$  este în poziția 1,

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{220}{17,32} = 12,7 \, \text{A},$$

$$\cos \varphi = \frac{I_R}{\sqrt{I_R^2 + I_L^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{17,32}{34,64} = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 60^\circ.$$

$$\text{c) La rezonanță } L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \Rightarrow \nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{X_L}{\omega} C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{X_L}{2\pi\nu} C}};$$

$$\text{cazul (3): } \nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{30}{2\pi \cdot 50} \cdot 58,9 \cdot 10^{-6}}} = 67,1 \, \text{Hz};$$

$$\text{cazul (4): } \nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{30}{2\pi \cdot 50} \cdot 153,14 \cdot 10^{-6}}} = 41,6 \, \text{Hz}.$$

4°. a) Formula lui Galilei se obține eliminând timpul din ecuația coordonatei  $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$  cu ajutorul ecuației vitezei  $v = v_0 + at$ . Introducând  $t = (v - v_0)/a$ , ecuația coordonatei devine

$$x = x_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \frac{(v - v_0)^2}{a^2}.$$

Aducînd la același numitor,

$$2a(x - x_0) = 2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0^2, \text{ sau}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

Aceasta este ecuația Galilei.



b) Ciclul Carnot format din două transformări izoterme, la temperaturile  $T_1$  și  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ), și două transformări adiabatice este arătat în figura F.B.80. Între parametrii stărilor 1, 2, 3 și 4 există următoarele relații:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2, \quad p_4 V_4 = p_3 V_3, \quad (1)$$

$$p_1 V_1^\gamma = p_4 V_4^\gamma, \quad p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma. \quad (2)$$

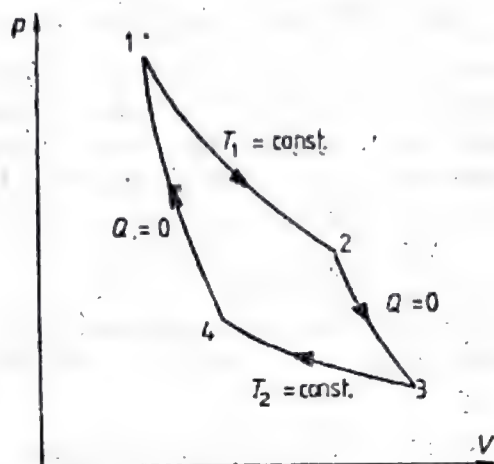


Fig. F.B.80

Din ecuațiile (1) și, respectiv, (2) rezultă

$$\frac{p_1 p_3}{p_2 p_4} = \frac{V_2 V_4}{V_1 V_3}, \quad \frac{p_1 p_3}{p_1 p_4} = \left( \frac{V_2 V_4}{V_1 V_3} \right)^\gamma. \quad (3)$$

Ținând seama că  $\gamma \neq 1$ , cele două ecuații (3) pot fi satisfăcute numai dacă

$$\frac{V_2 V_4}{V_1 V_3} = 1, \text{ adică dacă } \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (4)$$

Randamentul ciclului este dat de

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}, \quad (5)$$

unde căldura primită  $Q_1$  și căldura cedată  $Q_2$  sînt date de

$$Q_1 = Q_{12} = 2,3\nu RT_1 \log \frac{V_2}{V_1}, \quad Q_2 = Q_{34} = 2,3\nu RT_2 \log \frac{V_4}{V_3} (< 0).$$

Ținând seama de ecuația (4), rezultă

$$\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1}, \text{ deci } \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (6)$$

Remarcăm că, în timp ce ecuația (5) este generală, expresia (6) este aplicabilă numai ciclului Carnot.

c) Acest subiect a fost tratat la XIII.4°b.

5°. a) Legea lui Bernoulli se referă la curgerea staționară a unui lichid ideal și poate fi formulată astfel: într-un lichid ideal în curgere staționară presiunea totală, compusă din presiunea statică, presiunea dinamică și presiunea de poziție este constantă, adică

$$p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z = \text{const},$$

unde  $\rho$  este densitatea lichidului,  $v$  este viteza de curgere în secțiunea considerată a conductei, iar  $z$  este poziția pe verticală.

b) Considerăm un proces, în contact cu exteriorul, care duce un sistem termodinamic dintr-o stare inițială 1, caracterizată de energia internă  $U_1$ , într-o stare finală 2, caracterizată de energia internă  $U_2$ . Legea conservării și transformării energiei în procese mecanice și termice (principiul întâi al termodinamicii) afirmă că: variația energiei interne este egală cu suma algebrică dintre căldura  $Q$  și lucrul mecanic  $L$ , schimbate de sistem cu exteriorul în cursul procesului, adică

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q - L.$$

Dacă în procesul considerat nu apare o variație a energiei interne a sistemului ( $U_2 = U_1$ ), cum ar fi în cazul unei transformări ciclice, atunci  $Q = L$ , adică sistemul poate efectua un lucru mecanic egal cu căldura primită din exterior și invers. Dacă sistemul efectuează lucru mecanic fără a primi căldură din exterior, atunci lucrul mecanic este efectuat pe seama reducerii energiei interne a sistemului (destindere adiabatică).

c) Acest subiect a fost tratat la V.5.c.

**XXI. 1°.** a) Vom utiliza notațiile din figura F.B.81. În cursul ciocnirii plastice se conservă impulsul și energia. Conservarea impulsului se scrie în modul următor:

$$(m_1 + m_2)v = m_1v_1 - m_2v_2,$$

de unde

$$v = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}. \quad (1)$$

Vitezele celor două corpuri în momentul ciocnirii sunt date (fig. F.B.81) de

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_1)}, \quad v_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_2)}.$$

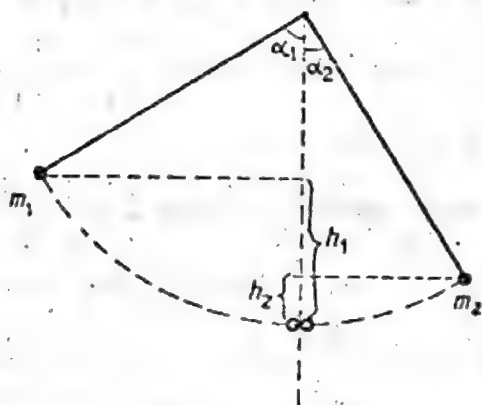


Fig. F.B.81

Ecuația (1) devine:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\sqrt{2gl}(m_1\sqrt{1 - \cos \alpha_1} - m_2\sqrt{1 - \cos \alpha_2})}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1} \left( 10^{-2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}} - 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{2}} \right)}{3,5 \cdot 10^{-2}} = -0,265 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

Semnul negativ arată că  $v$  este orientată în sensul vitezei  $v_2$ .

b) Conservarea energiei în procesul de ciocnire plastică se scrie

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} + Q,$$

de unde

$$Q = \frac{1}{2} [m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) v^2] =$$

$$= \frac{1}{2} 2 gl [m_1 (1 - \cos \alpha_1) + m_2 (1 - \cos \alpha_2) - (m_1 + m_2) v^2] =$$

$$= 10 \cdot 1 \left[ 10^{-2} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + 2,5 \cdot 10^{-2} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - (10^{-2} + 2,5 \cdot 10^{-2}) 0,265^2 \right] = 0,0589 \text{ J.}$$

c) Deviația maximă a corpului format în urma ciocnirii se obține din condiția ca energia potențială corespunzătoare deviației maxime (înălțimea  $h$ ) să fie egală cu energia cinetică a corpului în momentul formării,

$$mgh = \frac{mv^2}{2}, \text{ de unde } h = \frac{v^2}{2g}.$$

Notînd cu  $\alpha$  deviația firului față de verticală, ecuația înălțimii devine  $l(1 - \cos \alpha) = \frac{v^2}{2g}$ , de unde  $\cos \alpha = 1 - \frac{v^2}{2gl} = 1 - \frac{0,265^2}{2 \cdot 10 \cdot 1} = 0,996$ , deci  $\alpha$  este inferior lui  $5^\circ$ . În aceste condiții perioada oscilației este dată de

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{10}} \approx 2 \text{ s.}$$

2°. a) Randamentul ciclului Carnot

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{1200} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

b) Căldura este preluată de gaz de la sursa caldă în cursul destinderii izoterme (fig. F.B.82) este

$$Q_1 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (1)$$

Calculăm raportul  $V_2/V_1$ .

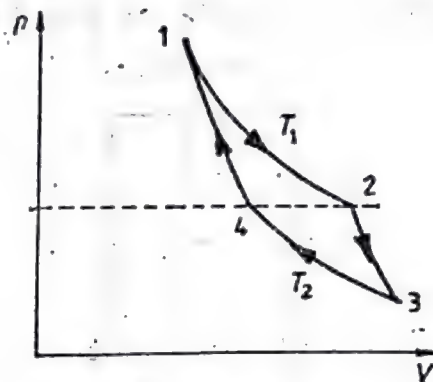


Fig. F.B.82

Conform textului,  $p_4 = p_2$ . Pentru transformările izoterme,  $p_1 V_1 = p_2 V_2$ ,  $p_3 V_3 = p_4 V_4$ , de unde

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{V_2 V_3}{V_1 V_4}. \quad (2)$$

Pe de altă parte, conform ecuației termice de stare a gazului ideal,

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_3 V_3}{T_2} \text{ sau } \frac{p_1}{p_3} = \frac{V_3 T_1}{V_1 T_2}. \quad (3)$$



Din ecuațiile (2) și (3) rezultă

$$\frac{V_2}{V_4} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (4)$$

Vom utiliza ecuația transformării adiabatică  $1 \rightarrow 4$ ,

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}, \text{ de unde}$$

$$\frac{V_2}{V_4} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (5)$$

Eliminând  $V_4$  între ecuațiile (4) și (5), rezultă

$$\frac{V_2}{V_1} = \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Coeficientul adiabatic se obține ținând seama de ecuația de definiție  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  și de relația Robert-Meier  $C_p - C_v = R$ . Rezultă  $\gamma = \frac{C_v + R}{C_v}$ . Ecuația (1) devine

$$\begin{aligned} Q_1 &= \nu R T_1 \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T_1}{T_2} = \nu R T_1 \frac{C_v + R}{R} \ln \frac{T_1}{T_2} = \\ &= 5 \cdot 10^{-3} \cdot 8310 \cdot 1200 \left( \frac{3}{2} + 1 \right) \ln \frac{1200}{300} = 172,7 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P &= \frac{L}{t} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{t} = \frac{\nu R}{t} \left( T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln \frac{V_2}{V_1} \right) = \\ &= \frac{\nu R}{t} (T_1 - T_2) \frac{C_v + R}{R} \ln \frac{T_1}{T_2} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 8310}{\frac{1}{10}} (1200 - 300) \frac{5}{2} : 2 \ln 2 = 1,295 \text{ MW}. \end{aligned}$$

3°. a) Cînd comutatorul este pe poziția 1 (fig. F.B.83),

$$U = R I_1. \quad (1)$$

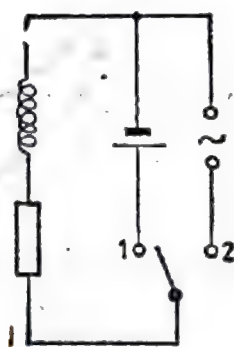


Fig. F.B.83

Cînd comutatorul este pe poziția 2,

$$U = I_2 Z = I_2 \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}. \quad (2)$$

Din (1), rezultă

$$R = \frac{U}{I_1} = \frac{6}{2} = 3 \Omega.$$

Din ecuația (2)  $L = \frac{1}{2\pi\nu} \sqrt{\frac{U^2}{I_2^2} - R^2} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^3} \sqrt{\frac{36}{3} - 9} = 2,75 \cdot 10^{-4} \text{ H.}$

b)  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R} = \frac{2\pi\nu L}{R} = \frac{2\pi \cdot 10^3 \cdot 2,75 \cdot 10^{-4}}{3} = 0,576; \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0,576 \approx 30^\circ;$

$$P_a = UI_2 \cos \varphi,$$

dar  $\cos \varphi = \frac{U_R}{U}$ , deci  $P_a = U_R I_2 = RI_2^2 = 3 \cdot 3 = 9 \text{ W.}$

c)  $C = \frac{Q}{U} = \frac{18 \cdot 10^{-6}}{6} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ F.}$

4°. a) Variația  $\Delta \vec{v}$  a vitezei unui corp aflat într-o mișcare circulară uniformă, într-un interval de timp  $\Delta t$ , mult mai mic decât perioada  $T$  a mișcării, poate fi calculată, ținând seama că ea reprezintă baza unui triunghi isoscel având laturile egale cu  $v$  (fig. F.B.84) și unghiul de la vîrf  $\Delta \alpha = \omega \Delta t$ . Dacă  $\Delta t$  este foarte mic, atunci baza triunghiului poate fi aproximată cu un arc de cerc și deci  $|\Delta \vec{v}| \cong v \Delta \alpha$  sau  $\Delta v = v \omega \Delta t$ . Întrucît  $\Delta \vec{v}$  este orientat spre centrul traiectoriei (la limita  $\Delta t \rightarrow 0$ ), accelerația centripetă va avea direcția radială, sensul spre centrul mișcării de rotație și valoarea

$$a_n = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v \omega = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R,$$

unde  $R$  este raza traiectoriei circulare.

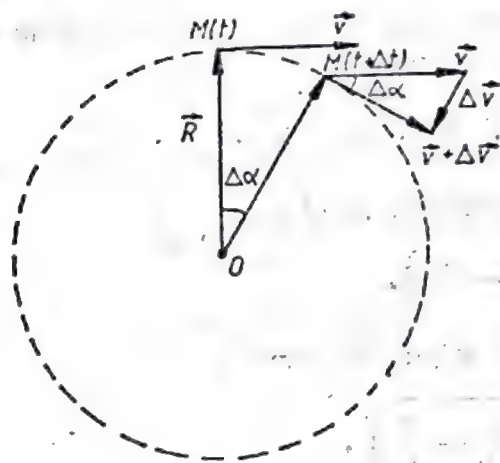


Fig. F.B.84.

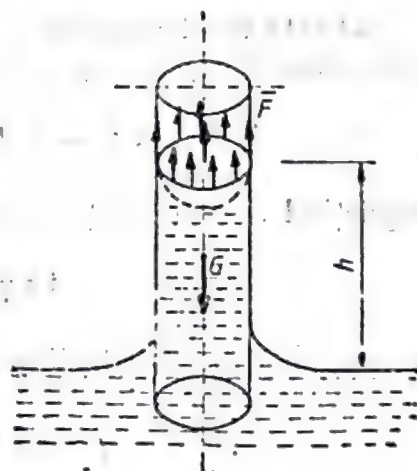


Fig. F.B.85.

b) Legea lui Jurin se referă la înălțimea la care se ridică un lichid într-un tub capilar, cînd lichidul udă pereții tubului. Considerăm un capilar introdus într-un lichid de densitate  $\rho$ , coeficientul de tensiune superficială  $\sigma$  și care udă perețele tubului. Lichidul urcă în tubul capilar pînă cînd greutatea  $\vec{G}$  a coloanei de lichid din capilar este echilibrată de rezultanta  $\vec{F}$  a forțelor de tensiune superficială care acționează pe conturul circular al meniscului (figura F.B.85), adică  $G = F$ . Întrucît  $G = mg = \pi r^2 h \rho g$  și  $F = \sigma l = 2\pi r \sigma$ , rezultă  $\pi r^2 h \rho g = 2\pi r \sigma$ , de unde  $h = \frac{2\sigma}{r\rho g}$ . Aceasta reprezintă formula lui Jurin.

Pentru lichide care nu udă peretele vasului, meniscul va fi convex, forțele de tensiune superficială sînt orientate în jos și lichidul din vasul capilar coboară sub nivelul lichidului din exterior. Denivelarea  $h$  este dată de aceeași formulă — formula lui Jurin.

c) Circuitul  $RLC$  paralel de curent alternativ este arătat în figura F.B.86, iar diagrama fazorială corespunzătoare în figura F.B.87. Prin ramurile circuitului, intensitățile instantanee sînt date de

$$i_R = \frac{\sqrt{2} U}{R} \sin \omega t, \quad i_L = \frac{\sqrt{2} U}{X_L} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad i_C = \frac{\sqrt{2} U}{X_C} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

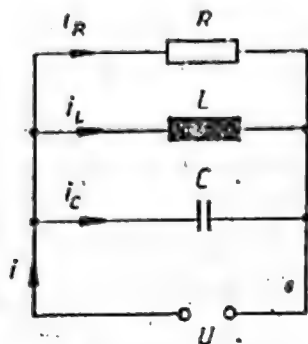


Fig. F.B.86

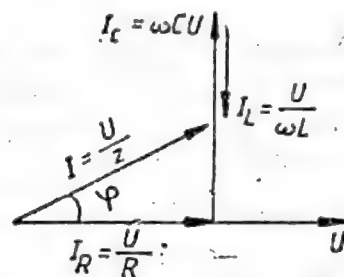


Fig. F.B.87

Conform legii I a lui Kirchhoff, intensitatea totală  $i = \sqrt{2} I \sin(\omega t - \varphi)$  este suma intensităților curenților din ramificații, adică

$$I \sin(\omega t - \varphi) = \frac{U}{R} \sin \omega t + \frac{U}{X_L} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{U}{X_C} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Această egalitate fiind valabilă pentru orice moment  $t$ , vom considera două valori particulare anume,  $t_1 = 0$  și  $t_2 = T/4 = \pi/2\omega$ ; rezultă

$$I \sin \varphi = U \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right); \quad I \cos \varphi = \frac{U}{R}.$$

Împărțind aceste relații membru cu membru, se obține

$$\operatorname{tg} \varphi = R \left( \frac{1}{L\omega} - C\omega \right).$$

Ridicînd cele două relații la pătrat și adunîndu-le, rezultă

$$I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)^2}.$$

Dar, conform legii lui Ohm,  $I = U/Z$ , deci expresia impedanței va fi

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)^2}}.$$

5°. a) Coeficientul de dilatare termică liniară se notează cu  $\alpha$  și se exprimă prin relația

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \Delta T},$$

în care  $\Delta l = l - l_0$ ,  $l$  fiind lungimea barei corespunzătoare temperaturii  $t^\circ\text{C}$ ,  $l_0$  lungimea barei la temperatura de  $0^\circ\text{C}$ , iar  $\Delta T$  variația de temperatură,



b) Oscilația într-un punct  $P$  care se află la distanța  $x$  de sursa de oscilații este descrisă de ecuația

$$y_P = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

unde  $y_P$  reprezintă elongația la momentul  $t$ ,  $A$  este valoarea maximă a elongației (amplitudinea),  $T$  este perioada, iar  $\lambda$  lungimea de undă.

c) Ecuația internă a unui tub electronic este o relație între rezistența internă  $R_i$  a tubului, panta  $S$  a porțiunii rectilinii a caracteristicii  $I_A = f(U_G)$  pentru  $U_A = \text{const}$  și coeficientul de amplificare  $\mu$ : anume

$$SR_i = \mu.$$

XXII. 1°. a) Întrucît deplasarea blocului este neglijabilă în timpul ciocnirii, este ca și cum aceasta s-ar petrece instantaneu (fig. F.B.88). Conservarea energiei și conservarea impulsului se vor scrie

$$\frac{m_p v_1^2}{2} - \frac{m_p v_2^2}{2} = Q + \frac{m_b v'^2}{2},$$

$$m_p v_1 = m_p v_2 + m_b v' \Rightarrow v' = \frac{m_p (v_1 - v_2)}{m_b},$$

unde  $v'$  este viteza blocului imediat după interacțiunea cu proiectilul.

Blocul se va deplasa pînă la oprire sub acțiunea forței de frecare  $F_f = \mu m_b g$ , deci va efectua o mișcare încetinită cu accelerația  $a = -\mu g$ . Conform ecuației Galilei,  $v^2 = v_0^2 + 2aS$ , la oprire  $v = 0$ , deci punind  $v_0 = v'$ ,  $S = d$  și  $a = -\mu g$ , rezultă

$$\mu = \frac{v'^2}{2gd} = \frac{m_p^2 (v_1 - v_2)^2}{2m_b^2 g d} = \frac{4 \cdot 10^{-6} (500 - 100)^2}{2 \cdot 1^2 \cdot 10 \cdot 0,2} = 0,16.$$

b) Energia cinetică pierdută de proiectil este

$$E_c = \frac{m_p}{2} (v_1^2 - v_2^2) = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2} (500^2 - 100^2) = 15 \text{ J}.$$

$$\text{c) } E'_c = \frac{m_b v'^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_p^2 (v_1 - v_2)^2}{m_b} = \frac{4 \cdot 10^{-6} (500 - 100)^2}{2 \cdot 1} = 0,32 \text{ J}.$$



Fig. F.B.88

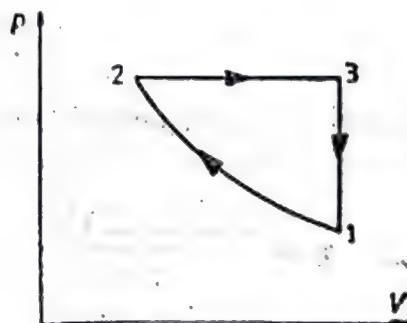


Fig. F.B.89

Observație: energia consumată pentru străbaterea blocului datorită frecării este  $Q = 15 - 0,32 = 14,68 \text{ J}$ .

2°. a) Transformarea ciclică descrisă în textul problemei este arătată în figura F.B.89.

Lucrul efectuat într-un ciclu este egal cu suma lucrurilor efectuate în diferitele transformări,  $L = L_{12} + L_{23} + L_{31}$ . Întrucât transformarea  $3 \rightarrow 1$  se face la volum constant,

$$L_{31} = 0; L_{12} = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}; L_{23} = p_2(V_3 - V_2) = p_2 V_2 \left( \frac{V_1}{V_2} - 1 \right) = \nu R T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} - 1 \right).$$

Rezultă

$$\begin{aligned} L &= \nu R T_1 \left( \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{V_1}{V_2} - 1 \right) = \nu R T_1 \left( \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon - 1 \right) = \\ &= 4 \cdot 8 \cdot 310 \left( \ln \frac{1}{2} + 2 - 1 \right) = 10 \, 204,7 \text{ J.} \end{aligned} \quad (1)$$

b) Randamentul ciclului este dat de  $\eta = \frac{L}{Q_1}$ , unde  $Q_1$  este căldura primită într-un ciclu.

În transformarea izotermă  $1 \rightarrow 2$ , căldura  $Q_{12} = L_{12} < 0$ , deci este cedată de sistem.

Pentru transformarea izobară  $2 \rightarrow 3$ ,  $Q_{23} = \nu C_p (T_3 - T_2) = \nu C_p (T_3 - T_1)$ . Din ecuația transformării,

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} \Rightarrow T_3 = \frac{V_3}{V_2} T_2 = \varepsilon T_1 = 2 \cdot 400 = 800 \text{ K.}$$

Rezultă  $Q_{23} = \nu C_p T_1 (\varepsilon - 1) > 0$ , deci este primită de sistem.

În transformarea izocoră  $Q_{31} = \nu C_v (T_1 - T_3) = \nu C_v T_1 (1 - \varepsilon) < 0$ , deci  $Q_{31}$  este cedată de gaz. În consecință,

$$Q_1 = Q_{23} = \nu C_p T_1 (\varepsilon - 1).$$

Utilizând relațiile

$$\frac{C_p}{C_v} = \gamma \text{ și } C_p - C_v = R,$$

avem

$$Q_1 = \frac{\nu \gamma R T_1}{\gamma - 1} (\varepsilon - 1). \quad (2)$$

Ținând seama de ecuațiile (1) și (2), randamentul devine

$$\eta = \frac{(\varepsilon - \ln \varepsilon - 1) (\gamma - 1)}{\gamma (\varepsilon - 1)} = \frac{(2 - 0,693 - 1) \left( \frac{5}{3} - 1 \right)}{\frac{5}{3} (2 - 1)} = 0,122.$$

c) Temperaturile extreme atinse în cursul ciclului sînt  $T'_1 = \varepsilon T_1$  și  $T'_2 = T_1$ . Randamentul ciclului Carnot este

$$\eta_c = 1 - \frac{T'_2}{T'_1} = 1 - \frac{T_1}{\varepsilon T_1} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

3°. a) Cele două variante ale circuitului sînt arătate în figura F.B.90.

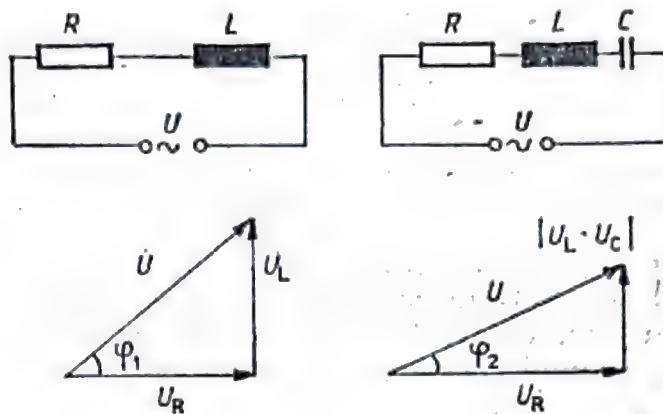


Fig. F.B.90

În primul caz defazajul este dat de

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{U_L}{U_R} = \frac{X_L}{R}, \quad (1)$$

iar în al doilea de

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{|X_L - X_C|}{R}.$$

Există două posibilități:

$$a_1) X_L > X_C \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{X_L - X_C}{R}; \quad (2')$$

$$a_2) X_L < X_C \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{X_C - X_L}{R}. \quad (2'')$$

Din ecuațiile (1) și (2'), prin scădere, avem

$$R_1 = \frac{X_C}{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{12,7}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} = \frac{12,7}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = 30 \, \Omega.$$

Din ecuațiile (1) și (2''), prin adunare, avem

$$R_2 = \frac{X_C}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{12,7}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = 8,05 \, \Omega.$$

b) Reactanța bobinei se obține din (1),

$$X_L = R \operatorname{tg} \varphi_1. \text{ Rezultă valorile } X_{L1} = R_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = 30 \cdot 1 = 30 \, \Omega, \quad X_{L2} = R_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = 8,05 \cdot 1 = 8,05 \, \Omega.$$

c) Considerăm cazul  $a_1$ , deci  $R = 30 \, \Omega$ .

$$\text{Puterea activă } P = UI \cos \varphi_2 = \frac{U^2}{R} \cos \varphi_2 = \frac{100^2}{30} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 288,6 \, \text{W}.$$

$$\text{Puterea reactivă } P = UI \sin \varphi_2 = \frac{U^2}{R} \sin \varphi_2 = \frac{100^2}{30} \cdot \frac{1}{2} = 166,6 \, \text{VAR}.$$

$$\text{Puterea aparentă } P = UI = \frac{U^2}{R} = \frac{100^2}{30} = 333,3 \, \text{VA}.$$



4°. a) Acest subiect a fost tratat la II.4°.a.

b) Acest subiect a fost tratat la XV.4°.c.

c) Forța Lorentz este forța care se exercită asupra unei particule purtătoare de sarcină electrică aflată în mișcare, în cîmp magnetic. Expresia forței Lorentz se poate obține cu ajutorul expresiei forței electromagnetice care se exercită asupra unui conductor de lungime  $l$ , aflat în cîmpul magnetic de inducție  $\vec{B}$ . Dacă intensitatea curentului prin conductor este  $I$ , iar conductorul este orientat sub un unghi  $\alpha$  față de liniile de cîmp (direcția lui  $\vec{B}$ ), atunci  $F = BIl \sin \alpha$ . Scriind  $I = Q/t = ne/t$ , unde  $n$  este numărul de electroni care trec printr-o secțiune a conductorului în timpul  $t$ , iar  $e$  este sarcina electrică elementară, atunci forța pe care o exercită cîmpul magnetic asupra unui electron va fi dată de

$$f_e = \frac{F}{n} = \frac{BI l \sin \alpha}{n} = \frac{Bne l \sin \alpha}{nt} = eBv \sin \alpha,$$

unde  $v = l/t$  este viteza medie cu care se mișcă electronii. Pentru o particulă cu sarcina  $q$ , care se mișcă cu viteza  $v$  în cîmpul de inducție  $B$ , forța Lorentz va fi  $f_e = qvB \sin \alpha$ .

5°. a) Teorema momentului cinetic pentru punctul material se enunță astfel: momentul forței care acționează asupra punctului material în raport cu un pol este egal cu variația în unitatea de timp a momentului cinetic al punctului în raport cu acel pol.

Ecuția este

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

unde  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  și  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ,  $\vec{r}$  fiind vectorul de poziție.

b) Acest subiect a fost tratat la II.5°.b.

c) Acest subiect a fost tratat la XII.3°.c.

XXIII. 1°. a) Situația din enunțul problemei este prezentată în fig. F.B.91. Deformarea elastică este direct proporțională cu forța deformatoare,  $F = kx$ , deci  $k = \frac{F}{x} = \frac{100}{10^{-2}} = 10^4 \text{ N/m}$ .

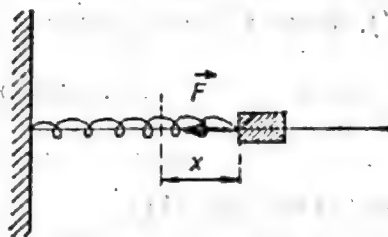


Fig. F.B.91

b) Oscilațiile sînt armonice și sînt caracterizate de pulsația  $\omega = \sqrt{k/m}$ ,

$$\text{deci } \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10^4}{0,25}} = 31,83 \text{ Hz.}$$

c) Corpul atinge viteza maximă cînd trece prin poziția de echilibru. Viteza are valoarea maximă

$$v_{\max} = \omega \cdot x_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot x = \sqrt{\frac{10^4}{0,25}} \cdot 10^{-2} = 2 \text{ m/s.}$$

d) Dacă inițial corpul este în poziția de echilibru, înseamnă că  $x(0) = 0$ . Scriind ecuația de mișcare sub forma generală,  $x = x_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$  condiția de mai sus implică  $\sin \varphi = 0$ , deci  $\varphi = 0$ . Ecuația de mișcare se va scrie

$$x = x_{\max} \sin \omega t.$$

2°. a) Scriind legea lui Ohm pentru cele două situații,

$$E = I_1(R_1 + r), \quad E = I_2(R_2 + r), \quad (1)$$

rezultă

$$I_1(R_1 + r) = I_2(R_2 + r), \text{ de unde}$$

$$r = \frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2} = \frac{0,24 \cdot 6 - 0,64 \cdot 2}{0,64 - 0,24} = 0,4 \, \Omega.$$

Din prima ecuație (1),

$$E = 0,64(2 + 0,4) = 1,536 \, \text{V}.$$

b) Rezistența circuitului exterior va fi  $R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \cdot 2}{6 + 2} = 1,5 \, \Omega$ .

Din legea lui Ohm pentru întreg circuitul,

$$I = \frac{E}{R_e + r} = \frac{1,536}{1,5 + 0,4} = 0,808 \, \text{A}.$$

c) Energia consumată în rezistor este  $W = RI^2t$ , deci

$$W_1 = R_1 I_1'^2 t, \quad W_2 = R_2 I_2'^2 t,$$

unde  $I_1'$  și  $I_2'$  sînt intensitățile curenților prin cei doi rezistori legați în paralel. Conform legilor lui Kirchhoff,  $I = I_1' + I_2'$ ,  $I_1' R_1 = I_2' R_2$ , de unde

$$I_1' = \frac{I}{1 + \frac{R_1}{R_2}} = \frac{0,808}{1 + \frac{2}{6}} = 0,606 \, \text{A};$$

$$I_2' = I - I_1' = 0,808 - 0,606 = 0,202 \, \text{A};$$

$$W_1 = R_1 I_1'^2 t = 2 \cdot 0,606^2 \cdot 10 \cdot 3600 = 2,64 \cdot 10^4 \, \text{J} = \frac{2,64 \cdot 10^4}{3,6 \cdot 10^6} = 7,33 \cdot 10^{-3} \, \text{kWh};$$

$$W_2 = R_2 I_2'^2 t = 6 \cdot 0,202^2 \cdot 10 \cdot 3600 = 8,8 \cdot 10^3 \, \text{J} = 2,44 \cdot 10^{-3} \, \text{kWh}.$$

3°. a) Principiul acțiunilor reciproce se formulează astfel: dacă un corp acționează asupra altuia cu o forță, numită acțiune, atunci cel de al doilea corp acționează asupra primului cu o forță egală în modul și opusă ca sens, numită reacțiune, adică  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ .

b) Formula lui Galilei se scrie

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0),$$

unde  $v_0$  este valoarea vitezei la coordonata  $x_0$ ,  $v$  este viteza punctului material la coordonata  $x$ , iar  $a$  este accelerația (constantă) a mișcării. Formula Galilei este valabilă numai în cazul mișcării uniform variate.

c) Acest subiect a fost tratat în cadrul problemei X.3°.c.

4°. a) Corpurile în mișcare posedă energie, deoarece acționind asupra altor corpuri pot produce un lucru mecanic (le pot pune în mișcare, le pot deforma etc.).

Energia pe care o are un corp în mișcare (în raport cu un anumit sistem de referință) reprezintă energia cinetică a corpului. Lucrul mecanic pe care îl poate efectua un corp pe seama energiei sale cinetice este egal cu lucrul mecanic efectuat

de forța care a adus corpul din repaus în starea de mișcare considerată (cu viteza  $v$ ). Acesta este  $L = Fd$ , dacă forța este constantă pe distanța  $d$  și deplasarea se face pe direcția forței. Întrucît  $F = ma$  și conform ecuației Galilei  $v^2 = 2ad$  (deoarece am luat  $v_0 = 0$ ) rezultă  $L = \frac{mv^2}{2}$ . Deci energia cinetică a corpului care are o mișcare de translație cu viteza  $v$  este

$$E_c = \frac{mv^2}{2}.$$

Evident, dacă  $v_0 \neq 0$ , atunci ecuația lucrului mecanic devine

$$L = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

și reprezintă forma uzuală a teoremei variației energiei cinetice.

b) Compunerea condensatorilor în paralel se face așa cum arată figura F.B.92. Toți condensatorii vor avea aceeași diferență de potențial între armături, anume  $V_A - V_B$ . Capacitatea echivalentă a sistemului va fi, prin definiție, raportul dintre cantitatea de electricitate  $Q$  înmagazinată în sistemul de condensatori și diferența de potențial la bornele sistemului,

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B}. \text{ Dar } Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = (V_A - V_B)(C_1 + C_2 + \dots + C_n).$$

Astfel

$$C = \frac{(V_A - V_B)(C_1 + C_2 + \dots + C_n)}{V_A - V_B} = \sum_{i=1}^n C_i.$$

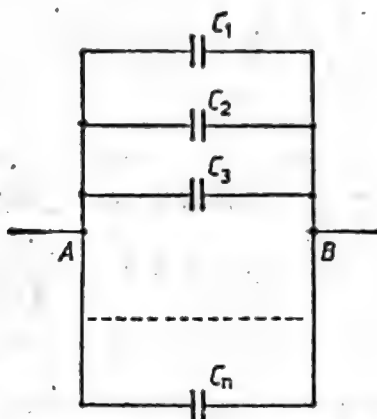


Fig. F.B.92

c) Forța de interacțiune care apare între doi conductori parcurși de curent electric reprezintă forța electromagnetică cu care fiecare conductor interacționează cu câmpul magnetic generat de celălalt conductor; astfel,  $F_1 = I_1 l B_2$  va reprezenta forța care se exercită pe o lungime  $l$  a conductorului 1 parcurs de curentul de intensitate  $I_1$ , datorită câmpului generat de conductorul 2, în zona spațială în care se găsește conductorul 1. Considerînd conductorii foarte lungi, câmpul magnetic generat de conductorul prin care circulă curentul de intensitate  $I_2$ , la distanța  $r$  (distanța dintre conductori) este caracterizat de inducția  $B_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I_2}{2\pi r}$ , unde  $\mu_0$  este permeabilitatea vidului, iar  $\mu_r$  permeabilitatea relativă a substanței în care se află conductorii. Introducînd în expresia forței, rezultă

$$F_1 = \frac{\mu_0 \mu_r I_1 I_2}{2\pi r}.$$



Forța  $F_2$  care acționează asupra conductorului parcurs de curentul  $I_2$  va avea aceeași expresie, dar va fi de sens opus (este satisfăcută legea acțiunii și reacțiunii).

**XXIV. 1°.** a) Conform formulei Galilei,  $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,8} = 4 \text{ m/s}$ .

b) În mișcarea prin apă asupra corpului va acționa și forța arhimedică  $F_A$ . Întrucît corpul ajunge pe fundul lacului cu viteză nulă, înseamnă că  $F_A > G$ . Accelerația corpului în apă va fi dată de

$$ma = G - F_A, \text{ de unde } a = \frac{G - F_A}{m} = \frac{\rho_c V g - \rho_a V g}{\rho_c V} = g \left( 1 - \frac{\rho_a}{\rho_c} \right).$$

Viteza la fundul lacului se va obține tot cu ajutorul ecuației Galilei,  $v$  de la punctul a fiind viteza inițială,  $v' = \sqrt{v^2 + 2aS}$ . Cum  $v' = 0$ , rezultă adîncimea lacului,

$$S = -\frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{g \left( \frac{\rho_a}{\rho_c} - 1 \right)} = \frac{2h\rho_c}{\rho_a - \rho_c} = \frac{2 \cdot 0,8 \cdot 800}{1000 - 800} = 6,4 \text{ m}.$$

c) Considerăm intervalul de timp măsurat din momentul în care începe căderea corpului, deci

$$t = t_1 + t_2 + t_3,$$

unde  $t_1$  este timpul de cădere pînă la suprafața apei,  $t_2$ , timpul cît durează scufundarea și  $t_3$  este timpul de urcare pînă la suprafață. Utilizînd ecuația vitezei,  $v = v_0 + at$ , avem

$$t_1 = \frac{v}{g} = \frac{4}{10} = 0,4 \text{ s},$$

$$t_2 = -\frac{v}{a} = \frac{v}{g \left( \frac{\rho_a}{\rho_c} - 1 \right)} = \frac{4}{10 \left( \frac{1000}{800} - 1 \right)} = 1,6 \text{ s},$$

$$t_3 = t_2 = 1,6 \text{ s},$$

deci  $t = 0,4 + 1,6 + 1,6 = 3,6 \text{ s}$ .

d) În general,  $p = mv = m(v_0 + at)$ , deci impulsul este funcție liniară de timp, panta dreptei fiind proporțională cu accelerația. Impulsul crește în intervalul de timp  $t_1$ , scade în  $t_2$  și crește din nou în  $t_3$ .

Graficul va fi cel din figura F.B.93.

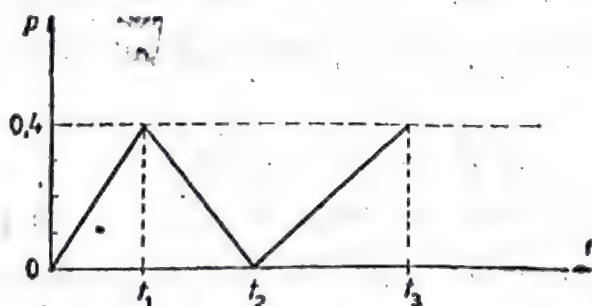


Fig. F.B.93

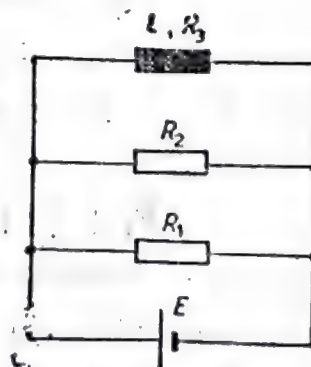


Fig. F.B.94

Valoarea maximă este  $p_{\max} = m \dot{v} = 0,1 \cdot 4 = 0,4 \text{ kgm/s}$  și este atinsă cînd corpul se află la suprafața apei.

2°. Circuitul descris în text este arătat în figura F.B.94.

a) Rezistența totală a circuitului este rezistența circuitului exterior (sursei),

$$R_e = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} + \left( \frac{R_2 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_3}{R_1 R_2 R_3} \right)^{-1} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_3} =$$

$$= \frac{10 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 10} = 1,82 \, \Omega.$$

b) Conform legii electrolizei,

$$m = KIt = K \frac{E}{R_2} t = 0,33 \frac{20}{4} \cdot 3600 = 5940 \, \text{mg} = 5,94 \, \text{g}.$$

$$\text{c) } \Phi = BNS = \mu HNS = \mu \frac{N^2 S}{l} I = \mu \frac{N^2 S}{l} \frac{E}{R_3} =$$

$$= \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} (10^3)^2 \cdot 10^{-3}}{0,4} \cdot \frac{20}{5} = 1,256 \cdot 10^{-2} \, \text{Wb};$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu \frac{N^2 S}{l} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} (10^3)^2 \cdot 10^{-3}}{0,4} = 3,14 \cdot 10^{-3} \, \text{H}.$$

3°. a) Un sistem de două forțe paralele, de sens opus, care acționează asupra unui corp, arată ca în figura F.B. 95.

În particular, unghiul  $\alpha$  dintre direcția forțelor și segmentul care unește punctele lor de aplicație poate fi  $\frac{\pi}{2}$ .

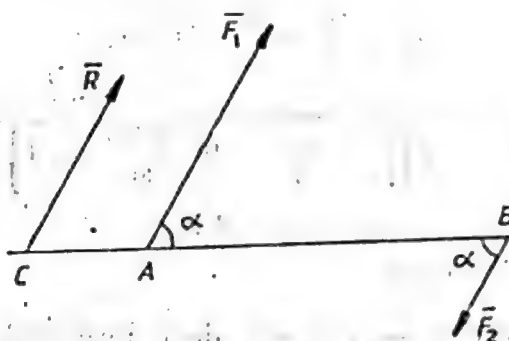


Fig. F.B.95

Se pune problema înlocuirii acestui sistem de forțe printr-o singură forță (rezultantă), care să aibă același efect de mișcare asupra corpului. Pentru aceasta vom determina mai întâi o forță  $\vec{F}_3$ , astfel încât corpul să fie în echilibru sub acțiunea sistemului  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ . Aceasta implică, pe de o parte, ca rezultanta celor trei forțe să fie nulă,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \text{ sau } \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \quad (1)$$

și, pe de altă, ca momentul resultant al celor trei forțe în raport cu un pol să fie nul. Vom alege punctul de aplicație al forței  $\vec{F}_3$  ca pol. Întrucît  $\vec{M}_{F_3} = 0$ , momentele forțelor  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  trebuie să aibă sensuri opuse. Aceasta este posibil numai dacă polul se află în stînga punctului A (fig. F.B.95). În acest caz, modulul momentului resultant va fi  $CAF_1 \sin \alpha - CBF_2 \sin \alpha$ . Condiția de echilibru conduce la relația

$$\frac{CB}{CA} = \frac{F_1}{F_2} \quad (2)$$



Întrucît  $\vec{F}_3$  echilibrează sistemul  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ , înseamnă că rezultanta forțelor este  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$ . Conform ecuației (1), modului lui  $\vec{R}$  este dat de diferența modulelor celor două forțe,  $R = F_1 - F_2$ , direcția este aceeași cu a forțelor, orientarea este în sensul forței mai mari, iar punctul ei de aplicație este dat de ecuația (2).

b) Acest subiect este tratat în X 3°. b.

c) Capacitatea unui condensator se definește prin citul dintre sarcina electrică  $Q$  de pe o armătură și diferența de potențial dintre cele două armături ( $V_1 - V_2$ ),  $C = Q/(V_1 - V_2)$ . Un condensator plan este format din două plăci plane, paralele, așezate față în față la o distanță  $d$  una de alta. Măsurind diferența de potențial dintre plăci (armături) cu ajutorul unui electroscoap, se constată că o creștere a distanței dintre plăci de  $k$  ori, de la  $d$  la  $kd$ , are ca efect o creștere tot de  $k$  ori a diferenței de potențial dintre cele două plăci, de la  $V_1 - V_2$  la  $k(V_1 - V_2)$ . Întrucît depărtarea plăcilor, în absența contactului cu alte corpuri, nu modifică sarcina electrică de pe plăci  $Q$ , înseamnă că o creștere a diferenței de potențial implică o reducere în același raport a capacității. Această observație conduce la concluzia că, pentru un condensator plan, capacitatea este invers proporțională cu distanța dintre plăci,  $d$ , adică  $C \sim 1/d$ . Păstrînd constantă distanța dintre plăci și variînd suprafața plăcilor aflate față în față, se constată prin experiențe similare că  $C \sim S$ . În sfîrșit, dacă, fără a modifica geometria condensatorului plan ( $d$  și  $S$  menținuți constanți), se introduce între armături o placă dintr-un material dielectric cu grosimea egală cu distanța  $d$  dintre acestea, se constată o creștere a capacității. Dacă experimentul se repetă cu plăci făcute din materiale dielectrice, caracterizate de permitivități diferite, se constată că există o relație de proporționalitate directă între capacitatea și permitivitatea mediului dintre armături. Punînd la un loc aceste constatări experimentale, se poate scrie

$$C = \frac{\epsilon S}{d},$$

constanta de proporționalitate fiind egală cu unitatea atunci cînd se utilizează unitățile din SI.

4°. a) Nenumărate experimente efectuate cu tot felul de corpuri, aflate în cele mai variate stări de mișcare, cărora li s-au aplicat diferite forțe, au condus la formularea de către Newton a următorului principiu: vectorul forță  $\vec{F}$  este proporțional cu produsul dintre masa corpului  $m$  și vectorul accelerație  $\vec{a}$ , adică  $\vec{F} = m\vec{a}$ .

b) Acest subiect a fost tratat în cadrul problemei II. 5°. a.

c) Acest subiect a fost tratat în III. 4°. c.

XXV. 1°. a)  $\eta = \frac{Q_u}{Q_c}$ , deci căldura necesară pentru funcționarea instalației este

$$Q_c = \frac{Q_u}{\eta} = \frac{m_1[c_a(T_f - T_0) + \lambda_c]t}{\eta} = \frac{100[4180(373 - 273) + 2,257 \cdot 10^6]2 \cdot 3600}{0,6} = 3,2 \cdot 10^9 \text{ kJ.}$$

$$\text{b) } \eta_1 = \frac{Q_u}{Q_1} \text{ și } Q_1 = RI^2t_1, \text{ deci } I = \sqrt{\frac{Q_1}{Rt_1}},$$

$$I = \sqrt{\frac{Q_u}{\eta_1 Rt_1}} = \sqrt{\frac{100[4180(373 - 273) + 2,257 \cdot 10^6]2 \cdot 3600}{0,9 \cdot 200 \cdot 3600}} = 1724 \text{ A,}$$

unde am considerat aceleași condiții inițiale ca la punctul a.



c) Cantitatea de căldură necesară pentru topirea gheții și încălzirea apei până la  $T_f = 373 \text{ K}$  este obținută prin condensarea unei cantități de vapori  $m_v$ , adică

$$m_2 \lambda_l + m_2 c_a (T_f - T_0) = m_v \lambda_v.$$

Rezultă

$$m_v = \frac{m_2 [\lambda_l + c_a (T_f - T_0)]}{\lambda_v} = \frac{1 \cdot [3,35 \cdot 10^5 + 4180 (373 - 273)]}{2,257 \cdot 10^6} = 0,333 \text{ kg}.$$

2°. a) Conform ecuației termice de stare a gazului ideal,  $pV = \frac{m}{\mu} RT$ , deci

$$\begin{aligned} m &= m_1 + m_2 = \frac{\mu}{RT} (p_1 V_1 + p_2 V_2) = \\ &= \frac{28}{8310 \cdot 300} (3 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^{-3}) = 0,0625 \text{ kg}. \end{aligned}$$

După deschiderea robinetului, presiunea în cele 2 incinte este aceeași,  $p$ . Masa totală rămâne aceeași,

$$m'_1 = \frac{\mu p V_1}{RT}, \quad m'_2 = \frac{\mu p V_2}{RT}, \quad \text{deci } m = \frac{\mu p}{RT} (V_1 + V_2);$$

egalind cele două expresii, pentru  $m$  rezultă

$$\frac{\mu}{RT} (p_1 V_1 + p_2 V_2) = \frac{\mu p}{RT} (V_1 + V_2), \quad \text{de unde } p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}.$$

Cele două mase devin

$$m'_1 = \frac{\mu V_1}{RT} \cdot \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = m \frac{V_1}{V_1 + V_2} = 0,0625 \frac{4 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-3}} = 0,0208 \text{ kg},$$

$$m'_2 = \frac{\mu V_2}{RT} \cdot \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = m \frac{V_2}{V_1 + V_2} = 0,0625 \frac{8 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-3}} = 0,0417 \text{ kg}$$

sau  $m'_2 = m - m'_1 = 0,0625 - 0,0208 = 0,0417 \text{ kg}$ .

b) În incinta 2 presiunea este aceeași ca înainte de închiderea din nou a robinetului, anume

$$p'_2 = p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-3}} = 2,33 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

În incinta 1 încălzirea se face la volum constant deci  $\frac{p'_1}{p} = \frac{T_1}{T}$ , de unde

$$p'_1 = \frac{T_1 p}{T} = \frac{400}{300} \cdot 2,33 \cdot 10^5 = 3,10 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

$$\text{c) } v_i = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8310 \cdot 300}{28}} = 516 \text{ m/s}.$$

Concentrația de molecule (numărul de molecule din unitatea de volum)  $n$  se poate obține cunoscând masa de gaz din vas  $m'_2 = 0,0417 \text{ kg}$ . Într-un kmol există  $N_A$  molecule, deci în  $v = \frac{m'_2}{\mu}$  kmoli vor exista  $N = N_A \frac{m'_2}{\mu}$  molecule. Rezultă

$$n = \frac{N}{V_2} = \frac{N_A m'_2}{\mu V_2} = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \cdot 0,0417}{28 \cdot 8 \cdot 10^{-3}} = 1,12 \cdot 10^{23} \frac{\text{molecule}}{\text{m}^3}.$$

3°. a) Ecuațiile Kirchhoff pentru circuitul din figura F.B.96 vor avea forma

$$n_1 E = I_1 n_1 r + I R, \quad (1)$$

$$n_2 E = I_2 n_2 r + I R, \quad (2)$$

$$I = I_1 + I_2. \quad (3)$$

Înlocuind ultima ecuație în primele două, acestea devin

$$n_1 E = I_1 n_1 r + R(I_1 + I_2) \Rightarrow I_2 = \frac{n_1(E - I_1 r) - I_1 R}{R}, \quad (4)$$

$$n_2 E = I_2 n_2 r + R(I_1 + I_2) \Rightarrow I_2 = \frac{n_2 E - R I_1}{R + n_2 r}. \quad (5)$$

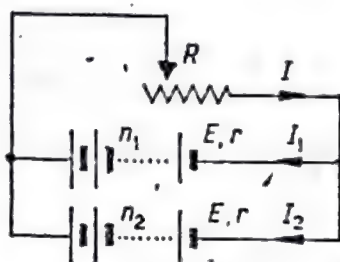


Fig. F.B.96

Egalind cele două expresii ale lui  $I_2$ , rezultă

$$[n_1 E - I_1(n_1 r + R)](R + n_2 r) = (n_2 E - I_1 R)R,$$

$$n_1 E R + n_1 n_2 E r - I_1 n_1 r R - I_1 n_1 n_2 r^2 - I_1 R^2 - I_1 R n_2 r = n_2 E R - I_1 R^2,$$

$$I_1 r(n_1 R + n_1 n_2 r + R n_2) = E(n_1 R - n_2 R + n_1 n_2 r),$$

de unde

$$I_1 = \frac{E[n_1 n_2 r + (n_1 - n_2)R]}{r[n_1 n_2 r + (n_1 + n_2)R]} = \frac{2[8 \cdot 5 \cdot 0,2 + (8 - 5) \cdot 4]}{0,2[8 \cdot 5 \cdot 0,2 + (8 + 5) \cdot 4]} = 3,333 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{n_2 E - R I_1}{n_2 r + R} = \frac{5 \cdot 2 - 4 \cdot 3,33}{5 \cdot 0,2 + 4} = -0,664 \text{ A}.$$

Semnul minus arată că curentul  $I_2$  are sensul opus celui considerat în figura F.B.96;

$$I = I_1 + I_2 = 3,333 - 0,664 = 2,669 \text{ A}.$$

b) Punind condiția  $I_2 = 0$ , ecuațiile (4) și (5) devin

$$n_1(E - I_1 r) - I_1 R = 0, \quad n_2 E - R I_1 = 0.$$

Eliminând  $I_1$  între aceste ecuații, se obține

$$n_1 = n_2 \frac{n_1 r + R}{R} \text{ sau } R = \frac{n_1 n_2 r}{n_1 - n_2} = \frac{8 \cdot 5 \cdot 0,2}{8 - 5} = \frac{8}{3} \Omega.$$

c) Puterea disipată de rezistența  $R$  va fi

$$\begin{aligned} P &= R I^2 = R(I_1 + I_2)^2 = R \left( I_1 + \frac{n_2 E - R I_1}{n_2 r + R} \right)^2 = R \frac{n_2}{n_2 r + R} (I_1 r + E)^2 = \\ &= R \left[ \left( \frac{E[n_1 n_2 r + (n_1 - n_2)R]}{r[n_1 n_2 r + (n_1 + n_2)R]} r + E \right) \frac{n_2}{n_2 r + R} \right]^2 = \\ &= R \left( \frac{2 E n_1 n_2}{n_1 n_2 r + (n_1 + n_2)R} \right)^2 = R \left( \frac{2 E}{r + \alpha R} \right)^2, \end{aligned}$$

unde am introdus notația  $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1} = \alpha$ .

Dacă  $P(R)$  este o funcție cu un maxim, atunci înseamnă că fiecare valoare a lui  $P$  va fi obținută pentru două valori ale lui  $R$ , deci

$$R_1 \left( \frac{2E}{r + \alpha R_1} \right)^2 = R_2 \left( \frac{2E}{r + \alpha R_2} \right)^2.$$

Efectuind simplificările evidente, ecuația devine

$$R_1(r + \alpha R_2)^2 = R_2(r + \alpha R_1)^2$$

sau

$$(R_1 - R_2)r^2 = R_1 R_2 \alpha^2 (R_1 - R_2),$$

adică

$$R_1 R_2 = \frac{r^2}{\alpha^2}.$$

Pentru valoarea maximă a lui  $P$  cele două valori ale lui  $R$  sunt confundate. Punind  $R_1 = R_2 = R$ , rezultă

$$R = \frac{r}{\alpha} = \frac{r n_1 n_2}{n_1 + n_2} = \frac{0,2 \cdot 8 \cdot 5}{8 + 5} = 0,615 \, \Omega.$$

Puterea corespunzătoare acestei valori a rezistenței este

$$P_{\max} = R \left( \frac{2E}{r + \left( \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1} \right) R} \right)^2 = 0,615 \left( \frac{2 \cdot 2}{0,2 + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{8} \right) 0,615} \right)^2 = 61,5 \, \text{W}.$$

4°. a) Coeficientul de dilatare în volum a unui lichid se notează cu  $\gamma$  și este dat de expresia  $\gamma = \Delta V / V_0 \Delta t$ , unde  $\Delta V = V - V_0$  fiind volumul lichidului la temperatura inițială  $t_0 = 0^\circ \text{C}$ ,  $V$  volumul corespunzător temperaturii finale  $t$ , iar  $\Delta t = t - t_0$ . Astfel,  $\gamma$  reprezintă variația relativă a volumului lichidului pentru o variație a temperaturii egală cu un grad.

Cînd se măsoară variația volumului unui lichid cu temperatura, trebuie să se țină seama și de dilatarea vasului care conține lichidul. Variația de volum măsurată este o variație aparentă care include dilatarea atât a lichidului, cit și a vasului. Coeficientul de dilatare calculat cu această variație va reprezenta coeficientul de dilatare aparentă,  $\gamma_a = \Delta V_a / V_0 \Delta t$ . Notînd cu  $\gamma_s$  coeficientul de dilatare în volum al vasului, va exista relația  $\gamma = \gamma_a + \gamma_s$ .

b) Inducția unui cîmp magnetic uniform este o mărime fizică vectorială, al cărei modul este egal cu raportul dintre forța cu care acel cîmp magnetic acționează asupra unui conductor rectiliniu, perpendicular pe liniile cîmpului magnetic, și produsul dintre intensitatea curentului din conductor și lungimea conductorului aflată în cîmp.

Unitatea de măsură a inducției magnetice în SI se numește tesla,

$$[B]_{\text{SI}} = \frac{[F]_{\text{SI}}}{[I]_{\text{SI}} [l]_{\text{SI}}} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \text{T}.$$

Un cîmp magnetic uniform are inducția de 1 T, dacă exercită o forță de 1 N asupra fiecărui metru din lungimea unui conductor, perpendicular pe liniile de cîmp, parcurs de un curent cu intensitatea de 1 A.

c) Parametrii unui tub electronic sînt mărimi care îi determină calitățile și funcțiile. Parametrii fundamentali ai unui tub sînt: panta caracteristicii  $I_A = f(U_G)$  în zona de liniaritate, factorul de amplificare și rezistența internă.



Panta: pentru zona rectilinie panta caracteristicii,  $I_A = f(U_G)$  pentru  $U_A = \text{const}$ , va fi

$$S = \operatorname{tg} \alpha = \left. \frac{\Delta I_A}{\Delta U_G} \right|_{U_A = \text{const}}$$

Acest parametru arată cât de fin poate fi controlat curentul anodic prin variațiile tensiunii de grilă.

Factorul de amplificare: am prezentat anterior variația  $\Delta I_A$  a curentului anodic produsă de o variație  $\Delta U_G$  a tensiunii de grilă, atunci când tensiunea anodică este constantă. Evident este posibil să se obțină aceeași variație de curent anodic menținând constantă tensiunea de grilă și variind tensiunea anodică cu  $\Delta U_A$ . Raportul dintre variația tensiunii anodice  $\Delta U_A$  și variația tensiunii de grilă  $\Delta U_G$ , care au ca efect aceeași variație  $\Delta I_A$  a intensității curentului anodic, poartă numele de factor de amplificare al triodei și se notează cu  $\mu$ , adică

$$\mu = \left. \frac{\Delta U_A}{\Delta U_G} \right|_{\Delta I_A = \text{const}}$$

Rezistența internă a unei triode este măsurată prin raportul dintre variația tensiunii anodice  $\Delta U_A$  și variația corespunzătoare a intensității curentului anodic, atunci când tensiunea de grilă este menținută constantă,

$$R_i = \left. \frac{\Delta U_A}{\Delta I_A} \right|_{U_G = \text{const}}$$

Rezistența internă exprimă măsura în care variațiile tensiunii anodice controlează intensitatea curentului anodic.

5°. a) Acest subiect a fost tratat în VI. 4°. a.

b) Două corpuri punctiforme, încărcate cu sarcinile electrice  $q_1$  și  $q_2$ , interacționează reciproc (se atrag sau se resping) cu o forță  $\vec{F}$  a cărei valoare absolută este proporțională cu produsul sarcinilor electrice și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele,

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

unde  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$ ,  $\epsilon$  fiind permitivitatea electrică a mediului în care se află sarcinile.

Direcția forței se află pe linia care unește cele două corpuri,

$$\vec{F} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{r}}{r^2},$$

unde  $\vec{r}$  este vectorul de poziție al uneia dintre sarcini față de cealaltă.

c) Impedanța  $Z$  a unui circuit de curent alternativ care conține o rezistență  $R$ , o inductanță  $L$  și o capacitate  $C$  legate în paralel (la aceeași tensiune) este dată de expresia

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2}}$$

unde  $X_L = L\omega$  și  $X_C = 1/C\omega$ ,  $\omega$  fiind pulsația tensiunii alternative.

XXVI. 1°. a) Randamentul ciclului Carnot este

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_0 + t_2}{T_0 + t_1} = 1 - \frac{273 + 27}{273 + 327} = 0,5.$$

Randamentul se mai exprimă sub forma

$$\eta = \frac{L}{Q_1}, \text{ de unde } Q_1 = \frac{L}{\eta} = \frac{4 \cdot 10^3}{0,5} = 8 \cdot 10^3 \text{ J.}$$

Pe de altă parte,  $L = Q_1 - |Q_2|$ , de unde

$$|Q_2| = Q_1 - L = 8 \cdot 10^3 - 4 \cdot 10^3 \text{ J,}$$

deci

$$Q_2 = -4 \cdot 10^3 \text{ J.}$$

b) Pentru gazul ideal, energia internă depinde numai de temperatură, deci  $\Delta U_{23} = \nu C_V (T_3 - T_2)$ . Din ecuațiile  $C_p - C_V = R$  și  $\frac{C_p}{C_V} = \gamma$ , rezultă  $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$ . Variația energiei interne devine

$$\Delta U_{23} = \frac{\nu R}{\gamma - 1} (T_3 - T_2) = \frac{\nu R}{\gamma - 1} (t_2 - t_1) = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31 \cdot 10^3}{1,4 - 1} (27 - 327) = -3,12 \cdot 10^4 \text{ J.}$$

c) Din ecuația transformării adiabatice  $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1}$ , se obține

$$\epsilon = \frac{V_4}{V_1} = \left( \frac{T_1}{T_4} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left( \frac{T_0 + t_1}{T_0 + t_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left( \frac{273 + 327}{273 + 27} \right)^{\frac{1}{1,4-1}} = 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{32} = 5,65.$$

2°. a) Legile lui Kirchhoff pentru sensurile curenților determinate de cele două surse din figura F.B.10 se vor scrie

$$I = I_1 + I_2, \quad (1)$$

$$I_1 r_1 + IR = E_1, \quad (2)$$

$$I_2 r_2 + IR = E_2. \quad (3)$$

Eliminându-l pe  $I$ , ecuațiile (2) și (3) devin

$$I_1(r_1 + R) = E_1 - I_2 R, \quad (4)$$

$$I_2 r_2 + I_1 R + I_2 R = E_2. \quad (5)$$

Scotîndu-l pe  $I_1$  din ecuația (4), avem

$$I_1 = \frac{E_1 - I_2 R}{r_1 + R}. \quad (6)$$

Introducînd în (5), rezultă

$$I_2(r_2 + R) + \frac{R(E_1 - I_2 R)}{r_1 + R} = E_2, \quad (7)$$

de unde

$$I_2 = \frac{E_2 r_1 - R(E_1 - E_2)}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)} = \frac{125 \cdot 0,5 - 2(130 - 125)}{0,5 \cdot 0,2 + 2(0,5 + 0,2)} = 35 \text{ A.}$$

Din ecuația (6),

$$I_1 = \frac{E_1 - I_2 R}{r_1 + R} = \frac{130 - 35 \cdot 2}{0,5 + 2} = 24 \text{ A.}$$

b) Căderea de tensiune pe rezistorul  $R$  este

$$U = IR = (I_1 + I_2)R = (24 + 35) \cdot 2 = 118 \text{ V.}$$

Energia disipată în timpul  $t$  este

$$W = UIt = \frac{U^2}{R} t = \frac{118^2}{2} \cdot 120 = 835,4 \text{ kJ.}$$

c) Când  $I_1 = 0$ , ecuațiile (1), (2), (3) devin

$$I_2 = I, I_2 R = E_1 \text{ și } I_2 r_2 + I_2 R = E_2.$$

Eliminându-l pe  $I_2$ , rezultă

$$(R + r_2)E_1 = E_2 R, \text{ de unde } E_1 = \frac{E_2 R}{R + r_2} = \frac{125 \cdot 2}{2 + 0,2} = 113,6 \text{ V.}$$

Analog, când  $I_1 = I_2 = \frac{I}{2}$ , ecuațiile (2) și (3) devin

$$I\left(R + \frac{r_1}{2}\right) = E_1 \text{ și } I\left(R + \frac{r_2}{2}\right) = E_2.$$

Împărțind aceste relații membru cu membru, rezultă

$$E_1 = \frac{2R + r_1}{2R + r_2} E_2 = \frac{2 \cdot 2 + 0,5}{2 \cdot 2 + 0,2} 125 = 133,9 \text{ V.}$$

3°. a) Experiența arată că pentru încălzirea unui corp de la temperatura  $T_1$  la temperatura  $T_2$  este necesară o căldură proporțională cu diferența de temperatură  $\Delta T = T_2 - T_1$ . Constanta de proporționalitate  $k$  poartă numele de capacitate calorică a corpului,  $k = \frac{Q}{\Delta T}$ . Astfel, capacitatea calorică a unui corp este numeric egală cu căldura care trebuie furnizată corpului pentru ca temperatura lui să crească cu 1 grad. Capacitatea calorică a unei unități de masă (1 kg) a corpului reprezintă căldura specifică  $c = k/m$ , adică  $c = Q/m\Delta T$ . Când cantitatea de substanță se măsoară în moli (kmoli), atunci capacitatea calorică corespunzătoare unui mol (kmol) de substanță reprezintă căldura molară (kilomolară),  $C = Q/\nu\Delta T$ . Căldurile specifică și molară depind numai de natura substanței.

b) Acest subiect a fost tratat în VI.4°.a

c) Acest subiect a fost tratat în XVI.5°.6

4°. a) Intensitatea cimpului electric într-un punct se notează  $\vec{E}$  și este egală cu raportul dintre forța  $\vec{F}$  cu care cimpul acționează asupra unui corp de probă aflat în punctul respectiv și sarcina electrică  $q$  a corpului de probă,  $\vec{E} = \vec{F}/q$ . Unitatea de măsură pentru intensitatea cimpului electric se definește ținând seama că în cazul unui condensator plan  $E = U/d$ , unde  $U$  este diferența de potențial dintre plăci, iar  $d$  distanța care le separă. Rezultă

$$[E]_{SI} = [U]_{SI}/[d]_{SI} = \text{V/m.}$$

b) Inductanța  $L$  a unei bobine a cărei lungime  $l$  este mare în comparație cu diametrul ei este

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S}{l}.$$



unde  $\mu_0$  este permeabilitatea vidului,  $\mu_r$  permeabilitatea materialului din care este făcut miezul bobinei,  $N$  este numărul de spire al bobinei, iar  $S$  este secțiunea unei spire.

c) Acest subiect a fost tratat la II. 4°. c.

**XXVII. 1°.** Conform figurii F.B.97, tensiunea în fir este maximă în poziția de echilibru, cînd atât greutatea  $G$ , cit și forța centrifugă  $F_c$  sînt orientate de-a lungul firului și, în plus,  $F_c$  este maximă,

$$T_{\max} = G + F_c.$$

Tensiunea în fir este minimă în poziția de deviație maximă. Aici forța centrifugă este nulă, deci

$$T_{\min} = G \cos \alpha.$$

Raportul cerut este

$$\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \frac{G + F_c}{G \cos \alpha}. \quad (1)$$

Viteza corpului în momentul trecerii prin poziția de echilibru se obține cu ajutorul legii conservării energiei,

$$\frac{mv^2}{2} = mgh = mgl(1 - \cos \alpha). \quad (2)$$

Din ecuația (2) rezultă forța centrifugă în poziția de echilibru,

$$F_c = \frac{mv^2}{l} = 2mg(1 - \cos \alpha).$$

Introducînd în (1), rezultă

$$\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \frac{mg + 2mg(1 - \cos \alpha)}{mg \cos \alpha} = \frac{3 - 2 \cos \alpha}{\cos \alpha} = 4.$$

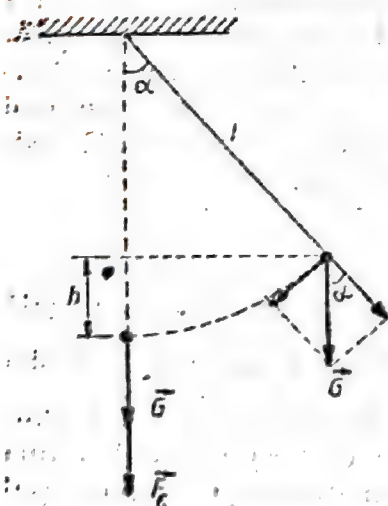


Fig. F.B.97

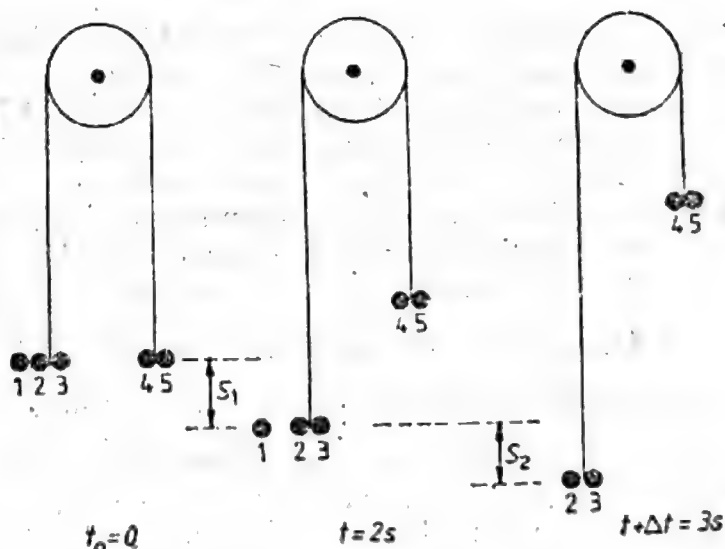


Fig. F.B.98

2°. a) Pentru rezolvarea problemei vom utiliza notațiile din figura F.B.98. În intervalul între  $t = 0$  și  $t = 2$  s mișcarea este accelerată, accelerația fiind dată de

$$a_1 = \frac{F}{M} = \frac{mg}{5m} = \frac{g}{5} = 2 \text{ m/s}^2.$$

Spațiul parcurs de bile în acest interval este

$$S_1 = \frac{at^2}{2} = 4 \text{ m.}$$

În continuare, bila 1 se va mișca în cădere liberă cu viteza inițială căpătată în timpul  $t$ . Spațiul rămas,  $h_1 = h - S_1 = 9 \text{ m}$ , va fi parcurs într-un timp  $t_1$ , dat de  $h_1 = v_0 t_1 + \frac{g t_1^2}{2}$ , unde  $v_0 = a_1 t = 2 \cdot 2 = 4 \text{ m/s}$ . Înlocuind valorile numerice, ecuația pentru  $t_1$  devine  $5 t_1^2 + 4 t_1 - 9 = 0$ , ale cărei soluții sînt date de

$$t_1 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 45}}{5}.$$

Evident, numai soluția pozitivă este acceptabilă, deci  $t_1 = 1 \text{ s}$ . Timpul cit durează căderea bilei 1 este  $t_{1 \text{ tot}} = t + t_1 = 2 + 1 = 3 \text{ s}$ .

b) În intervalul dintre  $t = 2 \text{ s}$  și  $t = 3 \text{ s}$  sistemul cu bile se mișcă uniform cu viteza  $v_0$ , deci spațiul parcurs în intervalul  $\Delta t = 1 \text{ s}$  este  $s_2 = v_0 \Delta t = 4 \cdot 1 = 4 \text{ m}$ . Restul distanței  $h_2 = h_1 - s_2 = 5 \text{ m}$  va fi parcurs de bila 2 în cădere liberă cu viteza inițială  $v_0$  în timpul  $t_2$ , dat de  $h_2 = v_0 t_2 + \frac{g}{2} t_2^2$  sau  $5 t_2^2 + 4 t_2 - 5 = 0$ . Soluția pozitivă este

$$t_2 = \frac{-2 + \sqrt{4 + 25}}{5} = 0,67 \text{ s.}$$

Timpul de cădere al celei de a doua bile este

$$t_{2 \text{ tot}} = t + \Delta t + t_2 = 2 + 1 + 0,67 = 3,67 \text{ s.}$$

c) Din momentul desprinderii celei de a doua bile, sistemul format din bilele 3, 4 și 5 capătă o accelerație în sens invers dată de  $a_2 = \frac{mg}{3m} = \frac{g}{3} = 3,33 \text{ m/s}^2$ . Pînă în acest moment bilele s-au deplasat pe o distanță  $S = S_1 + S_2 = 8 \text{ m}$ , deci bila 3 va trebui să parcurgă înapoi o distanță  $x = 8 \text{ m}$ . Ecuația de mișcare considerînd originea în poziția corespunzătoare momentului  $t + \Delta t$  ( $x_0 = 0$ ), va fi  $x = -v_0 t_3 + a_2 \frac{t_3^2}{2}$ .

Înlocuind valorile numerice, rezultă următoarea ecuație pentru  $t_3$

$$3,33 t_3^2 - 8 t_3 - 16 = 0,$$

$$t_3 = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 53,33}}{3,33} = \begin{cases} 3,7 \text{ s,} \\ 1,3 \text{ s.} \end{cases}$$

Va fi corectă prima valoare, deoarece valoarea 1,3 s este mai mică decît timpul în care ar fi parcurs spațiul  $x$  cu accelerația  $a_2$ , fără viteză inițială. Întrucît aceasta este de sens contrar lui  $a_2$ , timpul va fi mai lung. De la începutul mișcării pînă în acest moment a trecut timpul  $t_{3 \text{ tot}} = t + \Delta t + t_3 = 3 + 3,7 = 6,7 \text{ s}$ .

3°. a) Viteza termică este dată de

$$v_t = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,310 \cdot 300}{29}} = 507,8 \text{ m/s.}$$

b) Picătura de mercur este în echilibru cînd presiunea pe cele două fețe ale sale în contact cu gazul din vase este aceeași  $P_1 = P_2$ . Dar

$$P_1 V_1 = \nu R T_1; P_2 V_2 = \nu R T_2. \quad (4)$$

Întrucît  $T_1 = T + \Delta T$ ,  $T_2 = T - \Delta T$ ,  $V_1 = V + \Delta V$  și  $V_2 = V - \Delta V$  ( $\Delta V$  este același pentru că vasele nu își modifică volumul), ecuația  $P_1 = P_2$  devine

$$\frac{T + \Delta T}{V + \Delta V} = \frac{T - \Delta T}{V - \Delta V}. \quad (2)$$

Prelucrînd această relație, se obține forma mai simplă

$$T \Delta V = V \Delta T \text{ sau } \Delta V = \frac{V \Delta T}{T}. \quad (3)$$

Conform figurii F.B.99,  $\Delta V = S \Delta x$ , unde  $S = \frac{\pi d^2}{4}$  este secțiunea tubului.

Ecuația (3) conduce la

$$\Delta x = \frac{V \Delta T}{S T} = \frac{314 \cdot 10^{-6} \cdot 3}{\frac{3.14 \cdot 0.4^2 \cdot 10^{-4}}{4} \cdot 300} = 0,25 \text{ m.}$$

c) Variația energiei interne a sistemului va fi egală cu suma variațiilor de energie internă ale gazelor din cele două părți ale sistemului (vase),

$$\Delta U_1 = Q_1 - L_1, \quad \Delta U_2 = Q_2 - L_2, \\ \Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = Q_1 + Q_2 - (L_1 + L_2).$$

Lucrul mecanic efectuat la deplasarea picăturii de mercur este efectuat de gazul din vasul  $V_1$  ( $L_1 > 0$ ) și primit de gazul din celălalt vas ( $L_2 < 0$ ), deci  $L_2 = -L_1$ . Pe de altă parte, se observă că presiunea rămîne constantă în timpul transformării. Într-adevăr, presiunea finală în vase va fi

$$P_2 = P_1 = \frac{\nu R(T + \Delta T)}{V + \Delta V} = \frac{\nu R(T + \Delta T)}{V + \frac{V \Delta T}{T}} = \frac{\nu R T}{V} = P_0,$$

deci este aceeași cu presiunea inițială. Înseamnă că  $Q_1 = \nu C_p \Delta T_1$  și  $Q_2 = \nu C_p \Delta T_2$ . Întrucît  $\Delta T_1 = -\Delta T_2 = \Delta T$ , rezultă  $Q_2 = -Q_1$ , deci  $\Delta U = 0$ .

4°. a) Cuplul de forțe este un sistem de două forțe egale în mărime, care acționează pe direcții paralele, în sensuri opuse (fig. F.B.100).

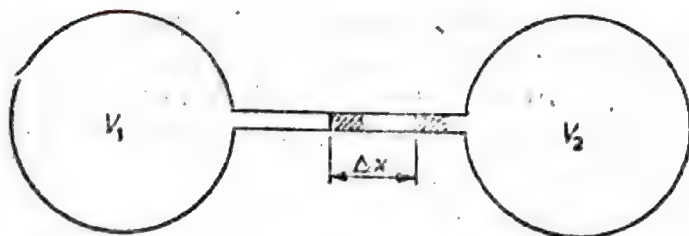


Fig. F.B.99

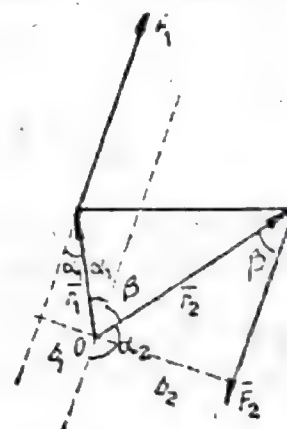


Fig. F.B.100

Momentul cuplului este rezultanta momentelor celor două forțe în raport cu un pol oarecare O,  $\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$ . Direcția vectorului  $\vec{M}$  este perpendiculară pe planul determinat de suporturile forțelor, iar sensul este dat de regula



burghiului — sensul în care avansează un burghiu cînd este rotit în sensul în care sistemul de forțe rotește corpul. Mărimea (modulul) va fi

$$M = r_1 F_1 \sin \alpha_1 + r_2 F_2 \sin \alpha_2 = F_1(r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2),$$

$$F_1(r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \beta) = F_1(b_1 + b_2) = F_1 b,$$

unde  $b$  este distanța dintre suporturile celor două forțe (brațul cuplului). Se observă că  $\vec{M}$  este independent de polul 0.

b) Legea lui Charles se referă la o transformare izocoră a unei cantități de gaz ideal și are forma

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2},$$

unde  $p_1$  și  $p_2$  sînt presiunile gazului la temperaturile  $T_1$  și, respectiv,  $T_2$ , volumul rămînînd nemodificat în cursul procesului.

c) Acest subiect a fost tratat în VI. 4°. a.

5°. a) Considerăm un punct material supus simultan la două mișcări oscilatorii armonice, de aceeași pulsație (frecvență) pe aceeași direcție considerată ca axă  $y$ . Ele sînt descrise de ecuațiile  $y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$  și  $y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ . Compunerea celor două mișcări se face fazorial, adică utilizînd faptul că o mișcare oscilatorie armonică este echivalentă cu proiecția pe un diametru a mișcării circulare uniforme. Vom considera deci două segmente de lungimi  $a_1$  și  $a_2$ , care se rotesc cu viteza unghiulară  $\omega$  în același sens defazat cu  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ , așa cum se vede în figura F.B.101.

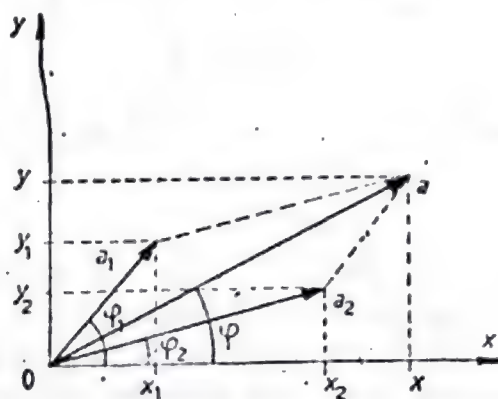


Fig. F.B.101

Deoarece suma proiecțiilor a doi vectori pe o axă este egală cu proiecția pe aceeași axă a vectorului rezultatant, înseamnă că oscilația rezultatantă se va obține prin proiecția pe axa  $y$  a mișcării circulare uniforme, descrise de virful vectorului  $a$  de mărime

$$a = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

adică

$$y = y_1 + y_2 = a \sin(\omega t + \varphi)$$

unde  $\varphi$  este dat de (fig. F.B.101)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{y} = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}.$$

b) Procesul adiabetic este o transformare în care sistemul nu schimbă căldură cu exteriorul,  $Q = 0$ . Această condiție face foarte simplu calculul lucrului mecanic. Principiul întâi al termodinamicii devine  $\Delta U = -L$ . În cazul unui gaz

deal energia internă depinde numai de temperatură, deci  $\Delta U = \nu C_v(T_2 - T_1)$ , unde  $\nu$  este numărul de moli de gaz,  $C_v$  căldura molară,  $T_2$  temperatura finală, iar  $T_1$  temperatura inițială. Între parametrii stării finale  $p_2$ ,  $V_2$  și  $T_2$  și parametrii stării inițiale  $p_1$ ,  $V_1$ ,  $T_1$  există următoarele relații echivalente:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma, \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}, \quad p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma} T_2^\gamma,$$

unde  $\gamma = C_p/C_v$  poartă numele de coeficient adiabatic al gazului.

În diagrama  $p, V$  procesul adiabatic al gazului ideal se reprezintă printr-o curbă a cărei pantă este mai mare (în valoare absolută) decât pentru un proces izoterm, suferit de aceeași cantitate de gaz, ambele procese avînd aceeași stare inițială (figura F.B. 102).

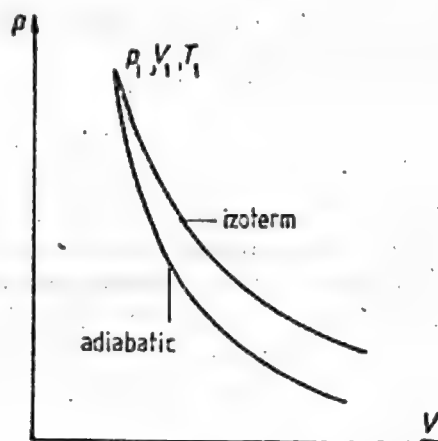


Fig. F.B.102

XXVIII.1°. a) Acest subiect a fost tratat în XVIII.1°. a.

b) Acest subiect a fost tratat în VI. 4°. c.

c) Acest subiect a fost tratat în XII. 3°. c.

2°. În reacțiile nucleare se manifestă următoarele legi de conservare:

— Legea conservării energiei. În cazul relației  $a + X \rightarrow Y + b$  ( $a$  fiind particula sau nucleul proiectil,  $X$  nucleul țintă, de obicei în repaus,  $Y$  nucleul rezidual și  $b$  particula sau nucleul mai ușor, rezultat din reacție), legea conservării energiei totale este  $W_a + W_X = W_Y + W_b$ , sau  $m_a c^2 + E_a^c + m_X c^2 + E_X^c = m_Y c^2 + E_Y^c + m_b c^2 + E_b^c$ ,  $E_c$  fiind energiile cinetice.

Diferența dintre energiile de repaus ale particulelor în stările inițială și, respectiv, finală poartă numele de energie de reacție și se notează cu  $Q$ ,

$$Q = E_c^b + E_c^Y - E_c^a - E_c^X.$$

Pentru  $Q > 0$  reacția se numește exoenergetică, iar pentru  $Q < 0$  reacția se numește endoenergetică.

De obicei o reacție nucleară se realizează experimental trimițînd particule sau nuclee  $a$ , accelerate, pe o țintă fixă care conține nuclee  $X$  în repaus (acest sistem de referință legat de ținta fixă poartă numele de sistemul laboratorului,  $SL$ ). Energia cinetică minimă a particulei proiectil  $a$  în  $SL$ , suficientă pentru a produce o reacție nucleară la prag, este

$$E_a^L = \frac{m_a + m_X}{m_X} \cdot |Q|.$$

— Legea conservării impulsului (figurile F.B. 103 și F.B. 104),

$$p_Y^2 = p_a^2 + p_b^2 - 2p_a p_b \cos \theta.$$

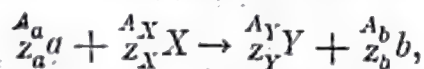
Energiile cinetice au expresiile  $E_c^Y = \frac{p_Y^2}{2m_Y}$ ,  $E_c^a = \frac{p_a^2}{2m_a}$  și  $E_c^b = \frac{p_b^2}{2m_b}$ , deoarece sînt mici în raport cu energiile de repaus. Introducînd aceste relații în relația care exprimă legea conservării impulsului, rezultă

$$2m_Y E_c^Y = 2m_a E_c^a + 2m_b E_c^b - 4 \sqrt{m_a m_b E_c^a E_c^b} \cdot \cos \theta.$$

Ținînd seamă de această relație și de faptul că în sistemul laboratorului  $E_c^X = 0$ , se obține relația care dă o altă metodă de măsură a energiei de reacție,

$$Q = \left(1 + \frac{m_b}{m_Y}\right) E_c^b - \left(1 - \frac{m_a}{m_Y}\right) E_c^a - \frac{2 \sqrt{m_a m_b E_c^a E_c^b}}{m_Y} \cdot \cos \theta.$$

— Legea conservării sarcinii electrice. În cazul reacției



legea conservării sarcinii electrice se exprimă prin  $Z_a + Z_X = Z_Y + Z_b$ .

— Legea conservării numărului de nucleoni, pentru aceeași reacție, se va scrie sub forma  $A_a + A_X = A_Y + A_b$ .

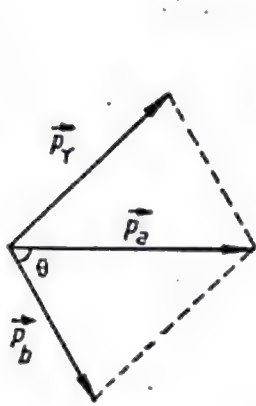


Fig. F.B.103

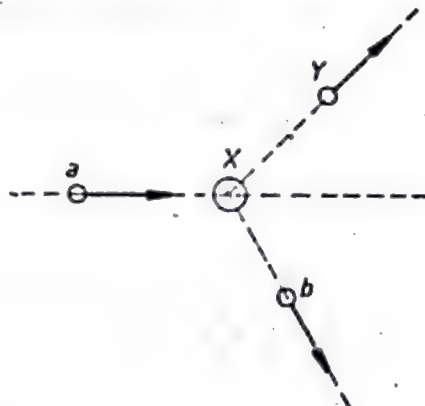


Fig. F.B.104

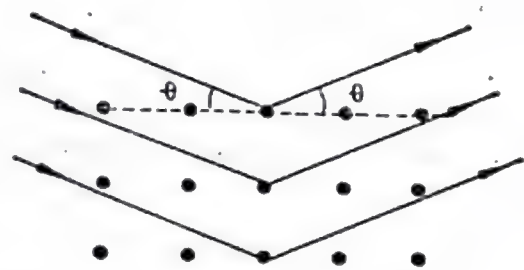


Fig. F.B.105

. 3°. Dacă un fascicul de electroni este incident pe un cristal, astfel încît el face un unghi  $\theta$  cu direcția planelor cristaline, atunci se va observa un fascicul difractat sub un unghi egal cu  $\theta$  (figura F.B. 105), dacă este satisfăcută condiția

$$2d \sin \theta = n\lambda,$$

unde  $n = 1, 2, 3, \dots$ , iar  $\lambda = \frac{h}{p}$  este lungimea de undă de Broglie asociată electronilor al căror impuls este  $p = mv$ . Considerînd mișcarea nerelativistă, impulsul va fi obținut din conservarea energiei,  $\frac{mv^2}{2} = eU$ , unde  $U$  este tensiunea de accelerare. Rezultă

$$p = \sqrt{2eUm}, \text{ deci } \lambda = h / \sqrt{2eUm}.$$

Introducînd în (1), se obține

$$U_n = \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \frac{h^2}{8em d^2} = \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \frac{(6,626 \cdot 10^{-34})^2}{8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{-20}} = 4,2 \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \text{ V.}$$



Dacă se consideră incidență normală,  $0 = \frac{\pi}{2}$ , atunci valorile tensiunii de accelerare vor fi: 4,2; 16,8; 37,8... V.

4°. Vom rezolva întâi punctul b, construind imaginea punctului sursă în cele două oglinzi, așa cum arată figura F.B. 106.

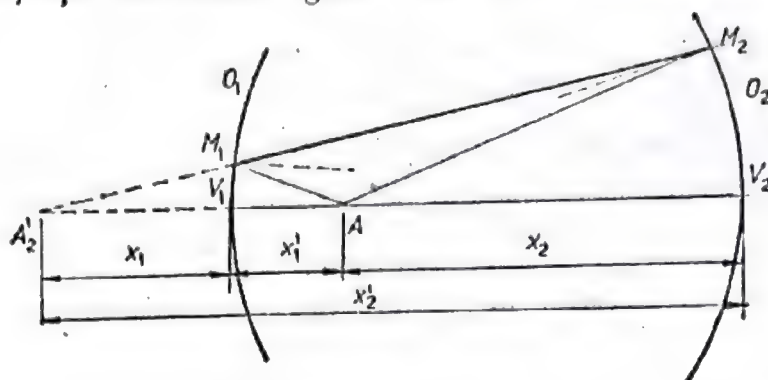


Fig. F.B.106

a) Notînd oglînda din stînga cu „1” și oglînda din dreapta cu „2”, ecuațiile care descriu formarea imaginilor vor fi:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x'_1}; \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x'_2}. \quad (1)$$

Conform figurii FB.106, vor mai fi satisfăcute următoarele relații:

$$x'_2 = d - x_1; \quad x_2 = d - x'_1, \quad (2)$$

unde am ținut seama de faptul că  $x_1$  este negativ. Înlocuind relațiile (2) în cea de a 2-a ecuație (1), rezultă

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d - x_1} + \frac{1}{d - x'_1}. \quad (3)$$

Aducînd la același numitor în dreapta, ecuația (3) se mai scrie

$$\frac{1}{f} = \frac{2d - (x_1 + x'_1)}{d^2 + x_1x'_1 - d(x_1 + x'_1)}. \quad (4)$$

Grupînd în mod convenabil termenii, ecuația (4) devine

$$2fd - d^2 = x_1x'_1 - (x_1 + x'_1)(d - f). \quad (5)$$

Din prima ecuație (1),  $x_1 + x'_1 = \frac{x_1x'_1}{f}$ , astfel încît ecuația (5) se scrie

$$2fd - d^2 = x_1x'_1 \left( 2 - \frac{d}{f} \right)$$

sau

$$\left( 2 - \frac{d}{f} \right) (fd - x_1x'_1) = 0. \quad (6)$$

Distanța  $x'_1$  este arbitrară, putînd lua orice valoare între 0 și  $d$ , deoarece punctul A este un punct oarecare al axei optice, între cele două oglinzi, deci soluția  $fd - x_1x'_1 = 0$  trebuie eliminată. Ecuația (6) va fi satisfăcută dacă

$$d = 2f$$

Deci vîrfurile fiecărei oglinzi se află în centrul celeilalte, adică cele două normale la oglindă în punctele  $M_1$  și  $M_2$  vor trece prin vîrfurile  $V_2$  și, respectiv,  $V_1$ .

5°. Aşa cum arată figura F.B.107, asupra fiecărei bile acţionează greutatea  $\vec{G}$  şi forţa arhimedică  $\vec{F}_A$  pe verticală, iar pe orizontală forţa electrică,  $\vec{F}$ .

În situaţia de echilibru, rezultanta  $\vec{R}$  a acestor forţe va fi orientată de-a lungul firului. În cazul în care bilele se află în aer,  $F_A = 0$ , deci

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F'}{G}, \quad (1)$$

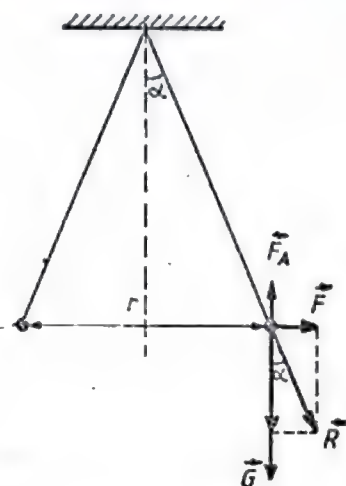


Fig. F.B.107

unde  $F' = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  este forţa electrică în aer. Când bilele sînt în ulei,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{G - F_A}, \quad (2)$$

unde

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2}$$

este forţa electrică în ulei. Egalînd (1) şi (2), rezultă

$$(G - F_A)\epsilon_r = G. \quad (3)$$

Ținînd seama că  $G = \rho_c Vg$  şi  $F_A = \rho_u Vg$ , unde  $\rho_c$  şi  $\rho_u$  sînt densităţile corpului şi, respectiv, uleiului, iar  $V$  volumul corpului, ecuaţia (3) devine  $\rho_c = \epsilon_r(\rho_c - \rho_u)$ , de unde

$$\rho_c = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} \rho_u = \frac{2,2}{2,2 - 1} \cdot 900 = 1\,650 \text{ kg/m}^3.$$

XXIX. 1°. a) Întrucît bobina are şi rezistenţă, circuitul va arăta ca în figura F.B.108.

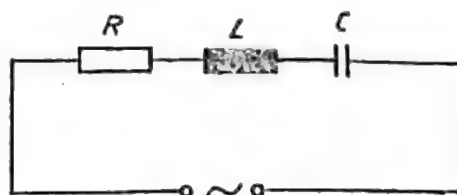


Fig. F.B.108

Frecvența de rezonanță este dată de relația  $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ , de unde

$$C = \frac{1}{4\pi^2\nu_0^2 L}. \quad (1)$$

Impedanța circuitului pentru o frecvență  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  este

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}, \text{ de unde } \sqrt{Z^2 - R^2} = \left|L\omega - \frac{1}{C\omega}\right|. \quad (2)$$

Vor exista două posibilități:

$L\omega > \frac{1}{C\omega}$ , care implică  $\omega^2 > \frac{1}{LC}$ , adică  $\omega^2 > \omega_0^2$ , relație incompatibilă cu datele problemei, și

$L\omega < \frac{1}{C\omega}$ , care implică  $\omega^2 < \omega_0^2$ , în concordanță cu datele problemei. Considerind satisfăcută această condiție, ecuația (2) devine

$$L = \frac{1}{\omega} \left( \frac{1}{C\omega} - \sqrt{Z^2 - R^2} \right). \quad (3)$$

Înlocuind în ecuația (1), rezultă

$$C = \frac{1}{\frac{2\pi\nu_0^2}{\nu} \left( \frac{1}{2\pi\nu C} - \sqrt{Z^2 - R^2} \right)}$$

sau

$$\frac{1}{2\pi\nu} - C\sqrt{Z^2 - R^2} = \frac{\nu}{2\pi\nu_0^2}, \text{ de unde}$$

$$C = \frac{1}{2\pi\nu\sqrt{Z^2 - R^2}} \left[ 1 - \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^2 \right] = \frac{1}{2\pi \cdot 10^3 \sqrt{10^6 - 10^2}} \left[ 1 - \left( \frac{10^3}{2 \cdot 10^3} \right)^2 \right] = 0,12 \mu\text{F}.$$

b) Din ecuația (2),  $L = \frac{1}{2\pi\nu} \left( \frac{1}{2\pi\nu C} - \sqrt{Z^2 - R^2} \right) =$

$$= \frac{1}{2\pi \cdot 10^3} \left( \frac{1}{2\pi \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 10^{-7}} - \sqrt{10^6 - 10^2} \right) = 52 \text{ mH}.$$

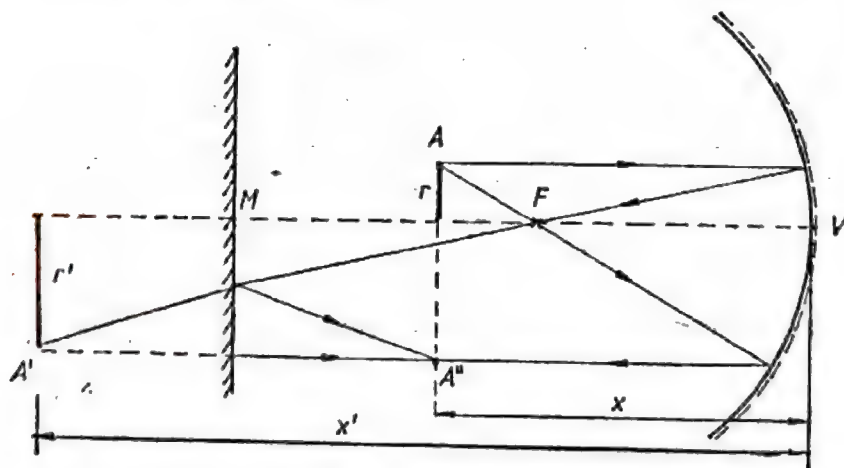


Fig. F.B.109

2°. a) Evident, cercul luminos va trebui să se afle între cele două oglinzi, așa cum se vede din figura F.B.109. Întrucât situația este caracterizată de simetrie în raport cu axa optică, vom considera numai un punct A al cercului. Imaginea A',



dată de oglinda sferică, va juca rolul de obiect virtual pentru oglinda plană. Imaginea finală este  $A''$ . Mersul razelor este cel arătat în figura F.B.109.

Oglinda plană va trebui să intersecteze axa optică în punctul  $M$ , aflat la mijlocul distanței dintre obiect și imaginea acestuia, dată de oglinda concavă. Distanța la care se află punctul  $M$  de vârful oglinzii concave va fi dată de

$$VM = x + \frac{x' - x}{2} = \frac{x' + x}{2}. \quad (1)$$

Din formula oglinzii sferice,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}$ , se obține

$$x' = \frac{fx}{x - f} = \frac{Rx}{2\left(x - \frac{R}{2}\right)} = \frac{Rx}{2x - R} = \frac{2 \cdot 1,4}{2 \cdot 1,4 - 2} = 3,5 \text{ m} \quad (2)$$

( $R = 2 \text{ m}$  este raza oglinzii sferice). Introducând în (1), rezultă

$$VM = \frac{\frac{Rx}{2x - R} + x}{2} = \frac{x^2}{2x - R} = \frac{3,5^2}{2 \cdot 3,5 - 2} = 2,45 \text{ m}.$$

Vom nota cu  $r$  raza cercului obiect și cu  $r'$  raza cercului imagine în oglinda concavă.

Din formula măririi rezultă  $r'/r = x'/x$  (s-a omis semnul minus, deoarece faptul că imaginea este răsturnată nu joacă nici un rol în problema de față). Diametrul cercului imagine va fi

$$d' = 2r' = 2r \frac{x'}{x} = 2r \frac{R}{2x - R} = 2 \cdot 10^{-2} \frac{2}{2 \cdot 1,4 - 2} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 5 \text{ cm}.$$

Diametrul imaginii date de oglinda plană este același.

3°. Ecuația pentru reacția nucleară descrisă se poate scrie

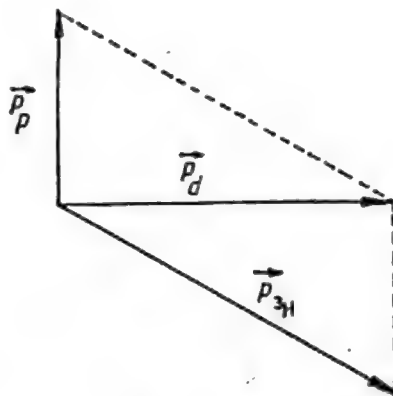


Fig. F.B.110

Intrucât se presupune că nucleul țintă  ${}^2_1\text{H}$  este în repaus, conservarea impulsului în procesul de ciocnire va arăta ca în figura F.B.110. Conform ecuației  $E_c = p^2/2m$ , impulsurile vor fi date de

$$p_p = \sqrt{2m_p E_{cp}}, \quad p_d = \sqrt{2m_d E_{cd}}, \quad p_{3H} = \sqrt{2m_{3H} E_{c_{3H}}}. \quad (1)$$

Din figura F.B. 110 se vede că impulsul tritiului se mai poate scrie

$$p_{3H} = \sqrt{p_p^2 + p_d^2}.$$

Utilizând ecuațiile (1), aceasta devine

$$m_{3H}E_{c_{3H}} = m_p E_{cp} + m_d E_{cd},$$

de unde se obține

$$E_{c_{3H}} = \frac{m_p E_{cp} + m_d E_{cd}}{m_{3H}}.$$

Energia de reacție este egală cu variația energiei cinetice, adică

$$Q = E_{c_{3H}} + E_{cp} - E_{cd} = E_{cp} \left( \frac{m_p}{m_{3H}} + 1 \right) + E_{cd} \left( \frac{m_d}{m_{3H}} - 1 \right). \quad (3)$$

O valoare aproximativă pentru energia de reacție vom obține dacă înlocuim masele atomice cu masele particulelor, adică

$$Q = E_{cp} \left( \frac{A_p}{A_{3H}} + 1 \right) + E_{cd} \left( \frac{A_d}{A_{3H}} - 1 \right) = 3,3 \left( \frac{1}{3} + 1 \right) + 1,2 \left( \frac{2}{3} - 1 \right) = 4 \text{ MeV}.$$

Intrucît  $Q > 0$ , reacția este exoenergetică. Aceasta se vede și direct din ecuația (3). Pentru că  $E_{cp} > E_d$ , indiferent care ar fi valoarea lui  $E_{c_{3H}}$  ( $> 0$ ), energia de reacție este pozitivă.

4°. Un fascicul de radiații  $X$ , cu lungimea de undă dată, care cade pe o bucată de grafit este împrăștiat în toate direcțiile. Experimental se constată că, pe lângă lungimea de undă incidentă, radiația împrăștiată conține și alte lungimi de undă și că acestea depind de unghiul de împrăștiere. Efectul acesta, numit efect Compton, poate fi explicat considerind că are loc o interacțiune între fotonii radiației incidente și electronii substanței. În procesul de interacțiune vor fi satisfăcute legile de conservare a energiei și impulsului. Considerind electronul în repaus înainte de interacțiune, energia lui este  $m_0 c^2$ , unde  $m_0$  este masa de repaus a electronului, iar energia lui după interacțiune este  $mc^2$ , unde  $m = m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  este masa electronului în mișcare cu viteza  $v$ . Energia fotonului incident este  $h\nu_0$ , iar energia fotonului împrăștiat după interacțiunea cu electronul este  $h\nu$ . Neglijînd energia de extracție a

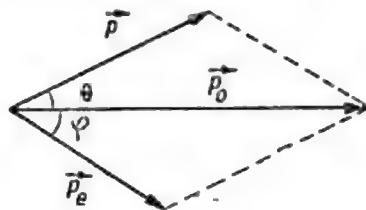


Fig. F.B.111

electronului din substanță, conservarea energiei se va scrie  $h\nu_0 - h\nu = mc^2 - m_0 c^2$  sau

$$mc^2 = h(\nu_0 - \nu) + m_0 c^2. \quad (1)$$

Teorema conservării impulsului se obține cu ajutorul figurii F.B.111, unde  $\vec{p}_0$  este impulsul fotonului incident,  $p_0 = h\nu_0/c$ ,  $\vec{p}$  este impulsul fotonului împrăștiat,  $p = h\nu/c$ , iar  $\vec{p}_e$  este impulsul electronului de recul  $p_e = mv$ . Conform teoremei cosinusului,

$$m^2 v^2 = \frac{h^2 \nu_0^2}{c^2} + \frac{h^2 \nu^2}{c^2} - \frac{2h^2 \nu_0 \nu}{c^2} \cos \theta$$

sau

$$m^2 v^2 c^2 = h^2 v_0^2 + h^2 v^2 - 2h^2 v_0 v \cos \theta. \quad (2)$$

Ridicând la pătrat ecuația (1), se obține

$$m^2 c^4 = h^2 v_0^2 + h^2 v^2 - 2h^2 v_0 v + 2h(v_0 - v)m_0 c^2 + m_0^2 c^4. \quad (3)$$

Scăzând ecuația (2) din (3) membru cu membru și reducând termenii asemenea, rezultă

$$m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -2h^2 v_0 v (1 - \cos \theta) + 2h(v_0 - v)m_0 c^2 + m_0^2 c^4. \quad (4)$$

Utilizând ecuația variației masei cu viteza, ecuația (4) devine

$$m_0^2 c^4 = -2h^2 v_0 v (1 - \cos \theta) + 2h(v_0 - v)m_0 c^2 + m_0^2 c^4. \quad (5)$$

Reducând termenii asemenea, ecuația (5) capătă forma

$$(v_0 - v)m_0 c^2 = h v_0 v (1 - \cos \theta). \quad (6)$$

Împărțind în ambii membri cu  $2h v_0 v m_0 c$ , rezultă

$$\frac{c(v_0 - v)}{v_0 v} = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta)$$

sau

$$\frac{c}{v} - \frac{c}{v_0} = \frac{h}{m_0 c} \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Ținând seama de relația  $\lambda = c/v$ , ecuația devine

$$\lambda - \lambda_0 = 2 \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

În sfârșit, introducând notația  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ , obținem

$$\Delta\lambda = 2\Lambda \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

unde  $\Lambda = h/m_0 c$  poartă numele de lungime de undă Compton.

5°. a) Experimental se constată că rezistența unui conductor cilindric de secțiune  $S$  și lungime  $l$  este direct proporțională cu lungimea conductorului și invers proporțională cu secțiunea acestuia. Constanta de proporționalitate  $\rho$  din relația  $R = \rho \frac{l}{S}$  este independentă de dimensiunile conductorului și depinde numai

de substanța din care acesta este confecționat. Mărimea  $\rho$  poartă numele de rezistivitate și deci este numeric egală cu rezistența unui conductor cu lungimea egală cu unitatea (1 m) și secțiunea unitatea (1 m<sup>2</sup>) din materialul considerat.

b) Rețeaua de difracție constă dintr-o succesiune de fante înguste, rectilinii, egale, paralele și echidistante, separate prin spații opace, de asemenea foarte înguste. Dacă numărul fantelor este  $N$ , iar lungimea zonei cu fante este  $L$ , atunci rețeaua va avea un număr  $n = \frac{N}{L}$  de fante pe unitatea de lungime. Distanța dintre două fante succesive,  $l = \frac{L}{N} = \frac{1}{n}$ , poartă numele de constantă a rețelei de difracție.

c) Timpul de înjumătățire al unui ansamblu de nuclee radioactive se definește cu ajutorul legii dezintegrării radioactive, care are expresia  $N = N_0 e^{-t/\tau}$ , unde  $N$  este numărul de nuclee nedezintegrate la momentul  $t$ ,  $N_0$  este numărul de nuclee la momentul inițial ( $t_0 = 0$ ), iar  $\tau$  este intervalul de timp după care rămân



nedezintegrate  $N_0/e$  nuclee, numit timp de viață medie a nucleului considerat. Intervalul de timp  $T_{1/2}$  după care numărul de nuclee nedezintegrate este jumătate din numărul inițial, adică  $N = N_0/2$ , poartă numele de timp de înjumătățire. Înlocuind în legea dezintegrării, aceasta devine  $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\frac{T_{1/2}}{\tau}}$ , de unde, prin logaritmare, rezultă  $T_{1/2} = \tau \ln 2$ .

XXX. 1°. a) Prin convergență a unei lentile se înțelege inversul distanței focale a acesteia,  $C = 1/f$ . Unitatea SI de convergență poartă numele de dioptrie și reprezintă convergența unei lentile a cărei distanță focală este de 1 m.

b) Transformarea izobară este un proces la presiune constantă. Legea transformării izobare spune: într-un proces izobar volumul unei cantități date de gaz ideal variază direct proporțional cu temperatura absolută a acestuia, adică  $\frac{V}{T} = \text{const}$  sau  $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ .

c) Regula lui Lenz se referă la semnificația semnului minus din ecuația tensiunii electromotoare induse (Faraday)  $e = -d\Phi/dt$ : tensiunea electromotoare indusă are un astfel de sens, încît curentul produs de ea să genereze un cîmp magnetic care să se opună variației cîmpului magnetic inductor, adică să aibă același sens cu cîmpul inductor, cînd acesta din urmă scade, sau sens opus sensului cîmpului inductor, cînd acesta crește.

2°. a) Acest subiect a fost tratat în III.4°.b.

b) Distanțele focale ale unei lentile subțiri reprezintă locul în care este situat un izvor punctiform pentru ca razele, după trecerea prin lentilă, să fie paralele cu axa optică, respectiv locul în care se întîlnesc razele dintr-un fascicul incident paralel cu axa optică. Ele au expresiile

$$f_2 = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}, \quad f_1 = -\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)},$$

$n$  fiind indicele de refracție al materialului din care este confecționată lentila,  $R_1$  și  $R_2$  razele suprafețelor sferice care delimitează lentila.

c) Intensitatea  $\vec{E}$  a cîmpului electric generat de un corp punctiform, purtător al unei sarcini  $Q$ , într-un punct situat la distanța  $\vec{r}$  de acesta este

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

unde  $\epsilon_0$  este permitivitatea vidului, iar  $\epsilon_r$  este permitivitatea relativă a mediului în care se află sarcina  $Q$  și deci în care este generat cîmpul electric.

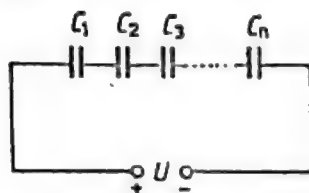


Fig. F.B.112

3°. Gruparea condensatorilor poate fi făcută prin legare în serie sau prin legare în paralel. Vom considera mai întâi legarea în serie, prezentată în figura F.B.112. Întrucît o armătură a fiecărui condensator este legată cu o armătură a condensatorului vecin, înseamnă că pe acestea trebuie să existe sarcini egale și de

semn opus, adică toți condensatorii vor fi încărcăți cu aceeași sarcină  $Q$ . Aceasta va fi și sarcina conținută de întregul sistem. Capacitatea sistemului de condensatori este, prin definiție,  $C = Q/U$ . Evident,  $U$  se va diviza pe toți condensatorii:  $U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ , unde  $U_i = Q/C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Înlocuind în funcție de capacități, ecuația tensiunii devine

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots + \frac{Q}{C_n},$$

de unde

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}.$$

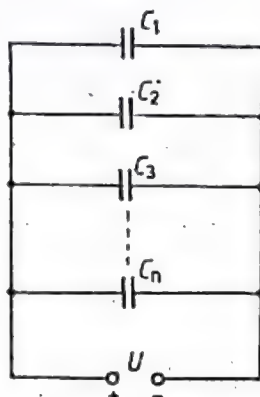


Fig. F.B.113

În cazul legării în paralel, prezentată în figura F.B.113, tensiunea este aceeași  $U$  la bornele tuturor condensatorilor, dar sarcinile lor sînt diferite:  $Q_i = C_i U$ . Sarcina totală a sistemului de condensatori  $Q$  este egală cu suma sarcinilor diferiților condensatori,  $Q = \sum_{i=1}^n Q_i$ . Capacitatea sistemului  $C = Q/U$ , după înlocuirea expresiei  $Q$ , devine  $CU = C_1 U + C_2 U + C_3 U + \dots + C_n U$ , de unde

$$C = \sum_{i=1}^n C_i.$$

4°. a) Din ecuația termică de stare pentru gazul ideal,  $PV = \nu RT$ , rezultă

$$\nu_1 = \frac{P_1 V_1}{RT_1} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{8310 \cdot 300} = 4,01 \cdot 10^{-4} \text{ kmol},$$

$$\nu_2 = \frac{P_2 V_2}{RT_2} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 10^{-2}}{8310 \cdot 300} = 12,03 \cdot 10^{-4} \text{ kmol}.$$

b) După deschiderea robinetului se egalează presiunile; presiunile rămîn egale și în timpul răcirii incintei 2. Aceeași cantitate totală de gaz se găsește în incinte și în starea finală, deci

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu'_1 + \nu'_2, \text{ unde } \nu'_1 = \frac{p V_1}{RT_1}, \nu'_2 = \frac{p V_2}{RT_2}.$$

Aceste ecuații constituie un sistem de 3 ecuații pentru necunoscutele  $\nu'_1$ ,  $\nu'_2$  și  $p$  (presiunea finală).

Împărțind membru cu membru, ultimele 2 ecuații, rezultă

$$\frac{\nu'_1}{\nu'_2} = \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1}.$$

Prima ecuație devine

$$v_1 + v_2 = v'_1 + v'_1 \frac{V_2 T_1}{V_1 T_2},$$

de unde

$$v'_1 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{V_2 T_1}{V_1 T_2}} = \frac{4,01 \cdot 10^{-4} + 12,03 \cdot 10^{-4}}{1 + \frac{10^{-2} \cdot 300}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 250}} = 4,71 \cdot 10^{-4} \text{ kmol},$$

$$v'_2 = v_1 + v_2 - v'_1 = 12,03 \cdot 10^{-4} + 4,01 \cdot 10^{-4} - 4,71 \cdot 10^{-4} = 11,33 \cdot 10^{-4} \text{ kmol}.$$

c) Variația de energie din cele 2 incinte se datorește, pe de o parte, variației cantității de gaz și pe de alta, variației de temperatură.

În incinta 1 temperatura este nemodificată, deci

$$\Delta U_1 = U'_1 - U_1 = \frac{3}{2} (v'_1 - v_1) R T_1 = \frac{3}{2} (4,71 - 4,01) 10^{-4} \cdot 8 \cdot 310 \cdot 300 = 261,7 \text{ J}.$$

În incinta 2 se modifică și numărul de kmoli și temperatura, deci

$$\begin{aligned} \Delta U_2 &= U'_2 - U_2 = \frac{3}{2} v'_2 R T_2 - \frac{3}{2} v_2 R T_1 = \frac{3}{2} R (v'_2 T_2 - v_2 T_1) = \\ &= \frac{3}{2} \cdot 8 \cdot 310 (11,33 \cdot 10^{-4} \cdot 250 - 12,03 \cdot 10^{-4} \cdot 300) = -967,9 \text{ J}. \end{aligned}$$

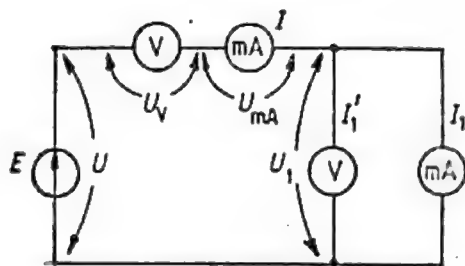


Fig. F.B.114

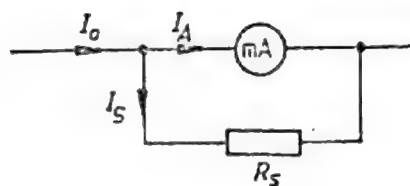


Fig. F.B.115

5°. a) Legile lui Kirchhoff pentru circuitul din figura F.B.114 se scriu

$$U = U_V + U_{mA} + U_1; \quad I = I_1 + I'_1. \quad (1)$$

Ținând seama că  $R_V = \frac{U_1}{I'_1} = \frac{U_1}{I - I_1}$  și  $R_A = \frac{U_1}{I_1}$ , prima ecuație (1) devine

$$\begin{aligned} U &= I(R_V + R_A) + U_1 = I \left( \frac{U_1}{I - I_1} + \frac{U_1}{I_1} \right) + U_1 = U_1 \left( 1 + \frac{I^2}{I_1(I - I_1)} \right) = \\ &= 0,25 \left( 1 + \frac{10^{-6}}{0,75 \cdot 10^{-3}(10^{-3} - 0,75 \cdot 10^{-3})} \right) = 1,58 \text{ V}. \end{aligned}$$

$$b) E = U + Ir = 1,58 + 10^{-3} \cdot 100 = 1,68 \text{ V}.$$

c) Conform figurii F.B.115, prin  $R_s$  trebuie să treacă un curent  $I_s = (n - 1)I_A$ , unde  $n = I_0/I_A$ ,  $I_0$  fiind intensitatea curentului care trebuie măsurat cu aparatul. Din relația  $R_s I_s = R_A I_A$ , rezultă

$$R_s = \frac{R_A I_A}{I_s} = \frac{R_A}{n - 1} = \frac{U_1}{I_1(n - 1)} = \frac{U_1 I_A}{I_1(I_0 - I_A)} = \frac{0,25 \cdot 10^{-3}}{0,75 \cdot 10^{-3}(10 - 10^{-3})} = 0,033 \Omega.$$



XXXI. 1°. a) Acest subiect a fost tratat în V.4°.b.

b) Acest subiect a fost tratat în XIX. 1°.a.

c) Acest subiect a fost tratat în XII. 3°.c.

2°. a) Acest subiect a fost tratat în cadrul problemei VI. 5°. 2.

b) Acest subiect a fost tratat în XVIII. 2°.c.

c) Acest subiect a fost tratat în XXIV. 4°.b.

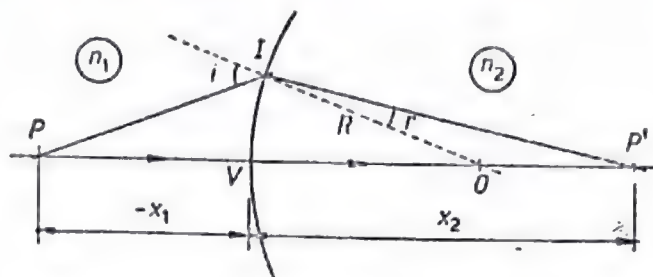


Fig. F.B.116

3°. Considerăm două medii transparente, de indice de refracție  $n_1$  și  $n_2$ , separate de o suprafață sferică (dioptru sferic), așa cum arată figura F.B.116. Presupunem  $n_1 < n_2$ . Studiem mersul razelor paraxiale provenite de la un obiect luminos punctiform,  $P$ , așezat pe axa optică principală, în mediul de indice de refracție  $n_1$ . Imaginea  $P'$  se va forma la intersecția a două raze oarecare, pornite din  $P$ . Raza  $PV$  este normală la suprafața dioptrului, deci va trece în mediul de indice  $n_2$  păstrându-și direcția. O altă rază,  $PI$ , se va refracta la suprafața de separare, apropiindu-se de normală în punctul de incidență  $I$  (figurată punctat pe figura F.B.116). Din triunghiurile  $PIO$  și  $P'IO$ , aplicând teorema sinusurilor, se obțin relațiile

$$\frac{PI}{\sin \alpha} = \frac{PO}{\sin(\pi - i)}, \quad \frac{P'I}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{P'O}{\sin r}.$$

Intrucit  $\sin(\pi - i) = \sin i$  și  $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ , ecuațiile de mai sus devin

$$\frac{PO}{PI} = \frac{\sin i}{\sin \alpha}, \quad \text{respectiv} \quad \frac{P'I}{P'O} = \frac{\sin \alpha}{\sin r}.$$

Prin înmulțirea acestor relații membru cu membru, rezultă

$$\frac{PO}{PI} \cdot \frac{P'I}{P'O} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (1)$$

Se consideră următoarele convenții de semne: segmentele luate de-a lungul axei principale, măsurate de la vârful  $V$  al dioptrului, vor fi considerate pozitive, dacă se află în dreapta lui  $V$  (în sensul propagării luminii), și negative, dacă se află în stînga lui  $V$ . Segmentele perpendiculare pe axa optică vor fi pozitive cînd se află deasupra și negative cînd se află sub axă.

Unghiul pe care o rază îl face cu o axă optică este considerat pozitiv atunci cînd rotirea razei de lumină către axa optică este în sensul trigonometric și negativ dacă această rotire se face în sens invers.

Ținînd seama de aceste convenții și de faptul că razele sînt paraxiale (aproximația gaussiană) vom nota:

$PI \approx VP = -x_1$ ;  $P'I \approx VP' = x_2$ ;  $IO = VO = R$  (raza dioptrului), astfel încît  $PO = -x_1 + R$ ;  $P'O = x_2 - R$ . Înlocuind în ecuația (1), rezultă

$$\frac{-x_1 + R}{-x_1} \cdot \frac{x_2}{x_2 - R} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Efectuind înmulțirile și împărțind cu produsul  $x_1 x_2 R$ , relația se poate scrie sub forma

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

Relația aceasta constituie prima relație fundamentală a dioptrului sferic.

Cea de a doua relație fundamentală a dioptrului sferic leagă dimensiunea obiectului  $y_1$  de cea a imaginii,  $y_2$ , prin introducerea mărimii  $\beta = y_2/y_1$ , numită mărime liniară transversală. Formarea imaginii unui obiect liniar  $PB_1$ , așezat perpendicular pe axa principală, este arătată în figura F.B.117. Folosind triunghiurile  $PB_1V$  și  $P'B_2V$  putem exprima mărimea liniară transversală ca funcție de

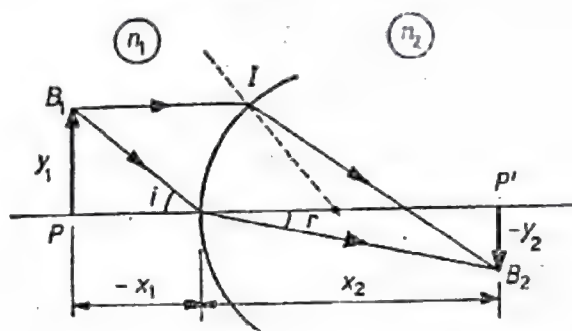


Fig. F.B.117

distanțele pînă la obiect,  $x_1$ , și pînă la imagine,  $x_2$ , observînd că  $y_2 = x_2 \tan r$  și  $y_1 = -x_1 \tan i$ . În virtutea aproximației gaussiene,  $\tan r \approx \sin r$ ,  $\tan i \approx \sin i$ . Pentru situația din figura F.B.117,

$$\beta = \frac{-y_2}{y_1} = \frac{-x_2 \sin r}{-x_1 \sin i} = \frac{x_2}{x_1} \frac{n_1}{n_2},$$

unde am utilizat legea refracției. Aceasta este cea de a doua relație fundamentală a dioptrului sferic.

4°. a)  $Q_{\text{ced}} = Q_{\text{abs}}$ . Mercurul cedează căldură, iar apa și calorimetrul absorb, deci

$$m_1 c_1 (t - \theta) = (m_3 c_3 + m_2 c_2) (\theta - t_0).$$

De aici

$$c_1 = \frac{(m_3 c_3 + m_2 c_2) (\theta - t_0)}{m_1 (t - \theta)} = \frac{(0,2 \cdot 386 + 0,48 \cdot 4180) (17,7 - 15)}{0,5 (100 - 17,7)} = 136,7 \text{ J/kg} \cdot \text{K}.$$

b) Vom considera că este vorba de mercurul în starea inițială ( $t = 100^\circ \text{C}$ ); acesta ar putea fi amestecat cu gheața.

Pentru a vedea dacă se topește întreaga cantitate de gheață, comparăm căldura pe care o poate ceda mercurul, răcindu-se pînă la  $0^\circ \text{C}$  cu căldura necesară topirii gheții,

$$Q_{\text{ced}} = m_1 c_1 t = 0,5 \cdot 136,7 \cdot 100 = 6835 \text{ J},$$

$$Q_t = m \lambda_t = 10^{-2} \cdot 335000 = 3350 \text{ J}.$$

Se observă că  $Q_{\text{ced}} > Q_t$ , deci temperatura finală a amestecului va fi mai mare decît  $0^\circ \text{C}$ . Ecuația calorimetrică va avea forma

$$m_1 c_1 (t - \theta_1) = m \lambda + m c_2 \theta_1,$$

de unde

$$\theta_1 = \frac{m_1 c_1 t - m \lambda}{m_1 c_1 + m c_2} = \frac{6835 - 335000 \cdot 10^{-2}}{0,5 \cdot 136,7 + 10^{-2} \cdot 4180} = 31,6^\circ \text{C}.$$

5°. a) Întrucît  $U < E$  și rezistența internă este neglijabilă, înseamnă că trebuie legat un rezistor în serie cu becul, ca în figura F.B.118.

În condiții de funcționare normală, intensitatea curentului prin bec trebuie să fie  $I = \frac{P}{U}$ . Conform legii lui Kirchhoff,  $E = U + IR$ , rezultă

$$R = \frac{E - U}{I} = \frac{E - U}{\frac{P}{U}} = \frac{E - U}{P} U = \frac{12,6 - 6,3}{2} \cdot 6,3 = 19,22 \Omega.$$

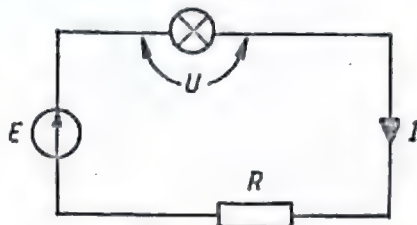


Fig. F.B.118

b) Intensitatea maximă pe care o poate măsura miliampermetrul este  $I_A = 100$  mA. Totuși este necesar să se măsoare cu el o intensitate de  $n = \frac{I}{I_A} = \frac{500}{100} = 5$  ori mai mare. Aceasta este posibil numai dacă se leagă în paralel cu miliampermetrul un rezistor (șunt) (v. fig. F.B.115), astfel încît prin miliampermetru să treacă numai curentul admisibil,  $I_A$ , iar restul,  $I_s = (n - 1)I_A$  să treacă prin rezistor.

Întrucît la bornele miliampermetrului și la bornele rezistorului există aceeași tensiune,  $I_A R_A = I_s R_s$ , deci

$$R_s = \frac{I_A R_A}{I_s} = \frac{R_A}{n - 1} = \frac{1}{5 - 1} = 0,25 \Omega.$$

XXXII.1°. a) Se scrie ecuația mișcării oscilatorii  $y = A \sin(\omega t + \varphi)$  care prin dezvoltare dă  $y = A \sin \omega t \cos \varphi + A \cos \omega t \sin \varphi$ .

În continuare se obține  $y = 0,2 \sqrt{3} \cos 2t + 0,2 \sin 2t = 0,4 \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$  [m].

Prin identificare, între cele două forme ale ecuației de mișcare se obține  $\omega = 2$  rad/s;  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 3,14$  s;  $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi} \text{ s}^{-1} = 0,318 \text{ s}^{-1}$ .

b) Pentru  $y(t) = \frac{A}{2}$  rezultă condiția  $\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$  deci  $\omega t + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$ ; Se obțin pentru momentele de timp cerute expresiile:

$$t_n = \frac{1}{\omega} \left[ (-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + n\pi \right] = \left[ \frac{1}{2} (-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + n\pi \right].$$

Din ecuația elongației, rezultă pentru  $t = 0$ :

$$y(0) = 0,4 \sin\left(0 + \frac{\pi}{3}\right) = A \sin \varphi_0 \text{ astfel încît } \varphi_0 = \frac{\pi}{3}.$$

c) Varianta I. Se aplică teorema conservării energiei pentru procesele de frecare:

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{ky_0^2}{2} = \frac{ky_f^2}{2} + \mu mg(y_f - y_0).$$



Înlocuind valorile numerice se obține ecuația de gradul al doilea în  $y$ :

$$y_f^2 + 0,5 y_f - 0,336 = 0.$$

Soluția acestei ecuații este:  $y_f = 0,378$  m. Trebuie îndeplinită condiția  $y_f < A$  mișcarea fiind amortizată datorită frecării.

Din calculul energiei potențiale se obține

$$E_{p \text{ elastic}} = \frac{k y_f^2}{2} = 2,85 \cdot 10^{-3} \text{ J.}$$

2°. a) Ecuația Mandeleev-Clapeyron  $pV = \nu RT$  fiind satisfăcută pentru fiecare stare a gazului se poate scrie pentru starea A:  $T_A = \frac{p_A V_A}{R} = 240,67 \text{ K.}$

Pentru starea B (unde  $p_B = 2p_A$  și  $V_B = V_A$ ) se obține:  $T_B = T_A \frac{p_B}{p_A}$  sau

$$T_B = \frac{p_B V_B}{R} = 2T_A$$

În mod asemănător, pentru starea C (unde  $p_C = 2p_A$  și  $V_C = 2V_A$ ) se scrie:

$$T_C = T_B \frac{V_C}{V_A} \text{ sau } T_C = \frac{p_C V_C}{R} = 8T_A = 4T_B.$$

În starea D  $p_D = p_A$  și  $V_D = 4V_A$ , astfel încît:

$$T_D = T_D \frac{V_D}{V_A} \text{ sau } T_D = \frac{p_D V_D}{R} = 4T_A.$$

Efectuînd calculele se obține:

$$T_B = 481,34 \text{ K; } T_C = 1925,36 \text{ K; } T_D = 962,68 \text{ K.}$$

b) Lucrul mecanic poate fi calculat ca suma lucrurilor mecanice pentru fiecare proces sau ca aria ciclului:

$$L_{ABCD} = L_{AB} + L_{AC} + L_{CD} + L_{DA} = L_{BC} + L_{DA},$$

$$L_{BC} = p_B(V_C - V_B), \quad L_{DA} = p_A(V_A - V_D),$$

$$L_{ABCD} = (p_B - p_A)(V_C - V_A) = 3p_A V_A = 3 \cdot 10^4 \text{ J.}$$

c) Randamentul ciclului are expresia  $\eta = \frac{L}{Q_1}$ , unde  $L$  este lucrul mecanic efectuat, iar  $Q_1$  căldura primită:

$$Q_1 = Q_{AB} + Q_{BC}, \quad Q_{AB} = C_V(T_B - T_A),$$

$$Q_{BC} = C_p(T_C - T_B) = (C_V + R)(T_C - T_B).$$

Se obține  $\eta = 0,18$

3°. a) Se utilizează relația de calcul a inductanței bobinei,  $L = \frac{\mu N^2 S}{l_b}$ , iar din calcul rezultă:

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-5} \cdot 25 \cdot 10^4 \frac{\pi}{4} \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-2}} \simeq \frac{25 \cdot 10^{-2}}{4} = 6,25 \cdot 10^{-2} \text{ H.}$$

b) Rezistența bobinei are expresia:

$$R = \rho \frac{l_{\text{fir}}}{S_{\text{fir}}} = \rho \frac{N\pi D}{\pi \frac{d^2}{4}}$$

Înlocuind datele numerice se obține:

$$R = 4,5 \cdot 10^{-7} \cdot 4 \frac{500 \cdot 10^{-2}}{0,25 \cdot 10^{-9}} = \frac{9}{0,25} = 36 \, \Omega.$$

Se calculează în continuare reactanța inductivă  $X_L$  și impedanța  $Z$ :

$$X_L = \omega L = 100\pi \cdot 6,25 \cdot 10^{-2} = 6,25\pi \, \Omega,$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{1296 + 385,15} \simeq 41 \, \Omega.$$

Pentru calculul intensității efective se utilizează formula:

$$I = \frac{U_{\text{ef}}}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{2}Z} \Rightarrow I = \frac{144,96}{41} = 3,53 \, \text{A}.$$

c) Calculul puterilor se face cu ajutorul expresiei:

$$P = UI \cos \varphi = 449,31 \, \text{W} \text{ (puterea activă),}$$

$$P_r = UI \sin \varphi = 244,99 \, \text{VAR} \text{ (puterea reactivă), } P_a = UI = 511,72 \, \text{VA} \text{ (puterea aparentă).}$$

4°. a) Referirile se fac la figura F.B.119. În mișcarea circulară uniformă  $|\vec{v}| = \text{const}$  sau  $\Delta v = 0$ ; însă  $\Delta \vec{v} \rightarrow 0$ , deci vectorul viteză variază ca direcție.

Ca urmare, există o accelerație  $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ . Fie  $\Delta t$  intervalul în care mobilul parcurge arcul  $\Delta s$ . Se poate scrie  $\Delta s = R\Delta\theta$ , unde  $\Delta\theta$  reprezintă unghiul la centru cuprins

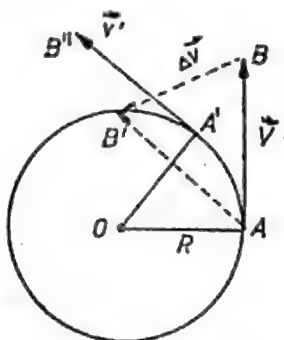


Fig. F.B.119

între razele vectoriale corespunzătoare momentelor  $t_0$  și  $t$ , astfel, încît  $\Delta t = t - t_0$ . Viteza unghiulară este definită prin relația  $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ . Expresia vitezei liniare în mișcare circulară uniformă se deduce pornind de la definiția:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = R \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega.$$

Pentru a se stabili expresia accelerației centripete se calculează diferența  $\Delta \vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$ , unde vitezele  $\vec{v}'$  și  $\vec{v}$  corespund momentelor  $t$  și  $t' = t + \Delta t$ , momente

la care mobilul se află în punctele  $A$ , respectiv  $A'$ . Din asemănarea triunghiurilor  $ABB'$  și  $CAA'$  se poate scrie  $\frac{|\Delta \vec{v}|}{AA'} = \frac{v}{R}$  și pentru intervale de timp ( $\Delta t \rightarrow 0$ )

foarte mici  $\frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta s} = \frac{v}{r}$ ,  $|\Delta \vec{v}| = \frac{v}{R} \Delta s$ . Prin urmare  $|\vec{a}| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{R} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$ . Accelerația obținută este radială și orientată spre centrul cercului, astfel că se numește accelerație centripetă sau normală (este perpendiculară permanent pe traiectorie). Vectorul  $\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r}$ .

b) Cu ajutorul ecuației de stare  $pV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT$ , se poate exprima densitatea unui gaz aflat în condiții fizice date:  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$ .

În condiții normale de temperatură și presiune, se poate scrie  $\rho_0 = \frac{p_0 \mu}{RT_0}$ , astfel încât, la temperatura  $T$  și presiunea  $p$ ,  $\rho$  se exprimă funcție de  $\rho_0$  astfel:  

$$\rho = \rho_0 \frac{pT}{p_0 T_0}.$$

c) Pentru calculul perioadei de rotație a unei particule încărcate într-un câmp magnetic uniform, se calculează mai întâi raza traiectoriei, egalând expresia forței Lorentz  $f = qvB$  cu expresia forței centripete  $F_c = mv^2/r$ :  $qvB = mv^2/r$ . Se obține  $r = \frac{mv}{qB}$ . Se poate calcula viteza unghiulară a particulei  $\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$  astfel încât

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

5°. a) Acest subiect a fost tratat la VII.3°.b.

b) Acest subiect a fost tratat la XIII. 4°.a și XIX.2°.a.

c) Acest subiect a fost tratat la XVII.4°.a.

XXXIII.1°. a) Pentru a scoate corpul din repaus este necesar ca forța elastică să fie egalată de forța de frinare (fig. F.B.120):

$$kx_m = \mu mg, \mu = \frac{kx_m}{mg} = \frac{40 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 9,8} = 0,102.$$

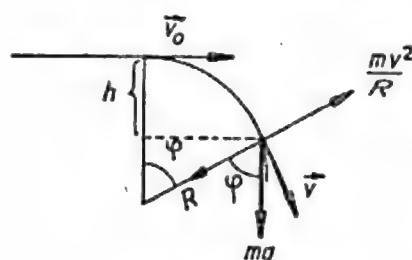


Fig. F.B.120

b) În cazul în care corpul are o mișcare uniform accelerată:  $ma = F - \mu mg$ ,  $F = kx$ :

$$a = \frac{kx - \mu mg}{m} = \frac{40 \cdot 0,1 - 0,102 \cdot 2 \cdot 9,8}{2} = 1 \text{ m/s}^2.$$

Viteza corpului rezultă din ecuația lui Galilei:

$$v_0 = \sqrt{2aD} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 50} = 10 \text{ m/s}.$$



c) Condiția de desprindere a corpului se scrie la limită sub forma:

$$\frac{mv^2}{R} = mg \cos \varphi.$$

Pentru a obține pe  $\cos \varphi$  se scrie legea conservării energiei:  $\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = mgR(1 - \cos \varphi)$ . Se obține  $\cos \varphi = \frac{v_0^2 + 2Rg}{3Rg} = 0,707$  deci  $\varphi = \arccos 0,707 = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ .

Lungimea parcursă pe trambulină se calculează astfel:

$$l = R \frac{\pi}{4} \Rightarrow l = 84,12 \cdot \frac{3,14}{4} = 66,0342 \text{ m.}$$

2°. a) Din ecuația Clapeyron-Mendeleev scrisă pentru starea A rezultă:

$$T_A = T_B = \frac{p_A V_A}{\nu R} = \frac{4,155 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{10^{-3} \cdot 8,310} = 1000 \text{ K.}$$

Din legea transformării izoterme se obține:

$$p_C = p_B = \frac{p_A V_A}{V_B} = 2,077 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Din legea transformării izobare sau din ecuația Clapeyron-Mendeleev se calculează  $T_C$ :

$$T_C = \frac{p_C V_C}{\nu R} = \frac{2,077 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{10^{-3} \cdot 8,310} = 500 \text{ K.}$$

b) Se calculează lucrul mecanic în transformarea BC:

$$L_{BC} = p_B(V_C - V_B) = 2,077 \cdot 10^5 (-2 \cdot 10^{-2}) = -4,155 \text{ kJ.}$$

Cantitatea de căldură schimbată în transformarea BC are expresia:

$$Q_{BC} = \nu C_p(T_C - T_B) = 10^{-3} \frac{7}{2} \cdot 8,320(-500) = -14,5425 \text{ kJ.}$$

c) Pentru calculul randamentului se utilizează definiția  $\eta = \frac{L}{Q_1}$ , unde  $L$  este lucrul mecanic efectuat pe ciclu, iar  $Q_1$  căldura. Se calculează succesiv:

$$L_{CA} = 0, Q_{CA} = \nu(C_p - R)(T_A - T_C) = 10,3875 \text{ kJ,}$$

$$L_{AB} = Q_{AB} = RT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = p_A V_A \cdot 0,693 = 8,31 \cdot 10^3 \cdot 0,693 = 5,7588 \text{ kJ.}$$

Înlocuind mărimile calculate în expresia randamentului se obține:

$$\eta = \frac{L_{AB} + L_{BC}}{Q_{CA} + Q_{AB}} = \frac{5,7588 - 4,155}{10,3875 + 5,7588} = 0,099.$$

**Varianta 2**

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{\nu R T_A - \nu R(T_B - T_C)}{\nu \frac{5}{2} R(T_A - T_C) + \nu R T_A \ln 2} \Rightarrow \eta = 10\%.$$

3°. a) Valoarea tensiunii electromotoare induse este (fig. F.B.121):

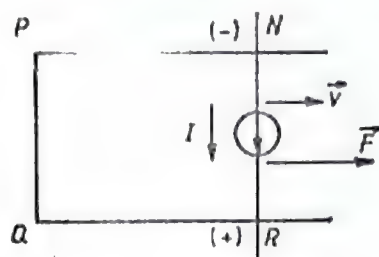


Fig. F.B.121

$e = Blv = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ V}$  (s-a notat cu  $l$  lungimea  $\overline{PQ} = \overline{NR}$ ). Sensul tensiunii electromotoare induse, determinabil cu regula mîinii drepte, este de la  $N$  la  $R$ .

b) Se calculează rezistența circuitului:

$$R = \rho \frac{l}{S} = 1,7 \cdot 10^{-8} \frac{5}{10^{-4}} = 8,5 \cdot 10^{-4} \Omega.$$

Intensitatea curentului prin conductor este:

$$I = \frac{e}{R} = \frac{e}{2R_{PN} + 2R_{NR}} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{8,5 \cdot 10^{-4}} = \frac{200}{8,5} = 23,5 \text{ A.}$$

c) Se determină masa conductorului ( $\overline{NR}$ ):

$$m = \rho_m(\overline{NR})S = 8\,900 \cdot 1 \cdot 10^{-4} = 0,89 \text{ kg.}$$

Se scrie condiția de echilibru  $F - BI(\overline{NR}) - \mu mg = 0$ , din care se obține:

$$\mu = \frac{F - BI(NR)}{mg} = \frac{1,4 - 10 \cdot 10^{-3} \cdot 23,5 \cdot 3}{0,89 \cdot 9,8} = \frac{1,165}{8,722} = 0,133.$$

4°. a) Legea se aplică curgerii staționare a unui fluid ideal. Se consideră un tub de curent cu secțiune variabilă și se studiază curgerea fluidului cuprins între

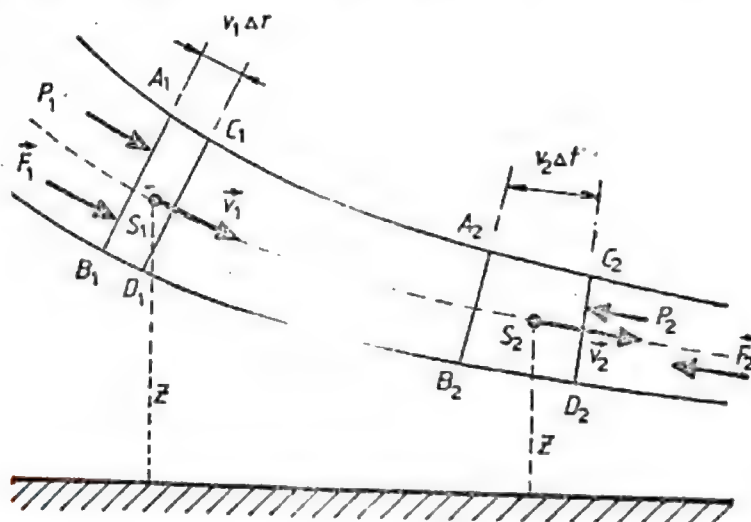


Fig. F.B.122

secțiunile  $S_1$  și  $S_2$  din tubul de curent (fig. F.B.122). Ca urmare a incompresibilității fluidului, volumul  $V_1$  de fluid care traversează secțiunea  $S_1$  în intervalul de timp  $\Delta t$  este egal cu volumul  $V_2$  de fluid care traversează secțiunea  $S_2$  în același interval de timp, deci  $S_1 V_1 \Delta t = S_2 V_2 \Delta t$ , de unde rezultă  $V_1 = V_2 = V$ .

Variația energiei cinetice a masei  $m$ , în intervalul de timp în care a fost transferată din poziția  $A_1B_1C_1D_1$  în poziția  $A_2B_2C_2D_2$  este  $\Delta E_c = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2)$ . Trebuie ca  $\Delta E_c$  să fie egală cu lucrul mecanic al forțelor care se exercită asupra sistemului în intervalul de timp  $\Delta t$ . Acest lucru mecanic are următoarele componente:

— lucrul mecanic motor efectuat sub acțiunea forței de presiune  $F_1$ :

$$L_1 = F_1 \overline{A_1 C_1} = p_1 S_1 \cdot \overline{A_1 C_1} = p_1 V = p_1 \frac{m}{\rho},$$

— lucrul mecanic rezistent efectuat sub acțiunea forței  $F_2$ :

$$L_2 = -F_2 \overline{C_2 A_2} = -p_2 V_2 = -p_2 \frac{m}{\rho},$$

— lucrul mecanic al greutateii masei de lichid transferat:

$$L_3 = mg(z_2 - z_1).$$

Din egalitatea variației energiei cinetice cu lucrul mecanic rezultat se obține:

$$(p_1 - p_2) \frac{m}{\rho} + mg(z_1 - z_2) = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2)$$

sau

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2,$$

deci  $p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = \text{constant}$ , adică ecuația lui Bernoulli, unde  $p$  se numește presiune statică,  $\frac{1}{2} \rho v^2$  presiune dinamică, iar  $\rho g z$  presiune de poziție.

b) Acest subiect a fost tratat la XV.4°. b.

c) Referirile se vor face la figura F.B.123. În cazul circuitului serie se pleacă de la ecuația tensiunilor instantanee pentru circuitul serie  $RLC$  dată de legea lui Ohm,  $u + \left(-L \frac{\Delta i}{\Delta t}\right) = \frac{q}{C} + Ri$ , unde  $i = \sqrt{2} I \sin(\omega t - \varphi)$ , care se scrie sub forma:

$$U \sin \omega t = \omega L I \sin(\omega t - \varphi + \pi/2) - \frac{I}{\omega C} \sin(\omega t - \varphi + \pi/2) + RI \sin(\omega t - \varphi).$$

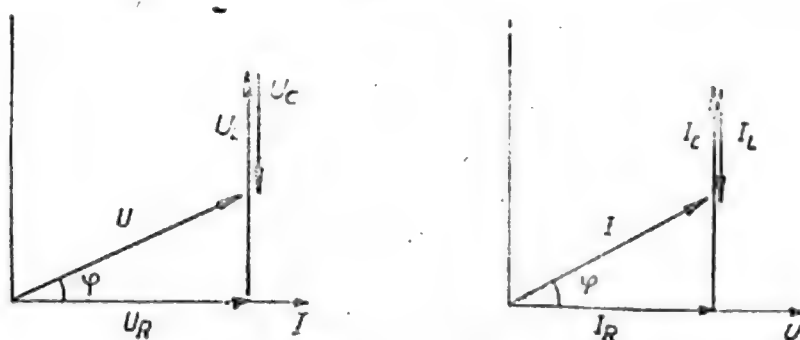


Fig. F.B.123

Utilizând construcția lui Fresnel se obține triunghiul tensiunilor, unde  $U_R = IR$ ,  $U_L = \omega LI$ ,  $U_C = \frac{I}{\omega C}$ , tensiunea la borne fiind  $U$ . Se observă că:

$$U = I \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \text{ și } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$



Se obține pentru impedanță expresia:

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \text{ unde } X_L = \omega L \text{ și } X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

În cazul circuitului paralel, se aplică teorema I a lui Kirchhoff,  $i = i_R + i_L + i_C$ ; rezultă:

$$I \sin(\omega t + \varphi) = \frac{U}{R} \sin \omega t + \frac{U}{X_L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{U}{X_C} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

de unde prin transformări succesive se obține

$$I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2} \text{ astfel încît } Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}}.$$

5°. a) Acest subiect a fost tratat la VII.3°.a.

b) Transformarea izotermă: presiunea unui gaz aflat la temperatură constantă variază invers proporțional cu volumul gazului,

$$pV = \text{const.}$$

Transformarea izobară: variația relativă a volumului unui gaz, aflat la presiune constantă este direct proporțională cu temperatura,

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\Delta V}{V_0} = \alpha t.$$

Transformarea izocoră: variația relativă a presiunii unui gaz menținut la volum constant este direct proporțională cu temperatura,

$$\frac{p - p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p_0} = \beta t.$$

c) Acest subiect a fost tratat la VIII.3°.c.

XXXIV.1°. a) Pentru ca unghiul să rămână constant în tot timpul mișcării, trebuie îndeplinită condiția:

$$\tan \theta = \frac{F_{cf}}{G} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{Lg \sin \theta} \quad (\text{fig. F.B.124}),$$

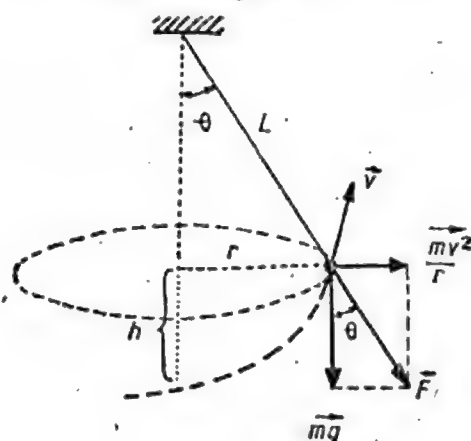


Fig. F.B.124

de unde rezultă expresia vitezei  $v^2 = gL \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$ . Din calcul se obține:

$$v = \sqrt{9,8 \cdot 1 \cdot \frac{1/4}{\sqrt{3/2}}} = 1,68 \text{ m/s.}$$

b) Se însumează energia cinetică și potențială în starea dată a corpului,  $E = mgL(1 - \cos \theta) + \frac{mv^2}{2}$ . Înlocuind valorile numerice rezultă:

$$E = 0,1 \cdot 9,8 \cdot 1 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{0,1 \cdot 1,68^2}{2} = 0,272 \text{ J.}$$

c) Prin ruperea firului corpul se mișcă accelerat cu accelerația  $g$ , deci  $N - L \cos \theta = \frac{gt^2}{2}$ , astfel că

$$t = \sqrt{\frac{2(N - L \cos \theta)}{g}} = \sqrt{\frac{2\left(2,5 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{9,8}} = 0,58 \text{ s.}$$

Viteza cu care corpul atinge solul se obține din legea conservării energiei:

$$\frac{mv_{\text{sol}}^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mg(H - L \cos \theta) \text{ sau } v_{\text{sol}} = \sqrt{v^2 + 2g(H - L \cos \theta)};$$

$$v_{\text{sol}} = \sqrt{2,8 + 2 \cdot 9,8 \left(2,5 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 5,9 \text{ m/s.}$$

2°. a) Se exprimă temperaturile în kelvini,  $T_1 = 800 \text{ K}$ ,  $T_2 = 400 \text{ K}$ , și se aplică formula randamentului ciclului Carnot:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0,5.$$

b) Se calculează lucrul mecanic util al motorului în timp de o oră:

$$L_{1 \text{ oră}} = Pt = 75 \cdot 3600 \cdot 10^3 \text{ J} = 270 \cdot 10^6 \text{ J.}$$

Căldura de la sursa caldă se obține din expresia randamentului:

$$\eta = \frac{L}{Q_1} \Rightarrow Q_1 = \frac{L}{\eta} = 540 \cdot 10^6 \text{ J.}$$

Căldura cedată sursei reci  $Q_2$  se calculează astfel:

$$L = Q_1 - |Q_2|, \quad |Q_2| = Q_1 - L = \frac{1 - \eta}{\eta} L, \quad |Q_2| = 270 \cdot 10^6 \text{ J.}$$

c) Se utilizează expresia căldurii echivalente în comprimarea izotermă:

$$|Q_2| = \nu RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \cdot n \cdot 60,$$

$$\ln \frac{V_3}{V_4} = \frac{|Q_2|}{60n\nu RT_2} = \frac{270 \cdot 10^6}{60 \cdot 120 \cdot 16,28 \cdot 8,31 \cdot 400} = 0,693 = \ln 2.$$

Se obține

$$\frac{V_3}{V_4} = 2.$$

Se utilizează ecuația lui Poisson a transformării adiabatică, scrisă sub forma:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}, \Rightarrow \frac{V_4}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\frac{4}{3}-1}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^3 = 2^3 = 8.$$

3°. a) Referirile se fac la figura F.B.125. Potențialul electric produs de sarcina electrică din punctul A în virful piramidei are expresia:

$$V_A = \frac{q/2}{4\pi\epsilon_0(VA)} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}}.$$

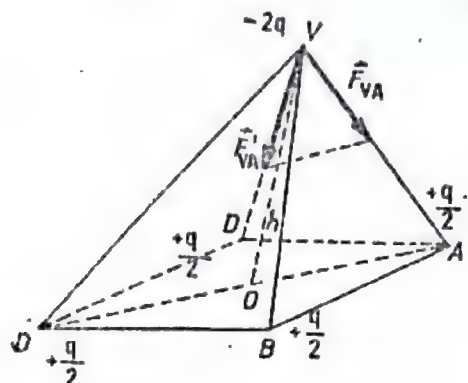


Fig. F.B.125

Însumind potențialele produse de sistemul celor patru sarcini  $+\frac{q}{2}$ , se obține

$$V_{\text{total}} = 4V_A = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}}.$$

b) Se calculează mai întâi forța coulombiană dintre sarcina  $(-2q)$ , din virful piramidei și sarcina  $\frac{q}{2}$  din punctul A:

$$\vec{F}_{VA} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_V Q_A}{VA^2} \cdot \frac{\vec{VA}}{VA} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{h^2 + \frac{a^2}{2}} \cdot \frac{\vec{VA}}{VA}.$$

Asupra sarcinii din virful piramidei va acționa numai proiecția verticală a forței  $\vec{F}_{VA}$  (componentele orizontale ale forțelor din cele patru virfuri dau o rezultantă nulă):

$$|\vec{F}'_{VA}| = |\vec{F}_{VA}| \cos \theta, \quad \cos \theta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}},$$

$$|\vec{F}'_{VA}| = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{h^2 + \frac{a^2}{2}} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}}.$$

Forța rezultantă are mărimea și sensul conform expresiei:

$$\vec{F}_{\text{rez}} = 4\vec{F}'_{VA} = \frac{q^2 h}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\left(h^2 + \frac{a^2}{2}\right)^{3/2}} \cdot \frac{\vec{VO}}{VO}.$$



c) Referirile se fac la figura F.B.126. Se folosește expresia capacității unui condensator plan,  $C = \epsilon_0 \frac{A}{h} = \frac{Q}{V}$ , și se obține pentru diferența de potențial cerută expresia:

$$V = \frac{Qh}{\epsilon_0 A} = \frac{2qh}{\epsilon_0 A}.$$

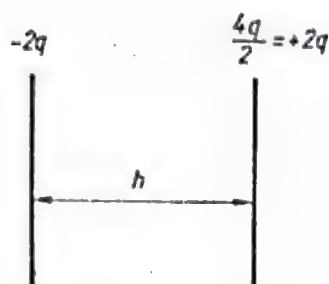


Fig. F.B.126

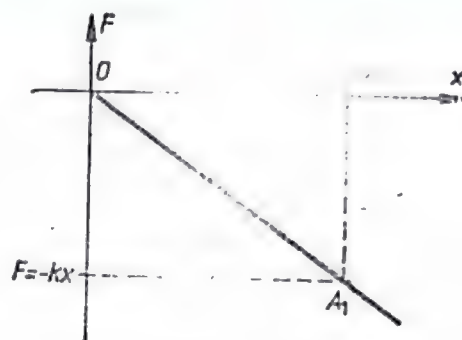


Fig. F.B.127

4°. a) Se calculează lucrul mecanic al forței elastice  $F = -kx$  folosind graficul de variație al acestei forțe în funcție de  $x$ , într-un sistem de coordonate  $FOx$  (fig. F.B.127). Graficul funcției  $F = -kx$  este o dreaptă care trece prin originea axelor de coordonate. Se poate calcula lucrul mecanic al forței elastice ca fiind egal cu aria suprafeței limitată de dreapta  $F = -kx$  și segmentele de dreaptă  $\overline{OA}$  și  $\overline{AA_1}$ , deci se poate scrie:

$$L = \frac{\overline{AA_1} \cdot \overline{OA}}{2} = -\frac{kx^2}{2}.$$

Din expresia de mai sus rezultă că forța elastică este o forță conservativă.

b) Acest subiect a fost tratat la XXI.5°.b.

c) Acest subiect a fost tratat la XXX.4°.c.

5°. a) În timpul modificării configurației unui sistem fizic izolat, în care acționează forțe conservative, suma  $E = E_p + E_c$ , numită energia mecanică a sistemului, are o valoare constantă pentru orice stare (configurație) a sistemului ( $E_p$  — energia potențială,  $E_c$  — energia cinetică).

b) Acest subiect a fost tratat la XXVI.5°.b și I.5°.c.

c) Acest subiect a fost tratat la XXIX.5°.b.

XXXV.1°. a) Din ecuația de echilibru dinamic a sistemului de corpuri rezultă

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \Rightarrow a = \frac{0,3 - 0,2}{0,5} \cdot 9,8 = 1,96 \text{ m/s}^2.$$

Pentru calculul tensiunii în fir se utilizează una din formulele:

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} g, \quad T = G_1 - m_1a \text{ sau } T = m_2a + G_2.$$

Se obține  $T = 2,352 \text{ N}$ .

Se scrie legea spațiului pentru mișcarea accelerată a sistemului:

$$b) s = \frac{1}{2} at^2, \quad s = \frac{H}{2}, \quad t = \sqrt{\frac{H}{a}}, \quad t = \sqrt{\frac{1}{1,96}} = 0,71 \text{ s}.$$

c) Dacă cilindrul 1 se introduce în vasul cu lichid pe distanța  $x$ , forța arhimedică care acționează asupra lui va fi:

$$F_A = xS\rho g.$$

Rezultanta forțelor care se exercită asupra sistemului este de forma  $F = G_1 - G_2 - xS_{pg} = -kx + F'$ , adică o forță elastică caracterizată de constanta de elasticitate  $k = S_{pg}$ .

Pentru calculul frecvenței oscilațiilor se utilizează formula:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{k}{m_1 + m_2} = \frac{S_{pg}}{m_1 + m_2} = \frac{hS \frac{\rho}{\rho_c} \frac{g}{h}}{h(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 \frac{\rho}{\rho_c} \frac{g}{h}}{h(m_1 + m_2)},$$

de unde

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{\rho}{\rho_c} \cdot \frac{g}{h}}, \text{ deci } \nu = 1,41 \text{ Hz.}$$

2°. a) Lucrul mecanic efectuat pe întreg ciclul este determinat de aria ciclului:  $L_{\text{ciclu}} = 4800 \text{ J}$ .

Pentru calculul căldurii primite se utilizează relația  $Q_p - Q_r = L_{\text{ciclu}}$ . Se obține:

$$Q_p = L_{\text{ciclu}} + Q_r = 4800 + 1600 = 6400 \text{ J.}$$

Din formula randamentului rezultă  $\eta = \frac{L_{\text{ciclu}}}{Q_p} = \frac{4800}{6400} = 0,75$ .

b) Căldura vehiculată în transformarea izocoră este dată de relația  $Q_r = \nu C_V (T_4 - T_1)$ . Produsul  $\nu C_V$  se calculează din expresia căldurii primite:

$$Q_p = Q_r + L_{\text{ciclu}} = \nu C_V (T_3 - T_2) \Rightarrow \nu C_V = \frac{Q_p}{T_3 - T_2} = \frac{6400}{200} = 32 \text{ J/K.}$$

Se obține pentru diferența de temperatură expresia:

$$T_4 - T_1 = \frac{Q_r}{\nu C_V} = \frac{1600}{32} = 50 \text{ K.}$$

c) Se calculează mai întâi exponentul adiabatic utilizând ecuația transformării adiabactice:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = T_1 (32)^{\gamma-1} = T_1 \cdot 2^{5(\gamma-1)},$$

$$T_3 = T_4 \cdot 2^{5(\gamma-1)}, 2^{5(\gamma-1)} \cdot [T_4 - T_1] = T_3 - T_2 \Rightarrow 2^{5(\gamma-1)} = \frac{T_3 - T_2}{T_4 - T_1} = 4 = 2^2.$$

Se obține pentru exponentul adiabatic valoarea:

$$\gamma = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Căldura molară la volum constant se calculează astfel:

$$C_V = \frac{R}{\gamma-1} = \frac{5}{2} R = 20,775 \text{ kJ/kmol} \cdot \text{K}$$

3°. a) Se utilizează formula capacității condensatorului plan:

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{3,54 \cdot 10^{-4}} = 10^{-9} \text{ F.}$$

b) Capacitatea echivalentă se calculează cu formula:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2 \cdot 10^{-9}}{2 + 1} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-9} \text{ F.}$$

Din condiția de rezonanță  $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$  rezultă:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10^5 = 7,07 \cdot 10^5 \text{ rad/s, astfel încît:}$$

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{7,07 \cdot 10^5}{2 \cdot 3,14} \cdot 1,129 \cdot 10^5 \text{ Hz.}$$

c) Pentru calculul fluxului maxim se utilizează formula:

$\Phi_{\max} = LI_{\max}$ , în care se introduce valoarea lui  $I_{\max}$  calculată din relațiile:

$$Q_{1,\max} = C_1 U_{1,\max}, \quad U_{1,\max} = X_0 I_{\max} = \frac{1}{C_1 \omega_0} I_{\max}.$$

Se obține:

$$\Phi_{\max} = LC_1 \omega_0 \frac{Q_{1,\max}}{C_1} = L \omega_0 Q_{1,\max} = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 7,07 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 4,242 \cdot 10^{-3} \text{ Wb.}$$

4°. a) Acest subiect a fost tratat la VIII.3°.b.

b) Acest subiect a fost tratat la I.4°.b și XV.4°.c.

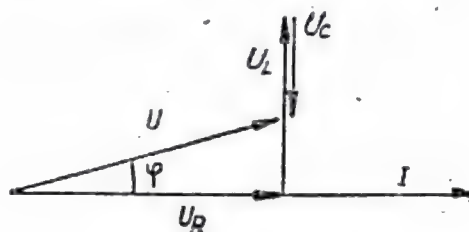


Fig. F.B.128

c) Ne vom referi la figura F.B.128. Sarcina electrică de pe fiecare armătură a condensatoarelor, legate în serie, are aceeași valoare, alternativ pozitivă și negativă, diferența de potențial dintre armăturile fiecărui condensator fiind dată de relațiile:

$$V_A - V_B = \frac{Q}{C_1}, \quad V_B - V_C = \frac{Q}{C_2}, \quad V_C - V_D = \frac{Q}{C_3}.$$

Se poate scrie:

$$\begin{aligned} V_A - V_D &= (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = \\ &= Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) = Q \frac{1}{C}. \end{aligned}$$

unde s-a notat  $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$ .

5°. a) Acest subiect a fost tratat la VII.4°.

b) Acest subiect a fost tratat la III.4°.b.

c) În centrul unei spire parcursă de curent electric, vectorul inducție magnetică are modulul  $B = \frac{\mu I}{2r}$ , unde  $r$  este raza spirei,  $\mu$  permeabilitatea mediului, iar  $I$  intensitatea curentului care trece prin spirală.

XXXVI.1°. a) Se scrie legea spațiului pentru fiecare dintre cele două corpuri ținându-se seama de retardarea  $\Delta t$ :

$$h_1 = \frac{gt^2}{2}, \quad h_2 = \frac{g(t - \Delta t)^2}{2}.$$



Distanța dintre corpuri este dată de expresia:

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{gt^2}{2} - \frac{g(t - \Delta t)^2}{2} = gt\Delta t - \frac{g}{2} (\Delta t)^2.$$

Se observă că  $\Delta h$  e maxim pentru  $t = t_{\max} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 24,1}{9,8}} = 7$  s.

Atunci

$$(\Delta h)_{\max} = gt_{\max}\Delta t - \frac{g(\Delta t)^2}{2} = 117,6 \text{ m.}$$

b) Se scrie ecuația de mișcare a corpurilor în apă luându-se în considerare forța arhimedică:

$$ma = F_A - mg, F_A = \rho Vg, m = V\rho_c.$$

Se obține:

$$a = g\left(\frac{\rho}{\rho_c} - 1\right) = g\left(\frac{\rho V}{m} - 1\right) = 5,88 \text{ m/s}^2.$$

c) Se ia ca origine a timpului  $t'$  momentul cînd primul corp atinge suprafața apei și se pune condiția de întîlnire a corpurilor:

$$v_0 t' - \frac{at'^2}{2} = v_0(t' - \Delta t) - \frac{a(t' - \Delta t)^2}{2}.$$

Rezultă pentru  $t'$  expresia:

$$t' = \frac{v_0 \Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2}}{a \Delta t} = \frac{v_0}{a} + \frac{\Delta t}{2}, \text{ unde } v_0 = \sqrt{2gh} = 68,6 \text{ m/s; deci } t' = 12,67 \text{ s,}$$

$$\tau = t' + t_{m,2} = 19,67 \text{ s.}$$

Distanța față de suprafața apei, la care are loc întîlnirea, este:

$$h' = v_0 t' - \frac{at'^2}{2} = 397,2 \text{ m.}$$

2°. a) Se scrie ecuația de stare a gazului pentru starea inițială  $p_1 V_1 = \nu R T_1$ , de unde

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{\nu R} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 150 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3} \cdot 8,310} \simeq 361 \text{ K.}$$

b) Forța  $F$  determină o presiune  $p'_1 = \frac{F}{S} = 3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ , astfel încît din ecuația de stare a gazului încălzit pînă la limita de deschidere a supapei,  $p'_1 V_1 = \nu R T'_1$ , se obține:

$$T'_1 = \frac{p'_1 V_1}{R} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 150 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3} \cdot 8,310} = \frac{3}{2} T_1 \simeq 541,5 \text{ K.}$$

Variantă: Din ecuația transformării izocore,  $\frac{p_1}{p'_1} = \frac{T_1}{T'_1}$ , se obține

$$T'_1 = \frac{p'_1}{p_1} T_1 = 541,5 \text{ K.}$$

c) Scriind ecuația de stare a gazului aflat în rezervor și recipient la echilibru,  $p(V_1 + V_2) = \nu RT$ , se obține  $T = \frac{p(V_1 + V_2)}{\nu R} = 421 \text{ K}$ .

Din formula vitezei medii pătrățice rezultă:

$$v_T = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,310 \cdot 5 \cdot 421,5}{4}} = 1620 \text{ m/s}.$$

3°. a) Se scrie legea lui Ohm pentru întreg circuitul în cele două cazuri:

$$I_1 = \frac{E_1}{R + nr}, \quad I_2 = \frac{E_2/2}{R + \frac{n}{2}r}.$$

Rezolvind sistemul se obține:

$$R = \frac{E_1(I_1 - I_2)}{I_1 I_2} = 20 \Omega, \quad n = \frac{E_1 - I_1 R}{I_1 r} = 40.$$

b)  $W = RI_1^2 t = 20 \cdot (1,5)^2 \cdot 3 \cdot 600 = 162 \text{ kJ}$ .

c) Se calculează această capacitate în funcție de permitivitatea relativă a plăcii:

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S'}{d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{2d}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{2d},$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{2d} (1 + \epsilon_r),$$

de unde

$$\epsilon_r = \frac{2d}{\epsilon_0 S} C - 1 = 4.$$

În cazul în care se consideră  $C' = \frac{q}{E_{1/2}} = 6 \cdot 10^{-10} \text{ F}$ , se obține  $\epsilon_r = 9$ .

4°. a) Acest subiect a fost tratat la XIV.4°.a.

b) Acest subiect a fost tratat la XVI.5°.b.

c) În condițiile rezonanței circuitului serie  $RLC$ , intensitatea curentului devine maximă,  $I_r = \frac{U}{R}$ , iar tensiunile efective la bornele bobinei și condensatorului devin și ele maxime:

$$U_L = I_r X_L = \left( \frac{U \omega L}{R} \right)_{\omega=\omega_0}, \quad U_C = I_r X_C = \left( \frac{U}{\omega RC} \right)_{\omega=\omega_0}.$$

Raportul notat cu  $Q$ :

$$Q = \left( \frac{U_L}{U} \right)_{\omega=\omega_0} = \left( \frac{U_C}{U} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}},$$

care arată de câte ori este mai mare, la rezonanță tensiunea la bornele bobinei sau condensatorului în raport cu cea a generatorului, se numește factor de supratensiune sau de calitate al circuitului.

5°. a) Acest subiect a fost tratat la VIII.3°.a.

b) Legea Boyle-Mariotte: Presiunea unui gaz aflat la temperatură constantă variază invers proporțional cu volumul gazului:  $pV = \text{constant}$ .

c) Acest subiect a fost tratat la XXXIII.5°.c.

XXXVII.1°. a) Se utilizează formulele vitezei și accelerației mișcării oscilatorii:

$$v_{\max} = \omega A = 2\pi \cdot 0,1 = 0,2\pi = 0,628 \text{ m/s},$$

$$a_{\max} = \omega^2 A = 0,1 \cdot 4\pi^2 \simeq 4 \text{ m/s}^2.$$

b) Punind condiția din enunț,  $\frac{A}{2} = A \sin\left(2\pi t_1 + \frac{\pi}{4}\right)$ , se obține  $2\pi t_1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}$ , respectiv  $\frac{\sqrt{3}}{2} A = A \sin\left(2\pi t_2 + \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $2\pi t_2 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$ . Prin urmare:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{24} - \left(-\frac{1}{24}\right) = \frac{1}{12} \text{ s} \simeq 0,08 \text{ s}.$$

c) Se calculează mai întâi constanta elastică a oscilatorului armonic:

$$k = m\omega^2 = 1 \cdot 4\pi^2 = 40 \text{ N/m}.$$

Energia cinetică se obține din legea conservării energiei:

$$E_p = \frac{1}{2} k y_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot \frac{3}{4} \cdot 10^{-2} \simeq 0,15 \text{ J}.$$

Energia totală este egală cu energia potențială maximă:

$$E_t = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 10^{-2} \simeq 0,20 \text{ J},$$

$$E_c = E_t - E_p = 0,20 - 0,15 \simeq 0,05 \text{ J}.$$

2°. a) Se utilizează formula inductanței:

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{l} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 300 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4}}{62,8 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-1}} \simeq 0,6 \text{ H}.$$

b) Intensitatea curentului electric prin bobină rezultă din expresia inducției magnetice:

$$B = \frac{\mu_0 \mu_r N I}{l} \Rightarrow I = \frac{8 \cdot 62,8 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 300 \cdot 1000} = \frac{40}{3} \simeq 13,3 \text{ A}.$$

În rezistența bobinei se disipă puterea  $P = I^2 R = 13,3^2 \cdot 20 \simeq 3,55 \cdot 10^3 \text{ W}$ .

c) Masa unei molecule este dată de formula  $m_{\text{moleculă}} = \frac{A}{N_A}$ , deci masa de cupru depusă la catod va fi:  $M_{\text{depus}} = N m_{\text{moleculă}} = N \frac{A}{N_A}$ ; din calcul rezultă:

$$M = 9 \cdot 10^{20} \frac{63,6}{6,023 \cdot 10^{23}} \simeq 9,5 \cdot 10^{-6} \text{ kg}.$$

3°. a) Din definiția accelerației rezultă:

$$a = a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \text{const.},$$

Încît  $v = v_0 + a(t - t_0)$ . Din expresia vitezei medii:  $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$  rezultă

$$x = x_0 + v_m(t - t_0) = x_0 + \frac{1}{2} (v_0 + v) (t - t_0);$$



dar  $v = v_0 + a(t - t_0)$ , deci

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2.$$

b)  $U_1 = IR_1$ ,  $U_2 = IR_2$ ,  $U_3 = IR_3$ .  $U = IR$  și, conform legii lui Kirchhoff (fig. F.B.129, a),  $U = U_1 + U_2 + U_3$  sau  $IR = IR_1 + IR_2 + IR_3$

$$R = R_1 + R_2 + R_3, \text{ deci, în general, } R = \sum_1^n R_i.$$

Conform legii lui Ohm:  $I_1 = \frac{U}{R_1}$ ,  $I_2 = \frac{U}{R_2}$ ,  $I_3 = \frac{U}{R_3}$ .

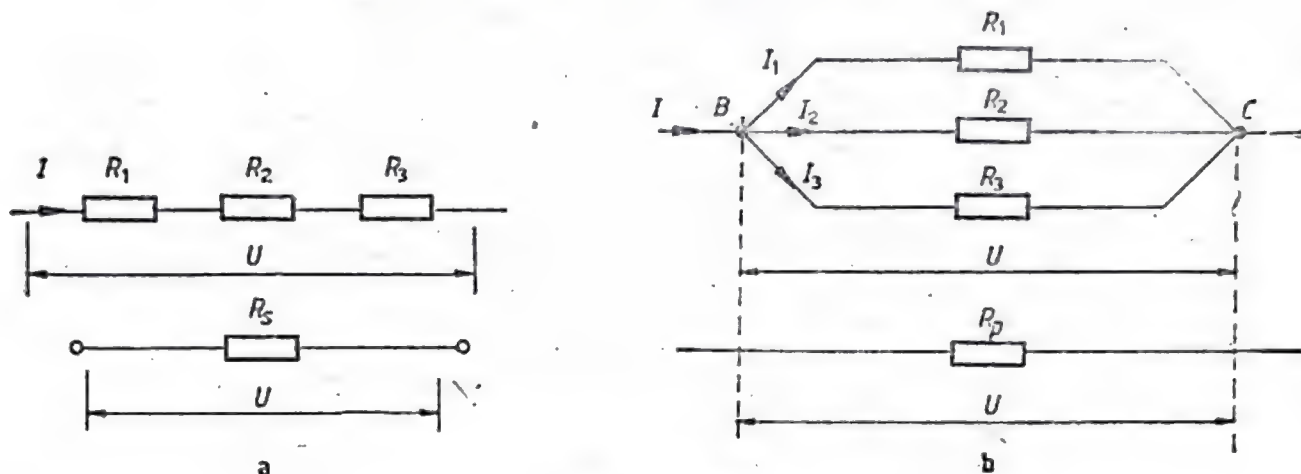


Fig. F.B.129

Conform legii I a lui Kirchhoff pentru nodul B (fig. F.B.129, b)

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \text{ sau } \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3},$$

deci  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ ; generalizînd:  $\frac{1}{R} = \sum_1^n \frac{1}{R_i}$ .

c) Acest subiect a fost tratat la XIII.3°c și XXIII.4°c.

4°. a)  $\vec{F}_c = + m\omega^2 \vec{r}$  ( $m$  este masa corpului aflat în mișcare circulară uniformă,  $\omega$  viteza unghiulară iar  $\vec{r}$  raza vectorie).

b) Acest subiect a fost tratat la I.5°.a.

c) Acest subiect a fost tratat la XIII.4°c.

XXXVIII. 1°. a)  $L_{\text{ciclu}} = 1,247 \cdot 10^5 \text{ J}$ ,

$$L_{\text{ciclu}} = \frac{(p_2 - p_1)(V_3 - V_1)}{2} = \frac{p_1 V_1}{2}, \quad p_1 V_1 = \nu R T_1, \quad \nu = \frac{0,4}{4} = 0,1 \text{ kmol},$$

$$L_{\text{ciclu}} = \frac{\nu R T_1}{2}, \quad T_1 = \frac{2 L_{\text{ciclu}}}{\nu R} = \frac{2 \cdot 1,247 \cdot 10^5}{0,1 \cdot 8,310 \cdot 10^3} = 300 \text{ K}.$$

b)  $\Delta U_{23} = 0$ , deoarece stările 2 și 3 sînt pe izotermă, întrucît  $p_2 V_1 = p_1 V_3$  și pe izotermă energia internă nu variază. Se poate arăta și prin calcul:  $T_2 = 600 \text{ K}$ ,  $T_3 = 600 \text{ K}$  și  $\Delta U_{12} = \Delta U_{13} = 374 \text{ J}$ .

c) Ecuația de stare a gazului pentru starea 2 are forma:

$$p_2 V_2 = \nu R T_2, \Rightarrow p_2 = \frac{\nu R T_2}{V_2} = \frac{\nu R T_2 \rho_2}{m}, \quad V_2 = \frac{m}{\rho_2} = 5 \text{ m}^3.$$

Din calcul rezultă  $p_2 = 0,997 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ .

2°. a) Curentul din circuit se determină cu ajutorul legii lui Ohm:

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{220}{200} = 1,1 \text{ A}.$$

Se calculează tensiunea la bornele AB:

$$U_{AB} = E - IR_3 = 220 - 1,1 \cdot 20 = 220 - 22 = 198 \text{ V}.$$

Pentru calculul sarcinilor electrice de pe armăturile condensatoarelor  $C_1$  și  $C_2$  se scriu ecuațiile:

$$U_{C_1} + U_{C_2} = U_{AB}, \quad \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = U_{AB}, \quad Q \cdot \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} = U_{AB},$$

de unde

$$Q = \frac{U_{AB} C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{198 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{4} \text{ C} = 148,5 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 148,5 \text{ } \mu\text{C}.$$

Tensiunile de pe cele două condensatoare au valorile:

$$U_{C_1} = Q/C_1 = 148,5 \text{ V}, \quad U_{C_2} = Q/C_2 = 49,5 \text{ V}.$$

b) Se observă că  $U_{R_1} = U_{C_1}$  și  $U_{R_2} = U_{C_2}$ . Din calcul rezultă:

$$U_{R_1} = R_1 I = 100 \cdot 1,1 = 110 \text{ V}, \quad U_{R_2} = R_2 I = 80 \cdot 1,1 = 88 \text{ V},$$

prin urmare pe armăturile condensatoarelor se află sarcinile:

$$Q_1 = C_1 U_{R_1} = 10^{-6} \cdot 110 = 110 \text{ } \mu\text{C}, \quad Q_2 = C_2 U_{R_2} = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 88 = 264 \text{ } \mu\text{C}.$$

c) Aplicând formula energiei cimpului electric dintre armăturile condensatorului, se obține  $W' = 0,011 \text{ J}$ ,  $W'' = 0,0060 \text{ J}$ .

3°. a, b) Impedanța circuitului RLC paralel are expresia:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}.$$

Din legea lui Ohm pentru curentul alternativ,  $I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}$ , unde  $X_L = \omega L = \frac{2\pi \cdot 50}{10\pi} = 10 \text{ } \Omega$  și  $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100\pi \cdot \frac{10^{-3}}{2\pi}} = \frac{10^3}{50} = 40 \text{ } \Omega$ , se obține:

$$I = 220 \sqrt{\frac{1}{100} + \left(\frac{1}{40} - \frac{1}{10}\right)^2}, \quad \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{16 + 9}{1600}} = \frac{5}{40} \Rightarrow Z = 8 \text{ } \Omega.$$

Pentru intensitățile curenților din circuit rezultă valorile

$$I = \frac{220}{8} = 27,5 \text{ A}, \quad I_R = \frac{U}{R} = \frac{220}{10} = 22 \text{ A}, \quad I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{220}{10} = 22 \text{ A}, \text{ iar}$$

$$I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{220}{40} = 5,5 \text{ A}.$$

Diagrama fazorială este prezentată în figura F.B.130.

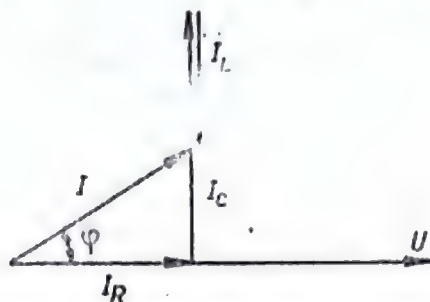


Fig. F.B.130

Pentru calculul defazajului dintre curent și tensiune se folosește formula:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_L - I_C}{I_R} = 0,75 = \frac{3}{4}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} = 36,86^\circ.$$

c) La rezonanță,  $I = I_{\min} = I_R = 22 \text{ A}$ . Prin urmare, frecvența  $\nu_1$  se calculează astfel:

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{1}{10\pi} \cdot \frac{10^{-3}}{2\pi}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{20\pi^2}{10^{-3}}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 10^4} = 50 \sqrt{2} \text{ Hz}.$$

4°. a) Acest subiect a fost tratat la II.5°. b și la XIII.5°. b.

b) α) Când un lichid fierbe, la presiune constantă temperatura vaporilor în imediata vecinătate a lichidului rămâne constantă. Această temperatură este cunoscută sub numele de temperatură de fierbere, iar în condiții de presiune constantă depinde numai de natura lichidului.

β) Un lichid intră în fierbere atunci când presiunea maximă a vaporilor săi este egală cu presiunea de deasupra lichidului.

c) Acest subiect a fost tratat la XXV.4°. c.

5°. a) Acest subiect a fost tratat la III.4°. b.

b) Acest subiect a fost tratat la V.4°. b.

c) Acest subiect a fost tratat la XXIX. 5°. b.

XXXIX. 1°. a) Presiunea inițială a gazului se calculează astfel:  $p_1 = p_0 + \frac{Mg}{S} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ .

Din ecuația de stare,  $p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1$ , se obține volumul inițial  $V_1 = \frac{m R T_1}{\mu p_1} = \frac{14 \cdot 10^{-3} \cdot 8310 \cdot 300}{20 \cdot 1,5 \cdot 10^5} = 8,31 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ .

Rezultă înălțimea  $h = \frac{V_1}{S} = \frac{8,31 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}} = 8,31 \cdot 10^{-1} \text{ m}$ .

b) În transformarea izobară lucrul mecanic are expresia  $L = p_1(V'_2 - V_1)$ . Volumul  $V'_2$  rezultă din legea transformării izobare:

$$\frac{V'_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1} \Rightarrow V'_2 = T_2 \frac{V_1}{T_1} = 400 \cdot \frac{8,31 \cdot 10^{-3}}{300} = 11,08 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3,$$

$$L = 1,5 \cdot 10^5 (11,08 - 8,31) \cdot 10^{-3} = 4,155 \cdot 10^2 \text{ J}.$$

Variantă la 1 b)

$$L = \nu R(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) = \frac{14 \cdot 10^{-3}}{28} \cdot 8310 (400 - 300) = 4,155 \cdot 10^2 \text{ J}.$$



c) Expresia presiunii finale se obține din ecuația conservării numărului de moli:

$$p_f = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_2' + V_2}$$

Din calcul rezultă:

$$p_f = \frac{1,5 \cdot 10^5 \cdot 11,08 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{11,08 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-3}} = 2,032 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

2°. a) Diagrama transformărilor analizate este prezentată în figura F.B.131:

$$L_{1-4-5} = p_5(V_5 - V_1) = 10^5(3 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}) = 10^2 \text{ J.}$$

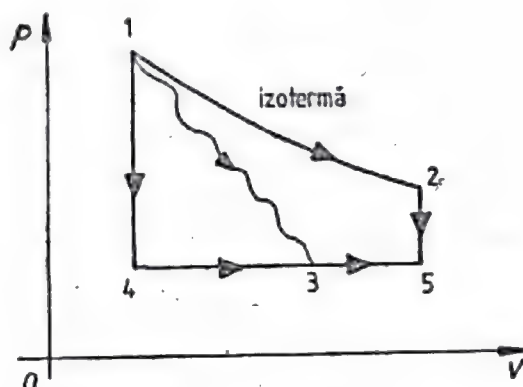


Fig. F.B.131

Pentru calculul cantității de căldură  $Q_{1-4-5}$  se calculează mai întâi numărul de moli și temperatura  $T_4$ :

$$\nu = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{1}{8310} \text{ moli}, \quad T_4 = \frac{p_4}{p_1} T_1 = \frac{10^5}{2 \cdot 10^5} \cdot 400 = 200 \text{ K},$$

obținându-se succesiv:

$$Q_{1-4} = \nu C_V(T_4 - T_1) = \frac{1}{8310} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8310(200 - 400) = -300 \text{ J},$$

$$C_p = C_V + R = \frac{5}{2} R \text{ (relația Robert-Mayer),}$$

$$Q_{4-5} = \nu C_p(T_5 - T_4) = \frac{1}{8310} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8310(300 - 200) = 250 \text{ J},$$

astfel încît:

$$Q_{1-4-5} = Q_{1-4} + Q_{4-5} = -50 \text{ J.}$$

b) Întrucît în transformarea izocoră 2-5 lucrul mecanic este nul, se poate scrie:

$$L_{1-2-5} = L_{1-2} = \nu R T_1 \ln \frac{V_5}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{V_5}{V_1} = 2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot \ln \frac{3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 1,6 \cdot 10^2 \text{ J.}$$

În transformarea izobară  $1 \rightarrow 2$ ,  $\Delta U = 0$ , astfel încît:

$$|Q_{1-2}| = L_{1-2} = 1,6 \cdot 10^2 \text{ J.}$$

Pentru căldura schimbată în transformarea izocoră se obține:

$$|Q_{2-5}| = \nu C_V (T_1 - T_5) = \frac{p_1 V_1}{RT_1} \frac{3}{2} R (T_1 - T_5) = \\ = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{400} \cdot \frac{3}{2} \cdot (400 - 300) = 150 \text{ J.}$$

Ținând seama de semnele celor două cantități de căldură calculate mai sus, se obține:

$$Q_{1-2-5} = |Q_{1-2}| - |Q_{2-5}| = 1,6 \cdot 10^2 - 150 = 10 \text{ J.}$$

c) Întrucât energia internă este funcție de stare, variația sa nu depinde de drum, astfel încât pe calea 1-4-5 se obține:

$$\Delta U = \nu C_V (T_5 - T_1), \Delta U = \frac{p_1 V_1}{RT_1} \frac{3}{2} R (T_5 - T_1) = -150 \text{ J.}$$

3°. a) Se utilizează notațiile din figura F.B.132. Curentul prin diodă are expresia  $I_d = \frac{U - U_d}{R_1}$ ; rezultă  $R_1 = \frac{U - U_d}{I_d}$ ,  $R_1 = \frac{20 - 9}{10} = 1100 \Omega$ .

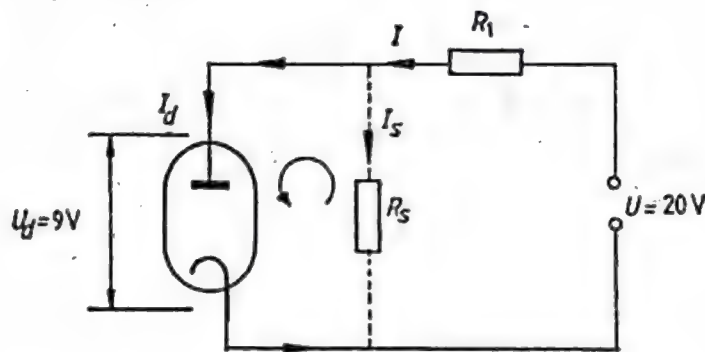


Fig. F.B.132

$$b) R_{\text{diodă}} = \frac{U_d}{I_d} = \frac{9}{10^{-2}} = 900 \Omega.$$

Din ecuațiile  $I_d R_d = I_s R_s$  și  $I = I_d + I_s$  se obține valoarea curentului total:

$$I = \frac{R_d + R_s}{R_s} I_d = \frac{900 + 600}{600} \cdot 10^{-2} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ A.}$$

Se notează valoarea cerută a rezistenței  $R_1$  cu  $R'_1$ :

$$R'_1 = \frac{U - U_d}{I} = \frac{20 - 9}{2,5 \cdot 10^{-2}} = 440 \Omega.$$

c) Expresia rezistenței  $R_s$  se obține din ecuația  $I_1 = \frac{U_d}{R_s} = I - I_d$ , unde  $I_{d, \min} < I_d < I_{d, \max}$ . În final rezultă:

$$R_{s, \max} = \frac{U_d}{I - I_{d, \max}} = 1636 \Omega; \quad R_{s, \min} = \frac{U_d}{I - I_{d, \min}} = 367 \Omega.$$

4°. a) Conform legii lui Jurin:  $h = \frac{2\sigma}{r\rho g}$  ( $h$  este înălțimea la care se ridică lichidul în vasul capilar,  $r$  raza vasului,  $\sigma$  coeficientul de tensiune superficială,  $\rho$  densitatea lichidului, iar  $g$  accelerația gravitațională).

b) Acest subiect a fost tratat la 11.5° c.

c)  $m = kQ$  ( $m$  este masa de substanță depusă la catod,  $Q$  sarcina electrică transportată iar  $k$  echivalentul electrochimic).

$$k = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n}$$

( $F$  este numărul lui Faraday,  $A$  masa atomică a substanței, iar  $n$  valența substanței).

5°. a) Acest subiect a fost tratat la XIV. 4°. c.

b) Un Wb (weber) este fluxul magnetic al unui cîmp magnetic uniform, de inducție egală cu 1 T, printr-o suprafață de 1 m<sup>2</sup> așezată normal pe direcția cîmpului magnetic:

$$1 \text{ Wb} = [B]_{\text{SI}} \cdot [S]_{\text{SI}} = 1 \text{ T} \cdot 1 \text{ m}^2.$$

c) Inductanța unui circuit este o mărime egală cu citul dintre fluxul magnetic propriu prin suprafața aceluia circuit și intensitatea curentului ce trece prin circuit:  $L = \Phi/I$ .

XL. 1°. a)  $P = I^2 R = (20 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 10 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ W}.$

Din condiția de rezonanță se obține:

$$C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{10^{-4} \cdot 4\pi^2 \cdot 10^8} \simeq 2,54 \cdot 10^{-6} \text{ F}.$$

b) Impedanța circuitului paralel are expresia:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2} \text{ sau } Z = \left[ \frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2 \right]^{-1/2},$$

unde  $X_L = L\omega' = L'2\omega = 4\pi \Omega$ , iar  $X_C = \frac{1}{\omega C'} = \frac{1}{C^2 2\omega} = \pi \Omega$ . Se obține:  $Z = 3,89 \Omega$

c) Din expresia inductanței,  $L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{l}$ , rezultă  $\mu_r = \frac{L}{\mu_0 N^2 S} = 7,96$ .

2°. a) Se calculează căldurile cedată și absorbită:

$$Q_{\text{ced}} = (m_1 c_{\text{Fe}} + m_2 c_{\text{Al}}) (t_1 - \theta_f), \quad Q_{\text{abs}} = (m_3 c_{\text{apă}} + C) (\theta_f - t_2).$$

Ținînd seama de ecuația calorimetrică, se obține ecuația de echilibru:

$$(m_1 c_{\text{Fe}} + m_2 c_{\text{Al}}) (t_1 - \theta_f) = (m_3 c_{\text{apă}} + C) (\theta_f - t_2).$$

Din această ecuație se calculează temperatura finală de echilibru:

$$\theta_f = \frac{(m_1 c_{\text{Fe}} + m_2 c_{\text{Al}}) t_1 + (m_3 c_{\text{apă}} + C) t_2}{m_1 c_{\text{Fe}} + m_2 c_{\text{Al}} + m_3 c_{\text{apă}} + C} = 28,5^\circ \text{ C}.$$

b) Se folosește metoda de la punctul a):  $Q_{\text{ced}} = Q_{\text{abs}}$ ;

$$Q_{\text{ced}} = (m_1 c_{\text{Fe}} + m_2 c_{\text{Al}} + m_3 c_{\text{apă}} + C) (\theta_f - 0), \quad Q_{\text{abs}} = m_4 c_{\text{gheață}} (0 - t_4) + m_4 \lambda.$$

Singura necunoscută în această ecuație este masa de gheață,  $m_4$ , astfel încît:

$$m_4 = \frac{(m_1 c_{\text{Fe}} + m_2 c_{\text{Al}} + m_3 c_{\text{apă}} + C) \theta_f}{c_{\text{gheață}} (-t_4) + \lambda} = 0,097 \text{ kg}.$$

c) Din legea dilatării volumice a unui corp,  $V_{\theta_f} = V_0 (1 + \gamma_{\theta_f})$ , se obține expresia variației volumului în cursul procesului de la punctul b):

$$\Delta V = V_{\theta_f} - V_0 = V_0 \gamma_{\theta_f} = \frac{m_1}{\rho_{\text{Fe}}} \gamma_{\theta_f}, \quad \Delta V = 6,3 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3.$$



3°. a) Din ecuațiile de stare pentru gazul din cele două compartimente,  $pV_1 = \nu_1 RT_1$  și  $pV_2 = \nu_2 RT_1$ , rezultă  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}$ , adică raportul numerelor de moli corespunzătoare.

Prin încălzirea unui compartiment și răcirea celuilalt cu același număr de grade, ecuațiile de stare pentru cele două compartimente capătă forma:

$$p' \frac{V}{2} = \nu_1 R(T_1 - \Delta T), \quad p' \frac{V}{2} = \nu_2 R(T_1 + \Delta T).$$

Făcând raportul celor două ecuații, membru cu membru, rezultă o ecuație pentru  $\Delta T$ :  $\nu_1(T_1 - \Delta T) = \nu_2(T_1 + \Delta T)$ . În continuare se exprimă  $\Delta T$  în funcție de raportul cunoscut  $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ :

$$\Delta T = \frac{\nu_1 T_1 - \nu_2 T_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} T_1 = \frac{\frac{\nu_1}{\nu_2} - 1}{\frac{\nu_1}{\nu_2} + 1} T_1 = \frac{\frac{V_1}{V_2} - 1}{\frac{V_1}{V_2} + 1} T_1,$$

de unde se obține  $\Delta T = 200$  K.

b) Din ecuația de stare pentru gazul din primul compartiment scrisă în cele două situații,  $pV_1 = \nu_1 RT_1$  și  $p' \left( \frac{V_1 + V_2}{2} \right) = \nu_1 R(T_1 - \Delta T)$ , rezultă:

$$\frac{p'}{p} = \frac{T_1 - \Delta T}{T_1} \cdot \frac{2V_1}{V_1 + V_2} = \frac{T_1 - \Delta T}{T_1} \cdot \frac{2}{1 + \frac{V_2}{V_1}} = \frac{5}{9}.$$

c) Se aplică formula vitezei termice a moleculelor,  $v_T = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$ , de unde rezultă  $v_{T,+\Delta T} = 667,2$  m/s.

4°. a) Acest subiect a fost tratat la XIV. 4°. a.

b) Acest subiect a fost tratat la XXVI. 4°. a.

c) Capacitatea electrică  $C$  a unui conductor izolat și depărtat de alte corpuri este o mărime fizică egală cu raportul dintre sarcina  $Q$  a conductorului și potențialul său  $V$  în aceste condiții:  $C = \frac{Q}{V}$ .

5°. a) Acest subiect a fost tratat la V. 4°. b.

b) Inducția cîmpului magnetic generat de un curent electric rectiliniu are expresia  $B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$ , unde  $\mu_0$  este permeabilitatea vidului,  $\mu_r$  permeabilitatea relativă a mediului,  $I$  intensitatea curentului, iar  $r$  distanța de la punctul considerat la conductor.

c) Forța Lorentz are expresia  $f = qvB \sin \alpha$ ; pentru  $\alpha = \pi/2$  se obține  $f = qvB$ .

În această formulă  $q$  este sarcina particulei,  $\vec{v}$  viteza particulei,  $\vec{B}$  inducția cîmpului magnetic, iar  $\alpha$  unghiul dintre vectorii  $\vec{B}$  și  $\vec{v}$ .

XLI. 1°. a) Se utilizează ecuația de stare a gazelor perfecte:

$$p_1 V = \nu_1 RT_1; \quad N = \nu_1 N_A = \nu_1 \frac{R}{k},$$

$$N = \frac{p_1 V}{RT_1} \cdot \frac{R}{k} = \frac{p_1 V}{kT_1} = \frac{1,38 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 400} = 5 \cdot 10^{21} \text{ molecule.}$$

b) Se utilizează expresia numărului de moli stabilită la punctul a):

$$m_1 = \mu \nu_1 = \mu \frac{p_1 V}{RT_1} = 28 \frac{1,38 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{8310 \cdot 400} = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ kg},$$

$$\epsilon_t = \frac{3}{2} k T_1 = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 400 = 8,28 \cdot 10^{-21} \text{ J},$$

$$\text{sau } U = \frac{3}{2} \nu_1 R T_1 = \frac{3}{2} p_1 V = 41,4 \text{ J}.$$

c) Se utilizează ecuația de stare a gazelor perfecte:

$p_1 V = \nu_1 R T_1$ , respectiv  $p V = \nu_2 R (T_1 + \Delta T)$ : rezultă pentru  $\nu_2$  expresia:

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{T_1}{T_1 + \Delta T} \cdot \frac{p}{p_1}.$$

Se exprimă  $\Delta m$  funcție de diferența  $\nu_1 - \nu_2$ :

$$\Delta m = \mu (\nu_1 - \nu_2) = \mu \nu_1 \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 + \Delta T} \cdot \frac{p}{p_1} \right),$$

din calcul rezultind:

$$\Delta m = 0,23 \cdot 10^{-3} \left( 1 - \frac{400}{700} \cdot \frac{2 \cdot 10^4}{1,38 \cdot 10^4} \right) = 3,91 \cdot 10^{-5} \text{ kg}.$$

$$2^\circ. \text{ a) } X_L = \omega L = 100 \pi \cdot 25,48 \cdot 10^{-3} = 8 \Omega,$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{100 \pi \cdot 637} = \frac{10^4}{637 \pi} = 5 \Omega,$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{16 + (8 - 5)^2} = 5 \Omega.$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{120}{5} = 24 \text{ A}, \quad U_R = IR = 4 \cdot 24 = 96 \text{ V},$$

$$U_L = IX_L = 8 \cdot 24 = 192 \text{ V}, \quad U_C = IX_C = 5 \cdot 24 = 120 \text{ V}.$$

b) Din condiția de rezonanță  $\frac{1}{\omega C_1} = \omega L$  rezultă

$$C_1 = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{\omega X_L} = \frac{1}{100 \pi \cdot 8} = \frac{1}{800 \pi} \text{ F} \simeq 4 \cdot 10^{-4} \text{ F}.$$

$$\text{c) } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{25,48 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6}{637}} = \frac{1}{2} \sqrt{10} \simeq 1,6.$$

3°. a) Acest subiect a fost tratat la XX. 5°. b.

b)  $L = \nu R T \ln \frac{V_2}{V_1}$  sau  $L = \nu R T 2,3 \lg \frac{V_2}{V_1}$  ( $R$  este constanta universală a gazelor ideale,  $T$  temperatura la care are loc transformarea,  $V_1$  volumul inițial,  $V_2$  volumul final, iar  $\nu$  numărul de moli (kmoli) de gaz).

c) Acest subiect a fost tratat la XXV. 4°. a.

4°. a) Acest subiect a fost tratat la II. 5°. c.

b) Acest subiect a fost tratat la XL. 5°. c.

c)  $W = \frac{1}{2} C U^2$  ( $U$  este diferența de potențial dintre armăturile condensatorului, iar  $C$  capacitatea condensatorului).

**XLII. 1°. a)** Greutatea tijei este  $G = lS\rho_0g$ , unde cu  $S$  s-a notat secțiunea tijei. Forța  $G$  se aplică în  $O$  (figura F.B.133).

Forța arhimedică a apei este  $F = xS\rho_0g$ , unde  $x$  este porțiunea cufundată în apă. Forța  $F$  se aplică în punctul  $O'$ .

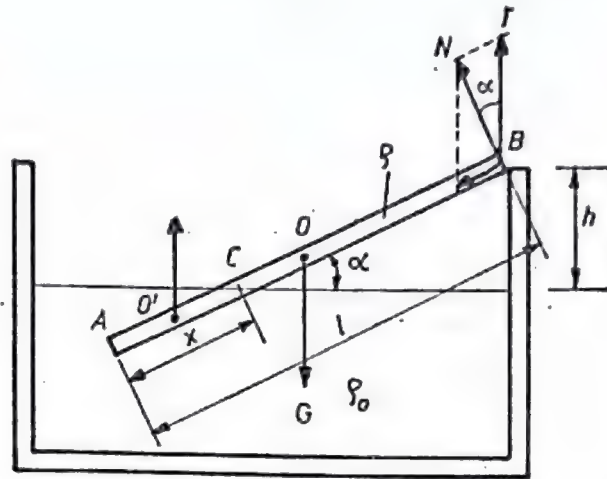


Fig. F.B.133

Reacțiunea peretelui vasului în punctul  $B$  este  $\vec{N}$ , de componentă verticală  $\vec{T}$ . Se pot scrie relațiile  $T = G - F = Sg(l\rho - x\rho_0)$  și  $\frac{T}{F} = \frac{\overline{OO'}}{\overline{OB}}$ , unde

$$\overline{OO'} = \frac{l}{2} - \frac{x}{2} = \frac{l-x}{2}, \text{ iar } \overline{OB} = \frac{l}{2}.$$

Înlocuind în expresia raportului  $T/F$ , se obține ecuația  $\frac{Sg(l\rho - x\rho_0)}{xS\rho_0g} = \frac{l-x}{l}$  care se scrie succesiv astfel:

$$l^2\rho - x\rho_0l = x\rho_0l - x^2\rho_0, \quad x^2\rho_0 = 2x\rho_0 + l^2\rho = 0,$$

$$1\,000\,x^2 - 2\,000\,x + 910 = 0, \quad x^2 - 2x + 0,91 = 0,$$

de unde rezultă soluția  $x = 0,7$  m.

b) Se exprimă sinusul unghiului  $\alpha$  astfel:

$$\sin \alpha = \frac{h}{l-x} = \frac{0,15}{0,3} = \frac{1}{2} \text{ și rezultă } \alpha = 30^\circ.$$

c) Se calculează forța de frecare dintre tijă și marginea vasului:  $N = T \cos \alpha$ ,  $F_f = \mu N = \mu T \cos \alpha$ .

Condiția ca tijă să nu alunece,  $\mu T \cos \alpha > T \sin \alpha$ , conduce la valoarea lui  $\mu_{\min}$ :  $\mu > \tan \alpha$ ;  $\mu > 0,57$  deci  $\mu_{\min} = 0,57$ .

2°. a) Referirile se fac la figura F.B.134. Pentru calculul vitezei se utilizează expresia  $v_1 = v_0 - a_1t$ .

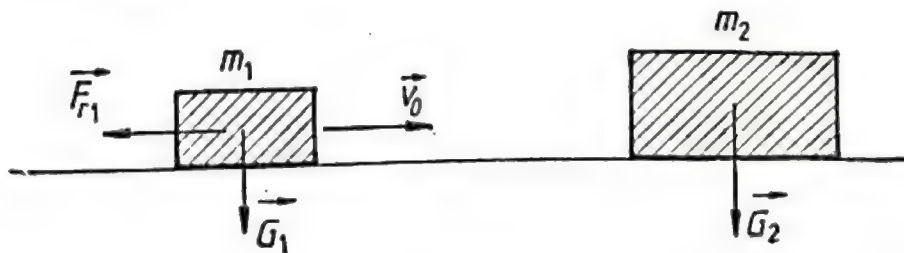


Fig. F.B.134



Accelerația  $a_1$  se obține din ecuația  $a_1 = \frac{F_r}{m_1}$ , unde  $F_r = \frac{m_1 g}{100}$ . Rezultă  $a_1 = \frac{m_1 g}{100 m_1} = 0,1 \text{ m/s}^2$ , astfel încît  $v_1 = 10 - 10 \cdot 0,1 = 9 \text{ m/s}$ .

b) Viteza vagoanelor cuplate, imediat după ciocnire, rezultă din legea conservării impulsului:  $v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{v_1}{3} = 3 \text{ m/s}$ .

Căldura degajată prin ciocnire se obține din legea conservării energiei:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} + Q,$$

deci

$$Q = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 81}{2} - \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 9}{2} = 2,7 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

c) Accelerația sistemului se calculează din

$$F_r = F_{r_1} + F_{r_2} = \frac{(m_1 + m_2)g}{100} = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = g/100 = 0,1 \text{ m/s}^2,$$

timpul pînă la oprire se calculează din legea vitezei, iar distanța corespunzătoare din legea spațiului:

$$v = at, \quad t' = \frac{v}{a} = \frac{3}{0,1} = 30 \text{ s}, \quad s = vt' - \frac{at'^2}{2} = 45 \text{ m}.$$

3°. a)  $Q = \Delta U + L$  (se fac referiri la figura F.B.135).

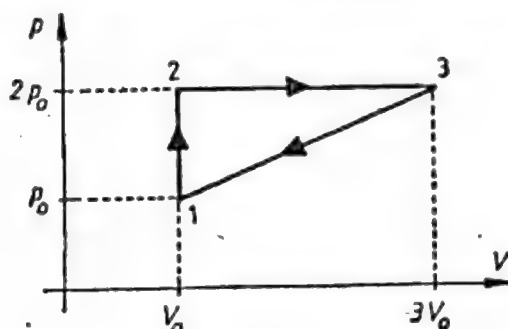


Fig. F.B.135

Transformarea 1–2 este izocoră, deci  $L_{12} = 0$ , iar  $Q_{12} = \nu C_V \Delta T$ .

Pentru calculul variației  $\Delta T$  se aplică ecuația de stare a gazelor perfecte:

$$p_1 V_1 = \nu R T_1, \quad p_2 V_2 = \nu R T_2, \quad V_0(p_2 - p_1) = \nu R \Delta T, \quad \Delta T = \frac{V_0 p_0}{\nu R}.$$

Prin urmare  $Q_{12}$  va fi:

$$Q_{12} = \frac{V_0 p_0 C_V}{R} = \frac{5}{2} V_0 p_0 = \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 = 500 \text{ J}.$$

Variația energiei interne rezultă din principiul întâi al termodinamicii,

$$Q = \Delta U + L, \text{ de unde } \Delta U_{12} = Q_{12} = 500 \text{ J}.$$

Transformarea 2–3 este izobară, astfel încît  $L_{23} = p \Delta V = 2p_0 \cdot 2V_0 = 4 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 = 800 \text{ J}$ .

Pentru calculul căldurii  $Q_{23}$  se utilizează formula  $Q_{23} = \nu C_p \Delta T$ . Variația  $\Delta T$  se obține aplicând ecuația de stare a gazelor perfecte:

$$p_2 V_2 = \nu R T_2, \quad p_3 V_3 = \nu R T_3, \quad p_2(V_3 - V_2) = \nu R(T_3 - T_2).$$

Rezultă  $\Delta T = \frac{2p_0 \cdot 2V_0}{\nu R}$ , încît  $Q_{23} = \frac{\nu C_p \cdot 4p_0 V_0}{\nu R} = \frac{7}{2} \cdot 4p_0 V_0 = 14 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 = 2\,600 \text{ J}$ , iar  $\Delta U_{23} = Q_{23} - L_{23} = 2\,000 \text{ J}$ .

În transformarea 3-1:  $\Delta U_{\text{ciclu}} = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{31} = 0$ , deci  $\Delta U_{31} = -\Delta U_{12} - \Delta U_{23} = -2\,500 \text{ J}$  și

$$L_{\text{ciclu}} = \frac{(p_2 - p_1)(V_3 - V_2)}{2} = \frac{p_0 \cdot 2V_0}{2} = p_0 V_0 = 200 \text{ J},$$

$$L_{\text{ciclu}} = L_{12} + L_{23} + L_{31},$$

$$L_{31} = L_{\text{ciclu}} - L_{12} - L_{23} = 200 - 800 = -600 \text{ J},$$

$$Q_{31} = U_{31} + L_{31} = -2\,500 \text{ J} - 600 \text{ J} = -3\,100 \text{ J}.$$

b)  $\eta = 1 - \frac{Q_{\text{ced}}}{Q_{\text{primit}}} = 1 - \frac{Q_{31}}{Q_{12} + Q_{23}} = 1 - \frac{3\,100}{500 + 2\,800} = 1 - \frac{31}{33} = 0,06$ ,  
 $\eta \simeq 6\%$ .

4°. a) Acest subiect a fost tratat la VII. 3°. b.

b) Acest subiect a fost tratat la I.4°.b.

c) Acest subiect a fost tratat la XVI.5°.b.

5°. a) Acest subiect a fost tratat la II.4°. a.

b) Izotermele lui Andrews, obținute în 1869 pentru bioxid de carbon, pun în evidență particularitățile transformării de fază gaz-lichid.

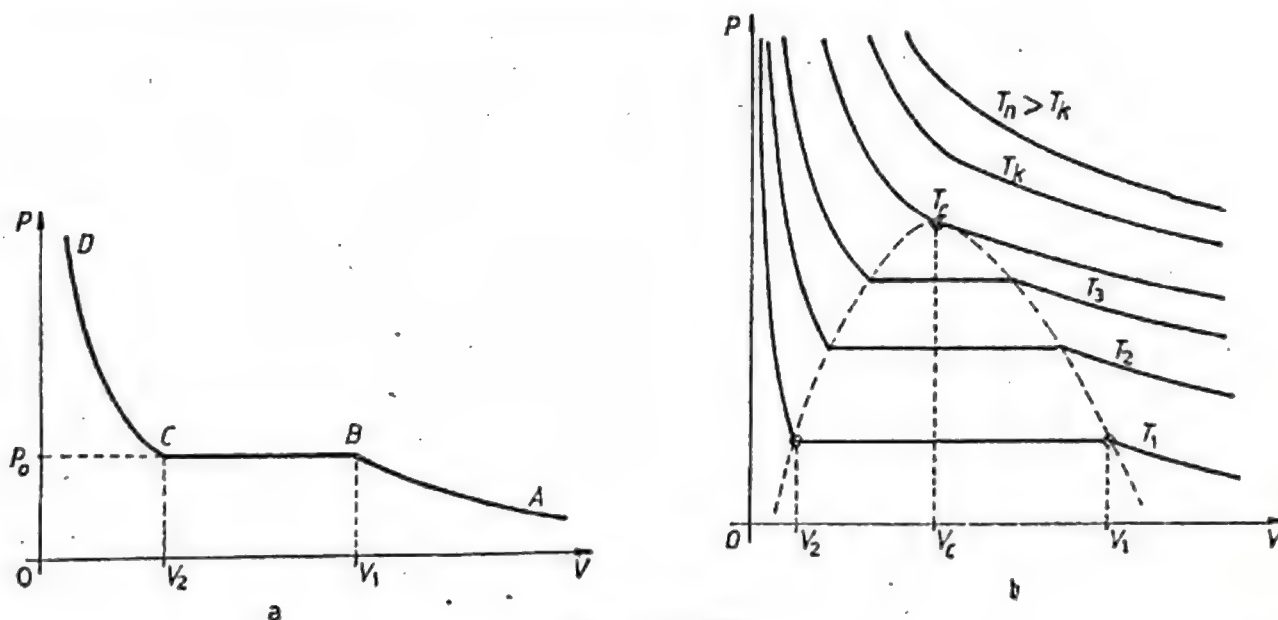


Fig. F.B.136

Din studiul comprimării gazului real, aflat într-un corp de pompă prevăzut cu un manometru, rezultă două forme distincte de izotermă:

— la temperaturi relativ ridicate și presiuni relativ joase se obțin comportările cunoscute ale gazului perfect descrise de ecuația  $pV = \text{const}$  (porțiunea AB în figura F.B.136, a);

— la temperaturi obișnuite, prin comprimare se obțin paliere de forma  $BC$ , urmate de regiuni unde sistemul este practic incompresibil (porțiunea  $CD$  a curbei).

Existența polimerului poate fi explicată prin lichefierea treptată a gazului în zona de presiune constantă, fenomen observabil experimental. Zona de incompresibilitate,  $CD$ , corespunde unui sistem total lichefiat.

Descrierea lichefierii este posibilă cu ajutorul modelului gazului real care ține seama de forțele de interacțiune moleculară.

În comprimarea izotermă a gazului real, energia internă se micșorează, ceea ce corespunde eliberării unei cantități de căldură:

$$Q = \Delta U + L,$$

lucrul mecanic fiind datorat forțelor de interacțiune moleculară. Această căldură, neevidențiată prin variația temperaturii, se poate raporta la masa lichidului și se obține o constantă de material,

$$\lambda_l = \frac{Q}{m},$$

numită căldură latentă specifică de lichefiere (se măsoară în  $J/kg$ ).

Presiunea  $p_0$  pe grafic corespunde vaporilor saturați ai lichidului, palierul reprezentând de fapt o curbă de echilibru pentru care stările gazoasă și lichidă ale sistemului, numite în general faze, coexistă. Ca urmare, lichefierea ca și procesul invers, vaporizarea, reprezintă transformări de fază.

Din figura F.B. 136, b rezultă că prin creșterea temperaturii palierul se reduce treptat, ajungând pentru o anumită temperatură, numită temperatură critică, la un singur punct. Presiunea și volumul corespunzător temperaturii critice se numesc presiune critică, respectiv volum critic (parametri critici).

Pentru temperaturi mai mari decât cea critică, gazul nu se mai poate lichefia, indiferent de presiune. Parametrii critici depind de natura substanței.

Vaporii se numesc *saturați* numai dacă faza de vaporii se găsește în echilibru dinamic cu faza lichidă a sistemului.

c)  $\alpha$ ) Variația relativă a volumului unui gaz, aflat la presiune constantă este direct proporțională cu temperatura

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \alpha t,$$

unde  $V_0$  este volumul gazului la temperatura  $t_0 = 0^\circ C$ ,  $V$  este volumul gazului la temperatura  $t$ , iar coeficientul de proporționalitate  $\alpha$  se numește coeficient de dilatare izobară. Din măsurări rezultă  $\alpha = \frac{1}{273,15} \text{ } ^\circ C^{-1}$ , independent de natura gazului.

$\beta$ ) Volumul unui gaz, aflat la presiunea constantă, crește liniar cu temperatura:

$$V = V_0(1 + \alpha t).$$

c) În raport cu temperatura absolută se poate scrie:

$$V = V_0(1 + \alpha t) = V_0 \alpha T$$

și, întrucât  $\alpha = \frac{1}{T_0}$ , se obține

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0} \text{ sau } \frac{V}{T} = \text{const.}$$



XLIII. 1°. a) Expresia interfranjei este (fig. F.B.137)  $l = \frac{\lambda D}{a}$ ; rezultă  
 succesiv:  $\frac{i}{2} + ki = x$ ,  $\frac{i}{2} (2k+1) = x$ ,  $\frac{\lambda D}{2a} (2k+1) = x$ , deci  $\lambda = \frac{2ax}{D(2k+1)}$  (această

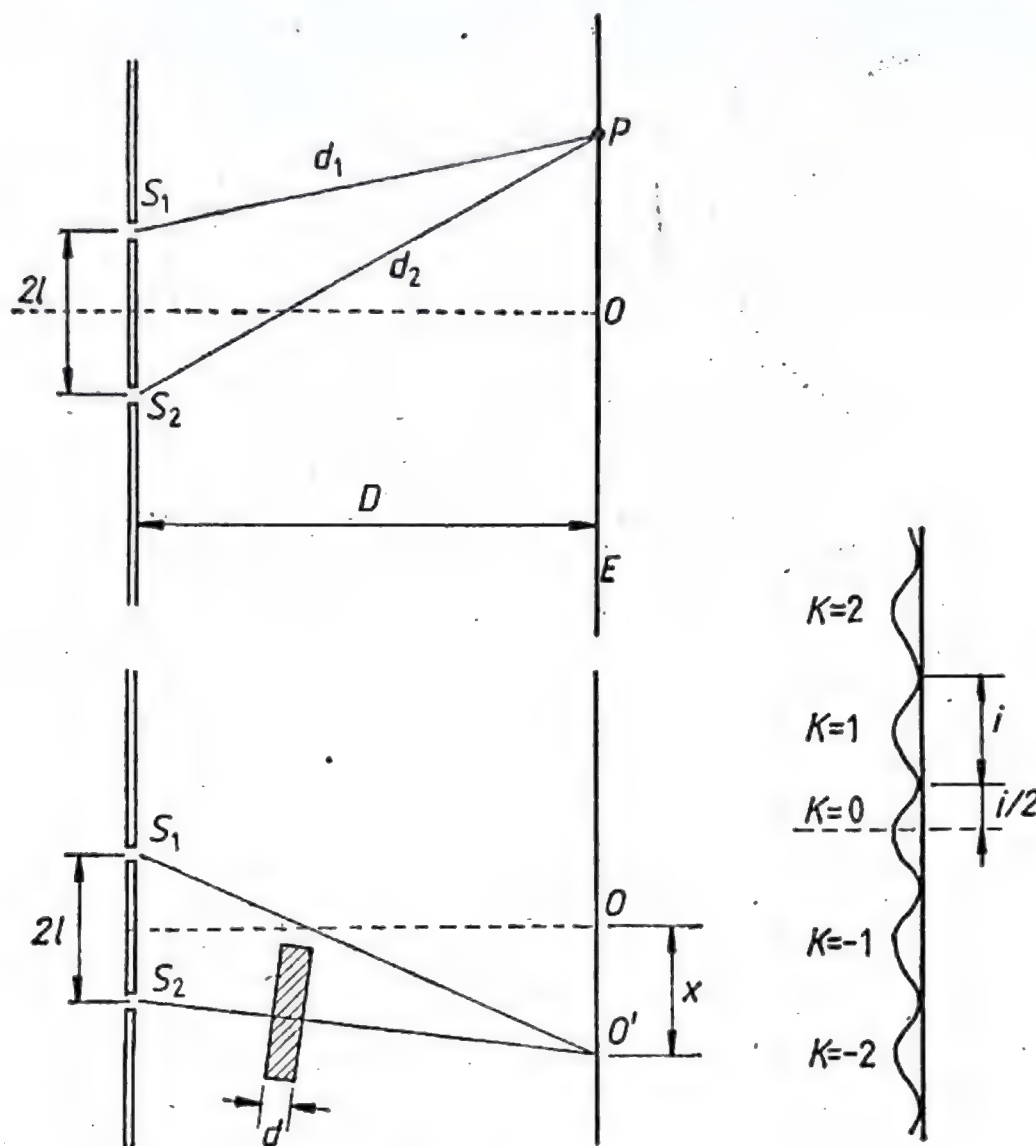


Fig. F.B.137

expresie rezultă și direct din egalitatea  $\delta = \frac{2xl}{D} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$ . Ținând seama că  
 $a = 2l = 0,5 \text{ mm}$ ,  $D = 1 \text{ m}$  și  $x = 3,5 \text{ cm}$ , se obține:

$$\lambda = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 3,5 \cdot 10^{-2}}{1(2k+1)} = \frac{3,5 \cdot 10^{-5}}{2k+1} \text{ m},$$

$$k = \frac{1}{2} \left( \frac{3,5 \cdot 10^{-5}}{\lambda} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{3,5 \cdot 10^{-5}}{0,6 \cdot 10^{-6}} - 1 \right) \simeq 29,$$

$$k_{\lambda 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{3,5 \cdot 10^{-5}}{0,4 \cdot 10^{-6}} - 1 \right) = 43,25, \quad k_{\lambda 2} = \frac{1}{2} \left( \frac{3,5 \cdot 10^{-5}}{0,7 \cdot 10^{-6}} - 1 \right) = 24,5,$$

$$\lambda = \frac{3,5 \cdot 10^{-5}}{2k+1} \text{ m, unde } 24 \leq k \leq 43.$$

b) Se determină parametrii  $a$  și  $b$ :  $n = a + \frac{b}{\lambda^2}$ ,  $n_1 = a + \frac{b}{\lambda_1^2}$ ,  $n_2 = a + \frac{b}{\lambda_2^2}$ ,  
 $n_1 - n_2 = b \left( \frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2} \right)$ ,  $n_1 - n_2 = \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} b$ ,  $b = \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2 (n_1 - n_2)}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}$ ,  $b = (n_1 - a) \lambda_1^2 =$   
 $= (n_2 - a) \lambda_2^2$ ,  $n_1 \lambda_1^2 - n_2 \lambda_2^2 = a(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \Rightarrow a = \frac{n_1 \lambda_1^2 - n_2 \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}$ , de unde, numeric,

$$b = \frac{(0,4)^2 \cdot (0,7)^2 (1,52 - 1,5) \cdot 10^{-24}}{[(0,7)^2 - (0,4)^2] \cdot 10^{-12}} = \frac{0,02 \cdot 7,84 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-12}}{0,33} = 47,51 \cdot 10^{-16},$$

$$a = \frac{1,52 \cdot (0,4)^2 \cdot 10^{-12} - (1,5) \cdot (0,7)^2 \cdot 10^{-12}}{[(0,7)^2 - (0,4)^2] \cdot 10^{-12}} = \frac{0,2432 - 0,735}{-0,33} = 1,490.$$

Presupunem că franja centrală se formează la distanța  $x$  în punctul  $O'$ :

$$\overline{S_1 O'} = \overline{S_2 O'}.$$

Dacă nu s-ar introduce lama în punctul  $O'$ , diferența de drum ar fi

$$\overline{S_1 O'} - \overline{S_2 O'} = \frac{ax}{D}.$$

Lama de sticlă introduce o diferență de drum suplimentară,  $\delta = (n - 1)d$ , care compensează diferența de drum de mai sus pentru a apărea franja centrală, deci  $(n - 1)d = \frac{ax}{D}$ .

Se obține:

$$n = 1,490 + \frac{47,51 \cdot 10^{-16}}{0,36 \cdot 10^{-12}} = 0,013197 + 1,490 = 1,5031,$$

$$x = \frac{(n - 1) d D}{a} = \frac{(1,5031 - 1) \cdot 13 \cdot 10^{-6} \cdot 1}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 13,08 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 13,08 \text{ mm}.$$

2°. a, b) Se scriu ecuațiile lui Kirchhoff pentru rețeaua dată, ținând seama de sensurile indicate în figura F.B.138 pentru curenți și surse:

$$I = I_1 + I_2, \quad I = I_3 + I_4, \quad I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0, \quad I_3 R_3 + I_2 R_2 = E_2,$$

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1, \quad R_4 I_4^2 = P_4.$$

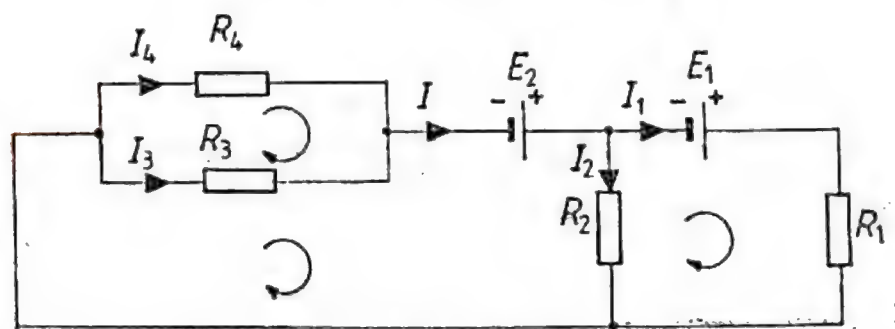


Fig. F.B.138

Din rezolvarea sistemului rezultă:

$$I_1 = \frac{8}{3} \text{ A}, \quad I_2 = \frac{1}{3} \text{ A}, \quad I_3 = 2 \text{ A}, \quad I_4 = 1 \text{ A}, \quad I = 3 \text{ A}, \quad E_2 = \frac{8}{3} \text{ V}.$$

$$c) P = E_1 I_1 = \frac{16}{3} \text{ W}.$$

$$3^\circ. {}^{60}_{27}\text{Co} \rightarrow {}^{60}_{28}\text{Ni} + h\nu_1 + h\nu_2 + \beta^-,$$

$$E_{\beta^-} = 0,1 \text{ MeV},$$

$$h\nu_1 = 1,17 \text{ MeV},$$

$$h\nu_2 = 1,33 \text{ MeV}.$$

Numărul de nuclee inițiale de  ${}^{60}_{27}\text{Co}$  este ( $N_A = 6,023 \cdot 10^{26}$  molecule/kmol):

$$N_0 = \frac{m \cdot N_A}{A} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 6,023 \cdot 10^{26}}{60} \simeq 2 \cdot 10^{22} \text{ nuclee}.$$

Numărul de dezintegrări în timpul  $t = 10,6 \text{ h}$  va fi

$$\Delta N = N_0 \lambda \Delta t = 2 \cdot 10^{22} \cdot \frac{0,693}{5,3 \cdot 365 \cdot 24} \cdot 10,6 = 3,16 \cdot 10^{18} \text{ nuclee}.$$

Prin dezintegrarea unui nucleu se dezvoltă o energie:

$$E = (0,1 + 1,17 + 1,33) \text{ MeV} = 2,6 \text{ MeV} = 2,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 4,16 \cdot 10^{-13} \text{ J},$$

$$Q = E \Delta N = 4,16 \cdot 10^{-13} \cdot 3,16 \cdot 10^{18} = 1,314 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

$$\text{b) } L_{\text{ex}} = 88 \text{ keV} = 0,088 \text{ MeV}.$$

Energia de repaus a unui electron este  $m_0 c^2 = 0,511 \text{ MeV}$ .

Energia cinetică a fotoelectronilor este:

$$T_1 = 1,17 \text{ MeV} - 0,088 \text{ MeV} = 1,082 \text{ MeV} > m_0 c^2$$

sau

$$T_2 = 1,33 \text{ MeV} - 0,088 \text{ MeV} = 1,242 \text{ MeV} > m_0 c^2,$$

deci fotoelectronii sînt relativişti.

$$T = (m - m_0)c^2 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right), \quad \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{T}{m_0 c^2}\right)^2}}.$$

$$\frac{v_1}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{T_1}{m_0 c^2}\right)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1,082}{0,511}\right)^2}} = 0,947,$$

$$v_1 = 0,947c = 2,841 \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

$$\frac{v_2}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{T_2}{m_0 c^2}\right)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1,242}{0,511}\right)^2}} = 0,956,$$

$$v_2 = 0,956c = 2,868 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

4°. a) Acest subiect a fost tratat la XXV. 4°. c.

b) Momentul magnetic orbital al electronului (particulă elektrizată, în mișcare pe o traiectorie închisă) se poate calcula cu relația:

$$\left| \vec{\mu} \right| = - \frac{e}{2m_e} \vec{L},$$

unde  $e$  este sarcina,  $m_e$  masa, iar  $\vec{L}$  momentul cinetic orbital al electronului. În continuare rezultă

$$\vec{\mu} = - \frac{e}{2m_e} \sqrt{l(l+1)} \hbar,$$

unde  $l$  este numărul cuantic orbital, iar  $\hbar$  constanta lui Planck.



Analog,

$$\mu_z = -\frac{e\hbar}{2m_e} m\hbar = -m\mu_{PB},$$

unde  $\mu_{PB} = \frac{e\hbar}{2m_e}$  este magnetonul Procopiu-Bohr,  $\mu_z$  proiecția după axa  $z$  a momentului magnetic, iar  $m$  numărul cuantic magnetic.

c) Acest subiect a fost tratat la VI.3° c și XXIII.4° c.

5°. a) Efectul Compton reprezintă o confirmare a teoriei corpusculare a luminii. Dacă un fascicul îngust de radiații X, cade pe un bloc de grafit care împrășteie radiațiile în toate direcțiile, se constată că pe lângă radiația cu lungimea de undă egală cu cea a radiațiilor incidente mai apare și o altă radiație, cu o lungime de undă mai mare, fenomen cunoscut sub numele de efect Compton.

Explicația acestui efect a fost dată de Compton pe baza interacțiunii dintre un foton și un electron al substanței difuzante.

Scriind legile de conservare pentru impuls și energie între foton și electron conform notațiilor din figura F.B.139, se obține:

$$h\nu_0 = h\nu + mc^2 - m_0c^2,$$

$$\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{p}_e,$$

$\vec{p}_0$  și  $\vec{p}$  fiind impulsurile fotonului înainte și după ciocnire, iar  $\vec{p}_e$  impulsul electronului de recul.

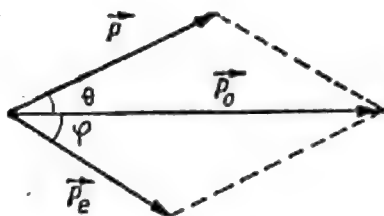


Fig. F.B.139

Intrucât  $p_0 = \frac{h\nu_0}{c}$ ,  $p = \frac{h\nu}{c}$ , iar  $p_e = mv$  și ținând seama de variația masei cu viteza

$$m = m_0 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

se obține în final, pentru variația  $\Delta\lambda$  a lungimii de undă, expresia

$$\Delta\lambda = 2\Lambda \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

unde, prin definiție,  $\Lambda = \frac{h}{m_0c}$  se numește lungimea de undă Compton a electronului.

Deci variația lungimii de undă  $\Delta\lambda$ , este independentă de natura substanței împrăștiătoare și se schimbă cu unghiul de împrăștiere. Pentru electron  $\Lambda = 2,426 \cdot 10^{-12}$  m. Prin urmare efectul Compton a contribuit la fundamentarea teoriei fotonice a luminii.

b) Autoinducția este fenomenul de inducție electromagnetică produs într-un circuit datorită variației intensității curentului din acel circuit.

Experimental, fenomenul de autoinducție se pune în evidență cu ajutorul unor montaje simple. Astfel la închiderea unui circuit format dintr-o bobină cu miez de fier legată în serie cu un ampermetru și o sursă de tensiune continuă se constată că acul ampermetrului deviază lent către valoarea finală a intensității. De asemenea, în cazul unui circuit realizat dintr-un bec legat în paralel cu o bobină și cu o sursă avînd tensiunea mai mică decît tensiunea nominală a becului se con-

stată că la întreruperea circuitului becul se aprinde pentru un timp scurt. Variația curentului la închiderea și deschiderea circuitelor din experiențele de mai sus determină variația fluxului magnetic prin bobină, flux produs chiar de curentul prin circuit. În consecință, apare o tensiune electromotoare indusă, numită de autoinducție, care se opune creșterii curentului în prima experiență sau se opune scăderii acestuia în a doua experiență. Intrucit depinde numai de variația fluxului magnetic inductor, tensiunea autoindusă poate depăși pe cea a sursei astfel explicându-se aprinderea becului în a doua experiență. Se numește autoinducție intrucit circuitul inductor este în același timp și circuit indus.

Sensul t.e.m. autoinduse este determinat de regula lui Lenz. Relația de proporționalitate dintre fluxul magnetic propriu prin suprafața unui circuit și intensitatea curentului  $I$  din acel circuit,

$$\Phi = LI,$$

definește o nouă mărime,  $L$ , numită inductanța circuitului:

$$L = \frac{\Phi}{I}.$$

Unitatea de inductanță în SI rezultă din relația

$$[L]_{SI} = \frac{[\Phi]_{SI}}{[I]_{SI}} = \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = \text{H}$$

și se numește henry.

Un henry este inductanța unei spire prin a cărei suprafață fluxul magnetic propriu este 1 Wb, când spira este parcursă de un curent de 1 A.

Intrucit variația fluxului magnetic propriu se poate scrie sub forma  $\Delta\Phi = L\Delta I$ , rezultă t.e.m. autoindusă

$$e = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = - L \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Prin urmare tensiunea autoindusă într-un circuit este direct proporțională cu viteza de variație a intensității curentului din acel circuit, factorul de proporționalitate fiind inductanța circuitului. Pentru o bobină se obține

$$e = - NS \frac{\mu N}{l} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} = - \frac{\mu N^2 S}{l} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t},$$

astfel încît

$$L = \frac{\mu N^2 S}{l}$$

unde  $L$  este inductanța bobinei,  $\mu$  — permeabilitatea magnetică a miezului său,  $N$  — numărul de spire,  $S$  — secțiunea iar  $l$  lungimea bobinei.

XLIV. 1°. a) Acest subiect a fost tratat la XV. 3°. b.

b) Legea lui Ohm pentru un circuit  $RLC$  paralel, în curent alternativ este

$$U = IZ$$

unde  $U$  și  $I$  sînt valorile efective ale tensiunii, respectiv curentului din circuit iar  $Z$  este impedanța circuitului. Impedanța circuitului are expresia:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2}},$$

unde  $R$  este rezistența,  $X_L$  — reactanța inductivă iar  $X_C$  reactanța capacitivă pentru circuitul considerat.



c) Intensitatea luminoasă a unei surse punctiforme este fluxul luminos emis în unitatea de unghi solid:  $I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega}$ . Unitatea de măsură a intensității luminoase, candela, este unitate fundamentală a SI: „Candela este intensitatea luminoasă în direcția normalei, a unei suprafețe cu aria  $1/600\,000$  metri pătrați a unui corp negru la temperatura de solidificare a platinei la presiunea de  $101\,325$  newtoni pe metru pătrat.

Lumenul este o unitate derivată:  $1\text{ lm} = 1\text{ cd} \cdot 1\text{ sr}$ .

Iluminarea se notează cu  $E$  și se definește ca fluxul luminos ce cade pe unitatea de arie. Dacă  $\Delta\Phi$  este fluxul ce cade pe suprafața cu aria  $\Delta A$  atunci:  $E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta A} = \frac{I}{r^2}$ . Unitatea de iluminare se numește lux (lx). Luxul reprezintă iluminarea unei suprafețe de  $1\text{ m}^2$  care primește un flux luminos de  $1\text{ lm}$  uniform repartizat pe această suprafață ( $1\text{ lx} = 1\text{ lm/m}^2$ ).

2°. a) Acest subiect a fost tratat la II.4°. b.

b) Acest subiect a fost tratat la II.4°. c.

c) Se utilizează relația dependenței masei de viteză:  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ , unde  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $m$  este masa de mișcare a corpului,  $m_0$  masa de repaus, iar  $v$  viteza de deplasare a acestuia.

Pentru  $v \ll c$ ,  $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 1 + \frac{v^2}{2c^2}$ , deci  $m \simeq m_0 + \frac{1}{2} \frac{m_0 v^2}{c^2}$  sau  $m - m_0 = \frac{W_c}{c^2}$ ; Energia de mișcare  $W_c$  apare în cazul relativist ca diferența a doi termeni  $W = mc^2$  (energia corpului în mișcare) și  $W_0 = m_0 c^2$  (energia corpului în repaus). Prin generalizare se poate afirma că variației masei  $\Delta m$  îi corespunde totdeauna o variație de energie:  $\Delta W = \Delta m \cdot c^2$ .

3°. Se prezintă mersul razelor prin dioptrul sferic (v. fig. F.B.140) unde  $V$  este vârful dioptrului,  $O$  — centrul său de curbură,  $VO$  axa principală a acestuia,  $P$  un punct luminos,  $P'$  imaginea lui  $P$  prin dioptru iar  $I$  un punct pe suprafața dioptrului. Se pot scrie relațiile:

$$\frac{\overline{PO}}{\overline{PI}} = \frac{\overline{P'O}}{\overline{P'I}} = \frac{\sin(\pi - i)}{\sin \alpha} \frac{\sin(\pi - r)}{\sin r} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}.$$

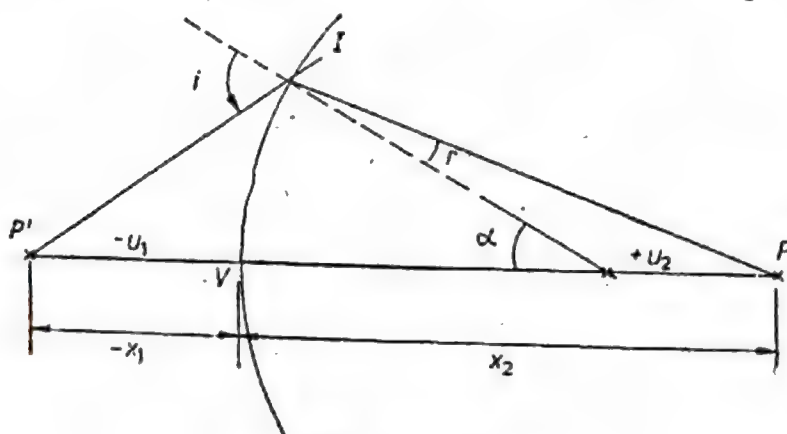


Fig. F.B.140

Toate segmentele din lungul axei principale vor avea originea în  $V$ , fiind pozitive cele orientate spre dreapta și negative celelalte; segmentele perpendiculare pe axa optică sunt pozitive dacă sunt dirijate în sus și negative celelalte.

Unghiurile formate de raze cu axa optică sunt pozitive dacă: rotirea razei pe axa optică se face în sensul direct trigonometric (ex.  $+u_2$ ) și negative celelalte (ex.  $-u_1$ ).



Aproximația paraxială (Gauss) implică egalitățile:

$$\overline{PI} = \overline{VP} = -x_1 \quad \text{și} \quad \overline{P'I} = \overline{VP'} = x_2, \quad \overline{PO} = -x_1 + R, \quad \overline{P'O} = x_2 - R.$$

Ca urmare relația stabilită mai sus devine:  $\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$ .

S-a obținut prima relație fundamentală a dioptrului sferic sau relația punctelor conjugate.

Se numește distanță focală a dioptrului, valoarea particulară a lui  $x_1$  respectiv  $x_2$ , când  $x_2$  sau  $x_1$  devin infinite. Focarele dioptrului reprezintă locul unde este situat un izvor punctiform pentru ca razele care pleacă de la el să părăsească dioptrul paralel cu axul optic.

Focarele se numesc reale dacă se obțin prin intersecția razelor reale și virtuale dacă se formează la prelungirea razelor. Conform definiției distanței focale, mărimea  $f_2 = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} x_2 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}$  se numește distanță focală imagine iar mărimea

$$f_1 = (\pm) \lim_{x_2 \rightarrow \infty} x_1 = \pm \frac{n_1 R}{n_2 - n_1} \text{ se numește distanță focală obiect.}$$

Ținând seama de expresiile distanțelor focale relația punctelor conjugate devine

$$\frac{f_2}{x_2} + \frac{f_1}{x_1} = 1.$$

Se definește mărirea transversală a dioptrului  $\beta$  prin raportul  $\beta = \frac{y_2}{y_1}$  unde  $y_2$  este mărimea imaginii iar  $y_1$  mărimea obiectului (v. figura F.B.141). Conform

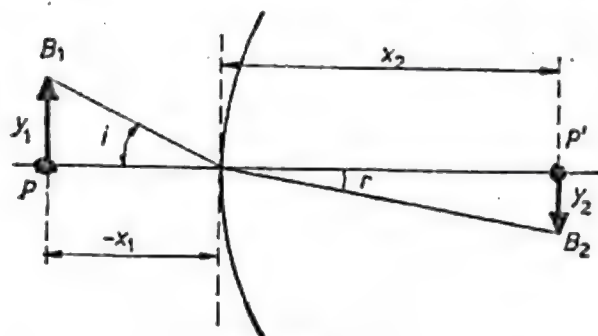


Fig. F.B.141

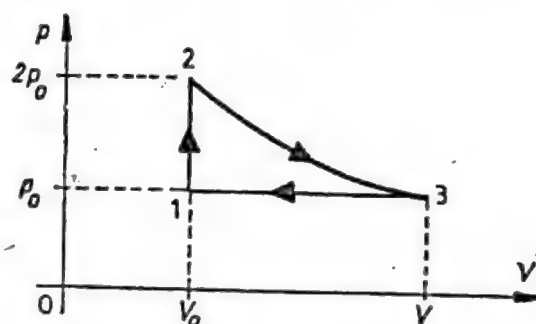


Fig. F.B.142

figurii  $y_2 = x_2 \tan r$  și  $y_1 = -x_1 \tan i$ . În aproximația gaussiană,  $\tan r \approx \sin r$  și  $\tan i \approx \sin i$  încît se obține a doua relație a dioptrului sferic:

$$\beta = \frac{-x_2 \sin r}{-x_1 \sin i} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{n_1}{n_2}$$

4°. a) Transformarea 1-2 este izocoră, transformarea 2-3 izotermă, iar transformarea 3-1 izobară (fig. F.B.142). Se calculează mai întîi volumul  $V_3$ :  $2p_0 V_0 = p_2 V_2 = p_3 V_3 = p_0 V_3 \Rightarrow V_3 = 2V_0$ .

Lucrul mecanic izobar are expresia  $L_{3-1} = p_0(V_1 - V_3) = -p_0 V_0$ ; rezultă  $L_{3-1} = -10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = -200$  J. Întrucît  $V_1 = V_2 \Rightarrow L_{1-2} = 0$  (lucrul mecanic izocor este nul).

Căldura schimbată în transformarea izotermă 2-3 are expresia:  $Q_{2-3} = L_{2-3} = \nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = p_2 V_2 \ln \frac{2V_0}{V_0} = 2p_0 V_0 \ln 2$ .

Din calcul rezultă  $Q_{2-3} = L_{2-3} = 2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,093 = 277,2 \text{ J}$ .  
Pentru căldura schimbată izobar se obține:

$$Q_{3-1} = \nu C_p (T_1 - T_3) \quad \text{și} \quad C_p = C_v + R = \frac{7R}{2},$$

$$Q_{3-1} = \frac{7}{2} \nu R (T_1 - T_3) = \frac{7}{2} p_0 (V_0 - 2V_0) = -\frac{7}{2} p_0 V_0 = -700 \text{ J}.$$

Pentru calculul căldurii schimbate în transformarea izocoră se folosește formula  $Q_{1-2} = \nu C_v (T_2 - T_1)$ , de unde

$$Q_{1-2} = \frac{5}{2} \nu R (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} V_0 (2p_0 - p_0) = 500 \text{ J}.$$

Întrucit  $T_2 = T_3$ , rezultă  $U_{2-3} = 0$ .

Variația energiei interne în transformarea izobară se calculează din principiul întâi al termodinamicii:

$$\Delta U_{3-1} = Q_{3-1} - L_{3-1} = -700 - (-200) = -500 \text{ J}.$$

Pentru transformarea izocoră se obține:

$$\Delta U_{1-2} = Q_{1-2} - L_{1-2} = 500 \text{ J}.$$

b) Lucrul mecanic pe întregul ciclu are expresia:

$$L = L_{1-2} + L_{2-3} + L_{3-1} = 77,2 \text{ J}.$$

Se calculează căldura primită pentru ciclul efectuat:

$$Q_p = Q_{1-2} + Q_{2-3} = 777,2 \text{ J},$$

din care rezultă randamentul:

$$\eta = \frac{L}{Q_p} = 0,0992.$$

c) Din expresia randamentului ciclului Carnot rezultă:

$$\eta_c = 1 - \frac{T_{rece}}{T_{cald}}, \quad \eta_c = 1 - \frac{\nu R T_1}{\nu R T_2} = 1 - \frac{p_0 V_0}{2p_0 V_0} = 0,5.$$

5°. a) Se utilizează formula capacității condensatorului plan  $C = \frac{\epsilon S}{d}$ ; rezultă pentru  $C_{st}$  și  $C_a$  expresiile:

$$C_{st} = \epsilon_0 \frac{\epsilon_{r2} S}{d/2} = 2\epsilon_0 \frac{\epsilon_{r2} S}{d}, \quad C_a = 2\epsilon_0 \frac{\epsilon_{r1} S}{d}.$$

Capacitatea serie echivalentă are expresia:

$$C_s = \frac{C_{st} \cdot C_a}{C_{st} + C_a} \quad (\text{v. figura F.B.143}).$$

Se obține

$$C_1 = C_s = \frac{4\epsilon_0^2 \frac{\epsilon_{r2}\epsilon_{r1} S^2}{d}}{2\epsilon_0 \frac{(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) S}{d}} = 2\epsilon_0 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{S}{d}.$$

Pentru calculul tensiunii  $U_1$  se utilizează formula

$$Q = C \times U, \text{ de unde rezultă } U_1 = \frac{Q}{C_s} = - \frac{Q}{\epsilon_0 \frac{S}{d}} \cdot \frac{1}{\frac{8}{5}} \cdot U = 12,5 \text{ kV.}$$

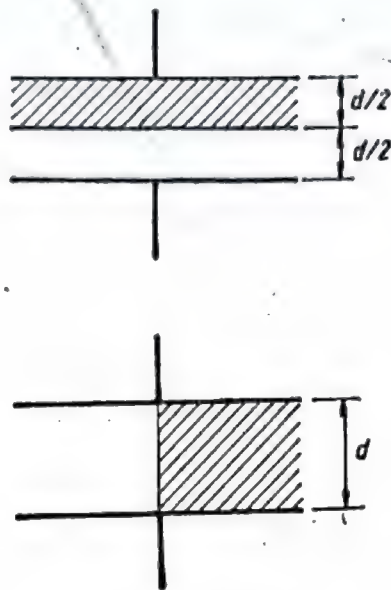


Fig. F.B.143

În mod analog se obține

$$C'_{st} = \epsilon_0 \frac{\epsilon_{r2} S/2}{d}, \quad C'_a = \epsilon_0 \frac{\epsilon_{r1} S/2}{d}.$$

Capacitatea echivalentă (paralel) are expresia:  $C_p = C'_{st} + C'_a$ . Se obține:

$$C_p = \frac{\epsilon_0 S}{2d} (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) = \frac{5}{2} \cdot \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

Tensiunea  $U_2$  se calculează astfel:

$$U_2 = \frac{Q}{C_p} = \frac{Q}{\frac{\epsilon_0 S}{d} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{2}{5} U = 8 \text{ kV.}$$

b) Se obține expresia și valoarea raportului  $C_2/C_1$ :

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{C_p}{C_s} = \frac{(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})^2}{4\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}} = \frac{25}{16}.$$

Capacitatea grupării derivație este mai mare decât cea a grupării serie de condensatoare; acest lucru rămâne valabil și în cazurile cînd  $C'_{st} = \frac{1}{4} C_{st}$  și  $C'_a = \frac{1}{4} C_a$ ,

deoarece:  $(C_{st} - C_a)^2 \geq 0$  implică  $(C_{st} + C_a) \geq 4C_{st}C_a$  și  $C_s = \frac{C_{st} + C_a}{C_{st} + C_a} \leq \frac{C_{st}}{4} + \frac{C_a}{4} = C'_{st} + C'_a = C_p$ .

c) Din egalitățile succesive  $Q = \frac{U_{st}}{1/C_{st}} = \frac{U_a}{1/C_a} = \frac{U_1}{1/C_s}$  rezultă tensiunea

$$U_{st} = \frac{C_s}{C_{st}} \cdot U_1 = \frac{1}{5} U_1 = 2,5 \text{ kV.}$$

Pentru calculul intensităților cîmpului electric se utilizează formula  $E = \frac{U}{d}$ .



$$\text{Rezultă } E_{st} = \frac{U_{st}}{d/2} = \frac{2,5 \text{ kV}}{10^{-2} \text{ m}} = 250 \frac{\text{kV}}{\text{m}}, \quad E_a = \frac{U - U_{st}}{d/2} = \frac{10 \text{ kV}}{10^{-2} \text{ m}} = 1000 \frac{\text{kV}}{\text{m}}.$$

respectiv

$$E'_{st} = E'_a = \frac{U_2}{d} = \frac{8 \text{ kV}}{2 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 400 \frac{\text{kV}}{\text{m}}.$$

**XLV. 1°. a)** Expresia vitezei de evaporare pentru vaporizarea de suprafață este

$$v = K \frac{S(p_m - p_t)}{H},$$

unde  $K$  este o constantă care depinde de viteza aerului în contact cu lichidul,  $S$  suprafața liberă a lichidului,  $p_m$  presiunea maximă a vaporilor saturați la temperatura  $t$ ,  $p_t$  presiunea vaporilor (nesaturați  $p_t < p_m$ ) la temperatura  $t$ , iar  $H$  presiunea atmosferică deasupra lichidului,  $H > p_m$ .

b)  $m = KIt$  (sau  $m = KQ$ ) unde  $m$  este masa depusă la catod în intervalul de timp  $t$ ,  $I$  — curentul în circuit iar  $K$  echivalentul electrochimic;  $K = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n}$  unde  $F$  este numărul lui Faraday,  $A$  — masa atomică iar  $n$  — valența substanței.

c)  $\text{tg } i_B = \frac{n_2}{n_1}$  (sau  $\text{tg } i_B = n_{21}$ ), unde  $i_B$  este unghiul de incidență pentru care lumina reflectată este total polarizată,  $n_1$  indicele de refracție al mediului de incidență, iar  $n_2$  indicele de refracție al mediului pe suprafața căruia se produce reflexia.

**2°. a)** Se face diagrama motorului Otto (figura F.B.144) și se specifică natura proceselor: 1—2, 2—3, 3—4, 4—1.

$$\eta = 1 - \frac{Q_c}{Q_p} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}, \quad Q_1 = \nu C_V(T_3 - T_2), \quad |Q_2| = \nu C_V(T_4 - T_1), \quad T \cdot V^{\gamma-1} = \text{const.},$$

$$T_2 = T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = T_1 \epsilon^{\gamma-1}, \quad T_3 = T_4 \left( \frac{V_4}{V_3} \right)^{\gamma-1} = T_4 \epsilon^{\gamma-1},$$

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{\epsilon^{\gamma-1}}.$$

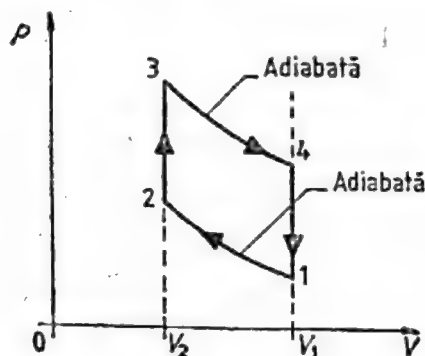


Fig. F.B.144

b) Se scriu expresiile modulelor și defazajelor față de intensitatea curentului electric ale fazorilor:

$$U_R = RI, \quad \varphi_R = 0,$$

$$U_L = \omega LI, \quad \varphi_L = \frac{\pi}{2},$$

$$U_C = \frac{I}{\omega C}, \quad \varphi_C = -\frac{\pi}{2}.$$

Se face diagrama fazorială în orice variantă pentru  $U_L \neq U_C$ . Din triunghiul tensiunilor rezultă:  $U = I \cdot Z$  formulă care exprimă legea lui Ohm generalizată.

Mărimea  $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$  se numește impedanța circuitului serie  $RLC$ .

c) Se trasează mersul razelor prin microscop conform figurii F.B.145. Conform definiției grosimentului, se poate scrie  $G = \frac{\lg \alpha_2}{\lg \alpha_1}$  unde  $\lg \alpha_2 \approx \frac{y_1'}{f_2}$  și  $\lg \alpha_1 = \frac{y_1}{\delta}$ ; Se obține  $G = \frac{y_1'}{f_2} \cdot \frac{\delta}{y_1} = P \cdot \delta \left( \approx \frac{P}{4} \right)$ . În expresia grosimentului  $P$  se numește putere optică a microscopului iar  $\delta$  este distanța vederii optime; pentru un ochi normal  $\delta \approx 0,25$  m.

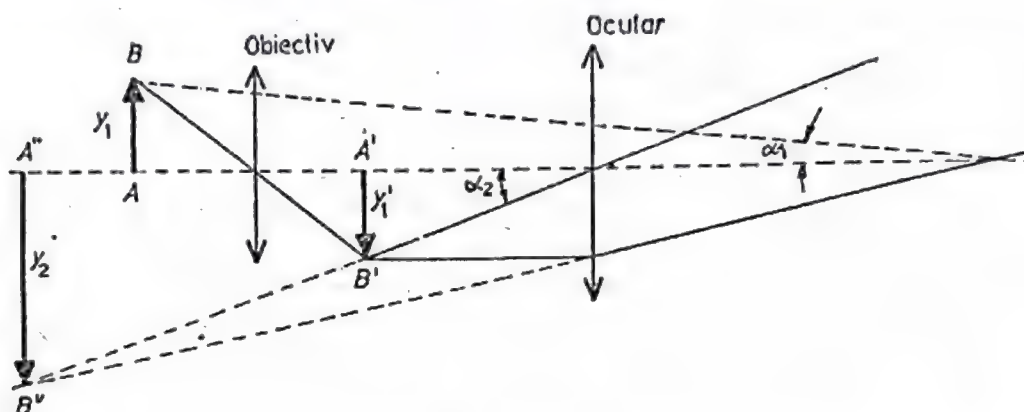


Fig. F.B.145

3°. — Primul principiu al termodinamicii se referă la modul în care variază energia internă a unui sistem ce interacționează mecanic sau termic cu mediul exterior:  $\Delta U = 0$  pentru orice proces intern și  $\Delta U \neq 0$  pentru schimburi de lucru mecanic și căldură.

Enunț: În orice transformare, variația  $\Delta U$  a energiei interne depinde doar de starea inițială și finală fiind independentă de stările intermediare prin care trece sistemul termodinamic:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q - L.$$

Prin urmare, căldura primită de la sistem este egală cu variația energiei interne a sistemului plus lucrul mecanic efectuat de către sistem. Din primul principiu al termodinamicii rezultă imposibilitatea realizării unui perpetuum mobile de speța I. Primul principiu al termodinamicii exprimă legea conservării și transformării energiei în procesele mecanice și termice. În cazul transformărilor adiabactice  $\Delta U = -L$ , în cazul transformărilor ciclice  $L = Q$ , etc.

— Transformarea în care sistemul schimbă căldură cu un singur termostat se numește transformare monotermă. Într-o transformare bitermă sistemul schimbă căldură cu două termostate.

Formularea lui Thomson a principiului al doilea al termodinamicii: „Într-o transformare ciclică monotermă sistemul nu poate ceda lucru mecanic în exterior. Dacă transformarea ciclică este și ireversibilă atunci sistemul primește lucru mecanic din exterior“.

Formularea lui Clausius a principiului al doilea al termodinamicii: „Nu este posibilă o transformare care să aibă ca rezultat trecerea de la sine a căldurii de la un corp cu o temperatură dată la un corp cu temperatura mai ridicată“.

Se constată că formularea lui Thomson a principiului al doilea al termodinamicii este o consecință a formulării lui Clausius. Formula randamentului mașinii termice care efectuează o transformare ciclică bitermă este

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} (< 1)$$

unde  $L$  este lucrul mecanic efectuat în cursul transformării ciclice,  $Q_1$  căldura primită de la sursa caldă iar  $Q_2$  căldura cedată sursei reci.

4°. Se vor face referiri la figura F.B.146

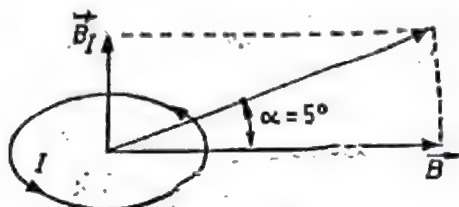


Fig. F.B.146

$$B_I = \mu \cdot \frac{I}{2r}; \quad B_I = \frac{\pi}{3} \cdot 10^{-6} T; \quad B_I = B \cdot \operatorname{tg} \alpha \simeq B \cdot \alpha;$$

$$B = \frac{B_I}{\pi/36} = 1,2 \cdot 10^{-4} T; \quad Q = I \cdot \Delta t; \quad I = \frac{e}{R}, \text{ deci } Q = \frac{e}{R} \cdot \Delta t;$$

$$|e| = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}, \text{ deci } Q = \frac{\Delta \Phi}{R}; \quad Q = \frac{B \cdot A}{R}; \quad R = \rho \cdot \frac{l}{S};$$

$$Q = \frac{B \cdot \pi r^2}{\rho \cdot \frac{2\pi r}{S}} = \frac{B \cdot r \cdot S}{2\rho}; \quad Q = 4,24 \cdot 10^{-4} C.$$

5°. Se vor face referiri la figura F.B.147.

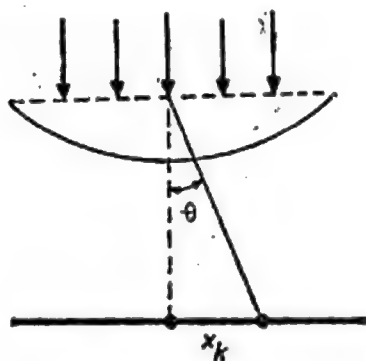


Fig. F.B.147

a)  $k\lambda_1 = (k+1)\lambda_2$ , deci:  $\frac{k+1}{k} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{3}{2}$ , de unde  $k = 2$ .

b)  $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$ ,  $-m = \beta = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f}{f+x_1}$ ,  $-10 = \frac{f}{f-55}$ , de unde  $f = 50$  cm;

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x_h}{f} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \sin \theta = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{1}{3},$$

$$l \sin \theta = k\lambda_1, \quad l = \frac{2 \cdot 0,6 \cdot 10^{-8}}{1/3} = 3,6 \mu\text{m}.$$



$$c) k_1 \lambda_1 = l \sin \theta \leq l, \quad k_{1, \max} = \left[ \frac{l}{\lambda_1} \right] = 6, \quad k_{2, \max} = \left[ \frac{l}{\lambda_2} \right] = 9.$$

$$d) \frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{2}{3}.$$

Coincid maximele de difracție de ordinele 2, 4 și 6 ale radiației monocromatice  $\lambda_1$  cu maximele de difracție de ordinele 3, 6 și 9 ale radiației  $\lambda_2$ ; ultima coincidență se produce în cazul limită  $\theta = 90^\circ$ .

**XLVI. 1°.** a) Pentru a calcula variația momentului cinetic în unitatea de timp, se pornește de la expresia momentului cinetic la timpul  $t$  și anume,  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  și se scrie expresia momentului cinetic după un timp  $\Delta t$ . La timpul  $t' = t + \Delta t$ , momentul cinetic este  $\vec{L}' = \vec{r}' \times \vec{p}'$ , în care vectorul de poziție  $\vec{r}' = \vec{r} + \Delta \vec{r}$ , viteza  $\vec{v}' = \vec{v} + \Delta \vec{v}$ , iar impulsul  $\vec{p}' = m\vec{v}' = \vec{p} + \Delta \vec{p} = m\vec{v} + m\Delta \vec{v}$ . Expresia momentului cinetic devine  $\vec{L}' = \vec{r}' \times \vec{p}' = (\vec{r} + \Delta \vec{r}) \times (\vec{p} + \Delta \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{p} + \vec{r} \times \Delta \vec{p} + \Delta \vec{r} \times \vec{p} + \Delta \vec{r} \times \Delta \vec{p}$ . Se poate scrie acum variația momentului cinetic în intervalul de timp  $\Delta t$ ,

$$\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \frac{\vec{L}' - \vec{L}}{\Delta t} = \vec{r} \times \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \times m\vec{v} + \Delta \vec{r} \times \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}.$$

Pentru a calcula variația „instantanee” a momentului cinetic în unitatea de timp, se pune condiția ca  $\Delta t$  să tindă către zero. Cu această condiție  $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$  devine viteza

momentană  $\vec{v}$ ,  $\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$  devine forța  $\vec{F}$ , iar  $\Delta \vec{r}$  se anulează. Astfel, în expresia de mai

sus,  $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \times m\vec{v} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$  și  $\Delta \vec{r} \times \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = 0$ , iar variația momentului cinetic

în unitatea de timp devine  $\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$ , expresie ce reprezintă teorema momentului cinetic pentru punctul material, care se enunță astfel: momentul forței în raport cu un pol este egal cu variația momentului cinetic în unitatea de timp, în raport cu același pol.

b) Temperatura empirică este un parametru de stare, care, împreună cu parametrii de poziție, determină complet starea de echilibru termodinamic a sistemului.

c) Semiconductori de tipul  $n$ . Presupunem că într-un semiconductor există donori cu concentrația  $N_d$  și energia de ionizare  $E_d$ . Trecerea electronilor, datorită agitației termice, de pe nivelul donori în banda de conducție, se numește excitație (sau generare) termică extrinsecă a electronilor. Procesul invers, de trecere a electronilor din banda de conducție pe nivelul donori, se numește recombinare. La echilibru termic se va stabili o concentrație staționară a electronilor liberi proveniți de pe nivelele donoare, care se poate calcula cu relația

$$n = C_d e^{-\frac{E_d}{2kT}},$$

în care  $C_d$  este o constantă care depinde slab de temperatură și de concentrația  $N_d$  a donorilor,  $E_d$  este energia de ionizare a donorilor,  $k$  este constanta lui Boltzmann și  $T$ , temperatura absolută. Relația este valabilă pentru temperaturi  $T < T_e$ . La temperatura  $T_e$  practic toți donorii sînt ionizați; are loc fenomenul de epuizare.

Dacă temperatura crește în continuare, la o anumită temperatură  $T_i$ , încep să aibă loc procese de excitare termică directă a electronilor din banda de valență în banda de conducție. La temperaturi  $T$  cuprinse între  $T_e$  și  $T_i$  ( $T_e < T < T_i$ ), concentrația  $n$  a electronilor liberi din banda de conducție este practic egală cu concentrația donatorilor, deci  $n = N_d$ . La temperaturi  $T > T_i$ , concentrația totală a electronilor liberi din banda de conducție va fi  $n = N_d + n_i$ , în care  $n_i$  este concentrația intrinsecă a electronilor liberi, apărută prin generare termică din banda de valență în banda de conducție. La temperaturi  $T \gg T_i$ , este satisfăcută inegalitatea  $n_i > N_d$ , iar semiconductorul cu donori trece în regim de conducție intrinsecă. În figura F.B.148 se prezintă graficul variației cu temperatura a concentrației electronilor liberi din banda de conducție, pentru un semiconductor de tipul  $n$ .

Semiconductorii de tipul  $p$  se tratează analog.

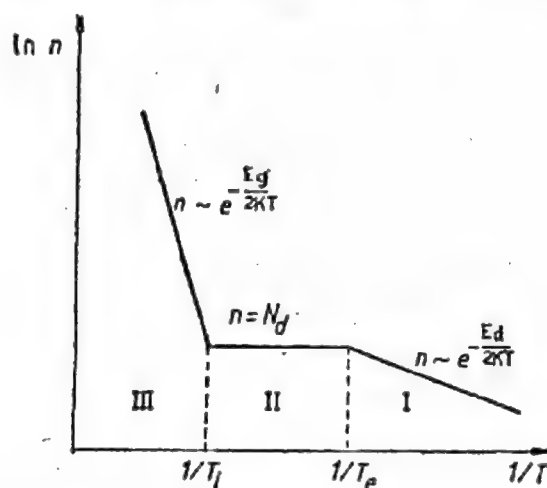


Fig. F.B.148

2°. a) Deformarea unui corp sub acțiunea unei forțe poate fi elastică, în cazurile în care corpul revine la forma și dimensiunile inițiale, dacă forța deformatoare își încetează acțiunea, sau deformare plastică, în cazurile în care corpul nu mai revine la forma și dimensiunile inițiale, dacă încetează acțiunea forței deformatoare. Legea lui Hooke se referă la situațiile în care forțele produc numai deformări elastice asupra corpurilor cu care interacționează.

Legea lui Hooke se deduce experimental. Fie un fir cilindric de metal sau de cauciuc, de lungime inițială  $l_0$  și arie a secțiunii transversale  $S_0$ , care este suspendat vertical la capătul superior. Dacă de capătul inferior se suspendă un disc cu greutatea  $F$ , se constată că lungimea firului devine  $l$ . Diferența  $l - l_0 = \Delta l$  se numește alungire absolută. Dacă se dublează greutatea inițială, se constată că și alungirea absolută se dublează. În general, dacă forța crește de un număr de ori, atunci și alungirea absolută crește de același număr de ori. Prin urmare, alungirea absolută este proporțională cu forța deformatoare,  $\Delta l \sim F$ .

Dacă experiența este efectuată cu un fir din același material și aceeași secțiune transversală, dar de lungime inițială dublă,  $2l_0$ , cînd de capătul inferior se suspendă același disc cu greutatea  $F$ , se constată că alungirea absolută este dublă față de cazul precedent. Prin urmare, alungirea absolută este proporțională cu lungimea inițială,  $\Delta l \sim l_0$ .

Dacă se înlocuiește firul cu un altul, din același material, cu aceeași lungime inițială  $l_0$ , dar cu aria secțiunii transversale egală cu  $2S_0$ , se constată că alungirea absolută devine  $\frac{\Delta l}{2}$ , deci scade de 2 ori. Prin urmare, alungirea absolută este

invers proporțională cu aria secțiunii transversale,  $\Delta l \sim \frac{1}{S_0}$ .



Se constată, de asemenea, că dacă lungimea inițială  $l_0$ , secțiunea  $S_0$  și forța  $F$  care acționează asupra firului rămân neschimbate, dar experiența se face cu fire din materiale diferite, se vor obține alungiri absolute diferite. Prin urmare, alungirea absolută depinde și de natura materialului supus solicitării.

Concentrînd aceste rezultate, se poate scrie legea lui Hooke:  $\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{Fl_0}{S_0}$  sau  $\frac{F}{S_0} = E \frac{\Delta l}{l_0}$ , unde  $E$  este un factor de proporționalitate, care este o constantă de material și se numește modul de elasticitate longitudinal sau modulul lui Young. Raportul  $\frac{F}{S_0}$  se numește tensiune sau efort unitar, iar raportul  $\frac{\Delta l}{l_0}$ , alungire relativă sau deformare specifică. Legea lui Hooke se enunță astfel: alungirea absolută a unui corp sub formă de fir, sub acțiunea unei forțe deformatoare, este proporțională cu forța  $F$  deformatoare și cu lungimea  $l_0$  a corpului nedeformat și invers proporțională cu aria  $S_0$  a secțiunii transversale a corpului nedeformat. Legea lui Hooke se mai poate enunța și astfel: pentru un material dat, sub formă de fir, alungirile relative  $\frac{\Delta l}{l_0}$  sînt proporționale cu eforturile unitare  $\frac{F}{S_0}$ .

b) Acest subiect a fost tratat la XLII.5°.b.

c) Valoarea efectivă a intensității curentului alternativ  $i$  este egală cu cea valoare a intensității unui curent continuu  $I$ , care, străbătînd același rezistor ca și curentul alternativ  $i$ , produce aceeași căldură  $Q$ , într-un timp egal cu perioada  $T$  a curentului alternativ.

Reprezentînd grafic pe  $i$ , respectiv  $Ri^2$  în funcție de timpul  $t$ , se obțin diagramele din figura F.B.149.

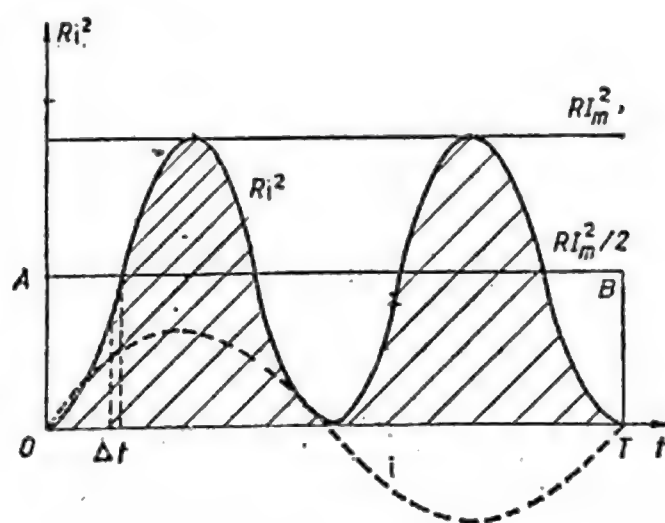


Fig. F.B.149

Cantitatea de căldură  $\Delta Q$  disipată la trecerea curentului alternativ de intensitate  $i = I_m \sin \omega t$  printr-un rezistor de rezistență  $R$  într-un interval de timp  $\Delta t$  foarte scurt ( $\Delta t \ll T$ ) va fi egală cu  $Ri^2 \Delta t$ . Căldura  $Q_a$ , disipată în același rezistor, la trecerea aceluiași curent alternativ, dar într-un timp egal cu perioada  $T$  a curentului alternativ, va fi egală cu aria dreptunghiului  $ABTO$  ( $Q_a = \frac{RI_m^2}{2} T$ ), întrucît această arie se poate obține umplînd spațiile albe dintre linia  $AB$  și axa  $Ot$  cu spațiile hașurate de deasupra liniei  $AB$ . Într-o reprezentare grafică  $I = f(t)$ , unde  $I$



este intensitatea curentului continuu, se obține aceeași arie  $ABTO$ , deci aceeași căldură se disipă, la trecerea unui curent continuu de intensitate  $I$  prin același rezistor, într-un timp egal cu perioada curentului alternativ. Această căldură este  $Q_c = RI^2T$ . Întrucât  $Q_a = Q_c$ , rezultă  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m$ .

3°. a) Mișcarea particulei reprezintă rezultanta a două mișcări: una rectilinie și uniformă, pe direcție orizontală, cu viteza  $v_{0x}$  și o mișcare rectilinie uniform-variată, pe direcție verticală, cu viteza inițială  $v_{0y}$  (Fig. F.B.150).

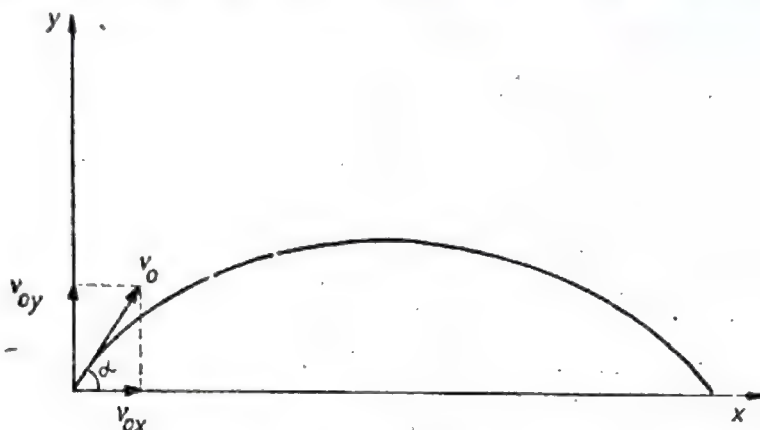


Fig. F.B.150

Pe direcția orizontală,  $Ox$ , ecuația mișcării este  $x = v_{0x}t = v_0t \cos \alpha$ , iar pe direcția verticală,  $Oy$ , ecuațiile vitezei, respectiv spațiului, sînt:

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt,$$

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Eliminînd timpul între expresiile spațiilor  $x$  și  $y$ , se obține ecuația traiectoriei particulei,  $y = x \tan \alpha - \frac{1}{2} x^2 \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$ , deci traiectoria este o parabolă. Înălțimea maximă la care ajunge particula este  $h_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ , din care, punînd condiția ca  $\alpha = 45^\circ$ , se deduce  $h_{\max} = 2,5$  m.

b) Se pune condiția ca punctul de coordonate  $x = x_1$  și  $y = 0$  să verifice ecuația traiectoriei și se obține  $\tan \alpha = \frac{1}{2} \frac{x_1 g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$  și deci  $\sin 2\alpha = \frac{x_1 g}{v_0^2} = \frac{x_1}{10}$ .

Discuție: din condiția  $|\sin 2\alpha| \leq 1$ , rezultă  $\left| \frac{x_1 g}{v_0^2} \right| \leq 1$  și deci  $|x_1| \leq 10$  m.

c) Scriînd că punctul  $(x_2, y_2)$  aparține traiectoriei particulei, se obține  $y_2 = x_2 \tan \alpha - \frac{1}{2} x_2^2 \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$ , din care, făcînd înlocuirea  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$ , se obține ecuația de gradul al 2-lea în  $\tan \alpha$ ,

$$\frac{x_2^2 g}{2v_0^2} \tan^2 \alpha - x_2 \tan \alpha + \left( \frac{x_2^2 g}{2v_0^2} + y_2 \right) = 0.$$

Punînd condiția ca discriminantul  $\Delta$  al acestei ecuații să fie mai mare sau egal cu zero, rezultă  $y_2 \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{x_2^2 g}{2v_0^2}$ . Pentru cazul în care  $x_2 = 4$  m și  $v_0 = 12$  m/s,

rezultă domeniul de valori pentru  $y_2$  și anume,  $y_2 \leq \frac{299}{45}$ . Deci  $y_{2\max} = \frac{299}{45} = 6,64$  m, iar  $y_{2\min} = 0$ , la căderea pe sol în punctul  $x_2$ .

4°. a) În transformarea izobară lucrul mecanic  $L = p\Delta V = p(V_2 - V_1)$ . Volumul  $V_1$  se determină din ecuația termică de stare,  $pV_1 = \nu RT_1$ , de unde  $V_1 = \frac{\nu}{p} \frac{RT_1}{p} = 1,33 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ . Deci lucrul mecanic  $L = pV_2 - \frac{\nu}{p} RT_1 = 134 \text{ J}$ .

Pentru determinarea coeficientului adiabatic  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ , se utilizează relația Robert-Mayer,  $C_p = C_v + R$  și se obține  $\gamma = 1 + \frac{R}{C_v} = \frac{5}{3}$ .

b) Căldura absorbită în timpul dilatării izobare este  $Q_p = \nu C_p \Delta T = \nu C_p (T_2 - T_1)$ . Aplicind legea transformării izobare,  $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ , rezultă  $T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = 481,2 \text{ K}$  și deci  $Q_p = \nu C_p T_1 \left( \frac{V_2}{V_1} - 1 \right) = 334,89 \text{ J}$ .

Variația energiei interne  $\Delta U = \nu C_v \Delta T = \frac{\nu}{2} \frac{3}{2} R(T_2 - T_1) = 200,89 \text{ J}$  sau  $\Delta U = Q_p - L = 200,89 \text{ J}$ .

c) În coordonate  $p, V$  diagrama destinderii gazului este prezentată în figura F.B.151,

$$p_1 = \alpha V_1 = 10^5 \text{ N/m}^2,$$

$$p_2 = \alpha V_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

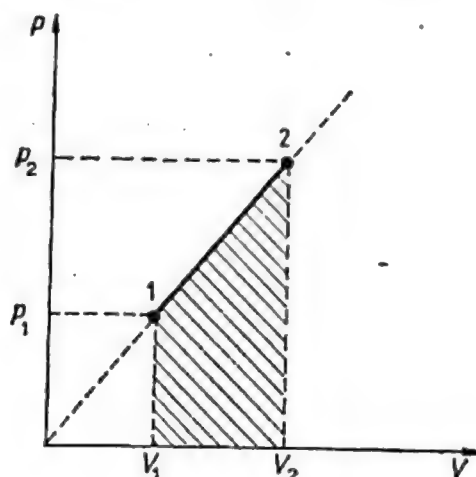


Fig. F.B.151

Lucrul mecanic efectuat de gaz va fi egal cu aria hașurată în figură,

$$L = \frac{(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)}{2} = 150 \text{ J}.$$

Variația energiei interne  $\Delta U = \nu C_v \Delta T = \nu \frac{3}{2} R(T_2 - T_1)$ .

Aplicind ecuația termică de stare pentru stările 1 și 2, rezultă  $T_1$  și  $T_2$ ,  $p_1 V_1 = \nu R T_1$ ,  $T_1 = \frac{p_1 V_1}{\nu R} = 120,3 \text{ K}$  și, analog,  $T_2 = \frac{p_2 V_2}{\nu R} = 481,3 \text{ K}$ . Prin urmare,  $\Delta U = 450 \text{ J}$ .

Capacitatea calorică este  $C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U + L}{T_2 - T_1} = \frac{600}{361} = 1,662 \text{ J/K}$ .

5°. a) Prin umplerea spațiului dintre armăturile condensatorului plan, încărcat, cu două straturi de dielectric (fig. F.B.152), se formează o baterie de două condensatoare  $C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S}{d_1}$  și  $C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} S}{d_2}$ , legate în serie, a cărei capacitate echivalentă este  $C$ . Deci  $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ , de unde rezultă că  $d_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S}{C} - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} d_1 = 3,8 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,38 \text{ cm}$ .

Diferența de potențial dintre armături este  $U = \frac{Q}{C} = 10^3 \text{ V}$ .

$$b) U_{10} = \frac{Q}{C_1} = \frac{10^{-7}}{191,16 \cdot 10^{-12}} = 523 \text{ V},$$

$$U_{20} = -\frac{Q}{C_2} = -\frac{10^{-7}}{209 \cdot 10^{-12}} = -477 \text{ V},$$

$$U = U_{10} + U_{02} = 10^3 \text{ V}.$$

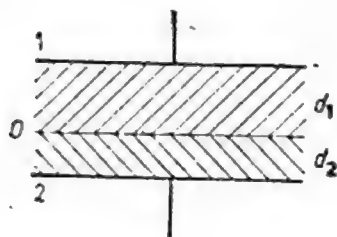


Fig. F.B.152

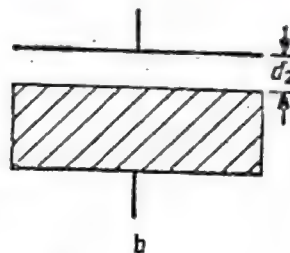
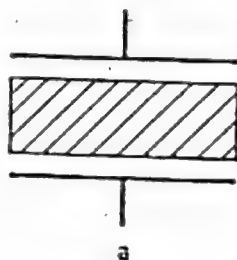


Fig. F.B.153

c) Indiferent de modul în care se așază placa metalică, fie paralel cu armăturile și simetric sau nu cu acestea, fie paralel cu armăturile, dar direct pe una dintre armături (fig. F.B.153 a și b), din punct de vedere electric, situația este aceeași. Deci condensatorul astfel realizat va avea capacitatea

$$C' = \frac{\epsilon_0 S}{d_2} = 41,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 41,9 \text{ pF}.$$

Energia cimpului electric dintre armături, când condensatorul are capacitatea  $C$ , va fi  $W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ J}$ , iar în cazul al doilea, când capacitatea condensatorului este  $C'$ , va fi  $W' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C'} = 12 \cdot 10^{-5} \text{ J}$ . Se constată că energia cimpului electric variază cu  $\Delta W = W' - W = 7 \cdot 10^{-5} \text{ J}$ .

XLVII. 1°. a) Acest subiect a fost tratat la II.5°.a.

b) Acest subiect a fost tratat la XXXVIII.4°.b.

c) Într-un corp solid ultimele două benzi energetice permise sînt banda de valență (B.V.) și banda de conducție (B.C.). În funcție de gradul de ocupare cu electroni a benzilor de energie, corpurile solide se clasifică în metale, izolatori și semiconductori. Metalele sînt corpurile solide la care banda de conducție este parțial suprapusă peste banda de valență, deci banda de conducție este parțial ocupată.

Izolatorii și semiconductorii sînt materiale la care banda de valență este complet ocupată, iar banda de conducție este complet liberă; între aceste benzi există o bandă interzisă, a cărei lărgime se notează cu  $E_g$ . În funcție de lărgimea benzii interzise, se pot diferenția materialele izolatoare de cele semiconductoare. Prin convenție se consideră că dacă  $E_g > 3 \text{ eV}$ , materialul este izolator, iar dacă  $E_g < 3 \text{ eV}$  atunci materialul este semiconductor.



2°. a) Acest subiect a fost tratat la IV.5°.a.

b) Acest subiect a fost tratat la II.4°.b.

c) Experimental s-a constatat că forța de interacțiune dintre două sarcini electrice punctuale este proporțională cu produsul sarcinilor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele,  $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ . Factorul de proporționalitate  $k$  depinde de natura mediului în care are loc interacțiunea și în SI are expresia  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$ , în care  $\epsilon$  este o constantă, numită permitivitate electrică, specifică fiecărui mediu. Permitivitatea electrică a vidului  $\epsilon_0$  are valoarea  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ . Raportul dintre permitivitatea  $\epsilon$  a unui mediu și permitivitatea  $\epsilon_0$  a vidului se notează cu  $\epsilon_r$  și este o constantă fără dimensiuni, care se numește permitivitate electrică relativă a mediului respectiv față de vid,  $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ . Permitivitatea electrică relativă a unui mediu față de vid arată de câte ori forța de interacțiune dintre două corpuri punctuale, încărcate electric este mai mare în vid decît în mediul respectiv,  $\epsilon_r = \frac{F_0}{F}$ .

Experimental s-a constatat că inducția cîmpului magnetic creat de curentul electric care străbate un conductor este proporțională cu intensitatea curentului electric și invers proporțională cu distanța de la conductor la punctul în care se calculează inducția,  $B = k \frac{I}{r}$ . Factorul de proporționalitate  $k$  depinde de natura

mediului în care se găsește conductorul și în SI are expresia:  $k = \frac{\mu}{2\pi}$ , în care  $\mu$  este o constantă, numită permeabilitate magnetică, specifică fiecărui mediu. Permeabilitatea magnetică a vidului  $\mu_0$  are valoarea  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ . Raportul dintre permeabilitatea magnetică  $\mu$  a unui mediu și permeabilitatea magnetică  $\mu_0$  a vidului se notează cu  $\mu_r$  și este o constantă fără dimensiuni, care se numește permeabilitate magnetică relativă a mediului față de vid,  $\mu_r = \mu/\mu_0$ .

3°. a) Forța  $N$  de apăsare a corpului pe scîndură este egală cu suma dintre greutatea corpului și forța de inerție care acționează asupra corpului,  $N = mg + ma$ , în care  $a = \omega^2 A \sin \omega t$ . Dar  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi \text{ rad/s}$ , rezultă  $N = 10 + 3,2 \sin 4\pi t$ .

Valoarea maximă a acestei forțe se obține în momentele în care forța de inerție care acționează asupra corpului este maximă, deci cînd accelerația este maximă, adică atunci cînd corpul în mișcarea oscilatorie se află la distanță maximă față de poziția de echilibru,  $F_{i \text{ max}} = ma_{\text{max}} = m\omega^2 A$ . Prin urmare,  $N_{\text{max}} = mg + m\omega^2 A = 13,2 \text{ N}$ .

b) Pentru ca corpul de masă  $m$  să nu se desprindă de pe scîndură, trebuie ca forța de inerție să fie egală cu greutatea corpului,  $m\omega^2 A' = mg$ , de unde rezultă  $A' = \frac{g}{\omega^2} = 6,25 \text{ cm}$ .

c) Pentru ca corpul de masă  $m$  să înceapă să alunece pe scîndură, trebuie ca forța de frecare să fie egală cu forța de inerție,  $\mu mg = ma''$ , de unde rezultă

$$\mu = \frac{a''}{g} = \frac{A'' \omega'^2}{g} = \frac{0,6 \left( \frac{2\pi}{5} \right)^2}{10} = 0,096.$$

4°. a) Se aplică ecuația calorimetrică,  $Q_{\text{ced}} = Q_{\text{prim}}$ . Pot ceda căldură unul, doi, trei sau patru dintre cele cinci corpuri și, respectiv, pot primi căldură patru, trei, două sau unul dintre corpuri. În orice situație, dacă se notează cu  $t$ , tempe-

ratura de echilibru, ecuația calorimetrică devine  $\sum_{i=1}^5 m_i c_i (t - t_i) = 0$ , de unde se

$$\text{deduce temperatura de echilibru } t = \frac{\sum_{i=1}^5 m_i c_i t_i}{\sum_{i=1}^5 m_i c_i}.$$

b) În cazul particular cele 5 corpuri au mase egale  $m_1 = m_2 = \dots = m_5 = m$  și fiind din același lichid, au și căldurile specifice egale  $c_1 = c_2 = \dots = c_5 = c$ . Expresia dedusă pentru temperatura de echilibru devine

$$t = \frac{\sum_{i=1}^5 m_i c_i t_i}{\sum_{i=1}^5 m_i c_i} = \frac{mc \sum_{i=1}^5 t_i}{5mc} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 t_i,$$

dar  $t_{i+1} = \eta t_i$ , deci  $t_2 = \eta t_1$ ,  $t_3 = \eta^2 t_1$ ,  $t_4 = \eta^3 t_1$  și  $t_5 = \eta^4 t_1$ , prin urmare  $t = \frac{t_1}{5} (1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \eta^4) = \frac{t_1}{5} \cdot \frac{\eta^5 - 1}{\eta - 1} = \frac{30}{5} \cdot \frac{1,2^5 - 1}{1,2 - 1} = 44,65^\circ\text{C}$ .

c) Variația totală a volumului sistemului este

$$\Delta V = \sum_{i=1}^5 \Delta V_i, \quad \Delta V_i = V_i - V_{0i} = V_{0i} \gamma_i (t - t_i) \quad \text{și} \quad V_{0i} = \frac{m_i}{\rho_{0i}}, \quad \text{prin urmare,}$$

$$\Delta V = \sum_{i=1}^5 \frac{m_i}{\rho_{0i}} \gamma_i (t - t_i).$$

$$\text{d) În condițiile de la punctul b, variația totală a volumului este } \Delta V = \sum_{i=1}^5 \frac{m_i}{\rho_{0i}} \gamma_i (t - t_i) = \frac{m_i}{\rho_{0i}} \gamma_i \sum_{i=1}^5 (t - t_i) = \frac{m_i}{\rho_{0i}} \gamma_i \left( (5t - t_1) \frac{\eta^5 - 1}{\eta - 1} \right) = 0.$$

$$5^\circ. \text{ a) } Q_1 = C_1 U_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} U_0 = 88,5 \cdot 10^{-9} \text{ C,}$$

$$Q_2 = C_2 U_0 = \frac{2\epsilon_0 S}{d} \cdot U_0 = 2 C_1 U_0 = 177 \cdot 10^{-9} \text{ C,}$$

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U_0^2 = 44,25 \cdot 10^{-6} \text{ J,}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 U_0^2 = 2 W_1 = 88,5 \cdot 10^{-6} \text{ J.}$$

b) Dacă distanța dintre armăturile condensatorului 2 devine egală cu  $d$ , atunci capacitatea lui,  $C'_2 = C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d} = 88,5 \cdot 10^{-12} \text{ F}$ . Capacitățile condensatorilor fiind egale, atunci sarcinile  $Q_1$  și  $Q_2$  cu care au fost încărcăți, se redistribuie uniform între cei doi condensatori, deci aceștia se încarcă cu sarcina  $Q'_1 = Q'_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{2} = 132,75 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ . Diferența de potențial pentru fiecare dintre cei doi condensatori este  $U'_1 = U'_2 = \frac{Q'_1}{C_1} = 1,5 \text{ V}$ . Energia înmagazinată de fiecare condensator va fi  $W'_1 = W'_2 = \frac{1}{2} C_1 U_1'^2 = 99,5 \cdot 10^{-6} \text{ J}$ .

**XLVIII. 1°.** a) Acest subiect a fost tratat la I.4°a.

b) Se știe că lichidele nu au formă proprie, iau întotdeauna forma vasului în care sînt puse, au însă volum propriu bine determinat, limitat de pereții vasului



și de o suprafață liberă. Prin urmare, la lichide fenomenul de dilatare va fi cel corespunzător modificării volumului lor. Densitatea unui lichid variază cu temperatura, datorită variației volumului în funcție de temperatură, după legea  $V = V_0(1 + \gamma t)$ , unde  $V$  este volumul la temperatura  $t$ ,  $V_0$  este volumul la temperatura  $t_0 = 0^\circ \text{C}$ , iar  $\gamma$  este coeficientul de dilatare în volum al lichidului. Densitatea fiind  $\rho = \frac{m}{V}$ , se deduce  $\rho = \frac{V_0 \rho_0}{V_0(1 + \gamma t)} = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t}$ , unde  $\rho_0$  este densitatea lichidului la temperatura  $t_0 = 0^\circ \text{C}$ .

c) Într-un cristal ideal cu proprietăți semiconductoare, mișcarea purtătorilor de sarcină se supune legilor mecanicii clasice. Sub acțiunea unui cimp electric exterior  $\vec{E}$ , purtătorii de sarcină au o mișcare uniform variată cu accelerațiile  $\vec{a}_n = -\frac{e}{m_n} \vec{E}$ ,  $\vec{a}_p = \frac{e}{m_p} \vec{E}$ , unde  $m_n$  și  $m_p$  sînt masele electronilor, respectiv golurilor. În cristalul real, în mișcarea lor purtătorii de sarcină suferă numeroase ciocniri, întrucît rețeaua cristalină nu este perfect periodică, datorită vibrațiilor termice ale ionilor situați în nodurile rețelei cristaline, față de pozițiile lor de echilibru, datorită existenței în rețea a impurităților, a atomilor interstițiali, a unor defecte de structură.

Dacă se notează cu  $t_c$  timpul mediu dintre două ciocniri consecutive, atunci componenta vitezei medii căpătată de purtătorul mobil în direcția cimpului  $\vec{E}$ , numită viteză de drift sau viteză de antrenare, va fi  $\vec{v} = \frac{1}{2} \vec{a} t_c$ . Mișcarea de ansamblu a purtătorilor, care rămîne o mișcare de agitație termică, peste care se suprapune o componentă dirijată pe direcția cimpului, va fi caracterizată de o viteză medie proporțională cu intensitatea cimpului. Pentru cele două tipuri de purtători de sarcină aceste viteze medii vor fi

$$\vec{v}_n = -\frac{et_c}{2m_n} \vec{E} = -\mu_n \vec{E}; \quad \vec{v}_p = \frac{et_c}{2m_p} \vec{E} = \mu_p \vec{E},$$

unde cu  $\mu_n$  și  $\mu_p$  s-au notat mobilitatea electronilor, respectiv a golurilor, mărimi care depind de temperatură, de concentrația impurităților, de tipul de purtători de sarcină. Pentru un timp  $t_c$ , independent de  $\vec{E}$ , valorile mobilităților sînt constante.

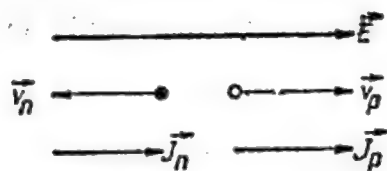


Fig. F.B.154

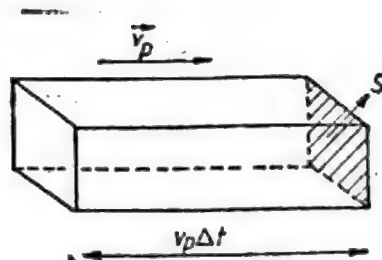


Fig. F.B.155

Deplasarea electronilor, respectiv a golurilor, cu vitezele medii de mai sus corespunde unor curenți electrici cu densitățile  $\vec{J}_n$  și  $\vec{J}_p$ , ambele orientate în sensul lui  $\vec{E}$  (fig. F.B.154). Dacă  $p$  este concentrația golurilor care se deplasează cu viteza  $v_p$ , atunci printr-o secțiune  $S$ , perpendiculară pe  $v_p$ , în intervalul de timp  $\Delta t$ , vor trece golurile din volumul  $v_p S \Delta t$  (fig. F.B.155), adică  $p v_p S \Delta t$  goluri, care au sar-



cina electrică  $epv_p S \Delta t$ . Densitatea de curent pentru goluri  $\vec{J}_p$ , egală cu sarcina electrică care străbate unitatea de arie în unitatea de timp, va fi

$$\vec{J}_p = \frac{epv_p S \Delta t}{S \Delta t} = ep\vec{v}_p.$$

Analog, densitatea de curent pentru electroni va fi  $\vec{J}_n = -en\vec{v}_n$ , iar densitatea de curent datorată ambelor tipuri de purtători,

$$\vec{J} = \vec{J}_n + \vec{J}_p = e(n\mu_n + p\mu_p) \vec{E}.$$

Mărimea  $\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p)$  se numește conductivitatea semiconductorului.

2°. a) Legea lui Pascal se enunță astfel: presiunea exercitată pe o suprafață oarecare a unui lichid aflat în repaus se transmite în toate direcțiile și cu aceeași intensitate în tot lichidul precum și la pereții vasului care-l conține.

Legea poate fi ilustrată și printr-o experiență simplă. Un vas prevăzut cu două deschideri tubulare (fig. F.B.156) se umple complet cu apă. Se astupă fiecare

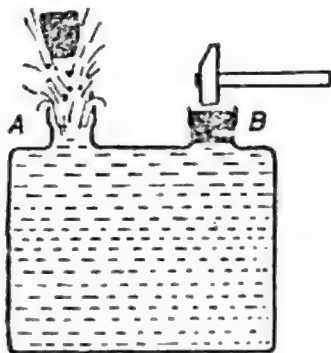


Fig. F.B.156

deschidere cu cite un dop de cauciuc, uns cu grăsime. Dacă se presează puternic pe unul dintre dopuri, celălalt este aruncat în aer.

Legea lui Pascal este o consecință a legilor staticii fluidelor și se determină din aceste legi. Dacă  $p_A$  și  $p_B$  sînt presiunile în punctele A și B dintr-un lichid în repaus (fig. F.B.157), conform principiului fundamental al hidrostaticii rezultă

$$p_B - p_A = \rho g h.$$

Intrucît mărimile  $\rho$ ,  $g$  și  $h$  sînt constante, rezultă că și diferența de presiune rămîne constantă, deci orice variație de presiune în A provoacă o variație egală de presiune în B, precum și în toate punctele lichidului.

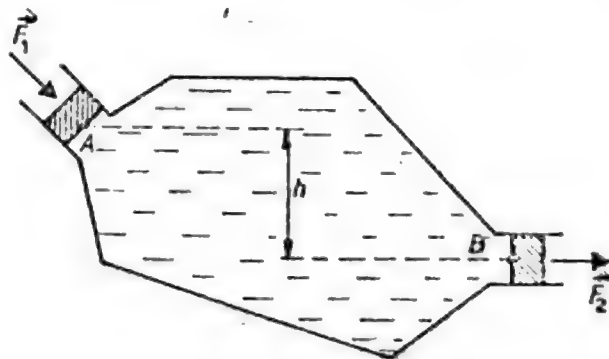


Fig. F.B.157

Legea lui Pascal are importante aplicații practice, dintre care vom prezenta presa hidraulică fig. F.B.158) a cărei funcționare se bazează pe această lege. Dacă pe pistonul  $P$ , de secțiune  $S$  se exercită o forță normală  $F$ , aceasta produce o creștere a presiunii egală cu  $p = \frac{F}{S}$ . Această presiune se transmite integral pe fața inferioară a pistonului  $P_1$ , de secțiune  $S_1$ , care este în acest mod acționat de o forță  $F_1$ , de mărime  $F_1 = pS_1$ . Rezultă deci că  $F_1 = F \frac{S_1}{S}$ , prin urmare intensitatea forței  $F_1$  este cu atât mai mare, cu cât raportul ariilor fețelor pistoanelor este mai mare. Sistemul de frinare al automobilelor este o aplicație a presei hidraulice.

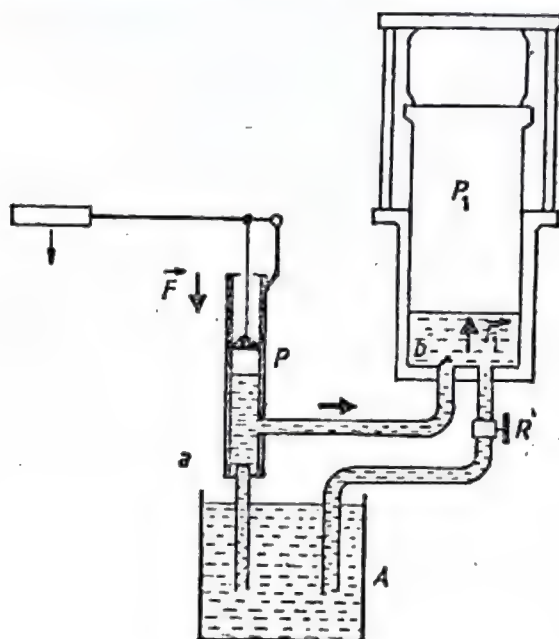


Fig. F.B.158

b) Coeficientul de tensiune superficială  $\sigma$  al unui lichid este numeric egal cu forța de tensiune superficială care acționează pe unitatea de lungime a conturului stratului superficial,

$$\sigma = \frac{F}{l}.$$

c) Un circuit  $RLC$  serie, de curent alternativ, se află la rezonanță, dacă reactanța lui totală este egală cu zero. Prin urmare,  $X_L = X_C$ , sau  $\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C}$ , de unde rezultă  $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  sau  $\nu_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  (formula lui Thomson). Întrucît la rezonanță impedanța circuitului  $Z_r = R$ , rezultă că intensitatea curentului este maximă  $I_r = \frac{U}{R}$ . Tensiunea la bornele bobinei la rezonanță este  $U_{Lr} = I_r X_L = \frac{U}{R} \omega_r L = \frac{U}{R} L \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot U = QU$ . S-a notat  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  factorul de calitate al circuitului sau factorul de supratensiune, care arată de cîte ori tensiunea la bornele bobinei la rezonanță este mai mare decît tensiunea generatorului. Tensiunea la bornele condensatorului la rezonanță va fi

$$U_C = I_r X_C = \frac{U}{R} \frac{1}{\omega_r C} = \frac{U}{R \frac{1}{\sqrt{LC}} C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U = QU.$$

Rezultă deci că la rezonanță tensiunea la bornele condensatorului este egală în mărime cu tensiunea la bornele bobinei și este de  $Q$  ori mai mare decât tensiunea generatorului. Mărimea  $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$  se numește impedanța caracteristică a circuitului serie. Se constată că  $Q = \frac{1}{R} Z_0$ .

Diagrama fazorilor tensiunilor pentru circuitul  $RLC$  serie la rezonanță este prezentată în figura F.B.159. Se constată că tensiunea generatorului se regăsește în întregime la bornele rezistenței circuitului, de asemenea că unghiul de defazaj dintre tensiune și curent este  $\varphi = 0$ .

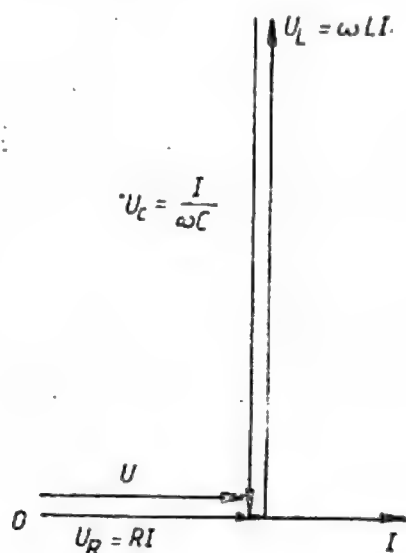


Fig. F.B.159

3°. a) Când corpul plutește, avînd scufundat în mercur un sfert din înălțime, greutatea lui este egală cu forța arhimedică,  $G = F_A$ , deci  $V_c \rho_c g = \frac{1}{4} V_c \rho_{Hg} g$ , de unde rezultă  $\rho_c = \frac{1}{4} \rho_{Hg}$ . Când în vas se toarnă lichid de densitate  $\rho_l$  pe de mercur și se realizează condițiile din problemă, în mercur rămîne scufundată o fracțiune  $\frac{V_c}{x}$ , unde  $V_c$  este volumul corpului. Punînd condiția ca greutatea corpului să fie egală cu forța arhimedică resultantă, se deduce

$$G = F_{A_{Hg}} + F_{A_l} \text{ deci } V_c \rho_c g = \frac{V_c}{x} \rho_{Hg} g + \left( V_c - \frac{V_c}{x} \right) \rho_l g,$$

de unde rezultă

$$x = \frac{\rho_{Hg} - \rho_l}{\rho_c - \rho_l} = \frac{\rho_{Hg} - \rho_l}{\frac{1}{4} \rho_{Hg} - \rho_l} = 5,$$

deci în mercur rămîne scufundată o fracțiune egală cu  $\frac{1}{5}$  din volumul său.

b) Considerînd curgerea staționară, se aplică ecuația de continuitate și legea lui Bernoulli,  $v_1 S = v_2 S$ ,

$$p_0 + \rho_l \frac{v_1^2}{2} + \rho_l g h = \rho_l \frac{v_2^2}{2} + p_0,$$



unde  $p_0$  este presiunea atmosferică și se determină

$$v_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\left(\frac{s}{s}\right)^2 - 1}} \text{ și } v_2 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{s}{s}\right)^2}}.$$

Pentru cazul particular  $h = \frac{h_0}{2}$ , rezultă  $v_1 \simeq \frac{1}{300}$  m/s și  $v_2 = 2$  m/s.

4°. a) Aplicînd legea transformării izoterme,  $p_A V_A = p_B V_B$ , rezultă  $V_B = \frac{V_A}{10} = 10^{-4}$  m<sup>3</sup>. Lucrul mecanic în transformarea izotermă este  $L_{AB} = 2,3 \nu R T_A \log \frac{V_B}{V_A}$ ; numărul  $\nu$  de moli se determină din ecuația termică de stare  $\nu = \frac{p_A V_A}{R T_A}$ , iar lucrul mecanic care rezultă este  $L_{AB} = 2,3 p_A V_A \log \frac{V_B}{V_A} = -460$  J.

$$Q_{AB} = L_{AB} = -460 \text{ J.}$$

b) În transformarea adiabatică  $p_B V_B^\gamma = p_G V_G^\gamma$ , de unde  $V_G = V_B \left(\frac{p_B}{p_G}\right)^{1/\gamma}$ .

Cum  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = \frac{7}{5}$  și  $p_G = p_A$ , rezultă  $V_G = 10^{-4} \cdot 10^{\frac{5}{7}} = 5,18 \cdot 10^{-4}$  m<sup>3</sup>. Aplicînd ecuația lui Poisson, scrisă sub forma  $T_B V_B^{\gamma-1} = T_G V_G^{\gamma-1}$  și ținînd seama că  $T_B = T_A$ , rezultă  $T_G = T_A \left(\frac{V_B}{V_G}\right)^{\gamma-1} = 155,4$  K. Temperatura  $T_G$  se poate determina și aplicînd legea transformării izobare,  $\frac{V_G}{T_G} = \frac{V_A}{T_A}$ , de unde  $T_G = T_A \frac{V_G}{V_A} = 155,4$  K. Prin urmare, variația de temperatură  $T_B - T_G = T_A - T_G = 144,6$  K.

Variația energiei interne este

$$\Delta U_{BC} = \nu C_v (T_G - T_A) = \frac{5}{2} p_A (V_G - V_A) = -241 \text{ J.}$$

c) Pentru ciclul închis ABCA,  $\Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA} = 0$ . Cum  $\Delta U_{AB} = 0$ , rezultă că  $\Delta U_{CA} = -\Delta U_{BC} = 241$  J.  $L_{CA} = p_A (V_A - V_G) = 96,4$  J și  $Q_{CA} = \Delta U_{CA} + L_{CA} = 337,4$  J.

5°. a) Cantitatea de căldură degajată în rezistența  $R_1$  este  $Q = \frac{U^2}{R_1} t_1$ , iar în rezistența  $R_2$ ,  $Q = \frac{U^2}{R_2} t_2$ , unde  $U$  este tensiunea efectivă a rețelei. Deci  $\frac{U^2}{R_1} t_1 = \frac{U^2}{R_2} t_2$ , de unde rezultă  $R_2 = 2 R_1$ . Cînd cele două rezistențe sînt legate în serie, atunci  $Q = \frac{U^2}{R_1 + R_2} t_s$ , căldură egală cu cea dezvoltată în timpul  $t_2$  în rezistența  $R_2$ , deci  $\frac{U^2}{R_1 + R_2} t_s = \frac{U^2}{R_2} t_2$ , de unde timpul  $t_s$  care rezultă este  $t_s = \frac{t_2 (R_1 + R_2)}{R_2} = t_2 \cdot \frac{3}{2} = 45$  min.

b) Analog se efectuează calculele pentru cazul în care cele două rezistențe sînt legate în paralel,

$$\frac{U^2}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} t_p = \frac{U^2}{R_2} t_2, \text{ de unde rezultă } t_p = 10 \text{ min.}$$

c) Cantitatea de căldură  $Q_1$  necesară firului pentru a ajunge la temperatura de topire este  $Q_1 = mc(t_1 - t) = Sl\alpha c(t_1 - t) = 1871,1$  J. Cantitatea de căldură  $Q_2$  disipată în fir prin efect Joule în timp de  $\tau = 3$  min este

$$Q_2 = 0,9 \frac{\rho_0^1}{2S} [(1 + \alpha t_1) + (1 + \alpha t_2)] I^2 \tau = 1137,2 \text{ J.}$$

Cum  $Q_2 < Q_1$ , rezultă că firul nu se topește.

XLIX. 1°. a) Acest subiect a fost tratat la II.4°.a.

b) Pentru ca vaporizarea la suprafața unui lichid să aibă loc, trebuie îndeplinite următoarele condiții:

— mediul ambiant să nu fie saturat cu vaporii lichidului, deci presiunea  $p_1$  a vaporilor în atmosfera ambiantă, la temperatura mediului, să fie mai mică decât presiunea  $p_m$  a vaporilor lichidului la aceea temperatură ( $p_1 < p_m$ );

— presiunea atmosferică  $H$  să fie mai mare decât presiunea  $p_m$  a vaporilor lichidului la temperatura lichidului ( $H > p_m$ ).

Expresia vitezei de evaporare a lichidului este  $v = K \frac{S(p_m - p_1)}{H}$ , unde  $K$  este o constantă care depinde de unitățile de măsură alese și de viteza aerului în contact cu lichidul,  $S$  este aria suprafeței libere a lichidului, iar  $H$  este presiunea atmosferică.

c) Caracteristica diodei cu vid este curba care reprezintă variația curentului anodic  $I_A$ , în funcție de tensiunea anodică  $U_A$ , la o anumită temperatură constantă a catodului.

Caracteristica teoretică a diodei cu vid se prezintă în figura F.B.160. Când tensiunea  $U_A$  dintre anod și catod este zero, dar catodul este încălzit, acesta emite electroni care formează în apropierea catodului un nor electronic numit sarcină

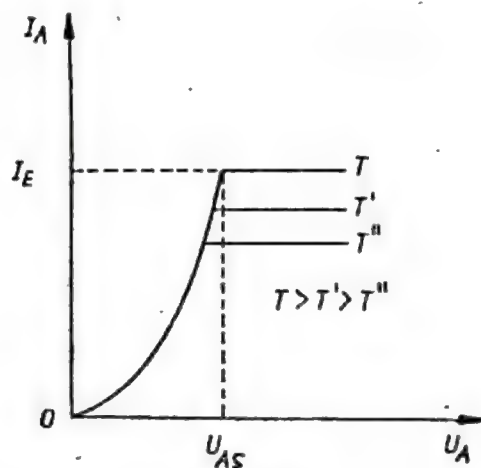


Fig. F.B.160

spațială. Norul electronic este în echilibru dinamic, adică numărul de electroni emiși de catod în unitatea de timp, care formează curentul de emisie de intensitate  $I_E$ , al catodului, este egal cu numărul de electroni care intră în catod în unitatea de timp (asupra electronilor emiși se exercită o atracție din partea catodului, care, prin emisie, devine pozitiv față de electroni).

Când tensiunea anodică este pozitivă (deci când dioda funcționează), dar este mai mică decât o valoare limită  $U_{AS}$ , numită tensiune de saturație ( $0 < U_A < U_{AS}$ ), o parte din electronii emiși de catod sînt captați de anod și



participă la conducție, formind curentul anodic  $I_A$ , care, în acest caz, este mai mic decât curentul de emisie al catodului ( $I_A < I_E$ ). Porțiunea corespunzătoare a caracteristicii se numește regiunea curenților limitați de sarcina spațială sau regiunea de sarcină spațială.

Cînd tensiunea anodică  $U_A \geq U_{AS}$ , toți electronii emiși de catod sînt captați de anod și deci intensitatea curentului anodic  $I_A$  devine egală cu intensitatea curentului de emisie  $I_E$  al catodului; creșterea tensiunii anodice peste valoarea  $U_{AS}$  nu mai modifică valoarea curentului anodic  $I_A = I_E$ . Porțiunea respectivă a caracteristicii se numește regiunea curenților limitați de emisie sau regiunea de saturație, în care  $I_A = I_{AS} = I_E$ . Cînd crește temperatura catodului, va crește și intensitatea  $I_{AS}$  a curentului de saturație.

Caracteristica reală a diodei cu vid este prezentată în figura F.B.161. Aceasta are, în general, trei regiuni distincte:

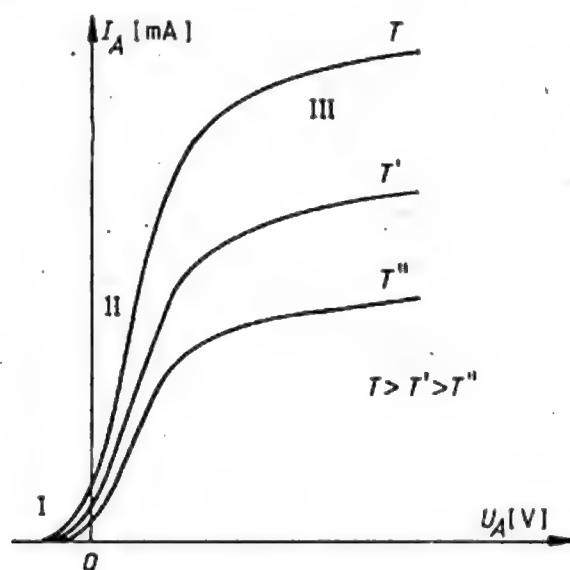


Fig. F.B.161

Regiunea I, care corespunde regimului de tensiuni anodice negative,  $U_A < 0$ . Caracteristica reală nu pornește din origine ( $U_A = 0$ ;  $I_A = 0$ ), ci de la valori negative ale tensiunii anodice. Curentul, a cărui intensitate în această regiune crește cu tensiunea anodică, se datorează unui număr foarte mic de electroni care au energii inițiale suficient de mari pentru a putea ajunge la anod. Practic, acest curent fiind de intensitate foarte mică poate fi neglijat, iar caracteristica reală poate fi aproximată ca pornind din origine.

Regiunea II, care corespunde regimului de sarcină spațială. În această regiune a curbei, care corespunde funcționării obișnuite a diodei, variația intensității curentului anodic  $I_A$  cu tensiunea anodică  $U_A$  este dată de formula lui Langmuir, numită și legea  $3/2$ ,  $I_A = K U_A^{3/2}$ , în care constanta  $K$ , numită perveanța diodei, depinde de geometria sistemului catod-anod.

Regiunea III, numită regiune de saturație, în care intensitatea curentului anodic  $I_A$  nu rămîne constantă, ci crește cu tensiunea  $U_A$ , deoarece, la suprafața catodului intensitatea cîmpului electric avînd valori mari, emisia de electroni devine mai intensă.

2°. a) Acest subiect a fost tratat la XXVII.5°.a.

b) Acest subiect a fost tratat la XXI.4°.b.

c) Acest subiect a fost tratat la X.3°.c.



3°. a) Din figura F.B.162,  $\lg \alpha_1 = \frac{F_{cf}}{G}$ , de unde  $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1 \cos \alpha_1}{g}} = 1.67 \text{ s}$ .

b) Fiind cunoscute unghiurile  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$ , se scrie  $\lg \alpha_1 = \frac{F_{cf}}{G} = \frac{v_1^2}{R_1 g}$  și  $\lg \alpha_2 = \frac{F_{cf}}{G} = \frac{v_2^2}{R_2 g}$  de unde rezultă  $v_1^2 = R_1 g \lg \alpha_1 = l_1 g \sin \alpha_1 \lg \alpha_1$  și  $v_2^2 = R_2 g \lg \alpha_2 = l_2 g \sin \alpha_2 \lg \alpha_2$ . Prin urmare,  $\frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{l_2 \sin \alpha_2 \lg \alpha_2}{l_1 \sin \alpha_1 \lg \alpha_1}$ . Aplicind legea conservării momentului cinetic, se obține  $mv_1 R_1 = mv_2 R_2$ , de unde  $\frac{v_2}{v_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1 \sin \alpha_1}{l_2 \sin \alpha_2}$ . Înlocuind în expresia de mai sus, se obține

$$\frac{l_1^2 \sin^2 \alpha_1}{l_2^2 \sin^2 \alpha_2} = \frac{l_2 \sin \alpha_2 \lg \alpha_2}{l_1 \sin \alpha_1 \lg \alpha_1}, \text{ de unde}$$

$$\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3 = \frac{\sin^3 \alpha_1}{\sin^3 \alpha_2} \cdot \frac{\lg \alpha_1}{\lg \alpha_2} \text{ și deci}$$

$$l_2 = l_1 \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \sqrt[3]{\frac{\lg \alpha_1}{\lg \alpha_2}} = 0,679 \text{ m.}$$

c) Exprimind lucrul mecanic ca variație a energiei totale, se obține

$$L = \Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} + mg(h_1 - h_2) = \frac{mg}{2} \left( l_2 \frac{\sin^2 \alpha_2}{\cos \alpha_2} - l_1 \frac{\sin^2 \alpha_1}{\cos \alpha_1} \right) + mg(l_1 \cos \alpha_1 - l_2 \cos \alpha_2); \quad L \simeq 0,523 \text{ J.}$$

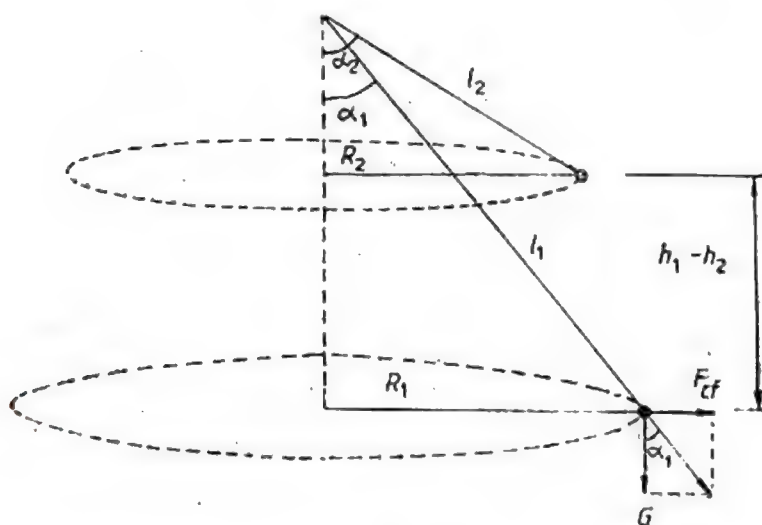


Fig. F.B.162

4°. a) Dacă se neglijează fenomenele de suprafață, atunci adâncimea  $h'$  la care se scufundă tubul se determină punind condiția  $G = F_A$ , de unde  $mg = Sh' \rho_0 g$ , deci  $h' = \frac{m}{S \rho_0}$ .

Dacă se ține seama de fenomenele de suprafață, atunci  $G = F_A + F_\sigma$ , deci  $mg = Sh' \rho_0 g + \pi d \sigma$ , de unde se deduce

$$h'' = \frac{mg - \pi d \sigma}{S \rho_0 g} = \frac{m}{S \rho_0} - \frac{\pi d \sigma}{S \rho_0 g} = h' - \frac{\pi d \sigma}{S \rho_0 g}.$$

Prin urmare,  $\Delta h = h' - h'' = \frac{\pi d \sigma}{S \rho_0 g} = \frac{4 \sigma}{d \rho_0 g} = 3,65 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .

b) Dacă sistemul este încălzit la  $t = 50^\circ \text{C}$ , atunci densitatea lichidului devine  $\rho = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t}$ , iar aria secțiunii tubului  $S = S_0(1 + 2\alpha t)$ , unde  $S_0$  este aria secțiunii la  $0^\circ \text{C}$ . Adâncimea  $h$  la care se scufundă densimetrul va fi dedusă din condiția  $mg = Sh\rho g$ , de unde  $h = \frac{m}{S_0 \rho_0} \cdot \frac{1 + \gamma t}{1 + 2\alpha t}$ . Cum adâncimea la care se scufundă densimetrul la temperatura  $t_0 = 0^\circ \text{C}$  este  $h' = \frac{m}{S_0 \rho_0}$ , rezultă  $\Delta h_1 = h - h' = \frac{m}{S_0 \rho_0} \frac{t(\gamma - 2\alpha)}{1 + 2\alpha t} = 4,97 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .

c) Perioada de oscilație  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ . Pentru a determina pe  $k$  se pornește de la constatarea că la adâncimea  $h - x$ , forța care acționează asupra densimetrului și-i va imprima mișcarea oscilatorie (este deci de forma  $F = -kx$ ) va fi  $F = F_A - G = S(h - x)\rho g - mg = S_0(1 + 2\alpha t) \left( \frac{m}{S_0 \rho_0} \frac{1 + \gamma t}{1 + 2\alpha t} - x \right) \frac{\rho_0}{1 + \gamma t} g - mg = -S_0 \rho_0 g \frac{1 + 2\alpha t}{1 + \gamma t} x$ .

Prin urmare,  $k = S_0 \rho_0 g \frac{1 + 2\alpha t}{1 + \gamma t}$  și deci

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(1 + \gamma t)}{S_0 \rho_0 g(1 + 2\alpha t)}} = 1,4 \text{ s}.$$

5°. a) Potențialul va fi egal cu suma algebrică a potențialelor create de fiecare sarcină în punctul respectiv,  $V = V_1 + V_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi\epsilon_0 l} = -18 \cdot 10^3 \text{ V}$ . Intensitatea cîmpului va fi egală cu suma geometrică (vectorială) a intensităților determinate de fiecare sarcină în punctul respectiv. Cum intensitățile au aceeași direcție și același sens, rezultă  $E = E_1 + E_2 = \frac{Q_1 + |Q_2|}{\pi\epsilon_0 l^2} = 54 \cdot 10^3 \text{ V/m}$ .

b) Se aplică teorema conservării energiei într-un cîmp coulombian,  $\frac{m_1 v_1^2}{2} = |Q_1(V_{\text{final}} - V_{\text{inițial}})|$ , de unde rezultă  $\frac{m_1 v_1^2}{2} + Q_1 \frac{|Q_2|}{4\pi\epsilon_0 \frac{l}{2}} = Q_1 \frac{|Q_2|}{4\pi\epsilon_0 l}$ ,

relație din care se determină  $v_1 = \sqrt{\frac{Q_1 |Q_2|}{2\pi\epsilon_0 m_1 l}} = \sqrt{3,6} = 1,89 \text{ m/s}$ . Analog se deduce că  $v_2 = \sqrt{2,16} \simeq 1,47 \text{ m/s}$ .

c) Întrucît sferile sînt egale, la fiecare atingere sarcina totală se distribuie în mod egal pe fiecare.

După primul contact al sferei 3 cu sfera 1

$$Q_1^{(1)} + Q_3^{(1)} = Q_1, \text{ deci } Q_1^{(1)} = Q_3^{(1)} = \frac{Q_1}{2} = 1 \mu\text{C}.$$

După contactul sferei 3, încărcată cu sarcina  $Q_3^{(1)}$ , cu sfera 2,

$$Q_3^{(1)} + Q_2 = Q_3^{(2)} + Q_2^{(1)}, \text{ deci } Q_3^{(2)} = Q_2^{(1)} = -1,5 \mu\text{C}.$$

În mod analog,

$$Q_3^{(2)} + Q_1^{(1)} = Q_3^{(3)} + Q_1^{(2)}, \text{ deci } Q_3^{(3)} = Q_1^{(2)} = -0,25 \text{ } \mu\text{C},$$

$$Q_3^{(3)} + Q_2^{(1)} = Q_3^{(4)} + Q_2^{(2)}, \text{ deci } Q_3^{(4)} = Q_2^{(2)} = -0,875 \text{ } \mu\text{C},$$

$$Q_3^{(4)} + Q_1^{(2)} = Q_3^{(5)} + Q_1^{(3)}, \text{ deci } Q_3^{(5)} = Q_1^{(3)} = -0,5625 \text{ } \mu\text{C},$$

$$Q_3^{(5)} + Q_2^{(2)} = Q_3^{(6)} + Q_2^{(3)}, \text{ deci } Q_3^{(6)} = Q_2^{(3)} = -0,7187 \text{ } \mu\text{C}.$$

Prin urmare,  $Q_1^{(3)} = -0,5625 \text{ } \mu\text{C}$ ,  $Q_2^{(3)} = -0,7187 \text{ } \mu\text{C}$  și  $Q_3^{(6)} = -0,7187 \text{ } \mu\text{C}$ .

Pentru  $n$  foarte mare, suma algebrică a sarcinilor sferelor 1 și 2 trebuie să se distribuie, în părți egale, pe fiecare sferă conductoare, deci

$$Q_1^{(n)} = Q_2^{(n)} = Q_3^{(n)} = \frac{Q_1 + Q_2}{3} = -0,666 \text{ } \mu\text{C}.$$

L.1° a) Acest subiect a fost tratat la II. 4° a.

b) Acest subiect a fost tratat la II. 5° b.

c) Parametrii fundamentali ai unei triode sînt panta, factorul de amplificare și rezistența internă. Panta  $S$  se definește ca raportul dintre creșterea  $\Delta I_A$  a intensității curentului anodic și creșterea  $\Delta U_G$  a tensiunii de grilă care o determină, cînd tensiunea anodică  $U_A = \text{const}$ ,

$$S = \left. \frac{\Delta I_A}{\Delta U_G} \right|_{U_A = \text{const}}.$$

Factorul de amplificare se definește ca raportul dintre variația tensiunii anodice  $\Delta U_A$  și variația tensiunii de grilă  $\Delta U_G$ , care produc aceeași variație  $\Delta I_A$  a intensității curentului anodic,

$$\mu = \left. \frac{\Delta U_A}{\Delta U_G} \right|_{\Delta I_A = \text{const}}.$$

Rezistența internă  $R_i$  este raportul dintre variația tensiunii anodice  $\Delta U_A$  și variația corespunzătoare a curentului anodic  $\Delta I_A$ , atunci cînd tensiunea de grilă  $U_G$  este constantă,

$$R_i = \left. \frac{\Delta U_A}{\Delta I_A} \right|_{U_G = \text{const}}.$$

Înmulțind expresia pantei cu cea a rezistenței interne, se obține relația

$$SR_i = \mu,$$

care se numește ecuație internă a triodei.

2°. a) În cazul undelor plane, suprafețele de egală fază sînt plane, adică sînt suprafețe care se închid la infinit. Ca o consecință a legii conservării energiei, undele plane au proprietatea că amplitudinile oscilațiilor tuturor punctelor materiale ale mediului sînt aceleași. Se consideră un mediu elastic în care punctele materiale dintr-un plan dat, numit plan de referință, oscilează toate în fază, iar oscilația oricărui punct material este armonică, deci elongația este de forma  $u = A \sin \omega t$ . Punctele materiale care se află într-un plan paralel cu planul de referință vor intra în oscilație după un timp  $\tau = \frac{x}{v_f}$ , unde  $x$  este distanța dintre cele două plane, iar  $v_f$  este viteza de fază a unde.

Punctele materiale ale acestui plan vor efectua oscilații identice cu punctele materiale din planul de referință, dar defazate față de acestea; la un moment  $t$  oscilațiile acestor puncte vor fi identice cu cele ale planului de referință, dar la un



moment anterior cu timpul  $\tau$ , deci la momentul  $t - \tau$ , prin urmare oscilațiile vor fi descrise de ecuația  $u = A \sin \omega(t - \tau)$ . Înlocuind pe  $\tau$  se obține  $u = A \sin \left( \omega t - \omega \frac{x}{v_f} \right)$ , de unde rezultă  $u = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ , care este ecuația unei plane și în care s-a notat cu  $\lambda = \frac{2\pi v_f}{\omega}$ , lungimea de undă a perturbației care se propagă în mediul elastic considerat.

b) Acest subiect a fost tratat la XXXVIII. 4°. b.

c) Câmpul electric este o formă de existență a materiei din jurul corpurilor electrizate, care se manifestă prin acțiuni asupra corpurilor cu sarcină electrică.

Câmpul magnetic este o formă a materiei, care se manifestă prin acțiunea asupra acului magnetic sau asupra conductorilor parcurși de curent electric.

3°. a) Sistemul lăsat liber (fig. F.B.163) rămâne în repaus dacă  $m_2 g - m_1 g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \leq 0$ , deci pentru  $m_2 \leq m_1(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$ , de unde rezultă  $m_2 \leq 1,173 \text{ kg}$ . Sistemul rămâne în repaus și dacă  $m_1 g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - m_2 g \leq 0$ , deci pentru  $m_2 \geq m_1(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ , de unde rezultă  $m_2 \geq 0,827 \text{ kg}$ .

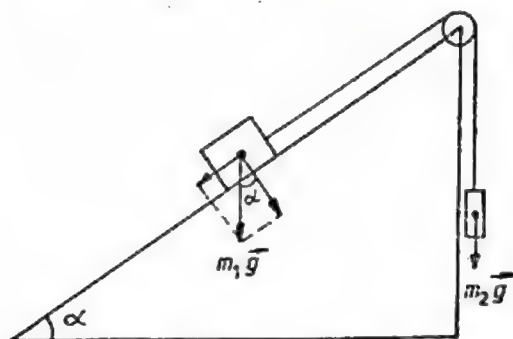


Fig. F.B.163

Prin urmare, sistemul lăsat liber rămâne în repaus pentru domeniul de valori ale masei  $m_2$ ,  $0,827 \text{ kg} \leq m_2 \leq 1,173 \text{ kg}$ .

b) Când  $m_2 = 2,5 \text{ kg}$  sistemul va avea o mișcare accelerată, cu accelerația  $a$ , astfel încât corpul de masă  $m_2$  să urce pe planul înclinat. Forța de inerție este forța care imprimă sistemului de masă  $m_1 + m_2$  accelerația  $a$ ,  $(m_1 + m_2)a = m_2 g - m_1 g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$ , de unde se deduce  $a = g \frac{m_2 - m_1(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2} = 2,95 \text{ m/s}^2$ , iar forța de inerție  $F_i = (m_1 + m_2)a = 13,27 \text{ N}$ .

c) Dacă  $m_2 = 0,5 \text{ kg}$ , sistemul va avea o mișcare accelerată, cu accelerația  $a_1$ , astfel încât corpul de masă  $m_2$  coboară pe planul înclinat, deci  $m_1 g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - m_2 g = (m_1 + m_2)a_1$ , de unde rezultă  $a_1 = g \frac{m_1(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - m_2}{m_1 + m_2} = 1,308 \text{ m/s}^2$ . Cum tensiunea în fir este  $T = m_2 g + m_2 a_1$ , rezultă  $T = 5,654 \text{ N}$ .

4°. a) Se aplică ecuația calorimetrică,  $Q_{\text{primit}} = Q_{\text{cedat}}$ , deci  $m_a c_a (\theta - t_a) = m_s c_s (t_s - \theta)$ , de unde se deduce  $t_s = \frac{m_a c_a (\theta - t_a) + m_s c_s \theta}{m_s c_s} = \frac{m_a c_a}{m_s c_s} (\theta - t_a) + \theta = 68 + 22 = 90^\circ \text{C}$ . Din  $\Delta V = V_0 \gamma t_s = V_0 3\alpha t_s$ , se obține  $\alpha = \frac{\Delta V}{3V_0 t_s} = 3,3 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ .

b) La temperatura  $t_0 = 0^\circ \text{C}$ , densitatea sferei este  $\rho_0 = \frac{m}{V_0} = \frac{20,5}{1,8 \cdot 10^{-3}} \approx 11,4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ . La temperatura  $\theta$ , densitatea sferei va fi  $\rho_1 = \frac{\rho_0}{1 + 3\alpha\theta} \approx$

$\simeq 11,375 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , iar la temperatura  $t_s$  va fi  $\rho_2 = \frac{\rho_0}{1 + 3\alpha t_s} \simeq 11,299 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

Rezultă că variația densității sferei în timpul răcirii va fi  $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2 = 76 \text{ kg/m}^3$ .

c) Forța arhimedică egală cu greutatea volumului de apă dislocuit de sferă va fi  $F_A = V_s \rho_a g$ , în care  $V_s = V_0(1 + 3\alpha t)$ , iar  $\rho_a = \frac{\rho_{0a}}{1 + \gamma_a t}$ , deci dependența de temperatură a forței arhimedice în jurul temperaturii de  $0^\circ\text{C}$  va fi  $F_A = V_0 g \rho_{0a} \frac{1 + 3\alpha t}{1 + \gamma_a t}$ .

5°. a) Puterea consumată în porțiunea de circuit exterioară sursei (fig. F.B.23) se poate exprima astfel:  $P = U_{AN} I = (E - r_i I) I$ , deci  $r_i I^2 - EI + P = 0$ . Înlocuind cu datele numerice și rezolvînd ecuația, se determină două valori pentru  $I$  și anume,  $I_1 = 11 \text{ A}$ ,  $I_2 = 44 \text{ A}$ . Cum  $I \leq \frac{E}{R + r_i}$ , rezultă că se ia ca valoare pentru  $I = 11 \text{ A}$ . Puterea  $P_h$  consumată în rezistențele hexagonului va fi  $P_h = P - RI^2 = 121 \text{ W}$ .

b)  $U_{CD} = E - I(R + r_i) = 11 \text{ V}$ .

Calculînd rezistența echivalentă a hexagonului, se obține  $R_h = \frac{5r}{11}$ . Dar puterea consumată în  $R_h$  am determinat-o ca fiind  $P_h = 121 \text{ W}$ ; se obține deci  $R_h = \frac{P_h}{I^2} = 1 \Omega$  și deci  $r = \frac{11 R_h}{5} = 2,2 \Omega$ .

c) Din figura F.B.23 și figura F.B.164 rezultă  $I_{ad} = \frac{U_{CD}}{r} = 5 \text{ A}$ . Cum  $I = I_{ad} + I_{cd} + I_{ed}$ , rezultă  $I_{cd} = I_{ed} = 3 \text{ A}$  și  $I_{ac} = I_{ae} = \frac{U_{ac}}{r} = \frac{4,4}{2,2} = 2 \text{ A}$ , iar  $I_{abc} = I_{afe} = \frac{U_{ac}}{2r} = \frac{4,4}{4,4} = 1 \text{ A}$ .

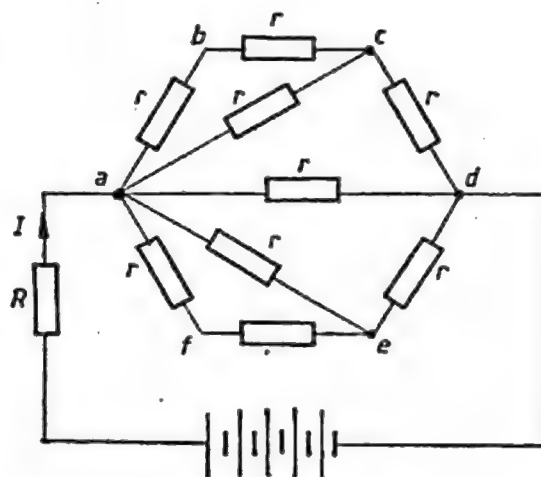


Fig. F.B.164

II. 1°. a) Acest subiect a fost tratat la XVI.5°.b.

b) Acest subiect a fost tratat la XXXIII. 5°.c.

c) Se știe că marea majoritate a lichidelor își măresc volumul o dată cu creșterea temperaturii. Anomalia dilatării termice a apei constă în faptul că, în intervalul de temperatură  $0^\circ\text{C} - 4^\circ\text{C}$ , apa își micșorează volumul o dată cu creșterea

temperaturii, avind densitatea maximă, în acest interval, la temperatura de 3,98 °C. Apa este un amestec de molecule de forma  $H_2O$ ;  $(H_2O)_2$ ;  $(H_2O)_3$  cu diferite volume specifice și care, prin asociere, formează molecule complexe. Întrucit concentrația diverselor grupe de molecule variază cu temperatura, se ajunge la anomalia constatată.

2°. a) Se pornește de la expresiile deviației unei particule cu sarcina  $q$ , care intră într-un cîmp electric uniform, respectiv într-un cîmp magnetic uniform, cu viteza inițială  $v_0$ , normală la liniile de cîmp, expresii deduse în XIV.4°.c și XI.3°.c:

$$Y_{(E)} = \frac{qUx}{2m_0v_0^2d} (x + 2D) \text{ și } Y_{(B)} = \frac{qBx}{2m_0v_0} (x + 2D).$$

Se constată că dacă s-ar cunoaște viteza  $v_0$ , s-ar putea deduce sarcina specifică  $\frac{q}{m_0}$  a particulei respective. Cum, în general, în tuburile de descărcări, fasciculele de particule încărcate nu au aceeași viteză, J.J. Thomson a utilizat cîmpurile  $E$  și  $B$ , paralele între ele și de același sens (fig. F.B.165). Dacă asupra particulei încărcate s-ar acționa doar cu cîmpul electric  $E$ , particula ar urma traiectoria  $OA$ , iar dacă s-ar acționa numai cu cîmpul magnetic de inducție  $B$ , particula ar urma

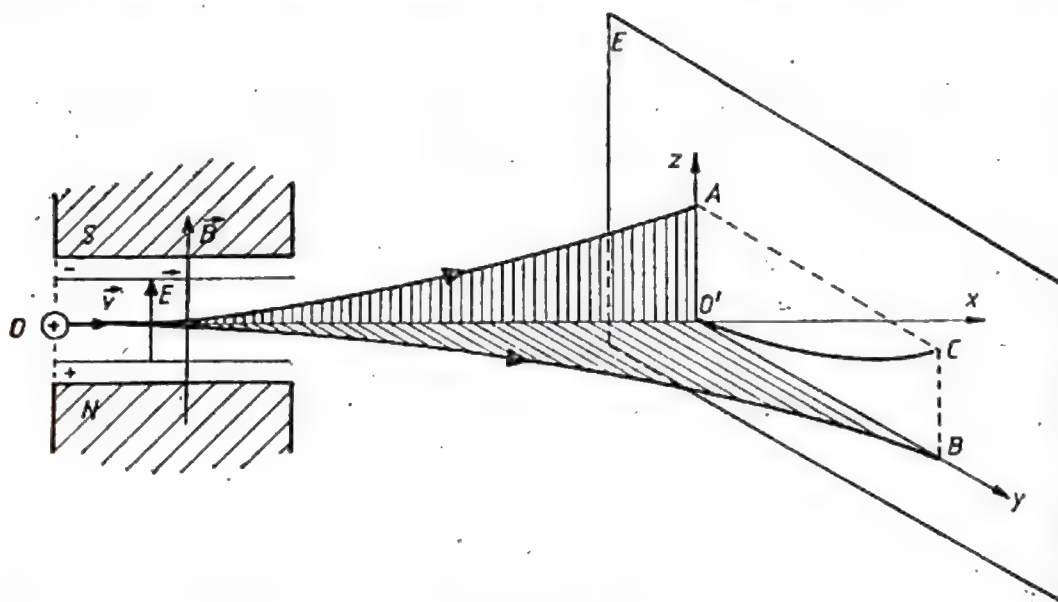


Fig. F.B.165

traiectoria  $OB$ . Acționind simultan cu cele două cîmpuri, particula atinge ecranul  $E$  în punctul  $C$ . În acest caz, în planul  $O'xyz$  deviația în cîmp electric devine  $Z$ , iar în cîmp magnetic  $Y$ . Cu această precizare, eliminind  $v_0$  din relațiile de mai sus, se obține

$$Z = \frac{2U}{B^2xd \frac{q}{m_0} (x + 2D)} Y^2,$$

relație care reprezintă ecuația unei parabole cu virful în  $O'$ , punctul de impact al particulei încărcate cu ecranul, în absența cîmpurilor  $E$  și  $B$ .

Din această relație rezultă sarcina specifică a particulei,

$$\frac{q}{m_0} = \frac{2U}{B^2xd (x + 2D)} \cdot \frac{Y^2}{Z}.$$



unde  $Y$  și  $Z$  sînt coordonatele unui punct de pe arc de parabolă  $O'C$ . Dacă particula încărcată este un electron, se deduce sarcina specifică a electronului,  $\frac{e}{m_0} = -1,76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$ .

b)  $U = V_M - V_N = \frac{L}{q}$ , unde  $V_M - V_N$  este diferența de potențial dintre două puncte  $M$  și  $N$  sau tensiunea electrică dintre aceste puncte,  $L$  este lucrul mecanic efectuat de cîmp la deplasarea unui corp încărcat electric între cele două puncte, iar  $q$  este sarcina corpului.

c) Acest subiect a fost tratat la VII. 4<sup>o</sup>.c.

3<sup>o</sup>. a) Temperatura  $T_2$  în starea finală se determină din expresia lucrului mecanic în transformarea izobară,  $L = \nu R(T_2 - T_1)$ , de unde  $T_2 = T_1 + \frac{L}{\nu R} = 320 + 337 = 657 \text{ K}$ . Într-o transformare izobară lucrul mecanic poate fi exprimat și prin  $L = p(V_2 - V_1)$ , de unde se poate deduce presiunea  $p = \frac{L}{V_2 - V_1}$ . Din expresia numărului de moli  $\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{V_1 \rho}{\mu}$ , se obține  $V_1 = \frac{\nu \mu}{\rho} = 26,23 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ . Aplicînd legea transformării izobare,  $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ , se obține  $V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = 26,23 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{657}{320} = 58,85 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ . Prin urmare, presiunea  $p = \frac{L}{V_2 - V_1} = \frac{2 \cdot 800}{27,62 \cdot 10^{-3}} \approx 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ .

b) Variația  $\Delta U$  a energiei interne în transformarea izobară este  $\Delta U = \nu C_v(T_2 - T_1)$ . Cunoscînd coeficientul adiabatic  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  și relația Robert-Mayer  $C_p = C_v + R$ , rezultă  $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$ . Prin urmare,  $\Delta U = \nu \frac{R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) = \frac{L}{\gamma - 1} = 7 \cdot 10^3 \text{ J}$ .

$$\text{c) } \bar{v}_1^2 = \frac{3RT_1}{\mu} = 24,93 \cdot 10^4 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

$$\bar{v}_2^2 = \frac{3RT_2}{\mu} = 51,18 \cdot 10^4 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

4<sup>o</sup>. a) Tensiunea bateriei (fig. F.B.166) este  $E = nE_i = 10 \text{ V}$ , iar rezistența ei internă  $r = nr_i = 1 \Omega$ . Aplicînd legea lui Ohm,  $I_1 = \frac{E}{R + r}$ , unde  $R =$

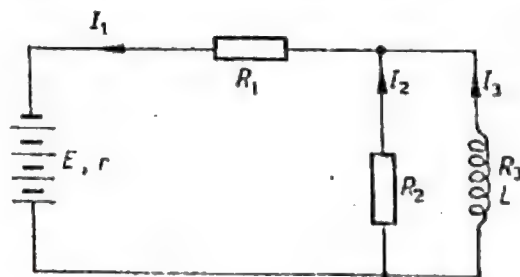


Fig. F.B.166

$= R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 6 \Omega$ , rezultă  $I_1 = \frac{10}{7} = 1,43 \text{ A}$ . Tensiunea  $U_2 = U_3 = I_1 \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{20}{7} = 2,85 \text{ V}$ . Prin urmare,  $I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{20}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{21} = 0,48 \text{ A}$  și  $I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{20}{21} = 0,95 \text{ A}$ .

b) Fluxul magnetic care străbate bobina este  $\Phi = LI_3 = 1,9 \cdot 10^{-3}$  Wb. Inducția magnetică  $B$  în lungul axei bobinei este  $B = \frac{\Phi}{NS} = 7,5 \cdot 10^{-3}$  T.

c) Căldura degajată timp de o oră în  $R_1$  este  $Q = R_1 I_1^2 t = 29,4$  KJ.

5°. a) În circuitul de curent alternativ (fig. F.B.167) puterea activă este  $P = UI \cos \varphi = RI_R^2 = UI_R$ , de unde se determină  $I = \frac{P}{U \cos \varphi} = 0,19$  A și  $I_R = \frac{P}{U} = \frac{1}{6} = 0,166$  A, iar rezistența  $R = \frac{P}{I_R^2} = 360 \Omega$ . Pentru circuitul de curent alternativ RLC paralel se știe că  $\tan \varphi = R \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$ , de unde se obține  $C = \frac{\tan \varphi}{\omega R} + \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{56,84}{3071} 10^{-3} = 15,2 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 15,2 \mu\text{F}$ .

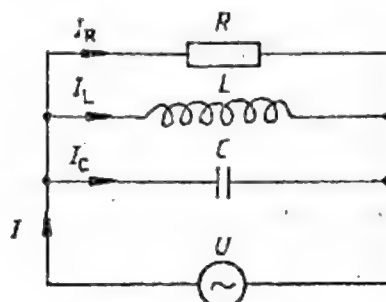


Fig. F.B.167

b) Expresia intensității instantanee a curentului prin bobină,

$$i_L = \frac{U_m}{X_L} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{60\sqrt{2}}{314} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = 0,27 \sin \left( 314 t - \frac{\pi}{2} \right).$$

c) Curentul total devine minim cînd circuitul se află la rezonanță, deci cînd  $\omega L_1 = \frac{1}{\omega C}$ , de unde se deduce  $L_1 = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{314^2 \cdot 15,2 \cdot 10^{-6}} = 0,667$  H. La rezonanță tot curentul debitat de sursă trece prin rezistența  $R$ , deci  $I_{\min} = I_R = \frac{1}{6}$  A.

LII.1°. a) Acest subiect a fost tratat la XXV.5°.b.

b) Acest subiect a fost tratat la I.4°.b.

c) În condiții de echilibru, suprafața de separare dintre două lichide nemiscibile este plană și orizontală. În cazul a două lichide nemiscibile, de densități comparabile, dintre care unul se găsește în cantitate mult mai mică decît celălalt, suprafața de separare este sferică.

2°. a) Acest subiect a fost tratat la XIV.4°.c.

b) Acest subiect a fost tratat la X.4°.c.

c) Acest subiect a fost tratat la XI.VIII.2°.a.

3°. a) Se aplică prima lege a electrolizei și se determină

$$I_v = \frac{m}{KT} = \frac{32 \cdot 10^{-4}}{0,32 \cdot 10^{-6} \cdot 100} = 1 \text{ A}.$$

b) Din figura F.B.168 se constată că  $U_v = U_s = R_v I_v = 4$  V, deci  $I_s = \frac{U_s}{R_s} = \frac{4}{8} = 0,5$  A. În centrul solenoidului, inducția cîmpului magnetic  $B = \mu_0 \frac{NI_s}{l}$

și deci fluxul  $\Phi = NBS = \mu_0 \frac{N^2 I_s}{l} S = 0,166 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$ , iar inductanța bobinei

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} = \frac{\Phi}{I_s} = 0,333 \cdot 10^{-5} \text{ H}.$$

c) Curentul total  $I = I_s + I_v = 1,5 \text{ A}$ . Aplicind legea lui Ohm rezultă,

$$I = \frac{E}{r_i + R_1 + \frac{R_v R_s}{R_v + R_s}}, \text{ de unde se obține } r_i = 1,33 \Omega.$$

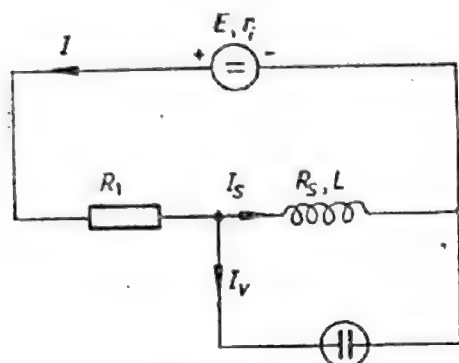


Fig. F.B.168

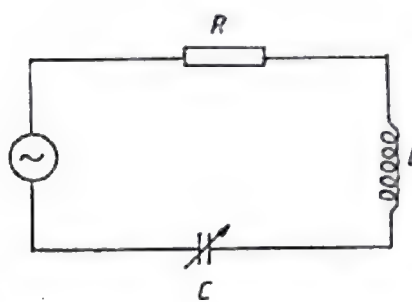


Fig. F.B.169

4°. a) Aplicind legea lui Ohm (fig. F.B.169) rezultă  $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}}$  de unde se obține:  $L\omega - \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{\omega C_1} - L\omega$ , de unde se determină inductanța  $L = \frac{1}{2\omega^2} \cdot \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = 95 \cdot 10^{-6} \text{ H}$ . Tot din legea lui Ohm rezultă valoarea rezistenței,

$$R = \sqrt{\left( \frac{U}{I} \right)^2 - \left( \frac{1}{\omega C_1} - \omega L \right)^2} = \sqrt{450^2 - 200^2} \simeq 403 \Omega.$$

b) La rezonanță întreaga tensiune a sursei se regăsește la bornele rezistenței, deci puterea consumată în circuit va fi  $P_{\text{rezonanță}} = \frac{U^2}{R} = 50 \cdot 10^{-3} \text{ W}$ .

c) Se știe că pentru un circuit  $RLC$  serie  $\text{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$ , deci în cazul problemei date  $\text{tg} \varphi_2 = \frac{X_L - X_{C_1}}{R}$ ;  $\text{tg} \varphi_1 = \frac{X_L - X_{C_2}}{R}$ . Cum  $\text{tg} \varphi_2 = -\text{tg} \varphi_1$ , rezultă  $\text{tg} \varphi_2 = -\text{tg} \varphi_1 = 0,5$ .

5°. a) Aplicind legea transformării izoterme (fig. F.B.170),  $p_1 V_1 = p_2 V_2$ , se deduce  $V_2 = 10^{-4} \text{ m}^3$ . Aplicind legea transformării adiabatică,  $p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma$ , și cum  $p_3 = p_1$ , rezultă  $\left( \frac{V_3}{V_2} \right)^\gamma = \frac{p_2}{p_1}$  sau  $\frac{V_3}{V_2} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$ , de unde se deduce  $V_3 = V_2 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 4,62 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$ .



Pentru a deduce temperatura  $T_3$  se aplică ecuația termică de stare pentru stările (1) și (3) și se obține  $p_1 V_1 = \nu R T_1$ ;  $p_3 V_3 = \nu R T_3$ . Prin împărțirea celor două relații se obține  $\frac{V_3}{V_1} = \frac{T_3}{T_1}$ , de unde  $T_3 = T_1 \frac{V_3}{V_1} = 138,6$  K.

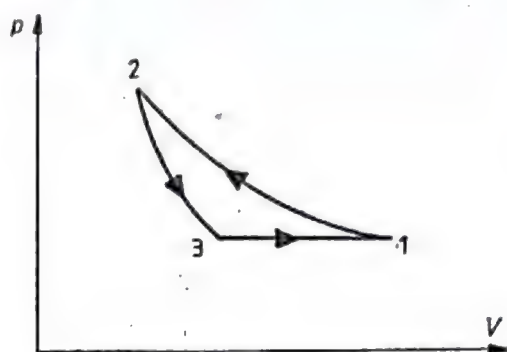


Fig. F.B.170

b) În transformarea izotermă căldura cedată  $Q_{12} = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = -p_1 V_1 \cdot 2,3 \log \frac{V_1}{V_2} = -10^5 \cdot 10^{-3} \cdot 2,3 = 230$  J. În transformarea izobară, căldura absorbită  $Q_{31} = \nu C_p (T_1 - T_3)$ . Cunoscând exponentul adiabatic și utilizând relația Robert-Mayer, rezultă  $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ , deci  $Q_{31} = \nu \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_1 - T_3) =$

$$= \frac{\gamma}{\gamma - 1} (\nu R T_1 - \nu R T_3) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} (p_1 V_1 - p_3 V_3) =$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma - 1} (p_1 V_1 - p_1 V_3) = 3 \cdot 10^5 (10^{-3} - 0,462 \cdot 10^{-3}) \simeq 161 \text{ J.}$$

c) Temperatura maximă  $T_{\max} = T_1 = T_2 = 300$  K, iar temperatura minimă  $T_{\min} = T_3$ . Prin urmare,

$$\eta_c = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{T_3}{T_1} = 1 - \frac{138,6}{300} \simeq 0,538.$$

LIII. 1°. a) Acest subiect a fost tratat la XIV.4°.c.

b) Caracteristicile vaporizării în vid sînt:

- vaporizarea în vid este instantanee;
- vaporizarea în vid se face pînă cînd presiunea vaporilor obținuți atinge o valoare maximă  $p_m$ . În acest caz, vaporii se numesc saturați, iar  $p_m$  se numește presiune maximă a vaporilor saturați, în condițiile date de temperatură.

Presiunea maximă a vaporilor saturați verifică următoarele legi:

- presiunea maximă a vaporilor saturați nu depinde de masa lichidului și nici de masa vaporilor în contact;
- presiunea maximă a vaporilor saturați rămîne constantă, atîta timp cît temperatura rămîne constantă;
- la o temperatură dată, presiunea maximă a vaporilor saturați depinde numai de natura lichidului din care au provenit.

c) Acest subiect a fost tratat la XXXV.4°.c și IX.4°.c.

2°. a) Densitatea unui solid variază cu temperatura, datorită variației volumului solidului în funcție de temperatură, care se face după legea  $V = V_0(1 + \gamma t)$ ,

unde  $V$  este volumul la temperatura  $t$ ,  $V_0$  este volumul la temperatura  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , iar  $\gamma$  este coeficientul de dilatare în volum al solidului. Densitatea solidului fiind definită ca raportul dintre masa și volumul corpului respectiv, se deduce

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\rho_0 V_0}{V_0(1 + \gamma t)} = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t}, \text{ unde } \rho_0 \text{ este densitatea solidului respectiv la temperatura } t_0 = 0^\circ\text{C}.$$

b) Acest subiect a fost tratat la 11.5<sup>o</sup>.c.

c) Acest subiect a fost tratat la XI.VI. 1<sup>o</sup>.b.

3<sup>o</sup>. a) Randamentul ciclului Carnot este  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{296}{773} = 1 - 0,383 = 0,617$  sau  $\eta = 61,7\%$ .

b) Cum randamentul unei mașini termice este  $\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}$ , unde  $Q_1$  este căldura primită și  $|Q_2|$  căldura cedată de mașină, rezultă  $|Q_2| = Q_1(1 - \eta) = 6 \cdot 10^5(1 - 0,617) = 2,3 \cdot 10^5 \text{ J}$ . Puterea mașinii va fi egală cu  $\frac{Q_1}{t} = \frac{6 \cdot 10^5}{60} = 10^4 \text{ W} = 10 \text{ kW}$ .

c) Căldura folosită este  $Q = 50 Q_2 = 50 \cdot 2,3 \cdot 10^5 \text{ J} = 115 \cdot 10^2 \text{ KJ}$ . Aplicind ecuația calorimetrică,  $Q = m_a c_a(t_4 - t_3) + m_a \lambda_v$ , se poate determina

$$m_a = \frac{Q}{c_a(t_4 - t_3) + \lambda_v} = \frac{115 \cdot 10^2}{4,18 \cdot 80 + 2255} = 4,44 \text{ kg}.$$

4<sup>o</sup>. a) Se aplică circuitelor din figura F.B.171 și figura F.B.172 legea lui Ohm

$$I_1 = \frac{E}{r_i + R_1 + R_2}, \text{ de unde rezultă } R_1 + R_2 = 8 \Omega.$$

$$I_2 = \frac{E}{r_i + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}, \text{ de unde rezultă } R_1 R_2 = 12 \Omega^2.$$

Cunoscind suma și produsul valorilor rezistențelor, se deduce  $R_1 = 6 \Omega$  și  $R_2 = 2 \Omega$ .

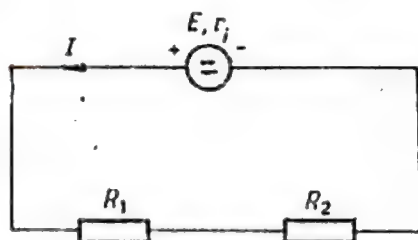


Fig. F.B.171

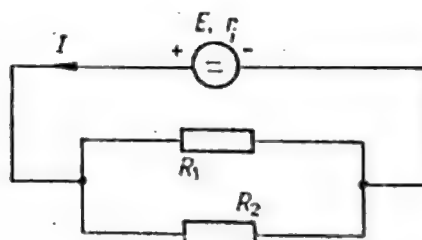


Fig. F.B.172

b) Tensiunea la borne în primul caz este  $U_s = E - r_i I_1 = 18 - 2 = 16 \text{ V}$ , iar în cazul al doilea,  $U_p = E - r_i I_2 = 18 - 7,2 = 10,8 \text{ V}$ .

c) În primul caz, puterile consumate în rezistoare sînt:  $P_{R_1} = R_1 I_1^2 = 24 \text{ W}$ ,  $P_{R_2} = R_2 I_1^2 = 8 \text{ W}$ . În cazul al doilea, puterile consumate în rezistoare sînt:  $P_{R_1} = \frac{U_p^2}{R_1} = \frac{10,8^2}{6} = 19,44 \text{ W}$  și  $P_{R_2} = \frac{U_p^2}{R_2} = \frac{10,8^2}{2} = 58,32 \text{ W}$ .

5°. a) Pornind de la expresia inductanței bobinei  $L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S}{l}$ , se deduce

$$\mu_r = \frac{L \cdot l}{\mu_0 N^2 S} = \frac{0,4 \cdot 0,4}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 25 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 10^{-4}} = \frac{4}{\pi^2} \cdot 10^3 = 406.$$

b) Intensitatea curentului prin bobină este  $I = \frac{E}{R} = 5,8 \text{ A}$ , iar fluxul magnetic  $\Phi = LI = 0,4 \cdot 5,8 = 2,32 \text{ Wb}$ , sau  $\Phi = NBS = N\mu \frac{NI}{l} \cdot \pi \frac{D^2}{4} = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 I}{l} \cdot \pi \frac{D^2}{4} = 2,32 \text{ Wb}$ .

c) Aplicînd legea lui Ohm circuitului  $RLC$  serie de curent alternativ care se formează, rezultă  $I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$ , unde  $U = 100 \text{ V}$ . Din această relație se obține valoarea capacității  $C = \frac{1}{\omega \left( X_L - \sqrt{\left( \frac{U}{I} \right)^2 - R^2} \right)}$ . Dar  $\frac{U}{I} = \frac{100}{5,8} = 17,2 \Omega = R$ , prin urmare capacitatea  $C = \frac{1}{\omega X_L} = \frac{1}{\omega^2 L} = 25,3 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 25,3 \mu\text{F}$ .

LIV. 1°. a) Momentul  $\vec{M}$  al unei forțe  $\vec{F}$  în raport cu un punct numit pol, se definește ca produsul vectorial dintre vectorul de poziție  $\vec{r}$  al forței față de pol și vectorul forței,

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Momentul unei forțe față de un punct este un vector căruia trebuie să i se precizeze direcția, sensul și mărimea. Direcția vectorului moment este perpendiculară pe planul determinat de vectorii  $\vec{r}$  și  $\vec{F}$ . Sensul vectorului moment, dat de regula burghiului drept, este același cu sensul de înaintare al burghiului drept, cînd acesta este rotit, astfel încît primul vector ( $\vec{r}$ ) al produsului vectorial este adus peste cel de-al doilea ( $\vec{F}$ ) pe drumul cel mai scurt.

Mărimea momentului,  $|\vec{M}| = M = rF \sin \alpha = F \cdot b$ .

Perpendiculara coborîtă din pol pe direcția forței, egală cu  $r \sin \alpha$  și notată cu  $b$ , se numește brațul forței față de polul  $O$ .

Se constată că atunci cînd polul se află pe dreapta suport a forței (deci cînd unghiul  $\alpha$  este egal cu zero sau  $180^\circ$ ), momentul forței este nul. Momentul forței se măsoară în Nm. Dacă mai multe forțe concurente  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  acționează asupra unui punct material, atunci fiecare forță va avea un moment în raport cu un pol  $O$ .  $\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1$ ;  $\vec{M}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_2$ ; ...;  $\vec{M}_n = \vec{r} \times \vec{F}_n$  și deci  $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \vec{M} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n)$ , adică  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ , unde  $\vec{F}$  este forța rezultantă, iar  $\vec{M}$  momentul rezultantei față de polul  $O$ . Prin urmare, suma vectorială a momentelor forțelor concurente în raport cu un pol este egală cu momentul rezultantei acestor forțe în raport cu același pol. Aceasta este teorema lui Varignon.

b) Acest subiect a fost tratat la XI.4°.b.



c) Fluxul magnetic  $\Phi$  al inducției magnetice printr-o suprafață oarecare  $S$  se definește ca produsul dintre mărimea inducției magnetice, aria suprafeței  $S$  și cosinusul unghiului dintre vectorul inducției magnetice și normala la suprafață,

$$\Phi = BS \cos \alpha.$$

Dacă  $\alpha = 0$ , deci dacă inducția cimpului magnetic străbate o suprafață normală la direcția cimpului, atunci fluxul printr-o astfel de suprafață este maxim,  $\Phi_{\max} = BS$ . Dacă  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , deci dacă liniile de cimp sînt perpendiculare cu direcția normalei la suprafață, atunci fluxul magnetic prin acea suprafață este zero.

Unitatea de măsură a fluxului magnetic în SI se numește Weber și are simbolul Wb. Un Wb este fluxul magnetic al unui cimp magnetic uniform, de inducție egală cu 1T, printr-o suprafață de 1 m<sup>2</sup>, așezată normal pe direcția cimpului magnetic.

2°. a) Prin definiție, momentul cinetic al unui punct material în raport cu un pol este

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v},$$

unde  $\vec{r}$  este vectorul de poziție al punctului material de masă  $m$ , iar  $m\vec{v}$  este impulsul punctului material. Momentul cinetic se măsoară în J·s.

b) Acest subiect a fost tratat la III.4°.a.

c) Acest subiect a fost tratat la V.4°.c.

3°. a) Ecuațiile spațiului și vitezei sînt:  $l = \frac{at^2}{2}$ ,  $v = at$ , iar relația lui Galilei  $v = \sqrt{2al}$ . Din relația lui Galilei se determină  $a = \frac{v^2}{2l} = \frac{25}{16} \text{ m/s}^2$ , iar din ecuația spațiului se deduce  $t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = 32 \text{ s}$ .

b) Forța de propulsie a avionului este

$$F = ma = 8\,500 \cdot \frac{25}{16} \approx 13\,281 \text{ N}.$$

c) Puterea medie dezvoltată de avion la parcurgerea pistei este

$$P_m = F \cdot v_m = F \cdot \frac{v}{2} = 13\,281 \cdot \frac{50}{2} = \frac{1\,328\,100}{4} = 332\,025 \text{ W} = 332,025 \text{ kW}.$$

4°. Se aplică legea conservării energiei,  $\frac{mv^2}{2} = eU$ , de unde se deduce  $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ .

La același rezultat se ajunge aplicînd varianta cinematică.

Forța electrică imprimă electronului o mișcare uniform accelerată, deci  $F_e = qE = ma$ , de unde se deduce accelerația mișcării  $a = \frac{eE}{m} = \frac{e}{m} \frac{U}{d}$ . Ecuațiile spațiului și vitezei sînt  $d = \frac{at^2}{2}$ ;  $v = at$ , iar relația lui Galilei  $v = \sqrt{2ad}$ , din care se deduce  $v = \sqrt{2 \frac{eU}{md} d} = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \approx 6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ .

b) Timpul de trecere a electronului de la o placă la alta este

$$t = \frac{v}{a} = 1,02 \cdot 10^{-9} \text{ s.}$$

c) Intensitatea cimpului electric dintre plăcile condensatorului este

$$E = \frac{U}{d} = \frac{1}{3} 10^5 \text{ V/m.}$$

IV. 1°. a) Acest subiect a fost tratat la XLVI. 2°.a.

b) Acest subiect a fost tratat la XI. 3°.a.

c) Acest subiect a fost tratat la XI. 3°.c.

2°. a) În procesul ciocnirii perfect elastice a două particule se conservă impulsul și energia. Considerînd ciocnirea frontală, deci impulsurile inițiale au aceeași direcție și anume direcția care unește centrele particulelor, ecuația conservării impulsului este

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2',$$

unde  $m_1, m_2$  sînt masele particulelor,  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  sînt vitezele particulelor înainte de ciocnire și  $\vec{v}_1', \vec{v}_2'$  sînt vitezele particulelor după ciocnire.

Pentru ciocnirea perfect elastică, legea conservării energiei este

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2},$$

unde mărimile care intervin au semnificațiile prezentate mai sus.

b) Acest subiect a fost tratat la I. 5°. a.

c) Acest subiect a fost tratat la VIII. 3°. c.

3°. a) În mișcarea oscilatorie armonică, expresia perioadei de oscilație este

$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ , de unde rezultă  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10^2 \text{ rad/s}$ . Ecuațiile elongației și vitezei în mișcarea oscilatorie armonică sînt:

$$x_1 = A \sin(\omega t_1 + \varphi_0),$$

$$v_1 = \omega A \cos(\omega t_1 + \varphi_0).$$

Ridicînd la pătrat cele două expresii și adunînd membru cu membru, se obține

$$A = \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{v_1}{\omega}\right)^2} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 6 \text{ cm.}$$

b) Viteza este maximă la momentul pentru care  $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$ , deci  $v_{\max} = \omega A = 6 \text{ m/s}$ .

c) Energia potențială în momentul în care distanța față de echilibru este  $x_2 = 2 \text{ cm}$  este

$$E_p = \frac{kx_2^2}{2} = 0,2 \text{ J.}$$

Cum energia totală este  $E_{\text{tot}} = \frac{kA^2}{2} = 1,8 \text{ J}$ , rezultă că energia cinetică în acel moment va fi egală cu  $E_c = E_{\text{tot}} - E_p = 1,8 - 0,2 = 1,6 \text{ J}$ .







4°. a) Intensitatea curentului din circuit este  $I = \frac{E}{R+r_i} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} = 0,125 \text{ A}$ , iar căderea de tensiune pe rezistor,  $U_R = RI = 23 \cdot \frac{1}{8} = 2,875 \text{ V}$ .

b) Energia disipată în rezistența  $R$  în timp de 8 ore va fi

$$W = RI^2t = 23 \cdot \frac{1}{64} \cdot 8 \cdot 3600 = 23 \cdot 450 = 10350 \text{ Ws} = 10,35 \text{ kJ}.$$

c) Puterea disipată în rezistorul  $R$  este  $P = RI^2 = R \frac{E^2}{(r_i + R)^2}$ . Pentru a determina valoarea lui  $R$  pentru care puterea disipată în ea să fie maximă, se pune condiția ca derivata întâi a puterii în funcție de  $R$  să fie nulă,

$$\frac{dP}{dR} = \frac{d}{dR} \left[ \frac{RE^2}{(r_i + R)^2} \right] = \frac{E^2(r_i + R) - 2RE^2}{(r_i + R)^3} = 0.$$

Rezultă  $E^2(r_i + R - 2R) = 0$ , de unde  $R = r_i$ . Deci valoarea rezistenței exterioare circuitului trebuie să fie egală cu rezistența interioară a sursei.

**LVII. 1°.** a) Acest subiect a fost tratat la XXXII. 4°. b.

b) Impedanța circuitului  $RLC$  paralel de curent alternativ a fost prezentată la XXXIII. 4°. c.

Defazajul curent-tensiune pentru un astfel de circuit se exprimă astfel:

$$\operatorname{tg} \varphi = R \left( \frac{1}{L\omega} - C\omega \right),$$

în care  $\varphi$  este unghiul de defazaj între curent și tensiune,  $R$  — rezistența,  $C$  — capacitatea și  $L$  — inductanța circuitului, iar  $\omega$  — pulsația tensiunii alternative care alimentează circuitul.

c) Pentru ca într-o spirală închisă să nu apară curent electric cind este deplasată într-un cimp magnetic uniform, trebuie ca spira să fie astfel deplasată, încît să nu apară un flux magnetic variabil în timp. Cum  $\Phi = BS \cos \alpha$  și  $B$  este uniform, rezultă că deplasarea trebuie astfel făcută încît să nu varieze în timp nici aria suprafeței spirei, nici unghiul dintre normala la spirală și direcția cimpului magnetic.

**2°.** a) Acest subiect a fost tratat la XXXV. 4°. c și IX. 4°. c.

b) Acest subiect a fost tratat la XXVI. 3°. a.

c) Acest subiect a fost tratat la LIII. 1°. b.

**3°.** a) Aplicînd legile lui Kirchhoff (fig. F.B.25), se obține sistemul de ecuații

$$\begin{cases} E_1 + E_2 = r_1 I_1 + (r_2 + R) I_2, \\ E_2 + E_3 = (r_2 + R) I_2 + r_3 I_3, \\ I_1 + I_3 = I_2. \end{cases}$$

Din primele două ecuații rezultă  $I_1 = I_3$ , iar din ultima ecuație  $I_2 = 2I_1$ . Înlocuind pe  $I_2 = 2I_1$  în prima ecuație, rezultă  $I_1 = \frac{13,5}{203} = 0,0665 \text{ A}$ , deci și  $I_3 = 0,0665 \text{ A}$ , iar  $I_2 = 2I_1 = 0,133 \text{ A}$ .

b)  $U_{AB} = r_1 I_1 - E_1 = 0,0665 - 9 = -8,9335 \text{ V}$ .

c) Puterea disipată în rezistorul  $R$  este  $P_R = RI_2^2 = 100 \cdot (0,133)^2 = 1,7689 \text{ W}$ . Puterea totală furnizată de baterii este  $P = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 = 1,7955 \text{ W}$ .

4°. a) Viteza pătratică medie a moleculelor de gaz  $\sqrt{\bar{v}_1^2} = \sqrt{\frac{3RT_1}{\mu}}$ . Aplicind ecuația termică de stare pentru starea (1) se obține  $p_1 V_1 = \nu R T_1$ , de unde  $RT_1 = \frac{p_1 V_1}{\nu}$  și deci  $\sqrt{\bar{v}_1^2} = \sqrt{\frac{3p_1 V_1}{\mu \nu}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 6 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}}} = \frac{54}{6,4} \cdot 10^5 = 8,4375 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

b) În transformarea izocoră  $L_{\text{zoc}} = 0$ . În transformarea izobară  $L_{\text{izob}} = -p_2(V_2 - V_3) = 3 \cdot 10^5 \cdot (6 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-3}) = 3 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 9 \cdot 10^2 = 900 \text{ J}$ .

c)  $T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_1}{2}$ , prin urmare randamentul ciclului Carnot

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_1}{2T_1} = 0,5 \text{ sau } \eta_c = 50\%.$$

LVIII. 1°. a) Asupra fiecărui balon (Fig. F.B.176) acționează forțele de rezistență egale, proporționale cu viteza,  $F_{r_1} = F_{r_2} = F_r = kv$  și forțele arhimedice egale,  $F_{A_1} = F_{A_2} = F_A = m'g$ , unde  $m'g$  este greutatea volumului de aer dislocuit de un balon, deci  $F_A = V\rho g = 13 \text{ N}$ .

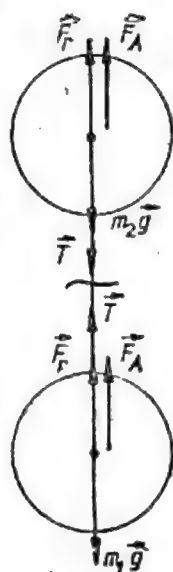


Fig. F.B.176

Aplicind legea a doua a lui Newton la mișcarea celor două baloane, se obțin ecuațiile mișcării,

$$m_1 a = m_1 g - kv - F_A - T,$$

$$m_2 a = m_2 g - kv - F_A + T.$$

În vecinătatea Pământului,  $a = 0$  și viteza tinde către o valoare limită  $v = v_{\text{lim}}$ , deci

$$m_1 g - kv_{\text{lim}} - F_A - T = 0,$$

$$m_2 g - kv_{\text{lim}} - F_A + T = 0.$$

Din aceste ecuații rezultă  $T = \frac{m_1 - m_2}{2} \cdot g = 10 \text{ N}$ .

b) Din aceleași ecuații de mai sus se poate determina  $kv_{\text{lim}} = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot g - F_A$ .

Aplicind legea a doua a lui Newton mișcării primului balon, imediat după ciocnire, se obține  $m_1 a' = F_A - m_1 g - kv_{\text{lim}}$ , de unde se determină accelerația

$$a' = \frac{V\rho g}{m_1} - g - \frac{m_1 + m_2}{2m_1} \cdot g + \frac{V\rho g}{m_1} = -15 \text{ m/s}^2.$$



2°. a) În poziția de echilibru  $mg = k \cdot \Delta l_0$ , de unde rezultă  $\Delta l_0 = \frac{l}{k} mg = 5 \text{ cm}$  (fig. F.B.177).  
Amplitudinea  $A$  a oscilațiilor este  $A = y_0 - \Delta l_0 = 5 \text{ cm}$ .

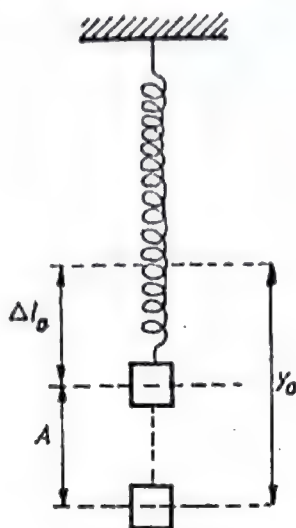


Fig. F.B.177

b) Aplicând legea conservării impulsului, rezultă  $m'v_0 = (m + m')v$ , de unde se deduce  $v = \frac{m'}{m + m'} v_0 = 0,8 \text{ m/s}$ . Din legea conservării energiei,  $\frac{kA^2}{2} + \frac{(m + m')v^2}{2} = \frac{kA'^2}{2}$ , se poate calcula amplitudinea  $A'$ ,

$$A' = \sqrt{A^2 + \frac{m'^2 v_0^2}{k(m + m')}} = 11 \text{ cm}.$$

Același rezultat se obține dacă se aplică varianta cinematică. Noua valoare a pulsației mișcării oscilatorii este  $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m + m'}}$ , iar ecuația elongației și ecuația vitezei sînt  $y = A' \sin(\omega't + \varphi)$  și  $v = A'\omega' \cos(\omega't + \varphi)$ .

Din aceste ecuații se deduce că  $\frac{y^2}{A'^2} + \frac{v^2}{A'^2 \omega'^2} = 1$ , din care, pentru  $y = A$ , se determină amplitudinea  $A' = \sqrt{A^2 + \frac{v^2}{\omega'^2}} = 11 \text{ cm}$ .

$$c) Q = \frac{kA'^2}{2} = 60,5 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

3°. a) Se știe că randamentul unei mașini termice  $\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$ , unde  $Q_1$  este căldura primită, în cazul problemei, în procesul izobar și  $|Q_2|$  căldura cedată, în cazul problemei, în procesul izoterm.

Căldura  $Q_1$  primită de motor (fig. F.B.26) în procesul izobar  $Q_1 = \nu C_p(T_2 - T_1) = \nu C_p T_1(e - 1)$ , iar căldura cedată de motor în procesul izoterm va fi  $|Q_2| = \nu R T_1 \ln \frac{V_3}{V_1}$ . Din legea transformărilor izobare  $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{e T_1}$ , se determină  $V_2 = e V_1$ . Aplicînd ecuația lui Poisson, a transformării adiabatice,  $T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$ , de unde rezultă  $e V_2^{\gamma-1} = V_3^{\gamma-1}$ . Înlocuind în această relație pe  $V_2$  cu  $e V_1$ , se obține  $e^\gamma \cdot V_1^{\gamma-1} = V_3^{\gamma-1}$ , deci  $e^\gamma = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1}$ , de unde, prin logaritmare, se determină  $\ln \frac{V_3}{V_1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$ .

Din relația Robert-Mayer,  $C_p = C_v + R$  și  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  se determină  $C_p = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}$ .

Înlocuind aceste rezultate în expresiile lui  $Q_1$  și  $|Q_2|$  se obține  $Q_1 = \frac{\gamma R\gamma}{\gamma - 1} T_1(e - 1)$  și  $|Q_2| = \gamma R T_1 \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1}$  și randamentul motorului  $\eta = 1 - \frac{1}{e - 1} = 0,42 = 42\%$ .

b) Randamentul ciclului Carnot care ar funcționa între temperaturile extreme ale ciclului,

$$\eta_{\text{Carnot}} = \frac{T_{\text{max}} - T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{e - 1}{e} = 0,631 = 63,1\%.$$

4°. a) Acest subiect a fost tratat la XLVI.1°.a.

b) Ecuația Clapeyron-Mendeleev reprezintă dependența dintre parametrii de stare ai unui gaz ideal, aflat într-o stare de echilibru. Pentru a obține această ecuație considerăm două stări de echilibru (fig. F.B.178) ale unui gaz ideal de masă  $m$  caracterizate de parametrii: 1( $p_0, V_0, T_0$ ) și 2( $p, V, T$ ). Se poate ajunge de la

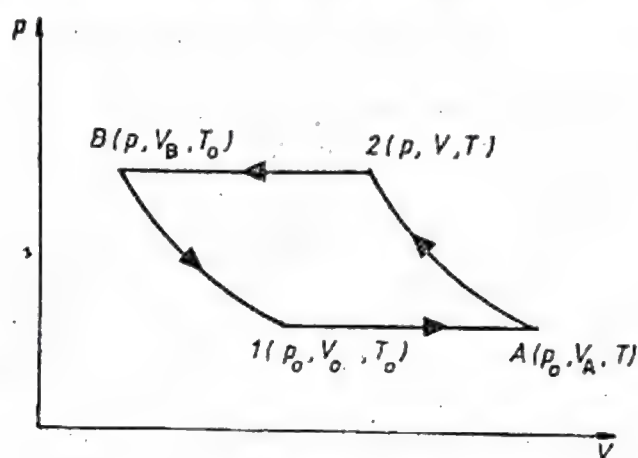


Fig. F.B.178

starea 1 la starea 2 printr-o succesiune de două transformări simple oarecare, de exemplu o izobară de presiune  $p_0$ , până în starea intermediară A ( $p_0, V_A, T$ ) și o izotermă de temperatură  $T$  până în starea 2. Ecuațiile celor două transformări sînt

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_A}{T} \text{ și } p_0 V_A = p V. \text{ Eliminînd pe } V_A \text{ între cele două relații se obține } \frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \text{const, dacă } m = \text{const.}$$

Se obține aceeași relație între parametrii stării 1 și ai stării 2, dacă se ajunge de la starea 1 la 2 prin starea intermediară B( $p, V_B, T_0$ ), printr-o transformare izotermă de temperatură  $T_0$  și apoi o transformare izobară de presiune  $p$ . Ecuațiile acestor două transformări sînt  $p_0 V_0 = p V_B$  și  $\frac{V_B}{T_0} = \frac{V}{T}$  și, eliminîndu-l pe  $V_B$  între aceste ecuații se obține relația

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \text{const, dacă } m = \text{const.}$$

Pentru un mol de gaz ideal care suferă o transformare oarecare din starea 1, stare în care gazul se află în condiții normale de presiune și temperatură ( $p_0 = 1 \text{ atm}$ ,  $T_0 = 273,15 \text{ K}$ ,  $V_{\mu_0} = 22,42 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol}$ ), în starea 2 caracterizată prin parametrii  $p, V_{\mu}, T$ , relația de mai sus devine  $\frac{pV_{\mu}}{T} = \frac{p_0 V_{\mu_0}}{T_0}$ . Membrul drept al acestei relații, care nu depinde de natura gazului, este o constantă, se notează cu  $R$  și se numește constanta universală a gazelor. Ținînd seama că  $1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ N/m}^2$  și înlocuind pe  $p_0, V_{\mu_0}$  și  $T_0$  se obține  $R = 8,3143 \cdot 10^3 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$ .

Utilizând pe  $R$ , relația devine  $pV_\mu = RT$ , care este ecuația Clapeyron-Mendeleev pentru un mol de gaz ideal.

Pentru o masă  $m$  de gaz ideal, de masă molară  $\mu$ , numărul de moli va fi  $\nu = \frac{m}{\mu}$ , iar relația devine  $pV = \nu RT$ , care este ecuația Clapeyron-Mendeleev pentru o masă  $m$  de gaz, sau ecuația termică de stare a gazului ideal.

c) La definirea modelului gazului ideal, forțele intermoleculare se neglijează și se consideră că moleculele se mișcă liber. Prin urmare, energia potențială datorată interacțiunilor dintre molecule se poate neglija. Contribuția mișcărilor de translație dezordonate a moleculelor la energia internă a gazului ideal se poate evalua pornind de la expresia energiei cinetice medii a unei molecule din teoria cinetico-moleculară a gazelor,  $\epsilon_i = \frac{3}{2} kT$ , unde  $k$  este constanta lui Boltzmann.

Dar într-o cantitate de  $\nu$  kilomoli de gaz există  $\nu N_A$  molecule ( $N_A$  este numărul lui Avogadro), prin urmare energia internă a gazului ideal este  $U = \nu N_A \cdot \epsilon_i = \nu \frac{3}{2} k N_A T = \frac{3}{2} \nu RT$ . Rezultă deci că energia internă a unui gaz ideal este proporțională cu temperatura absolută a gazului și cu cantitatea de gaz; energia internă nu depinde nici de presiune și nici de volumul ocupat de gaz.

5°. a) Unda staționară este un fenomen particular de interferență a undelor. Unda staționară apare la suprapunerea a două unde de lungimi de undă egale, care se propagă în sensuri opuse. Unda staționară prezintă, la distanțe egale cu  $\frac{\lambda}{2}$ , locuri, numite noduri de oscilație, în care oscilațiile au amplitudinea zero, și locuri, situate între noduri și numite ventre de oscilație, în care oscilațiile au amplitudinea maximă.

Faza mișcării oscilatorii armonice este constantă între două noduri consecutive și are un salt egal cu  $\pi$ , la trecerea prin fiecare nod.

b) Din familia de izocore (drepte care trec prin origine, în planul  $p, T$ ) reținem izocorele tangente la cerc, celelalte, care intersectează ciclul, fiind situate între acestea (fig. F.B.179). Ecuația unei astfel de izocore este  $p = aT$ , unde  $a$

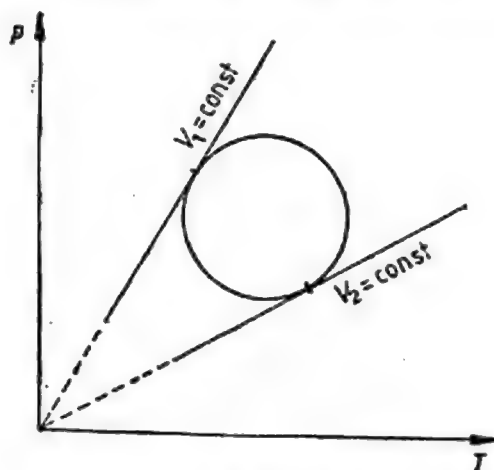


Fig. F.B.179

este panta dreptei. Aplicând unui punct oarecare al ciclului ecuația termică de stare  $pV = \nu RT$  și înlocuind presiunea  $p$  cu  $aT$ , rezultă  $V = \frac{\nu R}{a}$ . Prin urmare, volumul este maxim în punctul ciclului pentru care panta  $a$  a izocorei este minimă, și minim în punctul ciclului pentru care panta  $a$  este maximă. Rezultă deci că  $V_1 = V_{\min}$  și  $V_2 = V_{\max}$ .



c) La echilibru (fig. F.B.180) presiunea  $p$  în punctul  $A$  imediat sub menisc este determinată de presiunea atmosferică  $p_0$  și presiunea  $p_\sigma$  datorată forței de tensiune superficială,  $p = p_0 - p_\sigma$ .

Scriind egalitatea presiunilor la nivelul punctului  $B$ , rezultă  $p_0 = p_0 + \rho gh - p_\sigma$ , de unde se obține  $p_\sigma = \rho gh$ . Prin urmare,  $p = p_0 - \rho gh$ .

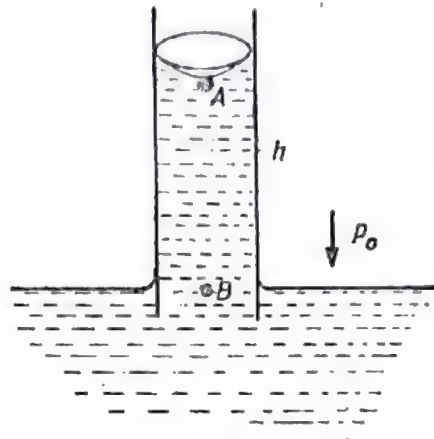


Fig. F.B.180

LIX. 1°. a) Asupra barei acționează (fig. F.B.181) greutatea proprie  $\vec{G}$ , forța de frecare  $\vec{F}_f$  și forța electromagnetică  $\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B})$ . Mărimea forței electromagnetice  $F = BIl \sin(\vec{l}, \vec{B}) = BIl$ , în care  $I = \frac{e}{R}$  este intensitatea curentului indus în circuitul închis, iar  $e$  este tensiunea electromotoare de inducție,

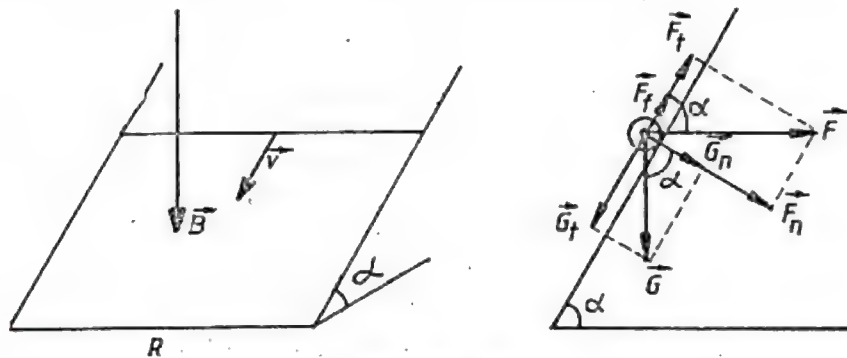


Fig. F.B.181

$e = Blv \sin(\vec{v}, \vec{B}) = Blv \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = Blv \cos \alpha$ . Rezultă  $F = BIl = B \cdot \frac{Blv \cos \alpha}{R} \cdot l = \frac{B^2 l^2 v \cos \alpha}{R}$ , de unde se deduce  $B^2 = \frac{FR}{l^2 v \cos \alpha}$ . Componentele forțelor  $\vec{G}$  și  $\vec{F}$

pe direcția paralelă cu planul inclinat și pe o direcție perpendiculară pe acesta sînt:  $G_n = G \cos \alpha$ ,  $G_t = G \sin \alpha$ ,  $F_n = F \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = F \sin \alpha$ ;  $F_t = F \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$

$= F \cos \alpha$ . Mișcarea barei făcîndu-se cu viteza  $\vec{v}$  constantă, rezultanta forțelor pe direcția de mișcare este nulă,  $G_t - F_t - F_f = 0$ . Forța de frecare  $F_f = \mu(G_n + F_n) = \mu(G \cos \alpha + F \sin \alpha)$ . Deci  $G \sin \alpha - \mu(G \cos \alpha + F \sin \alpha) - F \cos \alpha = 0$  și cum

$\mu = \tan \varphi$ , se deduce  $F = \frac{G(\sin \alpha - \tan \varphi \cos \alpha)}{\tan \varphi \sin \alpha + \cos \alpha} = G \tan(\alpha - \varphi)$ . Prin urmare,

$$B^2 = \frac{G \tan(\alpha - \varphi) R}{l^2 v \cos \alpha} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot \tan(60 - 15) \cdot 0,1}{(10 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 10 \cdot \cos 60} = 1, \text{ adică } B = 1 \text{ T.}$$

b) Puterea calorică totală degajată  $P = P_R + P_f$ , unde  $P_R$  este puterea electrică disipată în rezistorul  $R$ , iar  $P_f$  este puterea disipată prin frecare,

$$P_R = RI^2 = \frac{e^2}{R} = \frac{(Blv \cos \alpha)^2}{R} = \frac{\left(1 \cdot 10 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}\right)^2}{0,1} = 2,5 \text{ W},$$

$$P_f = F_f v = \mu(G_n + F_n)v = mgv \operatorname{tg} \varphi (\cos \alpha + \sin \alpha) = \\ = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{0,73}{2,73} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1,825 \text{ W}.$$

Prin urmare,  $P = 2,5 + 1,825 = 4,325 \text{ W}$ .

Aceeași valoare se obține exprimând puterea ca variație a energiei potențiale în unitatea de timp,

$$P = \frac{W_p}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{mgl \sin \alpha}{t} = mgv \sin \alpha = 2,5 \cdot \sqrt{3} = 4,325 \text{ W}.$$

2°. a) În figura F.B.182 se prezintă construcția imaginii discului solar prin lentilă. Se constată că diametrul  $d$  al acestei imagini se poate exprima astfel:  $\frac{d}{2} = f \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  și cum unghiul  $\alpha$  este foarte mic, se poate face aproximația  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \simeq \frac{\alpha}{2}$ , cu  $\alpha$  exprimat în radiani. Deci  $d = 2f \frac{\alpha}{2} = f\alpha = 1 \cdot \frac{2\pi}{360} \cdot \frac{1}{2} = 8,72 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .

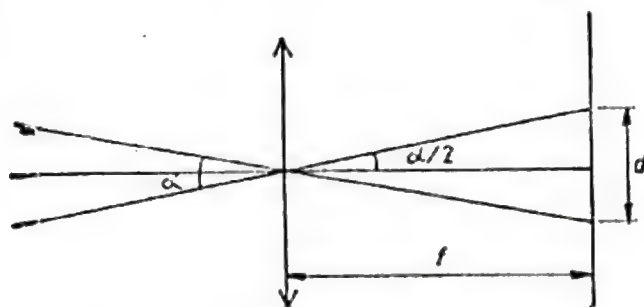


Fig. F.B.182

Iluminările în cele două situații,  $E = \frac{\Phi}{S} = \frac{\Phi}{\frac{\pi D^2}{4}}$ , respectiv  $E' = \frac{\Phi}{\frac{\pi d^2}{4}}$ , prin

urmare raportul lor  $\frac{E'}{E} = \frac{D^2}{d^2} = 21$ .

b) Din condiția de obținere a aceleiași iluminări,  $E' = E$ , rezultă  $\frac{\Phi}{\frac{\pi x^2}{4}} = \frac{\Phi}{\frac{\pi d^2}{4}}$ , deci  $x = d = 8,72 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .

3°. a) Energia de excitare  $E_{1,2} = eU_e$  necesară tranziției electronului orbital de pe nivelul fundamental, pentru care numărul cuantic este egal cu 1, pe nivelul cu număr cuantic egal cu 2, va fi  $E_{1,2} = Rhc \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$ , în care  $R$  este constanta lui Rydberg,  $h$  constanta lui Planck și  $c$ , viteza luminii în vid. Făcând substituțiile  $n = 1$ ,  $m = 2$ , rezultă  $E_{1,2} = Rhc \left( 1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4} Rhc$ . Dar energia de ionizare a atomului, care corespunde excitării de pe nivelul fundamental pe

nivelul cu număr cuantic  $m = \infty$ , este  $E_{ion} = Rhc$ , prin urmare  $E_{1,2} = \frac{3}{4} E_{ion}$  și deci  $E_{ion} = \frac{4}{3} eU_c = 13,6 \text{ eV}$ .

b) Notind cu  $m_p$ ,  $m_H$  masele protonului, respectiv atomului de hidrogen și cu  $v_p$ ,  $v'_p$ ,  $v_H$  vitezele corespunzătoare, se scriu legile conservării energiei, respectiv a conservării impulsului,  $\frac{m_p v_p^2}{2} = \frac{m_p v'^2_p}{2} + \frac{m_H v_H^2}{2} + E_{1,2}$ ,  $m_p v_p = m_p v'_p + m_H v_H$  și, cum  $m_p \simeq m_H$  și  $v'_p \simeq v_H$ , rezultă  $m_p v_p \simeq m_p \cdot 2v'_p$  și deci  $v'_p = \frac{1}{2} v_p$ . Prin urmare,  $\frac{m_p v_p^2}{2} = \frac{m_p}{2} \frac{v_p^2}{4} + \frac{m_p}{2} \frac{v_p^2}{4} + E_{1,2}$ , de unde se deduce  $\frac{m_p v_p^2}{2} = eU_p = 2E_{1,2}$  și se obține  $U_p = 2U_c = 2 \cdot 10,2 = 20,4 \text{ V}$ .

4°. a)  $\eta = \frac{W_u}{W_c}$ , unde energia utilă  $W_u$  este energia condensatorului, iar energia consumată  $W_c$  este energia cheltuită de sursă pentru încărcarea condensatorului;  $W_u = \frac{1}{2} QU$  și  $W_c = QE$ . După încărcarea condensatorului  $U = E$  și deci

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} QE}{QE} = \frac{1}{2} \text{ sau } \eta = 50\%.$$

b) Se scrie formula lentilelor, pentru imaginea prin lentilă,  $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_l}$  și formula oglinzilor pentru imaginea în oglindă,  $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_0}$  și, pentru imaginea finală,  $-\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_l}$ . Din aceste trei relații rezultă  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_0} - \frac{2}{f_l}$ , deci oglinda echivalentă are distanța focală  $f = \frac{f_0 f_l}{f_l - 2f_0}$ .

c) În modelul planetar al atomului o orbită circulară este stabilă, dacă este îndeplinită condiția ca forța centripetă să fie egală cu forța electrostatică,  $\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ , unde  $m$  este masa electronului și  $r$ , raza orbitei sale. Se deduce deci că energia cinetică a electronului este  $E_{cin} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$ . Cum energia potențială a electronului este  $E_{pot} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ , se determină energia totală  $E_t = E_{cin} + E_{pot} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$ . Rezultă deci că relația dintre energia totală și energia potențială a electronului într-un atom hidrogenoid după modelul lui Bohr este  $E_{pot} = 2E_t$ .

5°. a) Este prezentată în figura F.B.183.

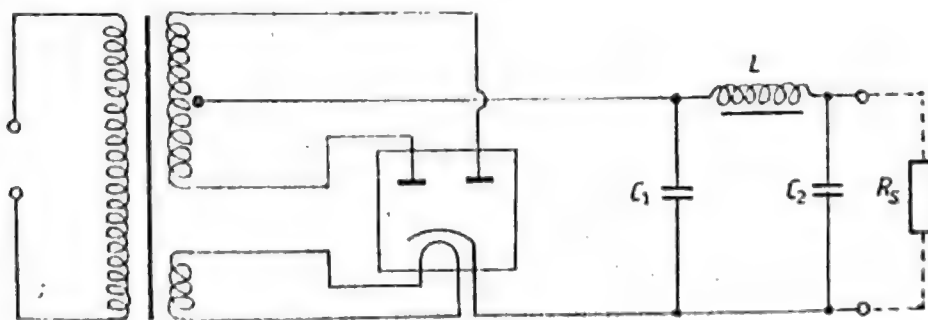


Fig. F.B.183



b) Unghiul de incidență Brewster este dat de legea:  $\operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1}$ . Notăm cu  $\alpha$  unghiul dintre raza reflectată și raza refractată (fig. F.B.184). Legea refracției se scrie:  $n_1 \sin i_B = n_2 \sin r$ . Din figură se constată că  $\alpha = \pi - (i_B + r)$ , deci  $\sin \alpha = \sin(i_B + r) = \sin i_B \cos r + \cos i_B \sin r$ .

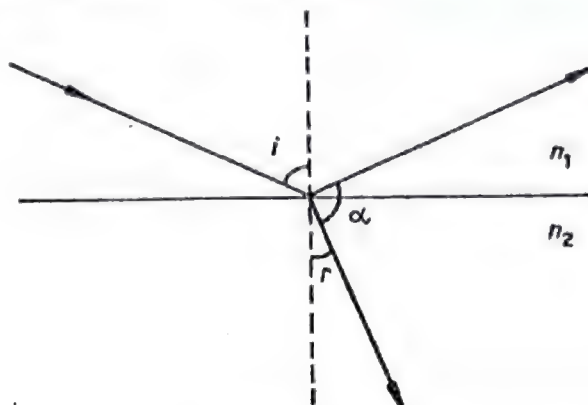


Fig. F.B.184

Se exprimă  $\sin i_B$  și  $\cos i_B$  în funcție de  $\operatorname{tg} i_B$  și deci de  $\frac{n_2}{n_1}$ , se deduce  $\sin r$  și  $\cos r$  utilizând legea refracției și se exprimă tot în funcție de  $n_2$  și  $n_1$ , astfel se ajunge la relația  $\sin \alpha = 1$ , de unde rezultă  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

c) Dacă ar apărea un singur foton, nu ar putea fi simultan satisfăcute legile de conservare a impulsului și energiei.

LX. 1°. a) Înălțimea  $h$  la care se ridică lichidul în tubul capilar este dată de legea lui Jurin,  $h = \frac{2\sigma}{r\rho g}$ , unde  $\sigma$  este coeficientul de tensiune superficială a lichidului,  $r$  este raza tubului capilar,  $\rho$  este densitatea lichidului și  $g$ , accelerația gravitațională. Din această lege rezultă densitatea lichidului,

$$\rho = \frac{2\sigma}{rgh} = \frac{2 \cdot 0,0245}{0,25 \cdot 10^{-3} \cdot 9,80 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}} = 800 \text{ kg/m}^3.$$

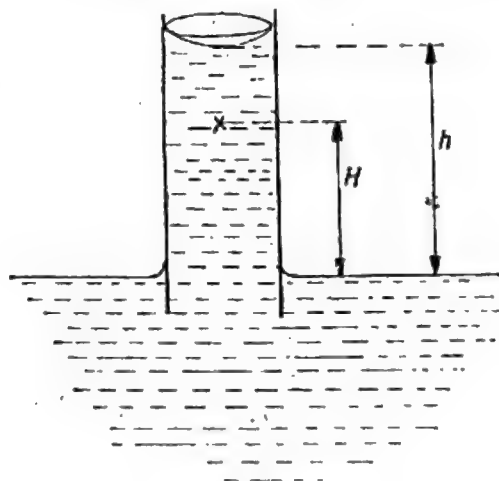


Fig. F.B.185

b) Se pune condiția de egalitate a presiunilor la același nivel, la echilibrul unui lichid. Astfel la nivelul lichidului din vasul mare (fig. F.B.185), rezultă  $p_0 + \rho gh - p_\sigma = p_0$ , unde  $p_\sigma$  este presiunea datorată forțelor de tensiune superficială. Din relație rezultă că această presiune este  $p_\sigma = \rho gh$ . Punind aceeași

condiție a egalității presiunilor la nivelul  $H$  în tubul capilar, se obține  $p_0 + \rho g(h - H) - p_a = p_H$ , de unde rezultă  $p_0 + \rho gh - \rho gH - p_a = p_H$  și deci  $p_H = p_0 - \rho gH = 10^5 - 800 \cdot 9,8 \cdot 10^{-2} = 99\,921,6 \text{ N/m}^2$ .

2°. a) Poziția inițială a spirei fiind paralelă cu liniile cîmpului magnetic (fig. F.B.186), rezultă că unghiul  $\alpha$  dintre normala  $\vec{n}$  la spirală și liniile cîmpului magnetic este egal cu  $\frac{\pi}{2}$ . Cum fluxul  $\Phi = BS \cos \alpha$ , se deduce că fluxul prin spirală în poziția inițială este nul.



Fig. F.B.186

b) Dacă spira se rotește cu un unghi  $\alpha$  în jurul unui diametru perpendicular pe liniile de cîmp magnetic (fig. F.B.187 și fig. F.B.188), în spira închisă va apărea un curent electric care va avea sensul indicat în figurile respective. Sensul curentului indus este dat de regula lui Lenz: tensiunea electromotoare indusă și curentul indus au un astfel de sens, încît fluxul magnetic produs de curentul indus să se opună variației fluxului magnetic inductor.

Sensul inducției magnetice induse  $\vec{B}_{\text{indus}}$ , este dat de regula burghiului drept și anume, este același cu sensul de înaintare al burghiului drept cînd acesta este rotit în sensul în care circulă curentul electric indus prin spirală.

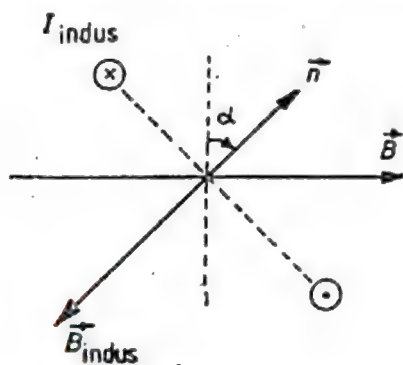


Fig. F.B.187

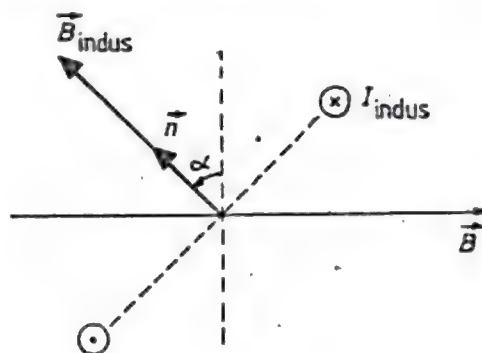


Fig. F.B.188

c) La rotirea spirei cu unghiul  $\alpha = 60^\circ$ , printr-o secțiune a spirei în timpul  $\Delta t$  va trece o sarcină electrică  $q = i \Delta t = \frac{e}{R} \Delta t$ , unde  $e$  este tensiunea electromotoare indusă, care, în conformitate cu legea lui Faraday, este  $e = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ . Variația fluxului  $\Delta \Phi = \Phi_{\text{final}} - \Phi_{\text{inițial}}$ , în care  $\Phi_{\text{inițial}}$  (fluxul pentru  $\alpha = 0$ ) este nul, iar  $\Phi_{\text{final}}$  (cînd  $\alpha = 60^\circ$ ) va fi:  $\Phi_{1 \text{ final}} = BS \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = BS \sin \alpha$ , pentru cazul 1 (fig. F.B.187), respectiv  $\Phi_{2 \text{ final}} = BS \cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -BS \sin \alpha$ , pentru cazul 2 (fig. F.B.188). Prin urmare, în ambele cazuri,

$$|q| = \frac{BS \sin \alpha}{R \Delta t} \cdot \Delta t = \frac{BS \sin \alpha}{R} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 400 \cdot 10^{-4} \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{0,04} = \sqrt{3} \cdot \pi \cdot 10^{-3} \text{ C.}$$

3°. a) Se formează imagini reale, răsturnate, una mai mare și cealaltă mai mică decât obiectul. Imaginile sînt reale pentru că lentila se află între obiect și imagine și deci imaginile sînt formate de razele care vin de la obiect. Pentru a determina pozițiile lentilei care dau imagine clară pe ecran se aplică, pentru una dintre cele două poziții ale lentilei (fig. F.B.189), formula lentilelor,  $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$  și se ține seama de relația  $x_2 + (-x_1) = d$ . Eliminînd de exemplu pe  $x_2$  între cele

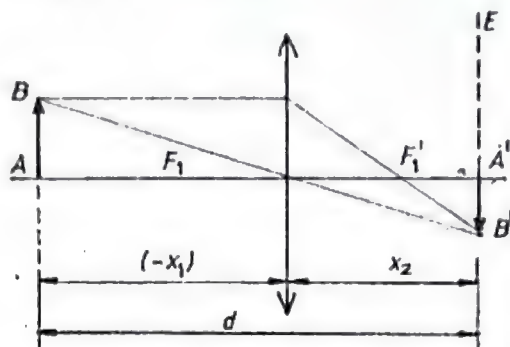


Fig. F.B.189

două relații, se obține ecuația de gradul al doilea,  $x_1^2 + dx_1 + fd = 0$ . Rezolvînd ecuația se obține  $(x_1)_1 = \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4fd}}{2}$  și  $(x_1)_2 = \frac{-d - \sqrt{d^2 - 4fd}}{2}$ . Întrucît  $(x_1)_1$  și  $(x_1)_2$  sînt distanțe de la obiect la lentilă, rezultă că  $\frac{-d + \sqrt{d^2 - 4fd}}{2} < 0$  și  $\frac{-d - \sqrt{d^2 - 4fd}}{2} < 0$ . Întrucît  $x_2 + (-x_1) = d$ , se obțin cu ușurință și valorile corespunzătoare pentru cele două distanțe  $x_2$  de la lentilă la imagine, distanțe care trebuie deci să fie pozitive,  $(x_2)_1 = \frac{d + \sqrt{d^2 - 4fd}}{2} > 0$  și  $(x_2)_2 = \frac{d - \sqrt{d^2 - 4fd}}{2} > 0$ .

b) Pentru a se obține două imagini reale și distincte se pune condiția ca  $\Delta = d^2 - 4fd > 0$ , deci  $d > 4f$ . Pentru cazul  $d = 4f$  se obțin imagini reale și egale, deci cele două imagini coincid.

c) Se cere raportul mărimilor imaginilor  $\beta = \frac{|I_1|}{|I_2|} = \frac{|A'B'|}{|A''B''|}$ .

Din figura F.B.189 rezultă  $\frac{|A'B'|}{AB} = \frac{(x_2)_1}{(-x_1)_1}$  și, analog,  $\frac{|A''B''|}{AB} = \frac{(x_2)_2}{(-x_1)_2}$ , prin urmare raportul  $\beta = \frac{|A'B'|}{|A''B''|} = \frac{(x_2)_1}{(-x_1)_1} \cdot \frac{(-x_1)_2}{(x_2)_2} = \frac{(d + \sqrt{d^2 - 4fd})^2}{(d - \sqrt{d^2 - 4fd})^2}$ . Pentru valorile  $d = 40$  cm și  $f = 10$  cm, imaginile coincid ( $\sqrt{d^2 - 4fd} = 0$ ), deci raportul imaginilor  $\beta = \frac{|A'B'|}{|A''B''|} = 1$ .

4°. a) Scriind legile electrolizei,  $m = KIt$  și  $K = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n}$ , rezultă  $m = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} It = \frac{1}{96\,400} \cdot \frac{108}{1} \cdot 1 \cdot 3\,600 = 4,03 \text{ g} = 4,03 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}$ .

b) Pentru determinarea numărului de molecule se pornește de la ecuația termică de stare, scrisă sub forma  $p_0 = nkT_0$ , unde  $p_0$  și  $T_0$  sînt presiunea și temperatura în condiții normale,  $n = \frac{N}{V}$  este numărul de molecule din unitatea de volum, iar  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  este constanta lui Boltzmann.



Rezultă  $N = \frac{p_0 V}{k T_0} = \frac{101\,325 \cdot 10^{-6}}{1,38054 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15} = 2,687 \cdot 10^{19}$  molecule. Pentru determinarea masei volumului de gaz se pornește de la expresia numărului  $\nu$  de kilomoli,  $\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}$ , de unde  $m = \mu \frac{N}{N_A} = 2 \cdot \frac{2,687 \cdot 10^{19}}{6,023 \cdot 10^{26}} = 8,92 \cdot 10^{-8}$  kg. Atît numărul de molecule, cît și masa volumului de gaz pot fi determinate și în alte moduri.

e) Din expresia diferenței de drum pentru razele difractate care dau maxim de ordinul  $k$ ,  $l \sin \alpha = k\lambda$ , rezultă  $l = \frac{2\lambda}{\sin \alpha} = \frac{2 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{0,2} = 5 \cdot 10^{-6}$  m.

5°. Acest subiect a fost tratat la XXVII. 5°.b

LXI. 1°. a) Se rezolvă circuitul (fig. F.B.27) și se determină intensitatea  $I$  a curentului prin rezistența  $X$ , în funcție de valorile acesteia. În acest scop se determină mai întîi intensitatea  $I_1$  a curentului care străbate rezistențele  $r$  și  $R_1$ , legate în serie, aplicînd legea lui Ohm,

$$I_1 = \frac{E}{r + R_1 + \frac{R_2 X}{R_2 + X}} = \frac{3(20 + X)}{10 + X}.$$

Cunoscînd pe  $I_1$ , se poate determina tensiunea  $U$  la bornele rezistenței  $X$ ,

$$U = E - (r + r_1)I_1 = \frac{60X}{10 + X}.$$

Prin urmare, intensitatea  $I$  va fi

$$I = \frac{U}{X} = \frac{60}{10 + X}.$$

Pe de altă parte, cunoscînd puterea  $P$  disipată pe rezistența  $X$ , intensitatea  $I$  a curentului prin rezistența  $X$  se poate exprima și astfel:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{4(10 + X)}{3X}.$$

Egalînd expresiile obținute în cele două moduri pentru intensitatea  $I$  a curentului prin rezistența  $X$  și rezolvînd ecuația de gradul II astfel formată se obțin valorile lui  $X$  pentru care puterea disipată pe  $X$  să fie de 80 W și anume,  $X_1 = 20 \Omega$  și  $X_2 = 5 \Omega$ .

b) Puterea dezvoltată de sursă este  $P = \frac{E^2}{R_t}$ , unde  $R_t$  este rezistența totală a circuitului. Calculînd  $R_t$ , cînd  $X$  este înlocuit cu  $X_1$ , respectiv  $R_t$ , cînd  $X$  este înlocuit cu  $X_2$ , se constată că  $R_{t_1} = 30 \Omega$  este mai mare decît  $R_{t_2} = 24 \Omega$ , deci puterea  $P_1 = \frac{E^2}{R_{t_1}} = 480$  W, dezvoltată de sursă în primul caz, este mai mică decît puterea  $P_2 = \frac{E^2}{R_{t_2}} = 600$  W dezvoltată de sursă în cazul al doilea.

2°. a) Se știe că energia internă a unei mase  $m$  de gaz ideal aflat la temperatura  $T$  este  $U = \frac{3}{2} \nu RT$ . Variația energiei interne în procesul izoterm se datorește numai variației numărului de kilomoli de gaz care ies din vas în timpul  $\Delta t$ . În starea inițială, energia internă a gazului este  $U_1 = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT$ , iar după timpul  $\Delta t$ , energia internă devine  $U_2 = \frac{3}{2} \frac{m'}{\mu} RT$ . Prin urmare, variația energiei interne  $\Delta U = U_1 - U_2 = \frac{3}{2} \frac{\Delta m}{\mu} RT$ .

Întrucit temperatura  $T$  nu este cunoscută, din ecuația termică de stare pentru momentul inițial  $pV = \frac{m}{\mu} RT$  rezultă  $\frac{1}{\mu} RT = \frac{1}{m} pV$ , prin urmare  $\Delta U = \frac{3}{2} \frac{Q\Delta t}{m} pV \simeq 831 \text{ J}$ .

b) Din ecuația termică de stare,  $pV = \frac{m}{\mu} RT$ , rezultă  $T = \frac{\mu pV}{mR} = 296,2 \text{ K}$ .

3°. Scriind formula lentilelor subțiri, respectiv a oglinzilor concave pentru stratul de apă și oglindă considerate separat, precum și pentru sistemul format în condițiile date, se obține:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = (n-1) \frac{1}{R}, \text{ întrucit } R_1 = \infty \text{ și } R_2 = -R,$$

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = -\frac{2}{R},$$

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = (n-1) \frac{1}{R}$$

și, ținând seama de relațiile  $x_1' = -x_2'$ ,  $x_1' = x_2$ ,  $x_{2s} = -x_2'$ ,  $x_{1s} = x_1$ , din formulele de mai sus rezultă  $\frac{1}{x_{2s}} + \frac{1}{x_{1s}} = 2n \left( -\frac{1}{R} \right)$ , de unde se determină  $\frac{1}{f_s} = -\frac{2n}{R}$  sau  $f_s = -\frac{R}{2n} = -0,15 \text{ m}$ .

4°. a) Se știe că rezistența electrică a unui conductor metalic sub formă de fir este  $R = \rho \frac{l}{S}$ . Din cei trei factori, rezistivitatea  $\rho$  este cea care variază cel mai mult cu temperatura. Neglijând deci variațiile cu temperatura ale lungimii  $l$  și secțiunii  $S$ , față de variația rezistivității, rezultă  $R_t = \rho_t \frac{l}{S}$ . Dar

$$\rho_t = \rho_{t_0} [1 + \alpha(t - t_0)] = 2,8 \cdot 10^{-8} [1 + 4 \cdot 10^{-3} (100 - 20)] = 3,696 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ cm}.$$

Prin urmare, rezistența firului de aluminiu la temperatura de  $100^\circ\text{C}$  va fi

$$R_t = 3,696 \cdot 10^{-8} \frac{1}{10^{-6}} = 3,696 \cdot 10^{-2} \Omega.$$

b) Lucrul mecanic efectuat în transformarea adiabatică este  $L = \nu C_v (T_1 - T_2)$ . Pornind de la relația Robert-Mayer,  $C_p = C_v + R$  și cunoscând coeficientul adiabatic  $\gamma$ , se deduce că  $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$ . Aplicând ecuația termică de stare, la stările inițială și

finală ale gazului în transformarea adiabatică, se obține  $T_1 = \frac{1}{\nu R} p_1 V_1$  și  $T_2 = \frac{1}{\nu R} p_2 V_2$ ; prin urmare,  $L = \frac{1}{\gamma - 1} (p_1 V_1 - p_2 V_2)$ .

Pentru determinarea presiunii  $p_2$  în starea finală, se aplică ecuația lui Poisson,  $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$ , de unde rezultă  $p_2 = p_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = p_1 \cdot \frac{1}{2^\gamma}$ .

Înlocuind în expresia lucrului mecanic, se obține

$$L = \frac{1}{\gamma - 1} \left( p_1 V_1 - p_1 \frac{1}{2^\gamma} V_2 \right) = \frac{p_1}{\gamma - 1} \left( V_1 - \frac{1}{2^\gamma} V_2 \right) = \\ = \frac{10^5}{1,4 - 1} \left( 10 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{2^{1,4}} \cdot 20 \cdot 10^{-6} \right) = \frac{1}{0,4} \left( 1 - \frac{1}{2^{0,4}} \right) = 0,608 \text{ J}.$$

c) Se pornește de la relația lui Bouguer,  $I = I_0 e^{-kx}$ , în care  $I = \frac{I_0}{2}$  și, după logaritmare, se obține  $x = \frac{\ln 2}{k} = 1,506 \text{ cm}$ .

5°. Fenomenul de interferență este observabil numai dacă radiațiile care interferă au aceeași frecvență și sint coerente. În practică, fasciculele coerente se realizează prin divizarea, în două sau mai multe părți, a fascicului emis de o sursă monocromatică. Fasciculele parțiale sint coerente între ele, deoarece, provenind de la aceeași sursă, conțin în mod identic toate undele elementare emise de atomii sursei monocromatice. Dispozitivele cu ajutorul cărora se pot obține fascicule coerente se numesc dispozitive interferențiale, așa cum sint dispozitivul lui Young, lama cu fețe plan-paralele și pana optică.

Dispozitivul lui Young, cu ajutorul căruia se obțin două fascicule coerente prin divizarea frontului de undă, constă dintr-o sursă de lumină  $S$ , alcătuită dintr-un filament drept, prevăzut cu filtru optic, un paravan opac  $PO$ , două fante  $F_1$  și  $F_2$ , practicate în paravan, dreptunghiulare, paralele între ele și paralele și cu filamentul sursei și un ecran  $E$  (fig. F.B.190). Cele două fante devin două surse de lumină coerentă, deoarece undele emise de ele provin de pe aceeași suprafață de undă.

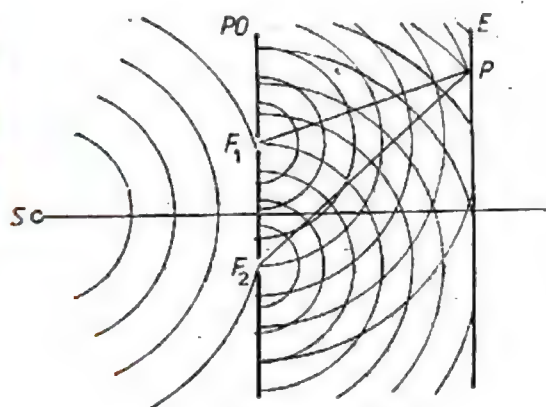


Fig. F.B.190

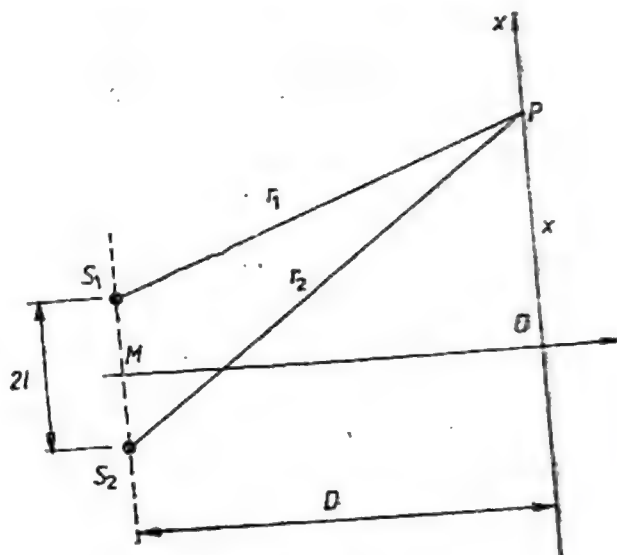


Fig. F.B.191

Se notează cu  $2l$  distanța dintre sursele  $S_1$  și  $S_2$ , cu  $r_1$  și  $r_2$ , distanțele dintre surse și un punct oarecare  $P$  de pe ecran, cu  $D$  distanța dintre planul surselor și ecran și cu  $x$ , distanța dintre planul de simetrie al sistemului și punctul  $P$  (fig. F.B.191). În punctul  $P$  ecuațiile celor două unde vor fi

$$E_1 = E_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r_1}{c} \right) \text{ și } E_2 = E_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r_2}{c} \right),$$

iar ecuația undei rezultate din suprapunerea celor două unde va fi

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = E_0 \left[ \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r_1}{c} \right) + \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r_2}{c} \right) \right] = \\ &= 2E_0 \cos \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{r_2 - r_1}{2c} \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r_1 + r_2}{2c} \right). \end{aligned}$$

Amplitudinea undei rezultante va fi

$$A = 2E_0 \cos \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{2cT} = 2E_0 \cos \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}.$$



iar intensitatea luminoasă  $I$  în punctul  $P$ ,  $I = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}$ . Intensitatea luminoasă va fi maximă când diferența de drum  $r_2 - r_1 = 2k \frac{\lambda}{2}$  și minimă când  $r_2 - r_1 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$ , unde  $k$  este un număr întreg. Pentru un mediu transparent de indice de refracție  $n$ , condițiile de mai sus se scriu utilizându-se drumurile optice  $n(r_2 - r_1) = 2k \frac{\lambda}{2}$  și  $n(r_2 - r_1) = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$ . Prin suprapunerea celor două unde coerente, pe ecran vor apărea franje rectilinii, luminoase (maxime de interferență) și întunecoase (minime de interferență).

Distanța dintre două maxime (sau două minime) consecutive se numește interfranjă și se notează cu  $i = x_{k+1} - x_k$ . Pentru determinarea expresiei interfranței, din figura F.B.191 se constată că:

$$r_1^2 = D^2 + (x - l)^2 \text{ și } r_2^2 = D^2 + (x + l)^2, \text{ deci}$$

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 4xl, \text{ prin urmare}$$

$$r_2 - r_1 = \frac{4xl}{r_1 + r_2}. \text{ Cum } x \ll D, \text{ se poate aproxima}$$

$r_1 + r_2 \simeq 2D$ . Notind cu  $x_k$  valoarea lui  $x$  pentru care intensitatea este maximă, rezultă  $\frac{4x_k l}{2D} = 2k \frac{\lambda}{2}$ , de unde  $x_k = \frac{kD\lambda}{2l}$ . Pentru un ordin de interferență imediat superior  $k + 1$ ,  $x_{k+1} = \frac{(k+1)D\lambda}{2l}$ , deci  $i = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda D}{2l}$ . Cunoscuându-se valoarea interfranței, se poate determina lungimea de undă  $\lambda = \frac{2li}{D}$ .

Dacă izvoarele coerente sînt punctuale sau filiforme, ca în cazul dispozitivului lui Young, interferența este nelocalizată (regiunea din spațiu în care are loc interferența este mare).

Cu ajutorul lamei cu fețe plane și paralele și a penei optice, un fascicul de lumină este divizat cu una sau mai multe suprafețe reflectătoare, de pe care o parte din lumină se reflectă, iar altă parte se transmite; interferența în acest caz, numită interferență localizată, se obține cu surse de lumină nepunctuale, întinse.

Pentru lama cu fețe plane paralele (fig. F.B.192), de grosime  $d$  și indice de refracție  $n$ , diferența de drum optic dintre razele 2 și 3 care interferează este  $\delta = n(AB + BC) - \left(AD - \frac{\lambda}{2}\right)$  sau  $\delta = n\left(\frac{d}{\cos r} + \frac{d}{\cos r}\right) - \left(AC \sin i - \frac{\lambda}{2}\right)$ , de

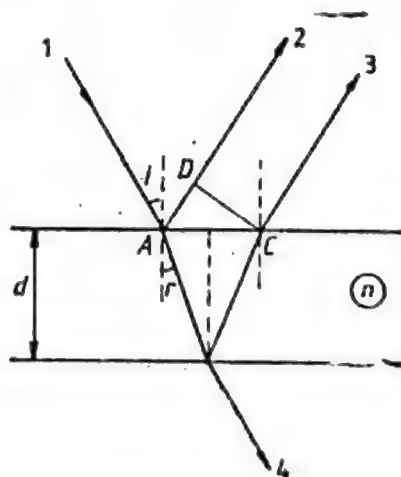


Fig. F.B.192

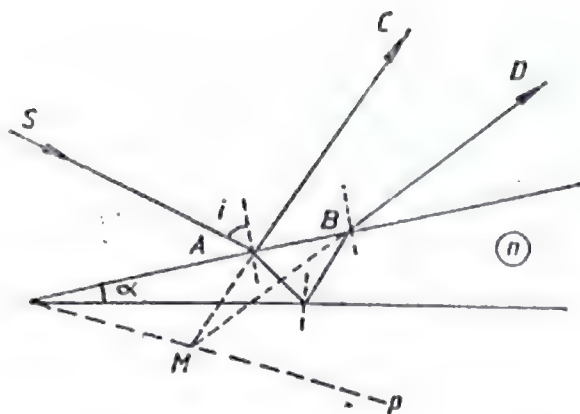


Fig. F.B.193

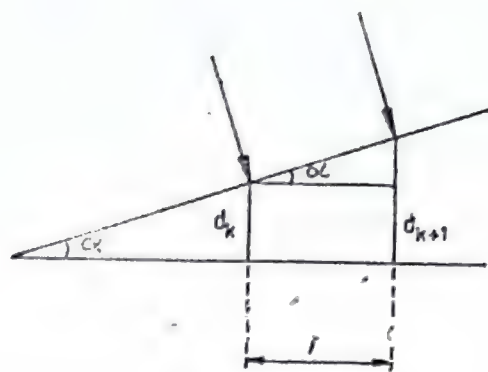


Fig. F.B.194

unde rezultă  $\delta = 2nd \cos r + \frac{\lambda}{2}$ . Pentru incidență normală,  $i = 0$ , rezultă că și  $r = 0$  și deci  $\cos r = 1$ , adică  $\delta = 2dn + \frac{\lambda}{2}$ .

Pentru pana optică, de indice de refracție  $n$  și unghi  $\alpha$  între fețele care delimitează pana, razele coerente  $AC$  și  $BD$  interferă în punctul  $M$  (fig. F.B.193). Toate punctele de localizare a franjelor se vor afla într-un plan  $P$ , care trece prin vârful  $O$  al penei. Pentru determinarea interfranței  $i$ , la incidență normală, dacă  $d_k$  este o grosime oarecare a penei pentru care se obține un maxim de interferență de ordinul  $k$  (fig. F.B.194), atunci  $2nd_k + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$ , iar pentru un maxim de ordinul  $k+1$ ,  $2nd_{k+1} + \frac{\lambda}{2} = (k+1)\lambda$ . Rezultă  $\alpha i = d_{k+1} - d_k = \frac{\lambda}{2n}$  și deci  $i = \frac{\lambda}{2\alpha n}$ .

## C. PROBLEME PROPUSE

### ENUNȚURI

#### 1. MECANICĂ

1°. Un resort cu masa neglijabilă și constanta elastică  $k = 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  este suspendat în poziție verticală. Se cere: a) cu cât se alungește resortul când de capătul lui se agață o masă  $m = 0,1 \text{ kg}$  care se lasă liberă; b) amplitudinea de oscilație a masei  $m$  și viteza cu care corpul trece prin poziția de echilibru; c) ecuația care descrie oscilația masei  $m$  considerind momentul agățării ca moment inițial. Se va considera  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

2°. Un corp cu masa  $m_1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$  deplasându-se orizontal cu viteza  $v = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ciocnește elastic un corp cu masa  $m_2 = 0,8 \text{ kg}$  suspendat de un fir cu lungimea  $l = 1 \text{ m}$ , aflat în repaus. Să se calculeze: a) vitezele celor două corpuri după ciocnire; b) tensiunea din fir în momentul imediat următor ciocnirii; c) unghiul de deviație maximă a corpului față de poziția de echilibru. Se va considera  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

3°. Un corp cu masa  $M = 2,97 \text{ kg}$  se află în repaus pe un plan orizontal și este legat de un perete vertical prin intermediul unui resort lung, nedeformat, de masă neglijabilă și constantă de elasticitate  $k = 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . Un proiectil de masă  $m = 30 \text{ g}$  și viteză  $v = 200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  orientat pe direcția orizontală și în sensul corp-perete pătrunde și se oprește instantaneu în acest corp. Considerind neglijabilă acțiunea forțelor elastice și de frecare în procesul de ciocnire, să se calculeze: a) distanța maximă față de poziția inițială la care se deplasează corpul și lungimea drumului total parcurs de acesta în cazul când coeficientul de frecare dintre corp și plan este  $\mu = 0,2$ ; b) amplitudinea și energia oscilației sistemului în cazul absenței frecării.

Se consideră accelerația gravitațională  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

(Concurs de admitere, sept. 1982)

4°. Un om cu masa  $m = 70 \text{ kg}$  aflat la marginea unei platforme cu înălțimea  $H = 10 \text{ m}$  față de sol, ridică o greutate de  $200 \text{ N}$  cu ajutorul unui cablu trecut peste un scripete fix. Știind că, inițial, greutatea se află la nivelul solului și că  $1 \text{ m}$  de cablu are o masă de  $0,5 \text{ kg}$ , să se afle: a) lucrul efectuat de om în procesul de ridicare a greutății până la nivelul platformei; b) greutatea maximă pe care o poate ridica omul dacă el trage cablul orizontal la înălțimea  $h = 1 \text{ m}$ , în dreptul centrului său de greutate, iar pasul său este de  $l = 1 \text{ m}$ .

Se va lua  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

5°. Un corp sferic cu raza  $r = 1 \text{ cm}$ , dintr-un material cu densitatea  $\rho_c = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , se află pe fundul unui bazin cu apă, adâncimea apei fiind  $h = 2 \text{ m}$ . Dacă bila este lansată cu viteza  $v_0 = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  sub un unghi  $\alpha = 60^\circ$  față de fundul orizontal al bazinului, să se afle: a) distanța de la punctul de lansare până la punctul în care corpul ajunge din nou pe fundul bazinului; b) energia potențială a corpului față de fundul bazinului la  $0,3 \text{ s}$  după lansare; c) înălțimea maximă la care ajunge corpul față de fundul bazinului.

Se neglijează frecarea între corp și apă. Se cunoaște densitatea apei  $\rho_a = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  și se va lua  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .



6°. Un proiectil cu masă  $m = 2 \text{ kg}$ , aflat în repaus la înălțimea  $h = 100 \text{ m}$ , explodează desfăcându-se în două fragmente ale căror mase sînt  $m_1$  și  $m_2$ . În urma exploziei, cele două fragmente capătă vitezele  $v_{01} = 30 \text{ m/s}$  și respectiv  $v_{02} = 40 \text{ m/s}$ , ambele orientate orizontal. Neglijînd masa explozibilului, să se afle: a) energia degajată în explozie; b) distanța dintre cele două fragmente în momentul cînd vitezele lor sînt orientate în direcții reciproc perpendiculare; c) înălțimea la care se află corpurile în acest moment.

Se consideră  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

7°. Două corpuri de dimensiuni mici avînd masele  $m_1$  și  $m_2$  se află pe un plan înclinat de unghi  $\alpha$ . Cele două corpuri sînt în contact unul cu celălalt, corpul de masă  $m_1$  aflîndu-se mai jos. Notînd cu  $\mu_1$  și  $\mu_2$  coeficienții de frecare ai corpurilor  $m_1$  și, respectiv,  $m_2$  cu planul, și știind că  $\mu_1 > \mu_2$ , să se afle: a) forța pe care corpul de masă  $m_2$  o exercită asupra corpului de masă  $m_1$  în timpul coborîrii pe plan; b) valoarea minimă a unghiului  $\alpha$  pentru care corpurile coboară pe planul înclinat; c) ce viteză au corpurile la baza planului, dacă ele pornesc din repaus de la înălțimea  $h$ .

8°. Un corp de masă  $m = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$  efectuează o mișcare oscilatorie armonică. La un moment dat,  $t_1$ , elongația este  $y_1 = 0,1 \text{ m}$ , viteza  $v_1 = \sqrt{7} \cdot 10^{-1} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , iar accelerația  $a_1 = 0,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Știind că la momentul inițial  $t = 0$ ,  $y = A \frac{\sqrt{3}}{2}$ , se cere: a) ecuația mișcării oscilatorii armonice; b) viteza maximă a corpului, accelerația maximă și forța maximă care acționează asupra corpului; c) elongația  $y_2$  pentru care energia cinetică a corpului este egală cu energia potențială a sa; d) momentele în care energia potențială este maximă și energia cinetică este maximă; e) să se scrie ecuația oscilației rezultante, într-un punct în spațiu, unde oscilația considerată se compune cu o oscilație paralelă avînd ecuația

$$y_2(t) = \frac{5}{3} \cdot 10^{-1} \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}.$$

9°. Pe un plan orizontal se află un plan înclinat de masă  $M$  și de unghi  $\alpha$ , peste care se așează un corp de masă  $m$  (fig. F.C.1). Coeficientul de frecare dintre corpul de masă  $m$  și planul înclinat este  $\mu_m$ , iar coeficientul de frecare dintre planul înclinat și planul orizontal este  $\mu_M$ . Se cer: a) accelerațiile  $a_m$  și  $a_M$  ale celor două corpuri; b) forța cu care apasă corpul de masă  $m$  asupra planului înclinat; c) forța cu care apasă planul înclinat asupra planului orizontal; d) să se particularizeze rezultatele de la a), b) și c) pentru  $\mu_M = 0$ .

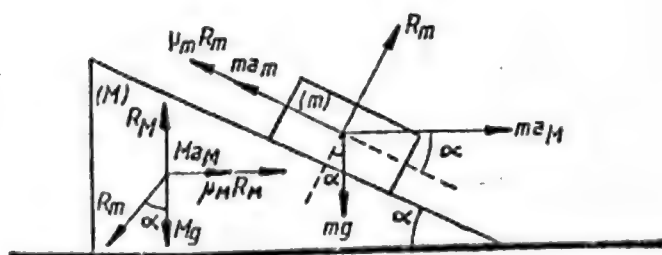


Fig. F.C.1

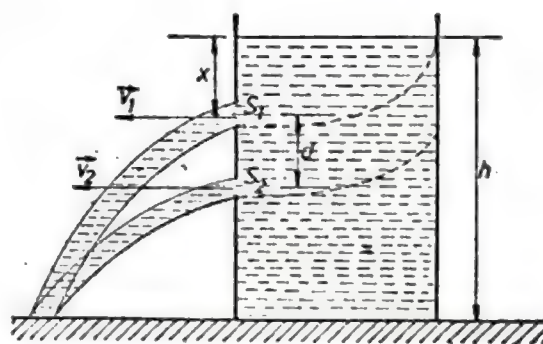


Fig. F.C.2

10°. Dintr-un vas cu apă, al cărui nivel este menținut constant la înălțimea  $h$ , curge apă prin două orificii dispuse pe aceeași generatoare la distanța  $d$  unul față de celălalt (fig. F.C.2). Se cere să se calculeze: a) distanța față de suprafața apei a celor două orificii, dacă cele două jeturi de apă cad în același punct din planul orizontal care cuprinde baza vasului cu apă; b) debitele de volum  $Q_1$  și  $Q_2$  corespunzătoare

toare celor două orificii, secțiunile deschiderilor acestora fiind  $S_1$  și, respectiv,  $S_2$ ;  
c) debitul de volum,  $Q$ , necesar pentru a menține constant nivelul apei în vas;  
d) forțele  $F_1$  și  $F_2$  care trebuie exercitate asupra unor dopuri pentru a opri curgerea lichidului din rezervor, acesta fiind umplut până la înălțimea  $h$ .

11°. O rachetă spațială se rotește în jurul Pământului pe o orbită circulară cu perioada  $T_0 = 88,8$  min. Prin utilizarea dispozitivelor de manevră ale rachetei, traiectoria acesteia este modificată într-o nouă orbită circulară, caracterizată prin perioada  $T_1 = 89,6$  min. Să se determine: a) cât de mult a schimbat această corecție a orbitei, înălțimea rachetei deasupra suprafeței Pământului? b) de câte ori s-a schimbat viteza rachetei.

Se dau: accelerația gravitațională la suprafața Pământului  $g = 9,80$  m/s<sup>2</sup>, raza Pământului  $R = 6\,370$  km.

(Prima Balcaniadă de Fizică, Plovdiv, R.P. Bulgaria, mai 1986)

12°. Două corpuri de mase  $m_1 = 2$  kg și  $m_2 = 1$  kg, legate printr-un fir inextensibil lung trecut peste un scripete fix avind momentul de inerție  $I = 10^{-2}$  kg · m<sup>2</sup> și raza  $R = 0,1$  m, se găsesc inițial în repaus, la aceeași înălțime  $h = 1$  m deasupra solului. Să se determine: a) durata după care corpul de masă  $m_1$  atinge solul și viteza sa, în cazul în care firul alunecă fără frecare pe suprafața scripetelui (blocat); b) viteza cu care același corp atinge solul în cazul în care deplasarea firului antrenează scripetele (fără ca firul să alunece pe suprafața acestuia); c) accelerația unghiulară imprimată scripetelui în cazul precedent.

Se va lua accelerația gravitațională  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>.

(Concursul de admitere în facultăți de profil electric, componenți ai loturilor olimpice de matematică, fizică și chimie, iunie 1984)

13°. Se consideră o sferă  $S$  de rază  $R$ , avind un canal îngust în lungul unui diametru al său (v. fig. F.C.3). Definind fluxul intensității cîmpului gravitațional,  $\vec{\Gamma}$ , printr-un element de suprafață avind aria  $\Delta A$  și vectorul unitar al normalei la

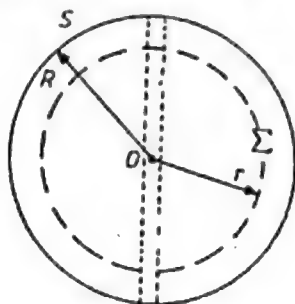


Fig. F.C.3

suprafață  $\vec{\Gamma}_n$  prin relația  $\Delta\Phi = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Gamma}_n \Delta A$ , să se determine: a) fluxul intensității cîmpului gravitațional produs de o masă punctiformă  $m$  prin suprafața unei sfere  $s$  de rază  $r$ , concentrică cu  $S$ , în cazul în care corpul de masă  $m$  este interior, respectiv exterior sferei  $s$ , iar sfera  $S$  este goală; b) dependența forței de atracție universale („greutății”) care acționează asupra corpului de masă  $m$ , de distanța  $r$  până la centrul  $O$  al sferei  $S$ , în cazul în care în această sferă ar fi distribuită uniform substanță cu densitatea  $\rho = 6\,000$  kg · m<sup>-3</sup>; c) perioada oscilațiilor efectuate de corpul de masă  $m$  în interiorul canalului considerat.

Se dă constanta atracției universale  $K = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N · m<sup>2</sup> · kg<sup>-2</sup>.

14°. Un vas cilindric de înălțime  $h_0 = 0,8$  m și secțiune  $S = 8 \cdot 10^{-2}$  m<sup>2</sup> este plin cu un lichid, care se poate scurge din vas printr-un orificiu de secțiune  $s = 10^{-4}$  m<sup>2</sup>, aflat la baza vasului.



a) Să se stabilească expresiile vitezelor  $v_1$  de coborire a apei din vas, respectiv  $v_2$  de ieșire a lichidului prin orificiu.

b) Să se calculeze timpul după care se scurge prin orificiu întreaga cantitate de lichid din vas.

c) Ce cantitate de lichid s-ar scurge în acest timp dacă nivelul lichidului din vas s-ar menține constant.

Se cunoaște  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

15°. Două corpuri de mase  $m_1 = 0,2 \text{ kg}$  și  $m_2 = 0,8 \text{ kg}$  sînt separate printr-o distanță  $r = 0,25 \text{ m}$ .

a) Să se găsească punctul de pe direcția maselor în care intensitatea cîmpului gravitațional se anulează.

b) Să se calculeze intensitatea cîmpului gravitațional datorită acestor mase într-un punct situat la distanța  $r_1 = 0,20 \text{ m}$  față de  $m_1$  și  $r_2 = 0,15 \text{ m}$  față de  $m_2$ .

c) Presupunind că corpul  $m_1$  este lansat într-un tunel imaginar care străbate Pămîntul prin centrul acestuia și știind că forța gravitațională asupra punctului material aflat la distanța  $r < R_0$  de centrul Pămîntului are expresia  $F(r) = -kr$ , unde  $k = \frac{4\pi m_1 K \rho}{3}$ ,  $R_0$  fiind raza Pămîntului, iar  $\rho$  densitatea acestuia, să se calculeze perioada mișcării oscilatorii a corpului  $m_1$  în tunel. Se cunosc: raza Pămîntului  $R_0 = 6,3 \cdot 10^6 \text{ m}$ , accelerația gravitațională la suprafața Pămîntului,  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ , constanta atracției universale  $K = 6,670 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$ .

16°. Un corp cilindric plutește pe suprafața mercurului dintr-un vas, de formă cubică și de latură  $l = 0,2 \text{ m}$ , astfel încît o treime din volumul corpului este scufundată. Se toarnă apă peste corp astfel încît corpul să fie acoperit la limită cu apă.

a) Să se calculeze densitatea corpului și fracțiunea din volumul acestuia scufundată în mercur după turnarea apei.

b) Dacă se scoate corpul cilindric și vasul se umple numai cu apă, să se afle forța rezultantă  $F$  exercitată de lichid asupra peretelui lateral al vasului cubic.

c) Să se afle înălțimea  $h_0$ , în raport cu baza, unde se află punctul de aplicație al forței rezultante.

Se cunosc:  $\rho_{\text{apă}} = 1\,000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_{\text{Hg}} = 13\,600 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

17°. O bilă de masă  $m_1$  este fixată la capătul unei bare rigide de lungime  $l = 0,4 \text{ m}$  și masă neglijabilă ce poate oscila în jurul unui ax orizontal care trece prin celălalt capăt al barei. Bara este deviată în poziție orizontală față de poziția de echilibru și lăsată liberă, astfel încît, atunci cînd revine în poziția de echilibru, ciocnește elastic o altă bilă de masă  $m_2 = 3m_1$  aflată în repaus.

a) Să se calculeze vitezele  $v_1$  și  $v_2$  ale bilelor după ciocnire.

b) Să se determine unghiul de deviație al barei după ciocnire.

c) Știind că bila de masă  $m_2$  ciocnește frontal o a treia bilă de masă  $m_3 = 2m_2$ , aflată în repaus în apropierea sa, să se calculeze fracțiunea  $K$  din energia sa cinetică cedată bilei  $m_3$ , dacă ciocnirea este mai întîi perfect elastică, iar apoi perfect inelastică.

Se cunoaște  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

## 2. FIZICĂ MOLECULARĂ ȘI CĂLDURĂ. TERMODINAMICĂ

18°. O cantitate  $\nu = 1 \text{ mol}$  hidrogen se află într-un cilindru cu piston avînd lungimea  $l = 150 \text{ cm}$  și secțiunea  $S = 100 \text{ cm}^2$ . Gazul se comprimă prin deplasarea uniformă a pistonului cu viteza  $v = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ . Cilindrul fiind în permanență în contact cu un termostat cu temperatura  $T = 300 \text{ K}$ , se cere: a) presiunea din cilindru înainte de începerea comprimării; b) presiunea din cilindru după  $15 \text{ s}$  de com-



primare; c) lucrul mecanic efectuat în acest timp, în ipoteza că transformarea poate fi considerată reversibilă; d) graficul de variație a forței care acționează asupra pistonului în funcție de timp.

Se cunoaște: constanta gazelor ideale  $R = 8\,310\text{ J} \cdot \text{kmol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  și valorile  $\ln 10 = 2,3026$  și  $\ln 3 = 1,0986$ .

19°. Într-un tub de sticlă cu lungimea  $L = 1\text{ m}$  închis la ambele capete se găsește, de o parte și de alta a unui piston cu lungimea  $l = L/10$  și greutatea  $G = 10\text{ N}$ , cantități egale de gaz,  $\nu = 0,01\text{ mol}$ , la aceeași temperatură  $T = 300\text{ K}$ . Tubul este așezat vertical. Să se stabilească: a) poziția de echilibru a pistonului (se ia ca reper centrul său); b) dacă pistonul este îndepărtat de poziția de echilibru, în ce condiții oscilația pistonului poate fi aproximată ca oscilație armonică; c) perioada oscilației în condițiile de la punctul b).

Se neglijează frecările și se ia  $g = 10\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

20°. Un calorimetru, care împreună cu accesoriile, are o capacitate calorică  $C = 1\,200\text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ , conține o masă  $m_1 = 0,5\text{ kg}$  gheață sfărâmată mărunt cu temperatura  $T_1 = 258\text{ K}$ . În calorimetru cade de la înălțimea  $h = 5\text{ m}$  un jet de apă cu debitul  $D = 2 \cdot 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$  și temperatura  $T_2 = 323\text{ K}$ . Să se calculeze: a) după cit timp în calorimetru va exista numai gheață cu temperatura  $T = 273\text{ K}$ ; b) după cit timp în calorimetru va exista numai apă cu temperatura  $T = 273\text{ K}$ ; c) energia cinetică a apei căzute în calorimetru în acest timp.

Se cunosc: căldura specifică a apei  $c_a = 4\,180\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , a gheții  $c_g = 2\,100\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  și căldura latentă de topire a gheții  $\lambda = 334 \cdot 10^3\text{ J} \cdot \text{kg}$  și se consideră  $g = 10\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

21°. Pentru un anumit experiment este necesar ca, într-un recipient cu volumul  $V = 10^3\text{ cm}^3$ , să se afle aer la presiunea  $p_f = 100\text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ . Inițial presiunea aerului din recipient este presiunea atmosferică  $p_0 = 10^5\text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ . Evacuarea aerului se face cu o pompă la temperatura  $T = 300\text{ K}$ . Știind că secțiunea pistonului pompei este  $S = 12,5\text{ cm}^2$  și cursa pistonului este  $l = 20\text{ cm}$ , să se afle: a) masa de aer din vas în starea inițială; b) masa de aer evacuată din recipient în prima curbă a pistonului; c) numărul de curse efectuate de piston pentru evacuarea aerului din recipient.

Se cunosc: masa molară a aerului  $\mu = 28,9\text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$ , constanta universală a gazelor  $R = 8\,310\text{ J} \cdot \text{kmol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , iar  $\lg 5 = 0,69897$  și  $\lg 4 = 0,60206$ .

22°. Se consideră un gaz care suferă două transformări ciclice formate din următoarele transformări: (1) izocoră, adiabată și izotermă; (2) izobară, adiabată și izotermă. a) Știind că în ambele cazuri procesul izoterm are loc la temperatura minimă atinsă în cursul ciclului respectiv și că raportul dintre temperaturile extreme atinse în ambele cicluri este același,  $\epsilon$ , să se compare randamentele celor două cicluri. b) Să se calculeze aceleași randamente dacă, în aceleași condiții, procesul izoterm se desfășoară la temperatura maximă atinsă în cursul fiecărui ciclu.

23°. Într-o pompă cu piston, fără pierderi de energie prin intermediul căldurii, se comprimă  $10\text{ l}$  de aer care se află, inițial, la temperatura de  $20^\circ\text{C}$ , comprimarea făcându-se de la presiunea de o atmosferă la presiunea de cinci atmosfere. Comprimarea se face lent și pierderile fiind neglijabile, se admite reversibilitatea transformării. Să se calculeze: a) volumul final al aerului,  $V_f$ ; b) temperatura finală,  $T_f$ ; c) variația energiei interne,  $U_f - U_i$ .

Se cunoaște  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5}$ .

24°. O sferă de plastilină este aruncată cu viteza  $v_0 = 15\text{ m/s}$ , sub unghiul  $\alpha = 45^\circ$  față de orizontală, spre un perete vertical aflat la distanța  $l = 8\text{ m}$  față de punctul de aruncare. Sfera se lipește de perete. Considerind că întreaga energie cinetică a sferei contribuie la încălzirea acesteia, să se calculeze creșterea temperaturii sferei.

Căldura specifică a plastilinei este  $C = 2,5 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  și accelerația gravitațională  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

25°. Un kilomol de oxigen efectuează un ciclu Carnot în intervalul de temperaturi dintre  $27^\circ\text{C}$  și  $327^\circ\text{C}$ . Se știe că raportul dintre presiunea maximă și presiunea minimă, atinse în decursul ciclului, este  $\frac{p_{\max}}{p_{\min}} = 20$ . Se cere: a) randamentul ciclului; b) cantitatea de căldură  $Q_1$  primită în timpul ciclului; c) cantitatea de căldură  $Q_2$  cedată sursei reci în timpul ciclului; d) lucrul mecanic  $L$  furnizat de gaz în decursul ciclului.

Se cunosc:  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$  și  $\gamma = 1,41$ .

26°. Un motor Otto (Beau de Rochas) are ciclul de funcționare dat în figura F.C.4. La o compresie  $\frac{V_1}{V_2} = 4$  pentru substanța de lucru, s-a măsurat o creștere a presiunii  $\frac{p_2}{p_1} = 8$ . Se consideră ca substanță de lucru, cu ajutorul căreia se reali-

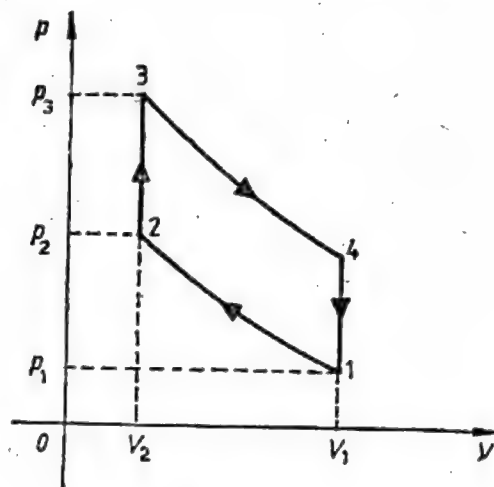


Fig. F.C.4

zează ciclul, un gaz ideal monoatomic. Se cere: a) să se arate că în transformările  $1 \rightarrow 2$  și  $3 \rightarrow 4$  căldura molară a gazului este exprimată prin relația  $C = C_v - 2R$ , unde  $R$  este constanta universală a gazului ideal; b) să se calculeze randamentul ciclului în funcție de raportul de compresie  $\epsilon = \frac{V_1}{V_2}$  și de raportul de creștere a presiunii prin explozie  $\mathcal{K} = \frac{p_3}{p_2}$ , efectuându-se calculele numerice pentru  $\epsilon = 4$  și  $\mathcal{K} = 2$ ;

c) să se compare randamentul astfel obținut cu cel al unui ciclu Carnot, realizat între temperaturile extreme.

27°. Într-un cilindru cu piston de volum  $V_1 = 1 \text{ m}^3$ , la temperatura  $T = 303 \text{ K}$  se află un amestec de azot și vapori saturați de apă. Masa amestecului este  $m_0 = 0,286 \text{ kg}$ . Se cere: a) masa de vapori de apă care se va condensa, dacă volumul se micșorează de  $k = 3$  ori la temperatură constantă; b) presiunea  $p$  a amestecului înainte de comprimare.

Se cunosc: presiunea vaporilor saturați de apă  $p_1 = 4,2 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ , la temperatura  $T = 303 \text{ K}$ ; masa molară pentru apă  $\mu_1 = 18 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$  și masa molară pentru azot  $\mu_2 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

28°. Într-o incintă de oțel se găsește un amestec de hidrogen  $\text{H}_2$  și oxigen  $\text{O}_2$  la temperatura  $T_0 = 293 \text{ K}$ . Incinta este rigidă, presiunea în interiorul său crescând — după arderea amestecului, inițiată de o scinteie electrică — de  $k$  ori. Se cere: a) să se determine dependența creșterii presiunii, în urma arderii, de compoziția



amestecului înainte arderii; b) să se calculeze  $k$ , în cazul când masa hidrogenului din amestec reprezintă 0,5% din masa oxigenului.

Gazele vor fi considerate drept ideale. Se vor neglija dependențele de temperatură ale căldurilor molare, precum și procesele de disociere. Se știe că, prin arderea unui mol de hidrogen se degajă căldura  $q = 485 \text{ kJ/mol}$ . Se va considera că în cursul arderii izocore căldurile molare ale hidrogenului și oxigenului sînt egale cu  $\frac{5}{2} R$ , iar căldura molară a vaporilor de apă rezultați cu  $\frac{7}{2} R$ , unde  $R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$  este constanta universală a gazelor.

(Prima Balcaniadă de Fizică, Plovdiv — R.P. Bulgaria, mai 1986)

29°. Un motor termic parcurge un ciclu Brayton, format dintr-o destindere izobară la presiunea  $p_1$ , o destindere izotermă la temperatura  $T_1$ , o comprimare izobară la presiunea  $p_2$  ( $< p_1$ ) și o comprimare adiabatică, în cursul căreia temperatura gazului perfect utilizat ca agent de lucru variază de la  $T_2$  la  $T_3$ . Să se determine: a) randamentul motorului termic; b) temperatura sursei reci a motorului termic care — lucrînd după un ciclu Carnot avînd aceeași destindere izotermă ca și motorul Brayton — ar efectua același lucru mecanic ca și acesta, în fiecare ciclu parcurs; c) raportul dintre căldura preluată de la sursa rece și lucrul mecanic efectuat asupra gazului, în fiecare ciclu, de compresorul mașinii frigorifice (eficiența mașinii frigorifice cu compresor), în cazul în care mașina frigorifică funcționează după un ciclu Brayton, parcurs în sensul invers (acelor de ceasornic).

(Olimpiada de fizică, clasa X-a, etapa județeană, 1984)

30°. Un kilomol de heliu parcurge o transformare ciclică reversibilă, a cărei reprezentare în diagrama  $U, s$  (unde  $U$  este energia internă, iar  $s = 2,3U_1(\lg p + \frac{5}{3} \lg V)$ , cu  $U_1 = 4 \text{ MJ}$ ) are forma unui poligon închis, ale cărui laturi (în număr par, oarecare) satisface cerințele: (1) sînt paralele cu axele  $U$ , respectiv  $s$  (v. fig. F.C.5), (2) nu depășesc pătratul delimitat de valorile  $s_2=31 \text{ MJ}$ ,  $s_1=33 \text{ MJ}$ ,  $U_2 = 2 \text{ MJ}$  și  $U_1$ . Se cere: a) să se stabilească tipul transformărilor elementare din care este compus ciclul considerat; b) condiția suplimentară pe care trebuie să o

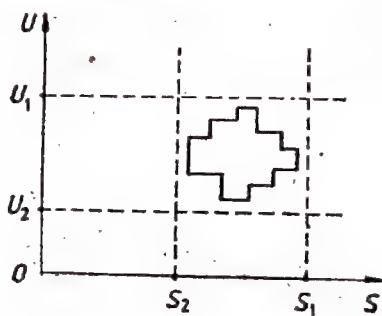


Fig. F.C.5

îndeplinească ciclul pentru ca gazul să primească o căldură maximă posibilă  $Q_1$  și valoarea acestei călduri; c) să se demonstreze care este ciclul căruia i-ar corespunde cea mai mare valoare a randamentului motorului termic; d) să se determine randamentul motorului termic care ar funcționa după un ciclu a cărui reprezentare în diagrama indicată ar avea forma cercului înscris în pătratul considerat.

(Olimpiada de fizică, selecția lotului național, Bistrița, 1985)

31°. Se consideră parametrul fizic  $S$  definit pentru gaze perfecte prin expresia  $S_{gp} = \nu(C_V \ln p + C_p \ln V)$ . Se cere: a) să se exprime căldura primită de gaz într-un proces izoterm, prin valorile inițială și finală ale parametrului  $S_{gp}$ ; b) să



se calculeze variația parametrului  $G = U + pV - TS$  într-o transformare de fază,  $S$  fiind parametrul de tipul  $S_{gp}$ , definit prin relația dedusă la punctul a), generalizată pentru orice substanță; c) să se deducă expresia raportului  $\frac{\Delta T}{\Delta p}$ , unde  $\Delta T$  reprezintă variația temperaturii la care se produce o anumită transformare de fază, datorată variației cu  $\Delta p$  a presiunii la care are loc transformarea de fază.

(Test în cadrul pregătirii componentelor lotului olimpic de fizică, Timișoara, 1986)

32°. Un ansamblu de particule browniene (fum) de masă  $m_b = 0,01 \mu\text{g}$  se află în suspensie în aer. a) Să se afle raportul dintre viteza medie pătratică a particulelor de fum și viteza medie pătratică a moleculelor de aer. b) Admițând că densitatea aerului dintr-o încălțare este  $\rho = 0,100 \text{ kg/m}^3$  și presiunea  $p = 100 \text{ kN/m}^2$ , să se afle viteza medie pătratică a moleculelor de aer. c) Cum depinde de presiune și de volum viteza medie pătratică a moleculelor de aer (gaz ideal) într-o transformare adiabatică? d) La ce temperatură, energia cinetică medie a moleculelor de heliu din aer este suficientă pentru a putea învinge atracția gravitațională terestră și a părăsi atmosfera?

Se cunosc: masa molară a aerului,  $M_a = 29 \text{ kg/kmol}$ , numărul lui Avogadro  $6,02 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$ , accelerația gravitațională  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , raza Pământului,  $R_0 = 6,3 \cdot 10^6 \text{ m}$ , constanta gazelor perfecte,  $R = 8,31 \cdot 10^3 \text{ J/(kmol} \cdot \text{K)}$ .

33°. La mijlocul unui tub subțire de sticlă, închis la ambele capete, avind o lungime  $l = 1 \text{ m}$ , se află o coloană de mercur de lungime  $h = 20 \text{ cm}$ . Cînd tubul este așezat vertical, coloana de mercur se deplasează pe lungimea  $\Delta l = 10 \text{ cm}$ . Inițial sistemul se află la temperatura  $T_1 = 303 \text{ K}$ . După aducerea tubului în poziție verticală, tubul se încălzește la temperatura  $T_2 = 353 \text{ K}$ . a) Să se calculeze presiunea din tub în poziție orizontală. b) Să se calculeze raportul dintre volumele de gaz din cele două încălțări în care este separat tubul prin coloana de mercur, în poziția verticală a acestuia, înainte și după încălzire. Se neglijează dilatarea tubului de sticlă și a mercurului. Se cunosc:  $\rho_{\text{Hg}} = 13\,600 \text{ kg/m}^3$  și  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

34°. Un tub subțire de sticlă așezat vertical, avind  $l_0 = 20 \text{ cm}$  la  $0^\circ\text{C}$ , este plin cu un lichid. Prin răcirea tubului, nivelul superior al lichidului scade cu  $\Delta l = 4 \text{ mm}$  sub cel al tubului. a) Să se afle temperatura la care a fost răcit sistemul. b) Știind că în tubul de sticlă la  $0^\circ$ , golit de lichid, se introduce o coloană de mercur de lungime  $h_0 = 19,33 \text{ cm}$  tot la  $0^\circ$ , să se afle la ce temperatură trebuie încălzit sistemul, pentru ca distanța dintre centrul de greutate al tubului și cel al mercurului să se reducă la jumătate față de cea inițială.

Se cunosc:  $\gamma_{\text{Hg}} = 1,82 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ ,  $\alpha_{\text{sticlă}} = 1,16 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ ,  $\gamma_{\text{lichid}} = 9 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ .

### 3. ELECTRICITATE

35°. Circuitul din figura F.C.6 este alimentat de la o tensiune constantă  $U = 150 \text{ V}$ , aplicată între punctele  $A$  și  $B$ . Rezistențele au valoarea  $R = 100 \Omega$ , iar bobina are aceeași rezistență și o inductanță  $L = 4 \text{ H}$ . Să se calculeze: a) intensitatea curenților prin ramurile circuitului în situațiile în care contactul  $K$  este închis și cînd este deschis; b) potențialul punctului  $C$  în cele două situații; c) modul în care variază potențialul punctului  $C$  imediat după deschiderea contactului  $K$ . Se consideră că deschiderea contactului este practic instantanee.

36°. Două becuri, care funcționează normal la tensiunea de  $110 \text{ V}$ , au puterile de  $40 \text{ W}$  și, respectiv  $60 \text{ W}$ . a) Să se afle rezistențele filamentelor și intensitățile curenților prin filamente în regim de alimentare normală. b) Dacă cele două becuri se leagă în serie la o tensiune de  $220 \text{ V}$ , să se stabilească valoarea rezistenței care

trebuie legată în paralel cu unul din becuri pentru a se asigura funcționarea normală a becurilor. c) Care este randamentul curentului, definit ca raport dintre puterea consumată de becuri și puterea totală absorbită de la sursă, în cazul montajului de la punctul b.

37°. Un condensator plan are distanța dintre armături  $d = 1,5$  cm. Când între armături se află aer, capacitatea condensatorului este  $C = 100$  pF. Plăcile condensatorului sînt legate la o tensiune  $U = 500$  V. Să se afle: a) ce valoare are

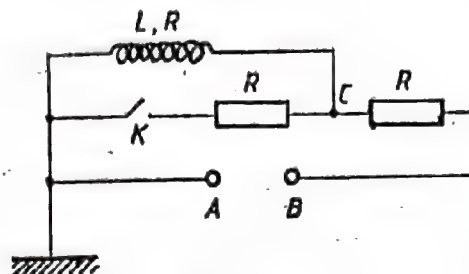


Fig. F.C.6

sarcina electrică de pe plăcile condensatorului dacă acestea se apropie la distanța  $d_1 = 1$  cm în contact cu sursa; b) care este energia debitată de sursă în cursul deplasării plăcii; c) ce valoare are tensiunea dintre armături dacă se întrerupe contactul cu sursa și se introduce între armături, pe  $1/2$  din aria armăturilor, o placă de sticlă cu grosimea  $d = 0,5$  cm. Se cunoaște permitivitatea relativă a sticlei  $\epsilon_r = 2,8$ .

38°. Un bec cu rezistența  $R_1 = 120 \Omega$  și o bobină cu inductanța  $L$  și rezistența  $R_2$ , necunoscute, sînt legate în serie la rețeaua publică a cărei tensiune efectivă este de  $U = 220$  V, iar frecvența  $\nu = 50$  Hz. Măsurîndu-se cu un voltmetru termic, se găsește că tensiunea la bornele becului este  $U_1 = 144$  V, iar tensiunea la bornele bobinei este  $U_2 = 80$  V. Să se afle:

- rezistența și inductanța bobinei;
- puterea activă consumată de la rețea și factorul de putere;
- ce capacitate trebuie să aibă un condensator care, legat în serie în circuit, face ca intensitatea curentului să atingă o valoare maximă și mărimea intensității maxime.

39°. O bobină mică este plasată în întrefierul unui electromagnet, astfel încît axa bobinei și cea a polilor electromagnetului să coincidă. Secțiunea dreaptă a bobinei este  $S = 3$  mm<sup>2</sup>, iar numărul de spire este  $N = 100$ . Când bobina este rotită cu  $180^\circ$ , galvanometrul balistic bransat la bornele bobinei înregistrează sarcina electrică  $q = 8$   $\mu$ C. Să se determine intensitatea cimpului magnetic  $H$  din întrefierul electromagnetului, știind că rezistența bobinei, a galvanometrului și a firelor de conexiune este  $R = 3\pi \Omega$ .

Se știe că  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H  $\cdot$  m<sup>-1</sup>.

40°. O baterie de acumulare care are tensiunea electromotoare  $E = 24$  V și rezistența internă  $r = 0,5 \Omega$ , alimentează un electrolizor (vas pentru electroliză) de rezistență  $R_1 = 2 \Omega$ , în serie cu un rezistor avînd rezistența  $R_2 = 3,5 \Omega$ . Două aparate de măsură identice (avînd rezistența  $R_0 = 9,8 \Omega$  și prin care poate trece un curent electric de intensitate maximă  $I_0 = 0,1$  A) sînt utilizate, unul pentru a măsura intensitatea curentului prin circuit și celălalt pentru a măsura tensiunea electrică la bornele electrolizorului. Se cere: a) rezistența șuntului utilizat pentru aparatul folosit ca ampermetru, dacă dorim să se măsoare în circuit un curent electric de intensitate maximă  $I_{\max} = 5$  A; b) rezistența adițională utilizată pentru aparatul folosit ca voltmetru, dacă tensiunea de la bornele rezistenței  $R_1$  (electro-



lizzorului) este de maximum 30 V; c) să se facă schema circuitului introducând și rezistențele calculate la punctele (a) și (b) și să se calculeze intensitatea curentului electric prin circuit; d) bilanțul puterilor în cazul punctului (c); e) să se calculeze cantitatea de argint depusă la catodul electrolizorului în timp de 2 h, știind că echivalentul electrochimic este  $K = 4,025 \cdot 10^{-3} \text{ kg/A} \cdot \text{h}$ .

41°. Un circuit serie este format dintr-un condensator de capacitate  $C = 318 \text{ nF}$  și un solenoid cu lungimea  $l = 10 \text{ cm}$ , aria secțiunii transversale  $S = 1 \text{ cm}^2$  și format din  $N = 300$  spire, avînd un miez magnetic. La bornele circuitului se aplică o tensiune alternativă sinusoidală. Pentru frecvența  $\nu_0 = 10 \text{ kHz}$ , intensitatea efectivă a curentului electric atinge o valoare maximă cînd miezul magnetic ocupă jumătate din volumul interior al solenoidului (din lungimea sa). Dacă miezul magnetic ocupă tot volumul interior al solenoidului, intensitatea curentului electric la frecvența  $\nu_0$  este de  $n = 5$  ori mai mică decît valoarea sa maximă. Să se calculeze: a) permeabilitatea relativă a miezului magnetic; b) frecvențele pentru care puterea activă din circuit este egală cu jumătate din valoarea maximă a puterii active, cînd miezul magnetic ocupă jumătate din volum; c) factorul de supratensiune al circuitului, cînd miezul ocupă jumătate din volum.

Se știe că  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .

42°. O sursă avînd tensiunea electromotoare  $E = 24 \text{ V}$  și rezistența internă  $r = 0,5 \Omega$  este conectată la două șine paralele conductoare, de rezistență electrică neglijabilă (fig. F.C.7), pe care se poate deplasa, fără frecare, o bară de masă  $m_1 = 0,275 \text{ kg}$  și de rezistență  $R = 0,5 \Omega$ . Distanța dintre șine este  $l = 0,5 \text{ m}$ . De mijlo-

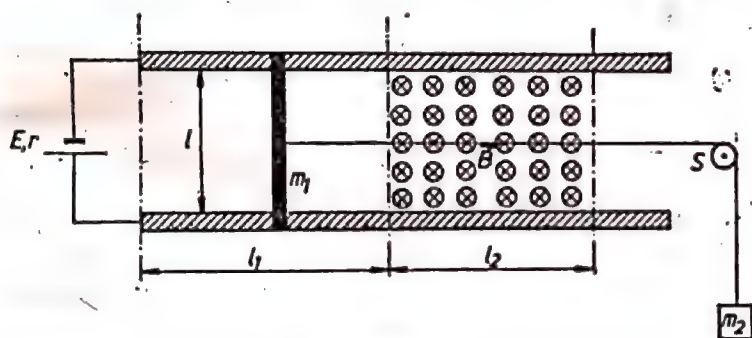


Fig. F.C.7

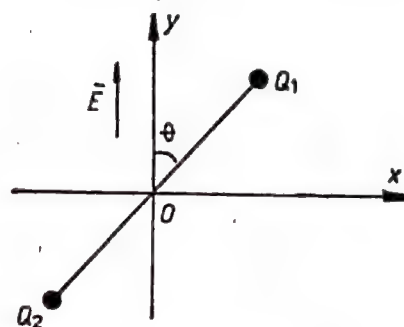


Fig. F.C.8

cul barei este legat un fir care, după ce este trecut peste un scripete  $S$ , susține un corp de masă  $m_2 = 1,1 \text{ kg}$ . Bara parcurge distanța  $l_1 = 1 \text{ m}$ , după care pătrunde într-un câmp magnetic uniform de inducție  $\vec{B}$ , vectorul inducție fiind perpendicular pe planul șinilor, unde parcurge distanța  $l_2 = 0,8 \text{ m}$ . Știind că mișcarea barei în regiunea cu câmp magnetic se face uniform, se cere: a) valoarea inducției  $B$  a câmpului magnetic; b) timpul de la începutul mișcării pînă cînd bara iese din câmpul magnetic; c) bilanțul puterilor dezvoltate în cadrul sistemului studiat, în durata mișcării barei în câmp magnetic.

Se consideră  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

43°. O tijă electroizolantă de masă neglijabilă și lungime  $l = 0,2 \text{ m}$ , avînd fixate la capete puncte materiale de aceeași masă  $m$  și sarcini electrice  $Q_1 = 1 \text{ mC}$ ,  $Q_2 = -1 \text{ mC}$ , se poate roti liber în jurul mijlocului său  $O$ , în planul orizontal  $xOy$ . Știind că tijă se găsește într-un câmp electric uniform, a cărui intensitatea  $E = 100 \frac{N}{C}$  este paralelă cu axa  $Oy$  și are sensul acestei axe, să se determine: a) momentul cuplului de forțe care acționează asupra tijei atunci cînd aceasta formează unghiul  $\theta = 30^\circ$  cu direcția câmpului electric (fig. F.C.8); b) lucrul mecanic necesar



pentru aducerea tijei din poziția de echilibru stabil în cea indicată mai sus; c) masa  $m$  pentru care perioada micilor oscilații ale tijei, în jurul poziției sale de echilibru stabil, este  $T = 1$  s.

(Olimpiada de fizică, faza județeană, clasa a X-a, 1986)

44°. Se consideră o balanță electrostatică cu brațe egale (fig. F.C.9). Știind că talerul  $T_1$  și placa fixă  $P$ , avînd fiecare aria  $A = 1 \text{ dm}^2$ , sînt încărcate cu densitățile superficiale de sarcină electrică  $\sigma_{T_1} = 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$  și  $\sigma_P = -10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$  și sînt izolate electric de restul instalației, să se determine: a) intensitatea cîmpului electric în interiorul condensatorului plan format de talerul  $T_1$  și placa  $P$ ; b) masa corpului care trebuie așezat suplimentar pe talerul  $T_2$  pentru echilibrarea balanței, dacă aceasta a fost echilibrată inițial în absența sarcinilor electrice; c) tensiunea  $U_e$  dintre talerul  $T_1$  și placa  $P$ , atunci cînd distanța dintre acestea este  $d_e = 2 \text{ mm}$ ; d) caracterul echilibrului mecanic realizat, în cazul cînd — în situația de la punctul precedent — se racordează talerul  $T_1$  și placa  $P$  la o sursă de tensiune constantă, egală cu  $U_e$ . Permittivitatea aerului este  $\epsilon_a \approx 8,86 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ .

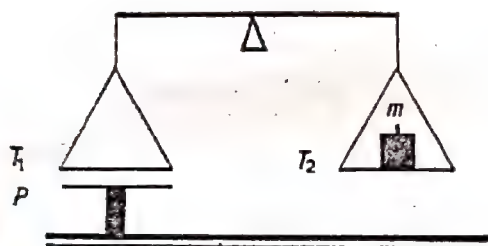


Fig. F.C.9

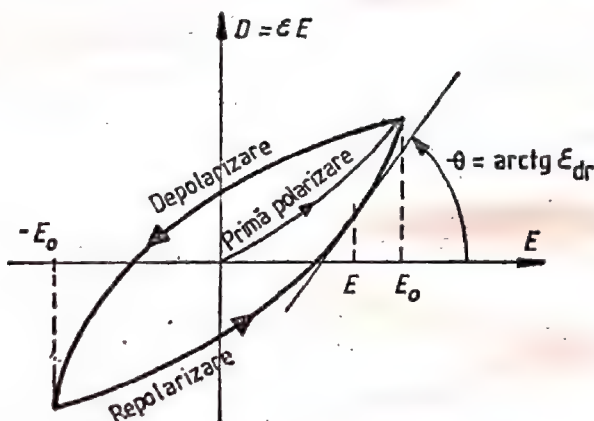


Fig. F.C.10

45°. În zona (Rayleigh) a cîmpurilor electrice slabe, dependența permittivității diferențiale  $\epsilon_{dr}$  pe ramura de repolarizare a ciclului histerezis al unui material feroelectric de intensitățile momentană  $E$  și maximă  $E_a$  ale cîmpului electric aplicat (fig. F.C.10) este:

$$\lim_{\Delta E \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta D}{\Delta E} \right)_{\text{repol.}} = \left( \frac{dD}{dE} \right)_{\text{repol.}} = \epsilon_{dr}(E, E_0) = \epsilon_i + RE + R_0 E_0,$$

unde  $\epsilon_i$  (permittivitatea inițială),  $R$  și  $R_0$  (parametrii Rayleigh) sînt constante fizice specifice materialului. Știind că acest material ocupă spațiul dintre armăturile cilindrice coaxiale, de raze  $r_i$  și  $r_o$  și lungime  $L$  ( $r_o - r_i \ll r_i \ll L$ ), ale unui condensator, să se determine: a) ecuațiile ramurilor de re-, depolarizare, ale ciclului histerezis; b) ecuația curbei de primă polarizare și dependențele permittivităților totală  $\epsilon = \frac{D}{E}$  și diferențială  $\epsilon_d = \frac{dD}{dE}$ , pe curba de primă polarizare, de intensitatea cîmpului electric; c) puterea disipată în unitatea de volum a feroelectricului, în condițiile unui cîmp electric alternativ de amplitudine  $E_0$  și frecvență  $f$ ; d) rezistența electrică echivalentă pierderilor prin histerezis în feroelectric, în condițiile în care între armăturile condensatorului cilindric se aplică o tensiune de frecvență  $f$  și amplitudine  $U_0$ .

(Selecția lotului național de Fizică pentru Olimpiada internațională de la Londra, 1986, Univ. Timișoara)

46°. Se consideră montajul din figura F.C.11, unde  $C_1 = 40 \mu\text{F}$ , iar  $L = 0,3 \text{ H}$ . Știind că la momentul inițial comutatorul  $K$  este trecut din poziția 1 (pentru care pulsația de rezonanță a circuitului era  $\omega_0 = 500 \text{ rad/s}$ ) în poziția 2, moment în care potențialele armăturilor condensatoarelor  $C_1$  și  $C_2$  legate de solenoid erau  $u_{10} = -1 \text{ V}$ ,  $u_{20} = 2 \text{ V}$ , iar fluxul magnetic prin solenoid era  $\Phi_0 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$ , să se determine: a) capacitatea condensatorului  $C_2$ ; b) dacă există un punct al înfășurării solenoidului al cărui potențial electric să rămână constant în timp (comutatorul  $K$  fiind în poziția 2); c) amplitudinea  $u_{1, \max}$  a oscilațiilor potențialului armăturii considerate a condensatorului  $C_1$ ; d) sistemul mecanic ale cărui oscilații să fie descrise de ecuații analoage cu cele ale circuitului serie  $C_1LC_2$  considerat (fig. F.C.11).

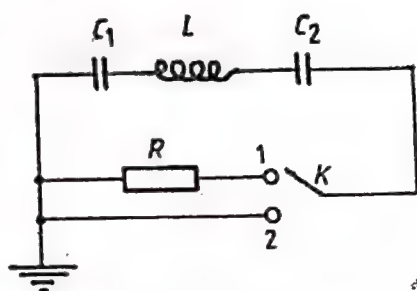


Fig. F.C.11

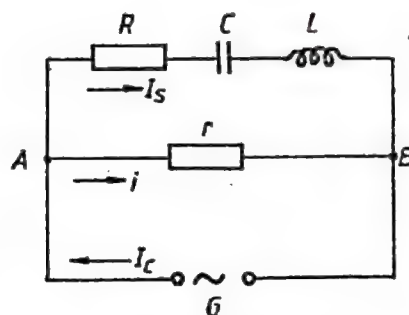


Fig. F.C.12

47°. Se consideră circuitul oscilant din figura F.C.12. Știind că generatorul  $G$  debitează un curent electric sinusoidal  $I_c = I_0 \cos(2\pi\nu t - \varphi)$  de frecvență  $\nu$  care poate fi variată, dar avînd aceeași amplitudine  $I_0$  pentru toate frecvențele, să se determine (în funcție de  $R, r, C$  și  $L$ ): a) relația dintre amplitudinile  $i_0$  și  $I_{s0}$  ale intensităților curenților care trec prin rezistorul  $r$ , respectiv prin ramura serie  $RLC$ , precum și defazajul  $\varphi_s$  dintre oscilațiile acestor curenți, pentru o frecvență  $\nu$  dată a curentului debitat de generator; b) relația dintre amplitudinile  $i_0$  și  $I_0$ , precum și defazajul  $\varphi$  dintre oscilațiile curenților  $i$  și  $I_c$ ; c) dependența de frecvență a amplitudinii  $U_0$  a tensiunii  $U_{AB}$  dintre bornele circuitului  $RLC$  mixt considerat, precum și frecvența  $\nu_0$  la care amplitudinea acestei tensiuni atinge — în condițiile unei valori invariabile a amplitudinii  $I_0$  — valoarea minimă  $U_{\min}$ ; d) factorul de calitate pentru selectivitate al acestui circuit, definit prin expresia  $Q = \nu_0/(\nu_2 - \nu_1)$ , unde  $\nu_1$  și  $\nu_2$  sînt frecvențele pentru care tensiunea  $U_{AB}$  este egală cu  $\sqrt{2} U_{\min}$ , specificînd și condiția în care definiția acestui factor de calitate are sens. (Barajul pentru selecția lotului național de Fizică, în vederea Balcaniadei și Olimpiadei internaționale, Ploiești, 1986)

48°. O „cutie neagră” cu trei borne (1, 2 și 3) conține o schemă electrică simplă, de forma unui triunghi. Pentru determinarea naturii elementelor schemei se scurtcircuitază pe rînd cîte două dintre bornele „cutiei negre”, ridicînd apoi caracteristica  $I = f(U)$  (curent-tensiune) a dipolului astfel rezultat cu ajutorul montajului din figura F.C.13.

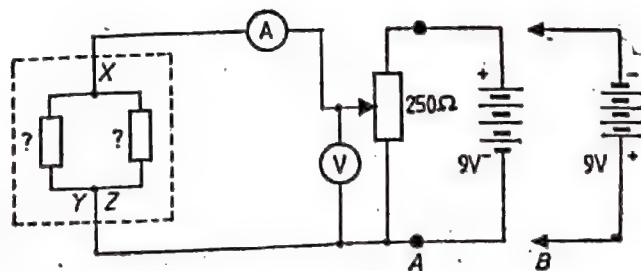


Fig. F.C.13



Rezultatele numerice obținute sînt indicate în tabelul de mai jos.

Bornele			Conexi- unea	Paramet- rul	Valorile numerice ale $I = f(U)$							
X	Y	Z										
3	1	2	A	$I[\text{mA}]$	0	0	4	50	104	170	250	300
				$U[\text{V}]$	0	0,5	0,6	0,8	0,9	1,0	1,1	1,15
			B	$I[\text{mA}]$	0	-1,05	-2,1	-3,2	-4,2	-5,3	-6,35	-7,4
				$U[\text{V}]$	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
2	1	3	A	$I[\text{mA}]$	0	0	4	44	115	175	250	300
				$U[\text{V}]$	0	0,4	0,6	0,8	0,9	1,0	1,1	1,15
			B	$I[\text{mA}]$	0	-0,4	-0,76	-1,12	-1,5	-1,9	-2,2	-2,6
				$U[\text{V}]$	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
1	2	3	A	$I[\text{mA}]$	0	1,4	2,8	4,2	5,6	7,1	8,6	10
				$U[\text{V}]$	0	1	2	3	4	5	6	7
			B	$I[\text{mA}]$	0	-1,4	-2,8	-4,2	-5,6	-7,1	-8,6	-10
				$U[\text{V}]$	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7

Se cere: a) să se determine natura elementelor schemei; b) să se evalueze principalele lor caracteristici fizice (parametri).

(Prima Balcaniadă de Fizică, Plovdiv, R.P. Bulgaria, 1986)

49°. A. Un circuit oscilant este format dintr-un condensator de capacitate  $C = 1,8 \mu\text{F}$  și o bobină formată din  $N = 200$  spire înfășurate pe un tor gol, avînd secțiunile axiale de formă dreptunghiulară, iar secțiunea transversală de forma unei coroane circulare (fig. F.C.14). Știînd că dimensiunile torului sînt grosimea  $g = 1 \text{ cm}$ , razele interioară  $r_i = 2 \text{ cm}$  și exterioară  $r_e = 4 \text{ cm}$ , iar frecvența de rezonanță a circuitului este  $f_0 = 15,9 \text{ kHz}$ , să se determine a) expresia fluxului magnetic, printr-o porțiune de lățime  $dr$  a unei secțiuni axiale (fig. F.C.14), corespunzătoare intensității  $I$  a curentului electric prin înfășurarea torului, în funcție de distanța  $r$  de la această porțiune la axa de simetrie a torului; b) permeabilitatea absolută a aerului.

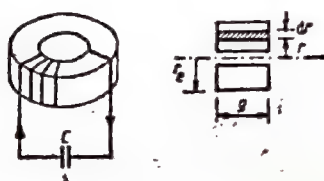


Fig. F.C.14

Se dă  $\ln 2 \approx 0,693$ .

B. În cazul în care circuitul oscilant de mai sus este cuplat cu un circuit deschis ce emite o undă electromagnetică total plan polarizată, cu frecvența de rezonanță  $f_0$  a circuitului și densitatea fluxului de energie electromagnetică a unde — într-un mediu cu permitivitatea  $\epsilon = 10^{-11} \frac{\text{F}}{\text{m}}$  și  $\mu_r = 1$  — fiind:  $S = 14 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ , să se determine; a) lungimea de undă în mediul considerat; b) amplitudinile oscilațiilor cîmpurilor electric, respectiv magnetic, ale unde.

(Test în cadrul pregătirii lotului de Fizică pentru Balcaniada din 1986, Univ. Timișoara)



50°. O linie  $AA'$ ,  $BB'$  de rezistență totală  $R_1 = 1 \Omega$ , alimentată de la un generator de tensiune sinusoidală montat între punctele  $A$  și  $B$ , are ca sarcină un consumator, montat între punctele  $A'$  și  $B'$ , format dintr-o rezistență  $R_2$  și o inductanță  $L$  (fig. F.C.15), tensiunea efectivă la bornele consumatorului fiind  $U_2 = 100 \text{ V}$ . Consumatorul disipă puterea  $P_2 = 2 \text{ kW}$  și are un factor de putere  $\cos \varphi = 0,8$ . Să se calculeze: a) intensitatea curentului în circuit; b) valoarea efectivă  $U_1$  a tensiunii între punctele  $A$  și  $B$  și puterea activă consumată între punctele  $A$  și  $B$ ; c) defazajul  $\psi$  dintre curent și tensiune între punctele  $A$  și  $B$ .

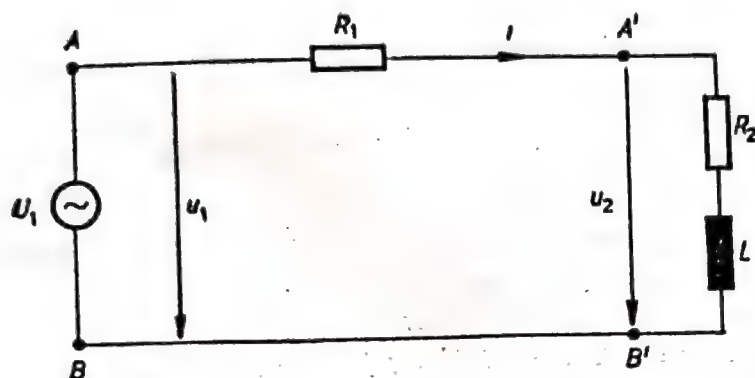


Fig. F.C.15

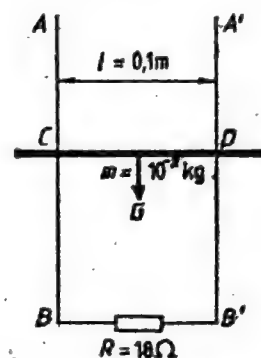


Fig. F.C.16

51°. În problema precedentă se anulează defazajul dintre  $U_2$  și  $I$  fără a se schimba structura consumatorului ( $\cos \varphi$ ,  $U_2$  și  $P_2$  aceleași), prin montarea în paralel cu consumatorul a unui condensator de capacitate  $C$ . Știind că frecvența curentului furnizat de generator este  $f = 50 \text{ Hz}$ , să se calculeze: a) valoarea capacității  $C$  a condensatorului; b) valorile efective ale curentilor  $I$  și  $I_C$  care trec prin rezistența  $R_1$ , respectiv prin condensator; c) puterea activă între punctele  $A$  și  $B$  în aceste condiții.

52°. Două conductoare verticale paralele  $AB$  și  $A'B'$ , situate la distanța  $l = 0,1 \text{ m}$ , sînt așezate într-un cîmp magnetic uniform de inducție  $B = 1 \text{ T}$  perpendicular pe planul conductorilor ca în figura F.C.16, extremitățile  $B$  și  $B'$  ale conductorilor fiind legate printr-o rezistență  $R = 10 \Omega$ . O bară orizontală  $CD$  de masă  $m = 10^{-2} \text{ kg}$  glisează pe conductoarele  $AB$  și  $A'B'$ , avînd, la momentul inițial  $t = 0$ , viteza nulă. Se neglijează rezistențele firelor  $BC$ ,  $CD$  și  $DB'$  și se consideră  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Să se afle: a) legea de variație în timp a vitezei barei  $CD$  în funcție de timp și să se reprezinte grafic; b) viteza limită a barei; c) momentul  $t$  și valoarea curentului  $i$  prin rezistența  $R$ , atunci cînd mișcarea barei se face cu jumătate din viteza limită.

53°. Două condensatoare plane cu aer,  $C_1$  și  $C_2$ , montate în paralel, au suprafața armăturilor  $S = 100 \text{ cm}^2$  și distanțele dintre armături  $d_1 = 1 \text{ cm}$ , respectiv  $d_2 = d_1/2$ , la bornele sistemului fiind aplicată  $U_0 = 1000 \text{ V}$ . a) Să se calculeze sarcina și energia înmagazinată în fiecare condensator. b) Se izolează sistemul celor două condensatoare legate în paralel de sursa de tensiune. Se deplasează una dintre armăturile condensatorului  $C_2$  astfel încît  $d_2 = d_1$ . Să se calculeze în acest caz capacitățile, sarcinile și diferența de potențial pe fiecare condensator, precum și energia înmagazinată în fiecare dintre acestea. c) Să se calculeze forța care se exercită asupra armăturii mobile a lui  $C_2$  într-o stare intermediară, unde distanța dintre armături este  $\frac{d_1}{2} < x < d_1$ . Aplicație pentru  $x = 3d_1/4$ . Se cunoaște  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ .

54°. Se consideră montajul din figura F.C.17 în care două baterii, de tensiuni electromotoare  $E_1$  și  $E_2$ , debitează pe rezistența  $R$ . Se cunosc:  $E_1 = 120 \text{ V}$ ,

$E_2 = 60 \text{ V}$ ,  $R_1 = 30 \Omega$ ,  $R_2 = 15 \Omega$ ,  $R = 150 \Omega$ . a) Să se calculeze curentul  $I$  care circulă prin rezistența  $R$  prin două metode: aplicind legile lui Kirchhoff și considerind egalitatea  $I = I' + I''$ , unde  $I'$  și  $I''$  corespund pe rînd stărilor de echilibru  $E_1 = 0$ , respectiv  $E_2 = 0$ . b) Să se calculeze tensiunea electromotoare și rezistența internă ale unui generator echivalent ansamblului situat la bornele  $AB$  ale rezistenței  $R$ . c) Care este tensiunea  $U$  la bornele rezistenței  $R$  și puterea disipată pe această rezistență?

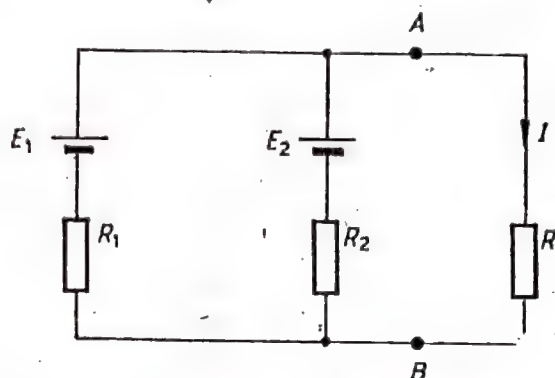


Fig. F.C.17

55°. Un circuit paralel este alcătuit dintr-un generator paralel,  $G$ , cu tensiunea electromotoare  $E_1 = 120 \text{ V}$  și rezistența internă  $r_1 = 2 \Omega$ , o baterie tampon  $B$ , cu tensiunea electromotoare  $E_2 = 100 \text{ V}$  și rezistența internă  $r_2 = 1 \Omega$  și un motor  $M$  cu rezistența  $r_3 = 2 \Omega$  care furnizează puterea mecanică  $P$ . a) Să se arate că intensitatea  $I_3$  a curentului prin motor este determinată de o ecuație de gradul doi și să se stabilească pentru ce valori ale lui  $P$  această ecuație admite cel puțin o soluție. b) Să se stabilească ecuația verificată de tensiunea contraelectromotoare  $U_c$  a motorului și să se calculeze această tensiune în cazul în care intensitatea curentului prin bateria tampon  $I_2 = 0$ . c) Care sînt valorile curenților în circuit, dacă  $P = 650 \text{ W}$ ?

#### 4. OPTICĂ

56°. O lentilă convex-concavă (menisc convergent) are distanța focală  $f = 15 \text{ cm}$ . Știind că razele celor două suprafețe care mărginesc lentila sînt de  $90 \text{ cm}$  și, respectiv,  $10 \text{ cm}$ , să se determine: a) indicele de refracție al materialului lentilei; b) locul unde se formează imaginea unui obiect liniar cu lungimea  $l = f/\sqrt{3}$  așezat la distanța de  $25 \text{ cm}$  de lentilă și mărimea imaginii; c) poziția și mărimea imaginii obținute în cazul cînd se plasează o oglindă plană perpendiculară pe planul format de obiect și axul optic, astfel încît unghiul format cu axul optic să fie de  $60^\circ$ , iar intersecția oglinzii cu axul optic să coincidă cu imaginea punctului obiect aflat pe axul optic.

57°. Un sistem optic constă din două lentile subțiri cu distanțele focale  $f_1$  și  $f_2$ , distanța dintre lentile fiind  $d$ . Sistemul dat trebuie înlocuit cu o singură lentilă subțire care, pentru orice poziție a unui obiect, trebuie să dea aceeași mărime transversală ca și sistemul. Să se calculeze: a) care trebuie să fie distanța focală a lentilei; b) unde trebuie să fie ea plasată în raport cu pozițiile lentilelor sistemului.

58°. O oglindă sferică dă, pentru un obiect real, o imagine virtuală dreaptă, de patru ori mai mică decît obiectul și situată la  $12 \text{ cm}$  de oglindă. Se cere: a) distanța de la obiect la oglindă; b) natura oglinzii; c) distanța sa focală.

59°. Filamentul  $AB$  al unui bec electric este plasat la  $1 \text{ m}$  în fața unei oglinzi sferice concave a cărei rază este  $R = 0,75 \text{ m}$ . Se cere: a) să se determine poziția imaginii  $A'B'$  dată de oglindă; b) să se studieze ce devine imaginea  $A'B'$ , dacă



între filamentul  $AB$  și oglindă se interpune o cuvă de sticlă, umplută cu apă și de grosime  $e = 0,32$  m. Se știe că  $n = \frac{4}{3}$ .

60°. Pentru a studia un ochi, acesta se consideră redus la o lentilă subțire echiconvexă, de indice de refracție 1,5, situată la 1,5 cm de retină. Se cere: a) raza de curbură  $R_1$  a celor două fețe ale lentilei; b) raza de curbură  $R_2$  a uneia din fețele lentilei cu care este echivalent ochiul, când acesta se acomodează să poată vedea obiecte la distanța de 20 cm.

61°. O rețea plană de difracție prin transmisie s-a obținut prin înregistrarea pe o peliculă a figurii de interferență obținută prin suprapunerea a două fascicule paralele monocromatice de lumină coerentă ale căror direcții formează un unghi  $\alpha$ . Știind că suprafața plană a peliculei este plasată perpendicular pe unul dintre fascicule, se cere: a) interfranja în funcție de  $\lambda$  și  $\alpha$ ; b) numărul maxim de franje pe 1 mm pentru lungimea de undă  $\lambda = 500$  nm; c) ordinul maxim de difracție ce se poate obține în cazul unei radiații ce cade normal pe rețea, având lungimea de undă  $\lambda_1 = 0,5$   $\mu$ m și lungimile de undă  $\lambda'$  ale radiațiilor din domeniul  $(0,4-0,7)$   $\mu$ m ale căror maxime de difracție de ordinul  $k$  (observate în condițiile specificate) se suprapun cu maximum de difracție de ordinul  $k+1$  ale radiației cu lungimea de undă  $\lambda_1$ , rețeaua de difracție fiind executată cu parametrii fasciculelor  $\lambda = 0,65$   $\mu$ m și  $\sin \alpha = 0,195$ .

(Olimpiada de fizică, faza națională, Ploiești, 1986)

62°. Un sistem optic constă dintr-o prismă rectangulară cu unghiul de refracție  $\theta$  și indicele de refracție  $n_1$  și o lentilă plan-convexă cu raza de curbură  $R$  și indicele de refracție  $n_2 (>n_1)$ , alipită de prismă. Un fascicul îngust de lumină monocromatică, venind de la o sursă aflată la infinit în partea prisme, cade pe sistemul optic considerat după o direcție paralelă cu axa optică a lentilei. Se cere: a) să se găsească poziția imaginii sursei; b) să se studieze funcționarea sistemului în cazul unei distanțe nenule ( $d \neq 0$ ) între prismă și lentilă. Se dau  $R = 0,1$  m,  $n_1 = 1,4$ ,  $n_2 = 1,8$ ,  $\theta = 18^\circ$ ,  $n_{\text{aer}} \approx 1$ .

(Prima Balcaniadă de Fizică, Plovdiv, R.P. Bulgaria, mai 1986)

63°. O lentilă subțire de rază  $r = 0,6$  cm și distanță focală  $f = 12$  cm este tăiată și se îndepărtează porțiunea centrală, de lățime  $a = 4$  mm (fig. F.C. 18, a); apoi se alipesc cele două părți egale, rămase. Pe axa de simetrie a dispozitivului optic astfel format, la distanța  $p = 7,2$  cm de acesta, se așază o fantă reglabilă  $F$ , alipită de o sursă luminoasă; știind că în cazul în care deschiderea fan-

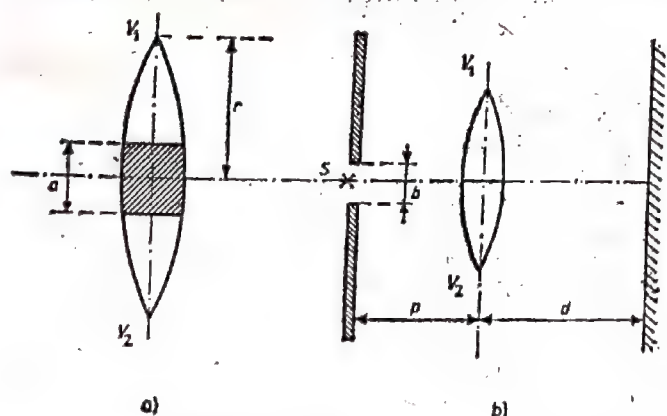


Fig. F.C.18

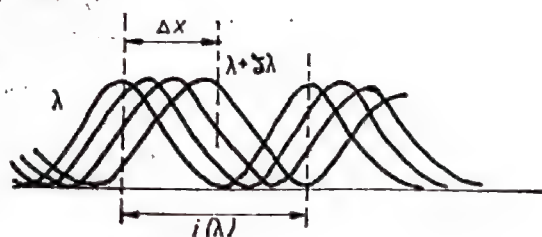


Fig. F.C.19

tei nu este punctiformă sau radiația  $e$  compusă din componente spectrale de lungimi de undă cuprinse în intervalul  $[\lambda, \lambda + \delta\lambda]$ , franjele figurii de interferență pot fi distinse atât timp cât distanța  $\Delta x$ , pe care se găsesc maximele de același ordin ale figurilor de interferență elementare, nu depășește  $\frac{1}{2}$  din cea mai mică interfranja



jă a unei figuri de interferență elementare (fig. F.C. 19), să se determine: a) numărul franjelor de interferență care pot fi observate pe un ecran situat la distanța  $d = 0,82$  m de dispozitivul optic, în cazul unei surse punctiforme monocromatice ( $\lambda = 600$  nm); b) numărul franjelor care pot fi observate pe același ecran în cazul unei surse punctiforme, cu lungimi de undă cuprinse între 600 și 700 nm; c) lățimea maximă  $b$  a fantei pentru care mai pot exista franjele care apar în condițiile specificate la punctul a).

64°. Se consideră dispozitivul diferențial din figura F.C.20, în care  $p = 0,2$  m și  $a = 0,3$  m. Știind că lungimea de undă a radiației monocromatice emisă de sursă este  $\lambda = 500$  nm și că pentru distanțe  $b$  de ordinul metrului interfranja rămâne constantă  $i = 0,5$  mm, franjele dispărând dacă  $b > 11,5$  m, să se determine: a) dis-

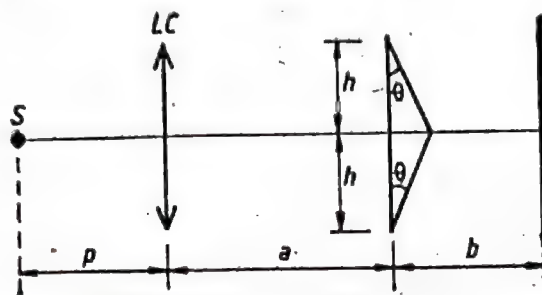


Fig. F.C.20

tanța focală a lentilei; b) unghiul refringent  $\theta$  al biprismei, cunoscând indicele de refracție ( $n = 1,5$ ) ale acesteia; c) înălțimea  $2h$  a biprismei; d) numărul maxim  $N_{\max}$  de franje întunecate care pot fi observate și distanța  $b$  la care pot fi detectate acestea; e) poziția surselor virtuale care determină figura de interferență, în cazul scoaterii lentilei din dispozitiv. Se știe că unghiul  $\theta \ll 1$  radian și se va ține seamă că  $h \ll a + b$ .

(Etapa națională a Olimpiadei de fizică, clasa a XI-a, Craiova, 1983)

65°. Se consideră incidența unei radiații electromagnetice monocromatice, de lungime de undă  $\lambda = 460,2$  nm, pe o rețea de difracție unidimensională având lungimea  $L = 2$  cm și 50 trăsături/mm. Știind că direcția fascicului incident formează unghiul  $\theta_0 = 60^\circ$  cu normala  $OX$  pe laturile trăsăturilor, din planul rețelei (fig. F.C. 21), să se determine: a) unghiul  $\theta$  format de direcția maximului de ordinul  $k = 9$  cu normala  $Ox$ ; b) diferența  $G$  dintre lungimile de undă  $\lambda + G$  ale

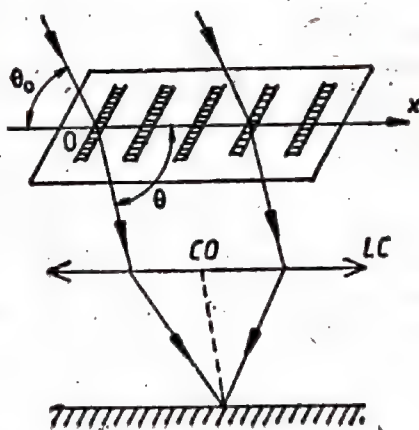


Fig. F.C.21

altei componente monocromatice și  $\lambda$  a componentei considerate pentru care maximul de ordin  $k$  al componentei  $\lambda + G$  se suprapune cu maximul de ordin  $(k + 1)$  al componentei  $\lambda$ ; c) diferența  $\delta\lambda$  dintre lungimile de undă ale unei a treia com-

ponente monocromatice  $\lambda + \delta\lambda$  și cea a primei componente monocromatice  $\lambda$  considerate, pentru care maximum de ordinul  $k$  al componente  $\lambda + \delta\lambda$  se suprapune cu primul minim următor maximumului de ordinul  $k$  al componente  $\lambda$ .

(Test în cadrul pregătirii lotului național pentru Balcaniada de Fizică, 1986, Univ. Timișoara)

66°. Un obiectiv fotografic este alcătuit dintr-o lentilă convergentă plan-convexă formată din două lentile alipite: o lentilă subțire plan concavă de rază de curbură  $R$  și indice de refracție  $n_1$  și o lentilă subțire biconvexă de raze de curbură  $R$  și  $R'$  și indice de refracție  $n_2$ . a) Să se scrie expresiile distanțelor focale imagine  $f_1$  și  $f_2$  ale celor două lentile. b) Să se scrie expresia distanței focale imagine  $F'$  a obiectivului fotografic. c) Știind că indicii de refracție  $n_1$  și  $n_2$  sunt funcții de lungimile de undă ale radiațiilor utilizate și anume:  $n_1$  (galben) = 1,617,  $n_1$  (albastru) = 1,629,  $n_2$  (galben) = 1,512,  $n_2$  (albastru) = 1,518 și că distanța focală imagine a obiectivului este de 12 cm atât în galben, cât și în albastru, să se calculeze razele de curbură  $R$  și  $R'$ .

67°. Se consideră sistemul din figura F.C.22 în care imaginea punctului luminos  $A$  situat pe axa principală a lentilei convergente subțiri  $C_1$ , de 5 dioptrii, la 25 cm de lentilă, este  $A_1$ . Dincolo de lentila  $C_1$ , la 130 de cm, se află o altă lentilă

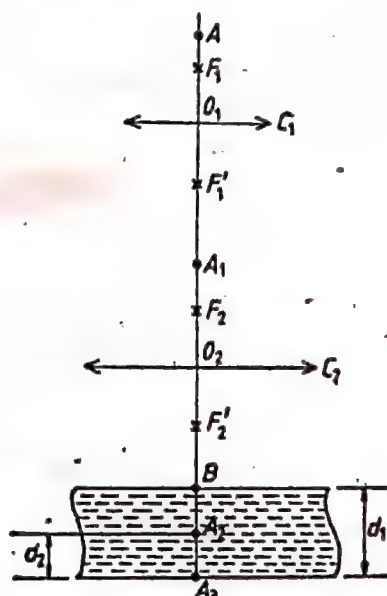


Fig. F.C.22

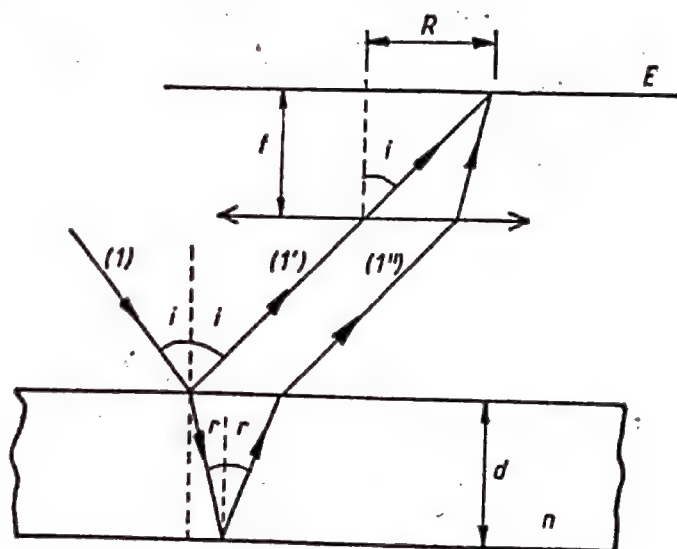


Fig. F.C.23

$C_2$  de 4 dioptrii. Se cere: a) poziția imaginii finale  $A_2$  a punctului luminos  $A$  în raport cu  $C_2$ ; b) sub nivelul  $B$ , situat la 75 de cm de  $C_2$ , se introduce apă, astfel încât imaginea finală se formează în  $A_3$ ; să se determine deplasarea  $A_2A_3$ ; c) care este poziția lentilei  $C_2$  pentru ca imaginea punctului  $A$  să se formeze în  $A_3$  în absența apei. Indicele de refracție al apei este  $n = 4/3$ .

68°. Se observă fenomenul de interferență prin reflexie într-o lamă de sticlă plan-paralelă de grosime  $d = 2$  cm iluminată cu o radiație având  $\lambda = 6000 \text{ Å}$ , utilizându-se configurația experimentală din figura F.C. 23. Lentila  $L$  are distanța focală  $f = 10$  cm, iar lama plan-paralelă are indicele de refracție  $n = 1,5$ . Se cere: a) diferența de drum dintre razele care interferează, pentru maximum de ordinul 20; b) să se stabilească dacă centrul figurii de interferență corespunde unui maxim sau unui minim; c) să se calculeze raza inelului de interferență de ordinul 10.



## 5. FIZICĂ ATOMICĂ ȘI NUCLEARĂ

69°. Pentru ca suprafața unui metal să emită fotoelectroni, este necesar să fie iluminată cu radiații având lungimea de undă  $\lambda_0 = 3200 \text{ \AA}$ . Se cere, să se determine: a) lucrul de ieșire al metalului folosit, exprimat în J și în eV; b) diferența de potențial de frinare necesară pentru a „tăia” fotocurentul, dacă iluminarea se face cu radiații având lungimea de undă  $\lambda = 2400 \text{ \AA}$ ; c) viteza fotoelectronilor emiși în cazul în care iluminarea suprafeței metalului se face cu radiații având lungimea de undă  $\lambda = 2400 \text{ \AA}$  și lungimea de undă a undelor asociate fotoelectronilor emiși în același caz.

Se cunosc:  $h \simeq 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ;  $c \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ;  $e \simeq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  și  $m \simeq 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

70°. Un foton având lungimea de undă  $\lambda_i$  se împrășteie cuasielastice pe un electron liber aflat în mișcare. După ciocnire electronul se oprește, iar fotonul rezultat, cu lungimea de undă  $\lambda_0$ , deviat sub unghiul  $\theta = 60^\circ$  față de direcția inițială a fotonului, se ciocnește cu un alt electron liber aflat în repaus. Din cel de-al doilea proces de ciocnire rezultă un foton cu lungimea de undă  $\lambda_f = 1,25 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ , deviat sub unghiul  $\theta = 60^\circ$  față de direcția de mișcare a fotonului cu lungimea de undă  $\lambda_0$ . Se cere: a) să se determine lungimea de undă de Broglie a electronului care interacționează cu fotonul inițial, în cazul nerelativist și în cazul relativist; b) energia primită de la al doilea electron și direcția de mișcare față de direcția fotonului de lungime de undă  $\lambda_0$ .

Se cunosc: constanta lui Planck,  $h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ , masa de repaus a electronului,  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  și viteza luminii în vid,  $c \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

71°. Schema de niveluri energetice a Hg este dată în figura F.C.24. Comparați cantitatea de energie absorbită când vaporii de mercur sunt bombardați cu electroni de 6 eV și când sunt bombardați cu fotoni de lumină de 6 eV.

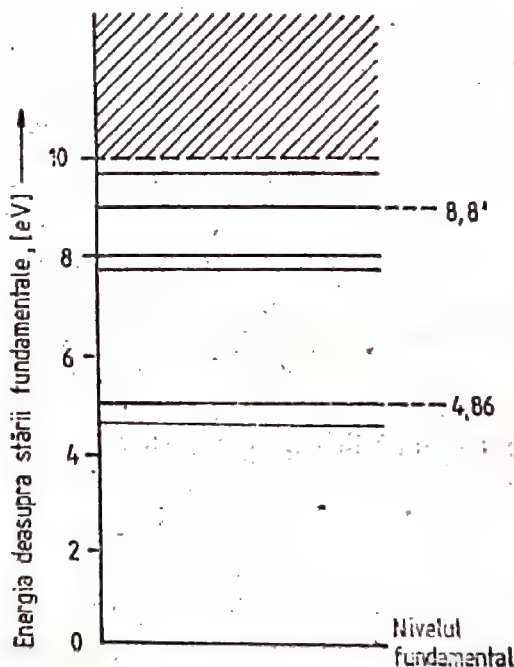


Fig. F.C.24

72°. O particulă  $\alpha$ , cu viteza  $v = 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , este deviată de un nucleu de aur aflat în repaus, sub un unghi de  $60^\circ$ . Presupunind că doar o mică parte din energia cinetică a particulei  $\alpha$  este transferată nucleului de aur, astfel încât viteza particulei după deviere rămâne aproape aceeași ca și înainte, se cere să se calculeze:



a) impulsul imprimat atomului de aur; b) viteza imprimată nucleului de aur; c) energia cinetică cedată nucleului de aur. Se dau masele particulei  $\alpha$ :  $m_\alpha \approx 6,62 \cdot 10^{-27}$  kg și a nucleului de aur:  $m_N \approx 3,3 \cdot 10^{-25}$  kg.

73°. Un preparat radioactiv emite două tipuri de radiații alfa, cu energiile cinetice de 6,25 MeV și 9 MeV. Fasciculul de particule alfa intră într-un spectrograf de masă cu deviere de  $90^\circ$ , în care acționează perpendicular pe viteza particulelor un cîmp magnetic omogen, cu inducția magnetică de 1 T. Să se calculeze: a) vitezele celor două tipuri de particule alfa; b) razele traiectoriilor lor în cîmpul magnetic; c) cu cit se vor separa cele două tipuri de particule pe placa fotografică înregistratoare așezată paralel față de direcția de intrare a fasciculului.

Se dau: masa de repaus a particulei alfa,  $m_0 \approx 4$  u, unitatea de masă atomică fiind  $1 \text{ u} \approx 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg, sarcina particulei alfa  $q = 2e$ , sarcina elementară fiind  $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$  C și viteza luminii în vid  $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Se știe că  $1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$ .

(Concurs de admitere, septembrie 1982).

74°. O particulă  $\alpha$  cu energia cinetică  $E_\alpha = 5,2 \text{ MeV}$  inițiază reacția nucleară  ${}^9\text{Be}(\alpha, n){}^{12}\text{C}$ . Știind că energia degajată în reacție este  $Q = 5,7 \text{ MeV}$ , să se calculeze energia cinetică a neutronului generat, în funcție de unghiul  $\theta$  dintre traiectoria particulei  $\alpha$  și traiectoria neutronului și să se particularizeze pentru  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Se cunosc:  $m_n \approx 1,00866 \text{ u}$ ,  $m_\alpha \approx 4,0006 \text{ u}$  și  $m_c = 12 \text{ u}$ .

75°. În primele experiențe ale lui Ives-Stilwell, cu ajutorul unui spectrograf, a cărui axă era perfect ortogonală pe planul oglinzii plane  $O$  (fig. F.C.25), a fost

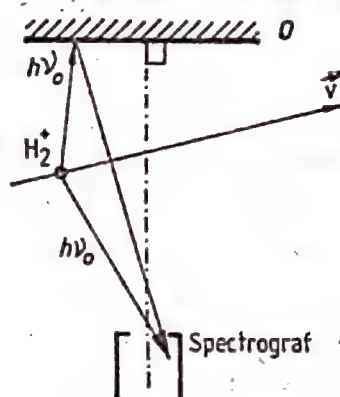


Fig. F.C.25

observat efectul Doppler pentru radiația monocromatică  $\lambda_0$  a ionilor  $\text{H}_2^+$ , accele-  
rați sub o diferență de potențial electric  $U = 43 \text{ kV}$ . Știind că în cazul în care spec-  
trograful captează și radiația reflectată de oglinda  $O$ , a cărei normală formează  
unghiul  $\theta = 7^\circ$  cu direcția ionilor  $\text{H}_2^+$ , spectrograful înregistrează componentele  
 $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda + \Delta\lambda'$  și  $\lambda_2 = \lambda_0 - \Delta\lambda + \Delta\lambda'$ , unde  $\lambda_0 = 4861 \text{ Å}$ ,  $\Delta\lambda = 35 \text{ Å}$ , iar  
 $\Delta\lambda' = 0,12 \text{ Å}$ , să se determine: a) numerele cuantice principale ale stărilor ato-  
mului de hidrogen între care se produce tranziția însoțită de emisia fotonilor de  
lungime de undă  $\lambda_0$ ; b) viteza ionilor de  $\text{H}_2^+$  dedusă în baza (i) considerentelor  
energetice, respectiv (ii) a componentelor nerelativistă, respectiv relativistă ale  
efectului Doppler.

Se dau: masele electronului  $m_0 \approx 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  și ionului  $\text{H}_2^+$ :  $m \approx 3,3 \cdot 10^{-27}$   
kg, sarcina electrică elementară  $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  și constanta lui Planck,  
 $h \approx 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ .

(Selecția lotului național de Fizică, 1988, Baia Mare).

76°. Nava cosmică „Balcaniada — 1” intersectează coada cometei Halley.  
Pe bordul navei funcționează un spectrometru de masă automat care studiază

periodic gazele din coada cometei și transmite datele obținute la centrul de comandă (control). În figura F.C. 26 puteți vedea unul dintre spectrele primite la centrul de control. Analizați și interpretați spectrul gazelor încă necunoscute prezente în coada cometei cu ajutorul unui catalog de linii caracteristice și a unei rigle gradate, parcurgând următoarele etape:

a) Priviți spectrul de masă din figura F.C. 26. El conține liniile spectrale ale gazelor necunoscute ale cometei și — în plus — trei linii etalon (de calibrare). Li-

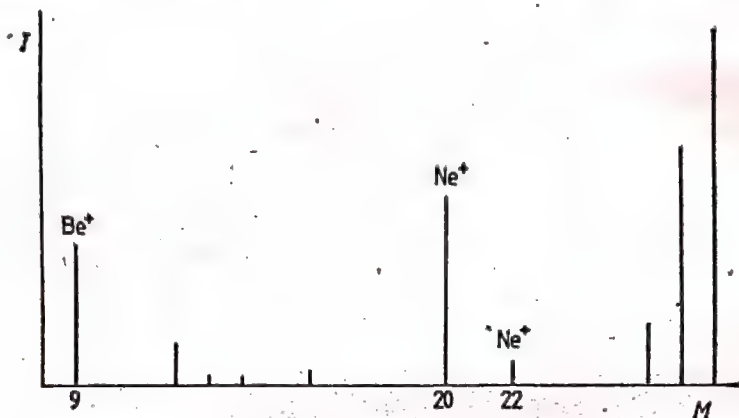
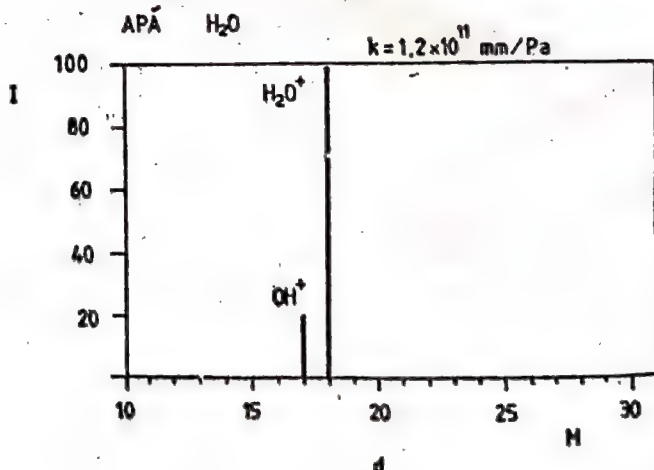
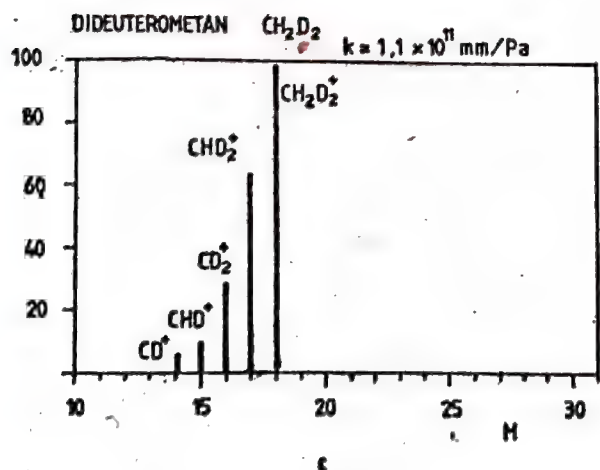
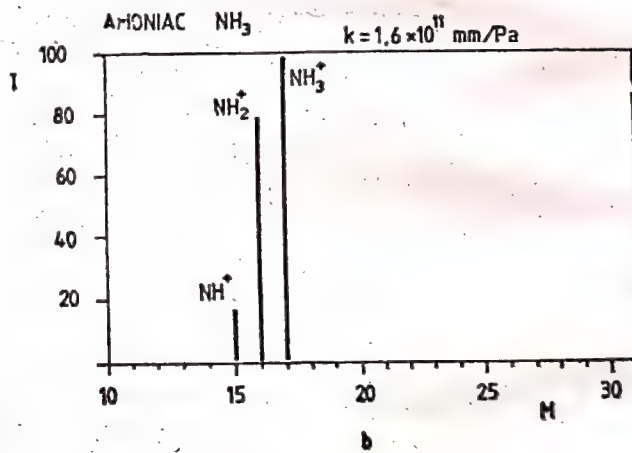
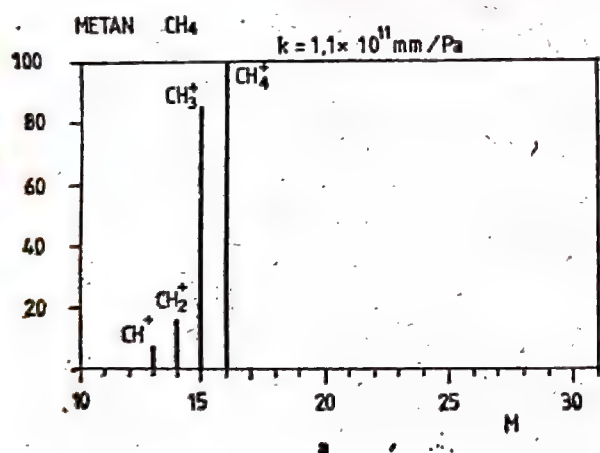


Fig. F.C.26

niile de calibrare corespund izotopilor neonului ( $M = 20$  și  $M = 22$ ) și beriliului ( $M = 9$ ). Cu ajutorul liniilor calibrate, divizați axa  $OX$  a spectrelor în unități (numere) de masă, așa cum s-a făcut în figurile F.C. 27a-l.



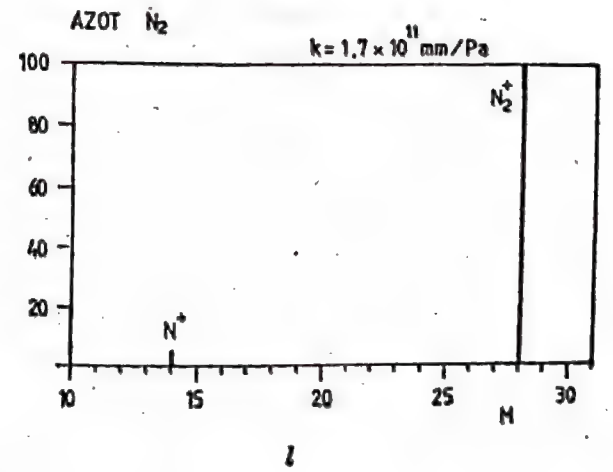
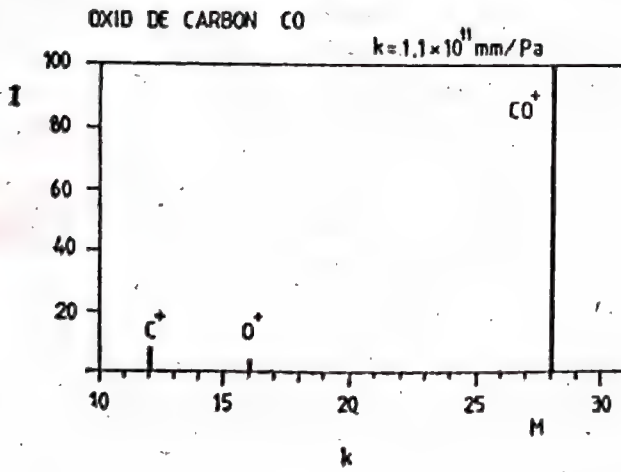
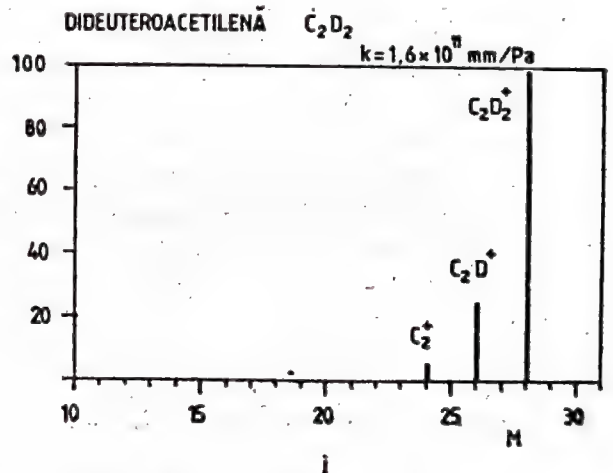
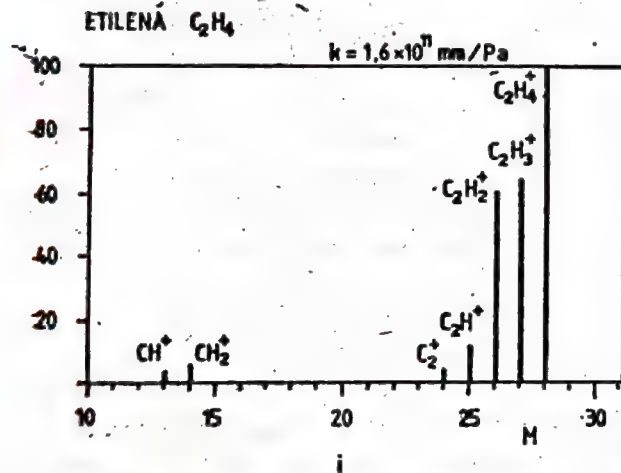
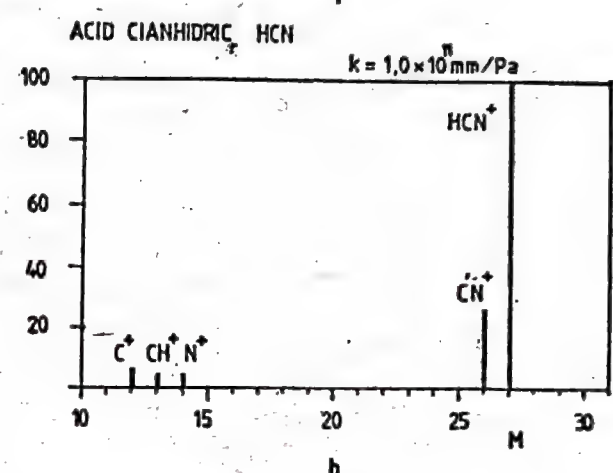
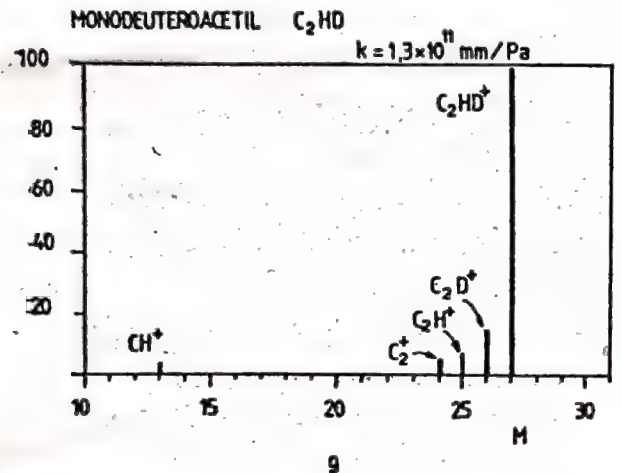
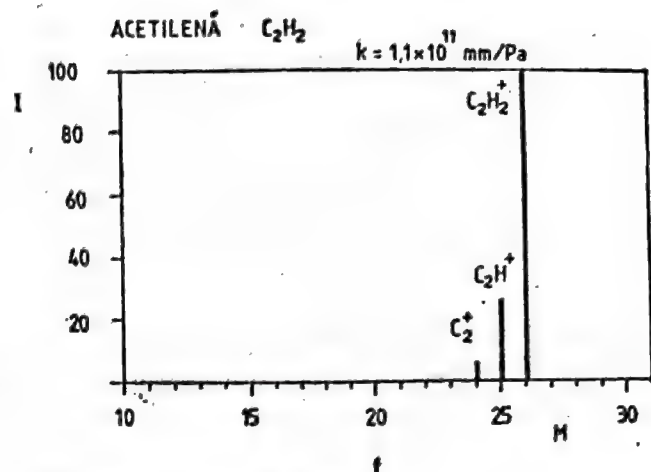
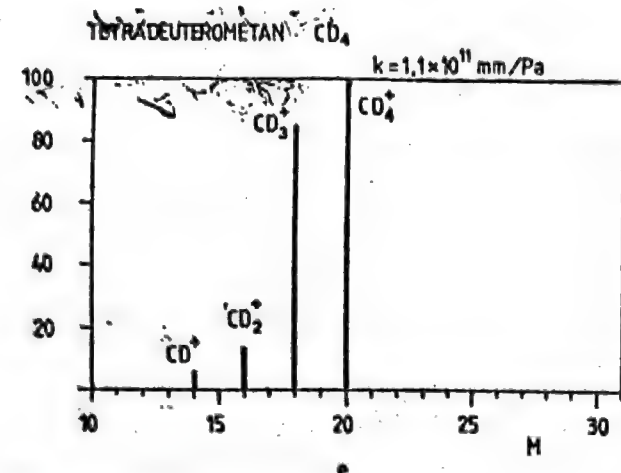


Fig. F.C.27



b) Spectrele din figurile F.C. 27a—Î pot fi considerate drept un scurt catalog de spectre tipice de masă ale gazelor. Comparați spectrul primit de la nava spațială cu spectrele din catalog. Identificați gazele cometei prezente în spectrul înregistrat și scrieți formulele lor chimice.

c) După ce ați identificat gazele prezente în spectru, măsurați intensitățile (adică înălțimile maximelor)  $I_X, I_Y, \dots$  ale liniilor lor de bază, care corespund ionilor lor moleculari. Folosiți aceste valori pentru a determina presiunile  $P_X, P_Y, \dots$  ale gazelor identificate, în ipoteza că intensitatea unei linii de bază din spectrul unui gaz este proporțională cu presiunea gazului, adică  $I = kp$ . Coeficientul  $k$  este sensibilitatea spectrometrului pentru respectivul gaz. Pentru gazele incluse în catalogul de spectre caracteristice, valorile coeficientului  $k$  sînt date cu o eroare de  $\pm 2\%$ . Estimați erorile cu care determinați presiunile gazelor și scrieți rezultatele dînd atît erorile absolute, cît și cele relative, pentru fiecare presiune.

d) Determinați presiunea totală a atmosferei cometei în momentul analizei efectuate de spectrometru. Calculați eroarea cu care ați determinat presiunea totală.

*Indicații teoretice.* Spectrometria de masă este o metodă de analiză a materialelor prin determinarea numerelor de masă  $M$  ale atomilor și moleculelor lor. Numărul de masă este egal cu numărul de nucleoni din nucleu. Numerele de masă ale citorva atomi și molecule ușoare sînt date în tabelul următor:

Atomul de hidrogen	H	1	Atomul de beriliu	Be	9
Molecula de hidrogen	H <sub>2</sub>	2	Atomul de carbon	C	12
Atomul de deuteriu	D	2	Atomul de azot	N	14
Molecula de deuteriu	D <sub>2</sub>	4	Atomul de oxigen	O	16
Atomul de heliu	He	4	Metanul	CH <sub>4</sub>	16

Numerele de masă ale izotopilor unui element diferă prin  $\pm 1, \pm 2$  etc.

Pentru a efectua analiza particulelor prin metoda spectrometriei de masă, aceste particule trebuie să fie în prealabil ionizate. În cursul ionizării este inevitabil totuși ca o parte dintre particule să se disocieze, iar fragmentele lor să fie apoi ionizate și înregistrate în spectru. Din acest motiv, spectrele gazelor moleculare conțin — pe lîngă linia de bază, care corespunde ionului molecular și are cea mai mare intensitate. — și liniile fragmentelor moleculare.

Spectrele de masă ale materialelor pure sau spectrul unui singur gaz sînt caracterizate atît de setul de linii (de bază și corespunzătoare fragmentelor), cît și de rapoartele intensităților lor. Din acest motiv, spectrul unui singur gaz dă totdeauna posibilitatea identificării sale fără dubii, chiar și atunci cînd diferite materiale pure ar avea același număr de masă. Amestecurile de gaze au spectre de masă complexe, care includ toate liniile spectrale ale spectrului fiecărui gaz simplu (care intră în componența amestecului). Dacă spectrul unui amestec conține o linie comună pentru cîteva din gazele simple componente, intensitatea liniei comune va fi suma intensităților acestei linii în spectrele gazelor simple (care o conțin).

(Prima Balcaniadă de Fizică, Plovdiv, R.P. Bulgaria, mai 1986).

77°. Izotopul  $^{35}_{17}\text{Cl}$ , bombardat cu neutroni, trece în radiosulf  $^{35}_{16}\text{S}$  care este negatogen (se dezintegrează  $\beta^-$ ), avînd timpul de înjumătățire de 87 zile. În reacție se eliberează 168 keV. Se cere: a) să se scrie reacțiile dezintegrărilor  $^{35}_{17}\text{Cl}$  și  $^{35}_{16}\text{S}$ ; b) să se arate că reacția de formare a radiosulfului este exoenergetică și să se calculeze energia de reacție; c) numărul inițial de nuclee de radiosulf care participă la reacție, dacă prin dezintegrare se eliberează în prima secundă o cantitate de căl-

dură  $Q$  egală cu 20 J. Se cunosc: masa protonului  $m_p \cong 1,00759$  u, masa neutronului  $m_n \cong 1,00898$  u, masa atomului de clor  $m_{Cl} \cong 34,98007$  u, masa atomului de sulf  $m_S \cong 34,98022$  u.

(Se știe că:  $1 \text{ u} \cong 1,660 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $1 \text{ u} \cdot c^2 \cong 931,46 \text{ MeV}$ ,  $1 \text{ eV} \cong 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ,  $N_A \cong 6,025 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$ ).

78°. Prin captarea unui neutron, nucleul de  $^{59}_{27}\text{Co}$  se transformă în radiocobalt emitând un foton  $\gamma$ . La rîndul său radiocobaltul emite particule beta cu energia de 0,4 MeV trecînd într-un izotop al nichelului, procesul fiind însoțit de emisia fotonilor gamma cu energia de 1,15 MeV. Știînd că radiocobaltul are timpul de înjumătățire de 5,3 ani, se cere: a) să se scrie reacțiile nucleare care descriu aceste procese; b) știînd că fotonii  $\gamma$  emiși de radiocobalt generează perechi electron-pozitron, să se determine vitezele acestor particule dacă energia electronului este egală cu cea a pozitronului și se neglijează efectele relativiste; c) numărul de nuclee de radiocobalt dezintegrate într-o oră și cantitatea de căldură degajată în acest timp, știînd că numărul inițial de nuclee este  $N_0 \cong 10^{22}$ .

79°. Pentru caracterizarea unei fotodiode s-a utilizat un laser acordabil în vizibil și montajul din figura F.C.28,  $V$  fiind un voltmetru electronic cu impedanță foarte mare, iar  $mA$  un miliampermetru cu rezistența internă practic nulă.

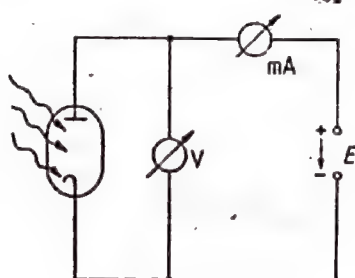


Fig. F.C.28

Pentru radiația cu lungimea de undă  $\lambda_1 = 0,4898 \mu\text{m}$  s-a obținut o tensiune de frinare (tensiune inversă pe fotodiodă care anulează curentul fotoelectric)  $U_{f1} = 0,709 \text{ V}$ , iar pentru radiația cu lungimea de undă  $\lambda_2 = 0,4026 \mu\text{m}$ , s-a obținut  $U_{f2} = 1,258 \text{ V}$ . a) Să se calculeze constanta lui Planck și lungimea de undă de prag a materialului fotocatodului. b) Pentru ce valoare a tensiunii de alimentare  $U$ , fotoelectronii ajunși la anod au o energie dublă față de cazul în care tensiunea pe fotodiodă este nulă. c) Care este lungimea de undă asociată fotoelectronilor în condițiile de la punctul b) pentru radiația cu lungimea de undă  $\lambda_1$ ?

Se cunosc masa electronului,  $m_0 \cong 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cong 0,511 \text{ MeV}$  și sarcina electrică a electronului,  $e \cong 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

80°. Un electron de masă  $m$  și viteză  $\vec{v}$  ciocnește un atom de masă  $M$  aflat inițial în repaus. Atomul capătă o viteză  $\vec{V}$  avînd aceeași direcție cu  $\vec{v}$  și este excitat pe un nivel energetic superior, cu energia  $\Delta E$  mai înalt decît nivelul inițial (fundamental). Să se determine viteza minimă pe care trebuie să o aibă electronul inițial, știînd că după ciocnire viteza sa este  $\vec{v}'$ .



## 1. MECANICĂ

1°. a) În figura F.C.29 este arătată situația corespunzătoare momentului agățării corpului și momentului când deformarea resortului este maximă,  $\Delta l$ . Luind aceasta ca poziție de referință, în starea inițială corpul are energia potențială  $mg\Delta l$ . Aceasta este întreaga energie inițială a sistemului, deoarece corpul nu se mișcă, iar resortul este nedeformat:  $E_i = mg\Delta l$ . În situația finală corpul este în repaus și nu are nici energie potențială. Întrucât resortul este deformat cu  $\Delta l$ , energia sistemului în starea finală este  $E_f = \frac{k(\Delta l)^2}{2}$ . Conform conservării energiei,

$$mg\Delta l = \frac{k(\Delta l)^2}{2}, \quad (1)$$

de unde  $\Delta l = \frac{2mg}{k} = \frac{2 \cdot 0,1 \cdot 10}{10} = 0,2 \text{ m}$ .

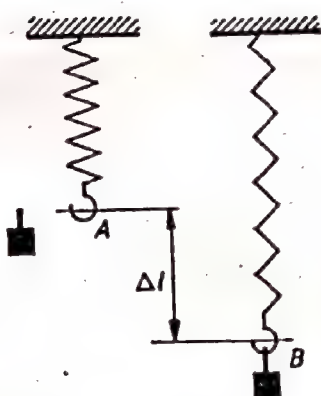


Fig. F.C.29

b) A și B sînt punctele în care se oprește corpul în timpul oscilației, deci poziția de echilibru este la mijlocul distanței  $AB = \Delta l$ ; amplitudinea este  $A = \frac{\Delta l}{2} = \frac{mg}{k} = 0,1 \text{ m}$ .

În această poziție, jumătate din energia potențială inițială s-a transformat în energie cinetică a corpului și energie potențială de deformare a resortului cu  $\frac{\Delta l}{2}$ , deci  $\frac{mg\Delta l}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{k(\Delta l)^2}{8}$  și, utilizînd (1), rezultă

$$v = \sqrt{g \frac{\Delta l}{2}} = g \sqrt{\frac{m}{k}} = 10 \sqrt{\frac{0,1}{10}} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

c) Ecuația care descrie o mișcare oscilatorie armonică este  $x = A \sin(\omega t + \varphi)$ . În cazul de față, la momentul inițial, corpul se găsește la o extremitate, adică la  $t = 0$  și  $x = A$ ; rezultă  $\sin \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ .



Ținând seamă că  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , ecuația oscilației devine

$$x = \frac{mg}{k} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{\pi}{2}\right) = 0,1 \sin\left(10 t + \frac{\pi}{2}\right) [\text{m}].$$

2°. a) Vom scrie ecuațiile pentru conservarea impulsului și energiei în procesul ciocnirii elastice:

$$m_1 v = m_1 v' + m_2 v'', \quad (1) \quad \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v'^2}{2} + \frac{m_2 v''^2}{2}, \quad (2)$$

unde am notat cu  $v'$  viteza corpului  $m_1$  după ciocnire și cu  $v''$  viteza corpului  $m_2$ . Cele două ecuații se mai pot scrie:  $m_1(v - v') = m_2 v''$  și  $m_1(v - v')(v + v') = m_2 v''^2$ . Prin împărțire membru cu membru, rezultă  $(v + v') = v''$ . Introducând în ecuația (1), se obține  $m_1(v - v') = m_2(v + v')$ , de unde

$$v' = -\frac{v(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} = -\frac{20(0,8 - 5 \cdot 10^{-2})}{0,8 + 5 \cdot 10^{-2}} \approx -17,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Semnul (—) arată că după ciocnire corpul  $m_1$  se va mișca în sens opus.

$$v'' = v - \frac{v(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} = \frac{2m_1 v}{m_2 + m_1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 20}{0,8 + 5 \cdot 10^{-2}} \approx 2,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b) În momentul imediat următor ciocnirii, corpul  $m_2$  este pus în mișcare circulară cu viteza  $v''$ , deci apare forța centrifugă  $F_{cf} = \frac{m_2 v''^2}{l}$ . Tensiunea în fir va fi suma dintre greutate și forța centrifugă  $T = G + F_{cf} = m_2 \left(g + \frac{v''^2}{l}\right) = 0,8 \left(10 + \frac{2,4^2}{1}\right) = 12,6 \text{ N}$ .

c) Corpul  $m_2$  se va opri în momentul în care energia lui potențială gravitațională egalează energia cinetică inițială:  $m_2 g h = \frac{m_2 v''^2}{2}$ . Ținând seama că  $h = l - l \cos \alpha$  (fig. F.C.30), rezultă  $\cos \alpha = 1 - \frac{v''^2}{2gl} = 1 - \frac{2,4^2}{2 \cdot 10 \cdot 1} = 0,712$ , de unde  $\alpha = \arccos 0,712 \approx 44^\circ 36'$ .

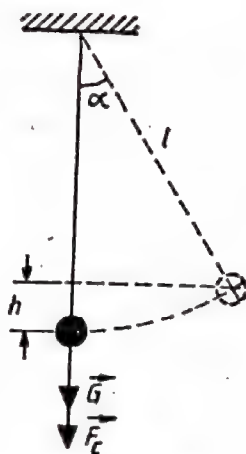


Fig. F.C.30

3°. a) Procesul de ciocnire fiind de tip plastic, conservarea impulsului se va scrie:  $mv = (M + m)v'$ , de unde  $v' = \frac{mv}{M + m}$ . Energia inițială a sistemului este

energia cinetică a ansamblului celor două corpuri (deoarece resortul este nedeformat):

$$E_i = \frac{(M + m)}{2} v'^2 = \frac{m^2}{2(M + m)} v^2.$$

Corpul se va deplasa pînă cînd energia de deformare a resortului devine egală cu energia inițială, mai puțin lucrul consumat prin frecare  $F_f x_1 = \mu(M + m)g x_1$ , adică

$$\frac{m^2}{2(M + m)} v^2 - F_f x_1 = \frac{k x_1^2}{2} \text{ sau } k x_1^2 + 2 F_f x_1 - \frac{m^2}{(M + m)} v^2 = 0. \quad (1)$$

Soluția acestei ecuații este

$$x_1 = \frac{-F_f \pm \sqrt{F_f^2 + \frac{k m^2 v^2}{(M + m)}}}{k}.$$

Evident, sens fizic are numai valoarea cu (+) în fața radicalului, deci

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{F_f}{k} \left( \sqrt{1 + \frac{k m^2 v^2}{F_f^2 (M + m)}} - 1 \right) = \frac{\mu(M + m)g}{k} \left( \sqrt{1 + \frac{k m^2 v^2}{\mu^2 g^2 (M + m)^2}} - 1 \right) = \\ &= \frac{0,2(2,97 + 0,03) \cdot 10}{10} \left( \sqrt{1 + \frac{10 \cdot 0,03^2 \cdot 200^2}{0,2^2 \cdot 10^2 (2,97 + 0,03)^3}} - 1 \right) = 0,65 \text{ m.} \end{aligned}$$

Dacă deplasarea are loc pînă la o distanță mai mică decît  $x_0 = \frac{F_f}{k} = \frac{\mu g(M + m)}{k} = \frac{0,2 \cdot 10(2,97 + 0,03)}{10} = 0,6 \text{ m}$ , atunci forța elastică este mai mică decît forța de frecare și corpul nu poate porni înapoi spre poziția de echilibru.

Întrucît  $x_1 > x_0$ , corpul va porni înapoi. Totuși, datorită valorii mici a diferenței  $x_1 - x_0 = 0,05 \text{ m}$ , deplasarea corpului se va face numai pe o distanță mică  $\Delta x$ . Aceasta se obține din conservarea energiei, scriind că energia în punctul A,  $\frac{k x_1^2}{2}$ , va fi egală cu suma dintre energia de deformare în starea finală,  $\frac{k(x_1 - \Delta x)^2}{2}$ , și lucrul consumat prin frecare pe distanța  $\Delta x$ , adică:

$$\frac{k x_1^2}{2} = \frac{k(x_1 - \Delta x)^2}{2} + F_f \Delta x.$$

Aceasta se mai poate scrie:

$$\frac{k \Delta x}{2} = k x_1 - F_f \text{ sau } \Delta x = 2(x_1 - x_0) = 2(0,65 - 0,6) = 0,1 \text{ m.}$$

Rezultă că, spațiul total parcurs de corp pînă la oprire este  $S = x_1 + \Delta x = 0,65 + 0,1 = 0,75 \text{ m}$ .

b) În absența frecării, ecuația (1) devine

$$\frac{m^2 v^2}{2(M + m)} = \frac{k x_m^2}{2}.$$

Amplitudinea este

$$x_m = A = m v \sqrt{\frac{1}{(M + m)k}} = 0,03 \cdot 200 \sqrt{\frac{1}{(2,97 + 0,03)10}} = 1,095 \text{ m.}$$

Energia oscilației nu se modifică în timp și are valoarea

$$E = E_i = \frac{m^2 v^2}{2(M + m)} = \frac{0,03^2 \cdot 200^2}{2(2,97 + 0,03)} = 6 \text{ J.}$$

4°. a) Forța  $F$  cu care trebuie să tragă omul pentru a ridica greutatea  $G$  trebuie să egaleze suma dintre greutatea  $G$  și greutatea cablului aflată sub nivelul scripetelui. Notînd cu  $x$  lungimea porțiunii de cablu care atîrnă sub nivelul scripetelui (fig. F.C.31), vom avea  $F = G + \mu_l g x$ , unde  $\mu_l$  este masa unității de lungime a cablului.

În figura F.C.32 este arătată variația forței în funcție de distanța  $x$ . Remarcăm asemănarea acestei dependențe cu cea întîlnită în cazul forțelor de

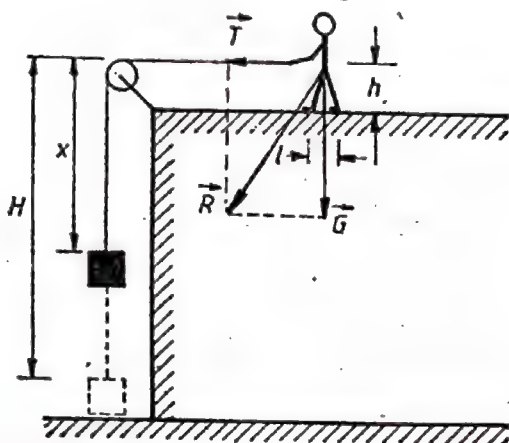


Fig. F.C.31

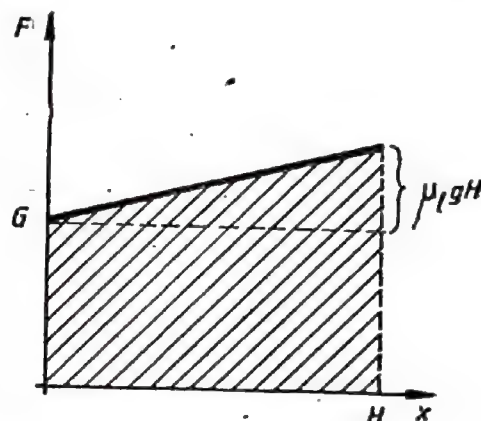


Fig. F.C.32

deformare elastică. În ambele cazuri variația este liniară. Lucrul mecanic efectuat în procesul de ridicare, în care  $x$  variază de la  $H$  la zero, este egal cu aria hașurată pe figura F.C.32, adică

$$L = \frac{H(G + \mu_l g H)}{2} H = GH + \frac{\mu_l g H^2}{2}.$$

Întrucît  $GH$  este lucrul efectuat pentru ridicarea unei greutăți  $G$  la înălțimea  $H$ ,  $\frac{\mu_l g H^2}{2}$  reprezintă lucrul efectuat pentru ridicarea cablului; se remarcă asemănarea cu expresia lucrului efectuat într-o deformare elastică. Lucrul efectuat este  $L = 200 \cdot 10 + \frac{0,5 \cdot 10 \cdot 100}{2} = 2250 \text{ J}$ .

b) Omul va fi răsturnat dacă momentul tensiunii  $T$  din cablu este mai mare decît momentul greutății proprii, ambele calculate în raport cu punctul de sprijin anterior (piciorul anterior) al omului. Conform figurii F.C.31, ținînd seama că  $T = F$ , avem  $h(G + \mu_l g H) = \frac{l}{2} mg$ , de unde

$$G = \frac{mgl}{2h} - \mu_l g H = \frac{70 \cdot 10 \cdot 1}{2 \cdot 1} - 0,5 \cdot 10 \cdot 10 = 300 \text{ N.}$$

5°. a) Componentele vitezei inițiale pe cele două direcții, verticală și orizontală, sînt, respectiv,

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6,928 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ și } v_{0x} = v_0 \cos \alpha = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$



În timpul mișcării în apă, asupra corpului acționează forța  $F = G - F_A$ , unde  $F_A$  este forța arhimedică. Accelerația corpului,  $a$ , orientată vertical în jos, este dată de  $ma = mg - F_A = V\rho_c g - V\rho_a g$ , de unde

$$a = g \frac{\rho_c - \rho_a}{\rho_c} = 10 \frac{7\,800 - 1\,000}{7\,800} = 8,71 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

În mișcarea pe verticală corpul ar ajunge la o înălțime maximă dată de

$$h_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2a} = \frac{6,928^2}{2 \cdot 8,71} = 2,75 \text{ m},$$

deci corpul va ieși din apă, mișcarea lui fiind cea arătată de curba punctată din figura F.C.33. În momentul ieșirii din apă, accelerația se modifică brusc de la

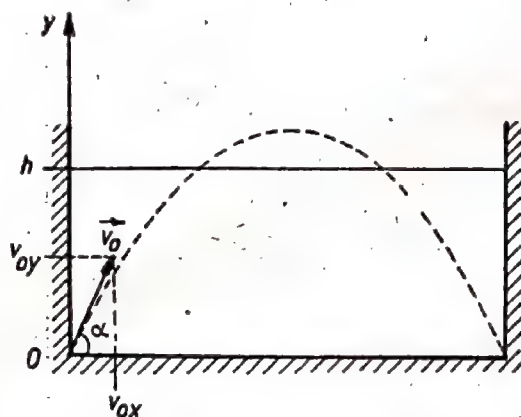


Fig. F.C.33

valoarea  $a$  la valoarea  $g$ . Viteza verticală în acest moment este dată de ecuația lui Galilei,  $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2ah$ , de unde

$$v_y = \sqrt{v_{0y}^2 - 2ah} = \sqrt{6,928^2 - 2 \cdot 8,71 \cdot 2} = 3,63 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Timpul de mișcare prin apă este dat de  $v_y = v_{0y} - at_1$ , de unde

$$t_1 = \frac{v_{0y} - v_y}{a} = \frac{6,928 - 3,633}{8,71} = 0,378 \text{ s}.$$

Timpul cit corpul urcă, în continuare, pînă la înălțimea maximă este dat de  $0 = v_y - gt_2$ , adică  $t_2 = \frac{v_y}{g} = \frac{3,63}{10} = 0,363 \text{ s}$ .

Astfel, durata totală a mișcării este  $t = 2(t_1 + t_2) = 2(0,378 + 0,363) = 1,482 \text{ s}$ . Distanța parcursă pe orizontală cu viteza constantă  $v_{0x}$  va fi

$$x = v_{0x}t = 4 \cdot 1,482 = 5,93 \text{ m}.$$

b) La  $t' = 0,3 \text{ s}$  după lansare corpul se află în apă, iar energia lui potențială va fi egală numeric cu lucrul mecanic consumat pentru ridicarea corpului la înălțimea  $h$  la care a ajuns în acest timp, adică  $E_p = mah'$ , unde

$$h' = v_{0y}t' - \frac{at'^2}{2} = 6,928 \cdot 0,3 - \frac{8,71}{2} \cdot 0,3^2 = 1,68 \text{ m}.$$

Rezultă

$$E_p = V\rho_c ah' = \frac{4\pi r^3}{3} \rho_c ah' = \frac{4\pi}{3} (10^{-2})^3 \cdot 7\,800 \cdot 8,71 \cdot 1,68 = 0,48 \text{ J}.$$

c) Deasupra apei corpul se ridică la înălțimea maximă dată de  $h'' = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{3,63^2}{2 \cdot 10} = 0,66$  m, deci înălțimea maximă la care ajunge corpul în timpul mișcării este

$$h_{\max} = h + h'' = 2 + 0,66 = 2,66 \text{ m.}$$

6°. a) Energia degajată în explozie se regăsește ca energie cinetică inițială a celor două fragmente:

$$E = \frac{m_1 v_{01}^2}{2} + \frac{m_2 v_{02}^2}{2}. \quad (1)$$

Conservarea impulsului se scrie

$$m_1 v_{01} = m_2 v_{02}. \quad (2)$$

Masa de explozibil fiind neglijabilă,

$$m_1 + m_2 = m. \quad (3)$$

Din ecuațiile (2) și (3) rezultă:

$$m_1 = \frac{m v_{02}}{v_{01} + v_{02}}, \quad m_2 = \frac{m v_{01}}{v_{01} + v_{02}},$$

Încît

$$E = \frac{m v_{01} v_{02}}{2} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 40}{2} = 1200 \text{ J.}$$

b) Cele două corpuri cad simultan, deci la orice moment ele se află la aceeași înălțime. Vitezele celor două corpuri vor avea direcții perpendiculare în momentul în care suma unghiurilor  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$  din figura F.C.34 este  $\frac{\pi}{2}$ , sau  $\text{tg } \alpha_1 = \text{ctg } \alpha_2$  (4).

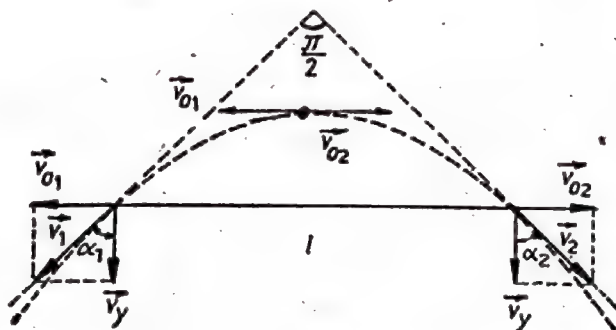


Fig. F.C.34

În timpul căderii pe distanța  $h_1$  corpurile capătă o viteză verticală  $v_y = \sqrt{2gh_1}$ , ecuația (4) devenind

$$\frac{v_{01}}{v_y} = \frac{v_y}{v_{02}} \text{ sau } v_{01} v_{02} = 2gh_1. \quad (5)$$

Timpul în care corpurile cad pe distanța  $h_1$  este  $t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \frac{\sqrt{v_{01} v_{02}}}{g}$ . După acest timp distanța dintre cele două corpuri este  $l = (v_{01} + v_{02})t = \frac{(v_{01} + v_{02})\sqrt{v_{01} v_{02}}}{g} = \frac{(30 + 40)\sqrt{30 \cdot 40}}{10} \approx 242,5 \text{ m.}$

c)  $h' = h - h_1 = h - \frac{v_{01}^2 v_{02}^2}{2g} = 100 - \frac{30 \cdot 40}{2 \cdot 10} = 60 \text{ m}$ , unde s-a utilizat ecuația (5).

7°. a) Conform figurii F.C.35, ecuația fundamentală a dinamicii pentru corpul  $m_1$  este

$$m_1 g \sin \alpha - m_1 g \mu_1 \cos \alpha + F = m_1 a, \quad (1)$$

iar pentru corpul  $m_2$

$$m_2 g \sin \alpha - m_2 g \mu_2 \cos \alpha - F = m_2 a. \quad (2)$$

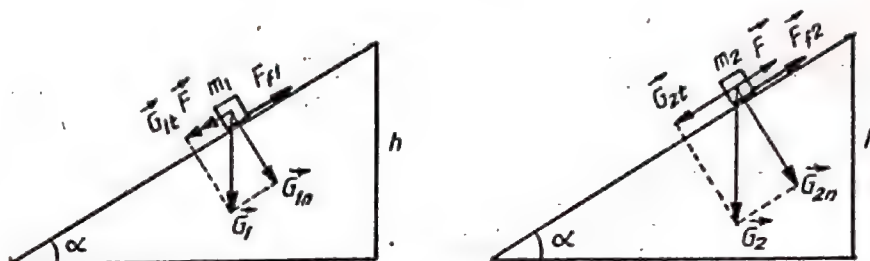


Fig. F.C.35

Întrucit corpurile se mișcă împreună, ele au aceeași accelerație. Eliminând accelerația  $a$  între ecuațiile (1) și (2), rezultă

$$F(m_1 + m_2) = m_1 m_2 g (\mu_1 - \mu_2) \cos \alpha \text{ sau } F = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} (\mu_1 - \mu_2) \cos \alpha. \quad (3)$$

b) Unghiul minim pentru care cele două corpuri coboară liber pe plan va fi dat de condiția ca mișcarea acestora să fie uniformă. Punind  $a = 0$  în ecuațiile (1) și (2) și însumându-le, rezultă

$$\operatorname{tg} \alpha_{\min} = \frac{m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2}{m_1 + m_2}. \quad (4)$$

c) Presupunind  $\alpha$  mai mare decât  $\alpha_{\min}$ , atunci cele două corpuri coboară cu aceeași accelerație, deci viteza lor comună va fi dată de

$$v = \sqrt{2al} = \sqrt{2a \frac{h}{\sin \alpha}}, \quad (5)$$

deoarece, inițial, ele se află practic la aceeași înălțime  $h$ . Accelerația se obține din oricare dintre ecuațiile (1) și (2) cu ajutorul relației (3):

$$a = g \left( \sin \alpha - \frac{m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2}{m_1 + m_2} \cos \alpha \right),$$

deci viteza la baza planului va fi

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\sin \alpha} \left( \sin \alpha - \frac{m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2}{m_1 + m_2} \cos \alpha \right)}.$$

8°. a)  $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ ,  $\frac{A\sqrt{3}}{2} = A \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3},$

$$y = A \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{3} \right).$$



Pentru momentul  $t_1$  avem:  $y_1 = A \sin\left(\omega t_1 + \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $v_1 = A\omega \cos\left(\omega t_1 + \frac{\pi}{3}\right)$  și  $|a_1| = A\omega^2 \sin\left(\omega t_1 + \frac{\pi}{3}\right)$ . Din aceste relații obținem:

$$\omega = \sqrt{\frac{|a_1|}{y_1}} = \sqrt{\frac{0,9}{0,1}} = 3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

și

$$A = \frac{\sqrt{v_1^2 + \omega^2 y_1^2}}{\omega} = \frac{\sqrt{(\sqrt{7} \cdot 10^{-1})^2 + 3^2 \cdot 10^{-2}}}{3} = \frac{4}{3} \cdot 10^{-1} \text{ m.}$$

Ecuatia mișcării armonice va fi

$$y = \frac{4}{3} \cdot 10^{-1} \sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{b) } v_{\max} = \omega A = 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot 10^{-1} = 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; a_{\max} = \omega^2 A = 3^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot 10^{-1} = 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2};$$

$$F_{\max} = kA = m\omega^2 A = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 3^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot 10^{-1} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ N.}$$

$$\text{c) } y_2 = \frac{4}{3} \cdot 10^{-1} \sin\left(3t_2 + \frac{\pi}{6}\right) = A \sin\left(3t_2 + \frac{\pi}{6}\right);$$

$$E_p = \frac{1}{2} k y_2^2; E_c = E - E_p = \frac{1}{2} k (A^2 - y_2^2);$$

$$E_p = E_c \Rightarrow \frac{1}{2} k y_2^2 = \frac{1}{2} k (A^2 - y_2^2) \Rightarrow y_2 = A \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{3} \cdot 10^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 10^{-1} \text{ m.}$$

$$\text{d) } E_p = \frac{1}{2} k y^2; E_p = E_{p_{\max}} \Rightarrow \sin^2\left(3t_p + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(3t_p + \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right); n = 0, 1, 2, \dots$$

$$t_p = \frac{\pi}{3} \left(n + \frac{1}{6}\right); n = 0, 1, 2, \dots$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2; E_c = E_{c_{\max}} \Rightarrow \cos^2\left(3t_c + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(3t_c + \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1 = \cos(n\pi) \Rightarrow t_c = \frac{\pi}{3} \left(n - \frac{1}{3}\right).$$

$$\text{e) } y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2), y = y_1 + y_2 = A \sin(\omega t + \varphi),$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{4}{3} \cdot 10^{-1}\right)^2 + \left(\frac{5}{3} \cdot 10^{-1}\right)^2 + 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot 10^{-2} \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{10^{-1} \sqrt{41 + 20\sqrt{3}}}{3} \cong 0,29 \text{ m,}$$

$$\text{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} = \frac{\frac{4}{3} \cdot 10^{-1} \sin \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3} \cdot 10^{-1} \sin \frac{\pi}{2}}{\frac{4}{3} \cdot 10^{-1} \cos \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3} \cdot 10^{-1} \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{2\sqrt{3} + 5}{2},$$

$$y = \frac{\sqrt{41 + 20\sqrt{3}}}{3} \cdot 10^{-1} \sin\left(3t + \arctg \frac{5 + 2\sqrt{3}}{2}\right).$$

9°. a) Din ecuațiile de echilibru dinamic pentru cele două corpuri:

$$\mu_m R_m + ma_m = ma_M \cos \alpha + mg \sin \alpha, \quad R_m + ma_M \sin \alpha = mg \cos \alpha,$$

$$R_m \sin \alpha = Ma_M + \mu_M R_M, \quad R_M = Mg + R_m \cos \alpha,$$

eliminând pe  $R_m$  și  $R_M$ , obținem:

$$a_M = g \frac{m \cos \alpha (\sin \alpha - \mu_M \cos \alpha) - \mu_M M}{m \sin \alpha (\sin \alpha - \mu_M \cos \alpha) + M}$$

și

$$a_m = g \frac{m(\sin \alpha - \mu_M \cos \alpha) + M[\sin \alpha - \mu_M \cos \alpha - \mu_m(\cos \alpha + \mu_M \sin \alpha)]}{m \sin \alpha (\sin \alpha - \mu_M \cos \alpha) + M}.$$

$$b) \quad R_m = m(g \cos \alpha - a_M \sin \alpha) = mg \frac{M(\cos \alpha + \mu_M \sin \alpha)}{m \sin \alpha (\sin \alpha - \mu_M \cos \alpha) + M},$$

$$c) \quad R_M = g \frac{M(M + m)}{m \sin \alpha (\sin \alpha - \mu_M \cos \alpha) + M}.$$

Notă: Toate relațiile de mai sus sînt valabile dacă  $a_M \geq 0$  și  $a_m \geq 0$ , adică pentru  $\mu_M \leq \frac{m \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \cos^2 \alpha}$  și  $\mu_m \leq \frac{(m + M)(\sin \alpha - \mu_M \cos \alpha)}{M(\cos \alpha + \mu_M \sin \alpha)}$ . Dacă  $\mu_M > \frac{m \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \cos^2 \alpha}$ , planul inclinat rămîne imobil și problema capătă forma sa simplă.

$$d) \quad a_M = g \frac{m \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}, \quad a_m = g \frac{(M + m) \sin \alpha - \mu_m M \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha},$$

$$R_m = mg \frac{M \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}, \quad R = g \frac{M(M + m)}{M + m \sin^2 \alpha}.$$

10°. a) Aplicînd „legea” lui Bernoulli pentru tubul de curent de sus se obține:

$$p_0 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g(h - x), \quad (1)$$

iar pentru tubul de curent de jos

$$p_0 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g(h - x - d), \quad (2)$$

$p_0$  fiind presiunea atmosferică.

Din (1) rezultă

$$v_1 = \sqrt{2gx}, \quad (3)$$

iar din (2)

$$v_2 = \sqrt{2g(x + d)}. \quad (4)$$

Pentru a calcula timpii de coborîre ai unei picături de apă pînă la sol, avem  $y_1 = h - x - \frac{1}{2}gt_1^2 = 0$ , de unde rezultă

$$t_1 = \sqrt{\frac{2}{g}(h - x)} \quad (5)$$

și  $y_2 = h - x - d - \frac{1}{2}gt_2^2 = 0$ , obținîndu-se

$$t_2 = \sqrt{\frac{2}{g}(h - d - x)}. \quad (6)$$

Mișcarea pe orizontală fiind uniformă, avem  $v_1 t_1 = v_2 t_2$ , adică:

$$\sqrt{2gx} \sqrt{\frac{2}{g}(h-x)} = \sqrt{2g(x+d)} \sqrt{\frac{2}{g}(h-d-x)}, \text{ rezultând } x = \frac{h-d}{2}. \quad (7)$$

Deci orificiul de secțiune  $S_1$  se află la distanța  $x_1 = \frac{h-d}{2}$  de nivelul apei din vas, iar orificiul de secțiune  $S_2$  la distanța  $x_2 = \frac{h+d}{2}$ .

$$b) Q_1 = S_1 v_1 = S_1 \sqrt{g(h-d)}, \quad (8)$$

$$Q_2 = S_2 v_2 = S_2 \sqrt{g(h+d)}. \quad (9)$$

$$c) Q = Q_1 + Q_2 = \sqrt{g}(S_1 \sqrt{h-d} + S_2 \sqrt{h+d}). \quad (10)$$

d) Pentru ca lichidul să nu curgă, este necesar ca presiunea exercitată pe dop să fie egală cu presiunea hidrostatică a apei, adică:

$$F_1 = p_1 S_1 = \rho g x S_1 = \frac{1}{2} \rho g S_1 (h-d) \quad (11)$$

și

$$F_2 = p_2 S_2 = \rho g (x+d) S_2 = \frac{1}{2} \rho g S_2 (h+d). \quad (12)$$

11°. a) Forța cu care este atrasă nava cosmică de către Pământ este dată de legea lui Newton a atracției universale:

$$F = \gamma \frac{mM}{(R+h)^2},$$

unde  $\gamma$  este constanta atracției universale,  $m$  și  $M$  sînt masele navei cosmice, respectiv Pământului, iar  $h$  este înălțimea navei cosmice deasupra suprafeței Pământului (presupus de formă sferică). Întrucît accelerația centrifugă imprimată navei cosmice de mișcarea sa circulară este  $a_c = \frac{v_0^2}{R+h}$ , unde  $v_0$  este viteza navei pe orbita sa, condiția de stabilitate a navei pe traiectoria sa circulară — exprimată prin egalitatea forței centrifuge (în modul) cu forța gravitațională — are forma

$$\frac{mv_0^2}{R+h} = \gamma \frac{mM}{(R+h)^2},$$

constantă atracției universale fiind corelată cu accelerația gravitațională la suprafața Pământului prin relația

$$mg = \frac{\gamma mM}{R^2},$$

din care rezultă că  $\gamma M = gR^2$ .

Din ultimele relații reiese expresia vitezei navei cosmice pe orbita circulară situată la înălțimea  $h$  deasupra suprafeței Pământului:

$$v_0 = R \sqrt{\frac{g}{R+h}}.$$

Perioada mișcării navei pe orbita sa inițială rezultă ca fiind:

$$T_0 = \frac{2\pi(R+h)}{v_0} = 2\pi \sqrt{\frac{R+h}{g}} \left(1 + \frac{h}{R}\right).$$



După efectuarea corecției asupra orbitei de deplasare a navei, perioada mișcării sale devine  $T_1 (> T_0)$ , dată în funcție de noua înălțime  $h + \Delta h$  a navei deasupra suprafeței Pământului prin relația analoagă:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{R + h + \Delta h}{g}} \left( 1 + \frac{h + \Delta h}{R} \right).$$

Din ultimele două relații reiese că:

$$\Delta h = \left[ \left( \frac{T_1}{T_0} \right)^{2/3} - 1 \right] \cdot \left( \frac{g R^2 T_0^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \cong 3,95 \cdot 10^4 \text{ m (39,5 km)}.$$

b) Expresia vitezei  $v_1$  a navei cosmice după efectuarea corecției orbitei circulare este analoagă celei a vitezei  $v_0$ , adică:

$$v_1 = R \sqrt{\frac{g}{R + h + \Delta h}}, \text{ deci } \frac{v_1}{v_0} = \sqrt{\frac{r_0}{r_1}} \cong 0,997.$$

12°. a) Accelerația  $a$  a mișcării sistemului de corpuri, cind scripetele este blocat, iar mișcarea decurge fără frecare, reiese din aplicarea legii a II-a a dinamicii,  $ma = (m_1 + m_2) a = R = (m_1 - m_2)g$ , de unde

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2} \cong 3,27 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Acum se poate calcula durata după care corpul 1 atinge solul,

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} \cong 0,782 \text{ s, iar viteza acestui corp în momentul în care atinge solul va fi}$$

$$v = \sqrt{2ah} \cong 2,56 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Atunci cind deplasarea firului antrenează scripetele, fără ca firul să alunece pe suprafața acestuia, condiția de conservare a energiei sistemului între starea inițială și cea în care corpul 1 atinge solul are forma:

$$\frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2} + (m_2 - m_1) gh = 0.$$

Asimilind scripetele cu un disc circular și omogen (de grosime  $L$  și densitate  $\rho$  constantă, fig. F.C.36), găsim expresia momentului de inerție al discului față de centrul său:

$$I = \int_{\text{disc}} r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho \cdot 2\pi r L dr = \rho \frac{\pi R^4}{2} L = \frac{MR^2}{2}.$$

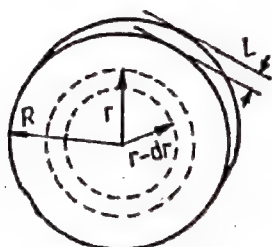


Fig. F.C.36

unde  $M$  este masa discului (expresia dedusă este indicată și în manualul de Fizică pentru clasa IX-a de liceu). Din această relație reiese că  $M = \frac{2I}{R^2} = 2 \text{ kg}$ .

Ținând seamă că între viteza unghiulară  $\omega$  a rotației discului și viteza linia ră a deplasării marginii discului (egală cu viteza  $v$  a mișcării sistemului) există relația  $v = \omega R$ , expresia de mai sus a legii conservării energiei mecanice capătă forma:

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right) \frac{v^2}{2} = (m_1 - m_2) gh,$$

care evidențiază că antrenarea discului în mișcare echivalează cu creșterea masei sistemului cu o masă „echivalentă” (discului) egală cu  $\frac{M}{2}$ . Rezultă și valoarea cerută a vitezei corpului 1 în momentul atingerii solului, în condițiile antrenării discului în mișcare:

$$v = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2) gh}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}} \approx 2,21 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Ținând seamă că, în condițiile antrenării discului în mișcare, masa sa „efectivă” este egală — în conformitate cu cele deduse mai sus — cu  $\frac{M}{2}$ , accelerația mișcării sistemului în condițiile antrenării discului este:

$$a = \frac{(m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}.$$

Deoarece între accelerația unghiulară  $\varepsilon$  a mișcării discului și accelerația liniară corespunzătoare mișcării marginii discului (egală cu cea a mișcării sistemului) există relația  $a = \varepsilon R$ , rezultă că:

$$\varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{(m_1 - m_2) g}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right) R} = 24,5 \text{ rad/s}^2.$$

13°. a) Considerăm un element de suprafață al sferei  $s$ , de arie  $\Delta A$ . Fie  $\rho$  distanța de la corpul punctiform de masă  $m$  la acest element de suprafață, iar  $\vec{l}_\rho$  vectorul unitar al razei vectoare a elementului  $\Delta A$  (de dimensiuni foarte reduse) față de punctul  $P$  în care se găsește corpul punctiform (fig. F.C.37a). În conformitate cu definiția din enunț a fluxului intensității cimpului gravitațional printr-un element de suprafață,  $\Delta \Phi = \vec{\Gamma} \cdot \vec{l}_n \Delta A$ ; înlocuind expresia intensității cimpului gravitațional, obținem

$$\Delta \Phi = \frac{Km}{\rho^2} \vec{l}_\rho \cdot \vec{l}_n \Delta A.$$

Deoarece aria  $\Delta A_n$  a proiecției elementului de suprafață  $\Delta A$  în planul perpendicular pe raza vectoare  $\vec{\rho}$  se exprimă prin unghiul  $\theta$  format de normala  $\vec{l}_n$ , la suprafața  $\Delta A$ , cu raza vectoare  $\vec{\rho}$  prin relația  $\Delta A_n = \Delta A \cos \theta = \Delta A \cdot \vec{l}_n \cdot \vec{l}_\rho$ , expresia fluxului prin elementul de suprafață  $\Delta A$  devine:

$$\Delta \Phi = Km \frac{\Delta A_n}{\rho^2} = Km \Delta \Omega,$$

unde  $\Delta \Omega$  este unghiul solid sub care se observă elementul de suprafață  $\Delta A$  din punctul  $P$  în care se găsește corpul punctiform considerat (numeric egal cu aria „decupată” de conul cu vârful în punctul  $P$  și baza pe elementul de suprafață  $\Delta A$ ,

pe sfera de rază unitate, avind centrul în punctul  $P$ ). Rezultă că fluxul intensității cimpului gravitațional prin suprafața sferică  $s$  este:

$$\Delta \Phi_{\bar{\Gamma}, s} = Km \sum_s \Delta \Omega,$$

unde  $\sum_s \Delta \Omega$  este suma unghiurilor solide sub care se observă din punctul  $P$ , în care se găsește corpul punctiform, diferitele elemente ale suprafeței sferei  $s$ . În cazul în care punctul  $P$  este interior sferei  $s$ , suma  $\sum_s \Delta \Omega$  este egală cu  $4\pi$  steradiani (fiind numeric egală cu aria sferei de rază 1; v. și fig. F.C.37a); rezultă că în acest caz  $\Phi_{\bar{\Gamma}, s} = 4\pi Km$ .

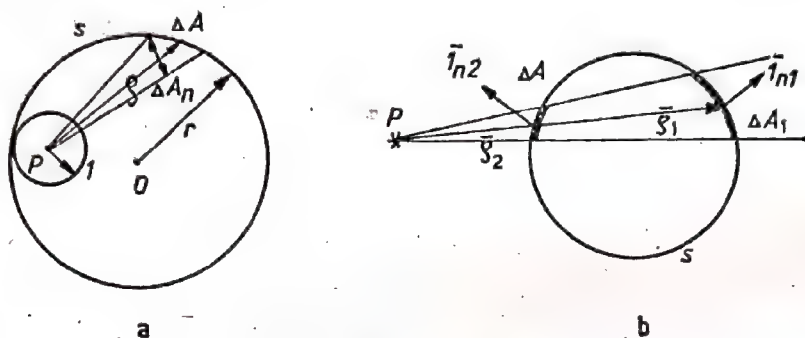


Fig. F.C.37

În cazul în care punctul  $P$  este exterior sferei  $s$ , această sferă poate fi împărțită — prin intermediul unor conuri cu virful în  $P$  — în perechi de elemente de suprafață (de arii  $\Delta A_1, \Delta A_2$ , v. fig. F.C.37b), cărora le corespund unghiuri solide  $\Delta \Omega_1, \Delta \Omega_2$  egale, însă de semne contrare (produsele scalare  $\bar{p}_1 \cdot \bar{l}_{n1}$  și  $\bar{p}_2 \cdot \bar{l}_{n2}$  au semne contrare, deoarece normalele la o suprafață închisă sînt definite ca avînd întotdeauna sensul spre exterior; rezultă că  $\Delta \Omega_1 + \Delta \Omega_2 = 0$ , deci  $\sum_s \Delta \Omega = 0$  și  $\Phi_{\bar{\Gamma}, s} = 0$ , dacă punctul material  $P$  se găsește în afara sferei  $s$ .

b) Se consideră sfera  $s$  de rază  $r$ , cu centrul în  $O$ , sferă care trece prin punctul material de masă  $m$  considerat. Fie un element al sferei  $S$ , de masă  $\Delta m_k$ ; după cum acest element aparține (este interior) sferei  $s$ , respectiv este exterior ei, contribuția acestui element la fluxul intensității cimpului gravitațional prin suprafața  $S$  este egală cu  $4\pi K \Delta m_k$ , sau cu 0. Deoarece rezultanta mai multor forțe gravitaționale este suma vectorială a acestor forțe:  $\bar{F}_{rez} = \sum \bar{F}_k$ , rezultanta intensității cimpului gravitațional produs de mai multe corpuri („surse“ de gravitație) este  $\bar{\Gamma}_{rez} = \frac{\bar{F}_{rez}}{m} = \frac{1}{m} \sum \bar{F}_k = \sum \bar{\Gamma}_k$ , iar fluxul rezultantei intensităților cimpurilor gravitaționale va fi:

$$\Phi_{\bar{\Gamma}_{rez}, s} = \sum_{\Delta A_k} \bar{\Gamma}_k \bar{l}_n \Delta A = \sum_k \Phi_{\bar{\Gamma}_k, s};$$

ținînd seamă de rezultatele de mai sus, găsim că

$$\Phi_{\bar{\Gamma}_{rez}, s} = 4\pi K m_{int. s} = 4\pi K \rho \frac{4\pi}{3} r^3,$$

unde  $m_{int. s}$  este masa substanței din interiorul sferei  $s$ . Pe de altă parte, datorită simetriei sferice, rezultanta intensităților cimpurilor gravifice este aceeași în toate punctele sferei  $s$  și are direcție radială, ceea ce face ca:

$$\Phi_{\bar{\Gamma}_{rez}, s} = \sum_{\Delta A(s)} \bar{\Gamma}_{rez} \cdot \bar{l}_n \Delta A = \Gamma_{rez} \sum_{\Delta A(s)} \Delta A = 4\pi r^2 \cdot \Gamma_{rez}.$$



Egalind cele două expresii obținute pentru fluxul rezultantei intensităților câmpurilor gravitaționale prin sfera  $s$ , obținem:

$$4\pi r^2 \Gamma_{\text{rez}} = 4\pi K \rho \frac{4\pi}{3} r^3,$$

de unde

$$\Gamma_{\text{rez}} = K \rho \frac{4\pi r}{3},$$

deci forța care acționează asupra punctului material de masă  $m$  situat la distanța  $r$  de centrul  $O$  al sferei omogene este:

$$F = m \Gamma_{\text{rez}} = m K \rho \frac{4\pi r}{3}.$$

c) Se constată că forța gravitațională care acționează asupra unui punct material de masă  $m$ , situat la o distanță  $r$  de centrul unei sfere omogene „pline“ mai mică decât raza  $R$  a sferei, este echivalentă acțiunii unui resort elastic de constantă echivalentă:

$$k = \frac{4\pi}{3} K \rho m,$$

a cărui extremitate ar coincide, în cazul în care ar fi nedeformat, cu centrul  $O$  al sferei „pline“  $S$ . Prin urmare punctul material de masă  $m$  efectuează — în interiorul canalului „săpat“ în lungul unui diametru al sferei „pline“  $S$  — o mișcare oscilatorie de perioadă:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{3\pi}{K\rho}} \simeq 4,85 \cdot 10^3 \text{ s } (\simeq 1 \text{ h } 21 \text{ min}).$$

$$14^\circ. \text{ a) } \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh = \frac{\rho v_2^2}{2}, \quad S v_1 = s v_2.$$

Din sistemul de ecuații de mai sus rezultă

$$v_1(h) = \frac{s}{\sqrt{S^2 - s^2}} \sqrt{2gh}, \quad v_2(h) = \frac{S}{\sqrt{S^2 - s^2}} \sqrt{2gh}.$$

$$\text{b) } dh = -v_1 dt = -\frac{s}{\sqrt{S^2 - s^2}} \sqrt{2gh} dt.$$

Prin integrare, cu condiția inițială  $h = h_0$  pentru  $t = 0$ , se obține:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \frac{\sqrt{S^2 - s^2}}{s}.$$

Numeric:

$$t_1 \simeq \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \frac{S}{s} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8}{9,8}} \cdot \frac{8 \cdot 10^{-2}}{10^{-4}} = 3,23 \cdot 10^2 \text{ s}.$$

$$\text{c) } v_2(h_0) = \frac{S}{\sqrt{S^2 - s^2}} \sqrt{2gh_0},$$

$$V_1 = s v_2(h_0) t_1 = \frac{sS}{\sqrt{S^2 - s^2}} \sqrt{2gh_0} \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \frac{\sqrt{S^2 - s^2}}{s},$$

$$V_1 = 2Sh_0 = 2V_0 = 2 \cdot 8 \cdot 10^{-2} \cdot 0,8 = 12,8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 0,128 \text{ m}^3.$$

$$15^\circ. \text{ a) } F_{12} = -K \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}, \quad F_{12} = -K \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{r_{12}}{r_{12}}, \quad \bar{\Gamma} = \frac{\bar{F}}{m}.$$

Fie  $P$  punctul căutat. Atunci

$$\bar{\Gamma} = -K \left( \frac{m_1}{r_1^2} \vec{r}_{01} + \frac{m_2}{r_2^2} \vec{r}_{02} \right), \quad r_1 + r_2 = r,$$

$$\frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{r_2^2} \Rightarrow \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{0,2}{0,8} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow r_2 = 2r_1,$$

$$r_1 + 2r_1 = r \Rightarrow r_1 = \frac{r}{3} = 8,33 \text{ cm}, \quad r_2 = \frac{2r}{3} = 16,66 \text{ cm}.$$

$$b) \quad \bar{\Gamma}_1 = -K \frac{m_1}{r_1^2} \vec{r}_{01}, \quad \bar{\Gamma}_2 = -K \frac{m_2}{r_2^2} \vec{r}_{02}.$$

Din figura F.C.38a,b avem  $|\bar{\Gamma}| = \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + 2\Gamma_1\Gamma_2 \cos \alpha}$ ; dar  $\cos \alpha = \frac{r^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = 0$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , deci  $|\bar{\Gamma}| = \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2}$ , iar atunci

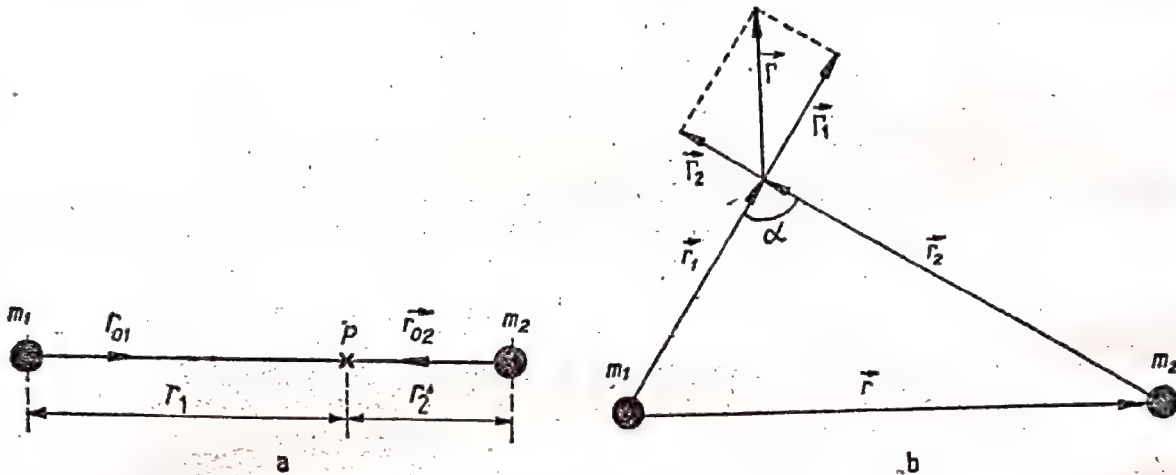


Fig. F.C.38

$$\Gamma_1 = 6,670 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{0,2}{(0,2)^2} = 0,333 \cdot 10^{-9} \text{ N/m}^2,$$

$$\Gamma_2 = 6,670 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{0,8}{(0,15)^2} = 2,371 \cdot 10^{-9} \text{ N/m}^2,$$

$$\Gamma = \sqrt{5,662 \cdot 10^{-18} + 0,111 \cdot 10^{-18}} = 2,39 \cdot 10^{-9} \text{ N/m}^2.$$

c) Forța fiind de tip elastic, mișcarea executată de corpul  $m_1$  este oscilatorie armonică de forma (fig. F.C.39)  $r = R_0 \sin(\omega t + \varphi)$ , unde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4\pi m_1 K \rho}{3m_1}} = \sqrt{\frac{4\pi K \rho}{3}}.$$

Intrucît  $g_0 = K \frac{M_0}{R_0^2}$ , rezultă  $\omega = \sqrt{\frac{g_0}{R_0}}$ , deci

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R_0}{g}} = 5,03 \cdot 10^3 \text{ s}.$$

16°. a)  $m_c = V\rho_c$ , unde  $\rho_c$  este densitatea corpului. Dar  $V\rho_c g = \frac{V\rho_{\text{Hg}} g}{3}$  (v. fig. F.C.40), de unde

$$\rho_c = \frac{\rho_{\text{Hg}}}{3} = 4533,33 \text{ kg/m}^3.$$

Evident,

$$V = V' + V'',$$

unde  $V'$  este volumul părții din corp aflată în mercur, iar  $V''$  volumul părții din corp aflată în apă. De asemenea,

$$V\rho_{cg} = V'\rho_{Hg}g + V''\rho_{ag}g,$$

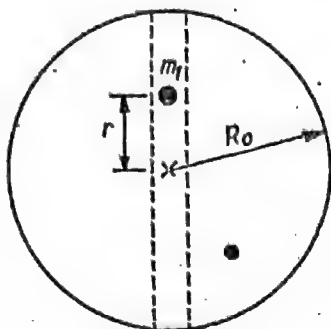


Fig. F.C.39

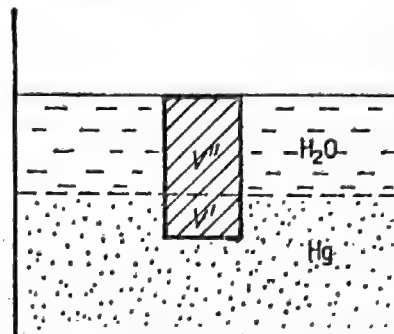


Fig. F.C.40

$\rho_a$  fiind densitatea apei. Dacă se elimină  $V''$  între ecuațiile de mai sus se obține:

$$\frac{V'}{V} = \frac{\rho_{Hg}/3 - \rho_a}{\rho_{Hg} - \rho_a}.$$

Numeric rezultă

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{13\,600}{3} - 1\,000}{13\,600 - 1\,000} = 0,280.$$

b) Presiunea la cota  $h$  în raport cu suprafața apei este (fig. F.C.41)  $p(h) = \rho_a g h$ , încît

$$dF = p dS = p l dh = \rho_a g l h dh,$$

$$F = \int_0^l \rho_a g h l dh = \frac{1}{2} \rho_a g l^3 = \frac{1}{2} \cdot 1\,000 \cdot 9,8 (0,3)^3 = 132,3 \text{ N}.$$

c) Momentul forței  $F$  în punctul căutat  $P$ , în raport cu baza, are expresia:

$$M = F h_0 = \int_0^l dM,$$

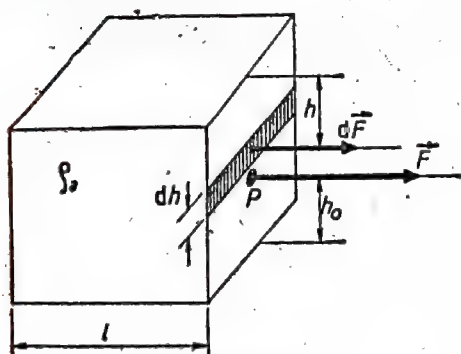


Fig. F.C.41

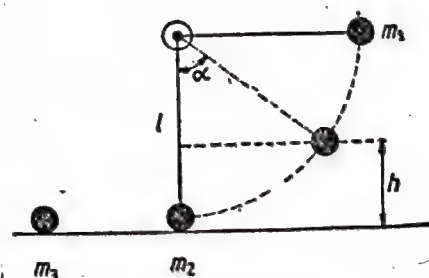


Fig. F.C.42

unde  $dM = dF(l - h) = (l - h) \rho_a g h l dh$ . Prin integrare rezultă

$$h_0 = \frac{l}{3} = 0,1 \text{ m}.$$

17°. a) Se scriu legile de conservare pentru energie și impuls (Fig. F.C.42):

$$m_1 V = m_1 v_1 + 3 m_1 v_2, \quad m_1 V^2 = m_1 v_1^2 + 3 m_1 v_2^2,$$



din care se obține

$$V - v_1 = 3v_2, \quad V + v_1 = v_2.$$

Deoarece  $\frac{m_1 V^2}{2} = m_1 g l \Rightarrow V = \sqrt{2gl}$ .

Rezolvind sistemul, se obține:

$$2V = 4v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{V}{2} = \frac{\sqrt{2gl}}{2}, \quad v_1 = v_2 - V = -\frac{V}{2}.$$

Numeric:  $V = \sqrt{2 \cdot 0,4 \cdot 9,8} = 2,8 \text{ m/s}$ , deci  $v_1 = 1,4 \text{ m/s}$ , iar  $v_2 = 1,4 \text{ m/s}$ .

b)  $\frac{m_1 v_1^2}{2} = m_1 g h \Rightarrow \frac{v_1^2}{2} = g l (1 - \cos \alpha) \Rightarrow 1 - \cos \alpha = \frac{v_1^2}{2gl} \Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{v_1^2}{2gl} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \alpha = \arccos \left( 1 - \frac{v_1^2}{2gl} \right) = \arccos \left( 1 - \frac{(1,4)^2}{2 \cdot 0,4 \cdot 9,8} \right) = \arccos(0,75) = 0,722 \text{ rad} = 41,40^\circ.$

c) Ciocnirea lui  $m_2$  cu  $m_3$  fiind perfect elastică, avem

$$m_2 v_2 = m_2 v_2' + m_3 v_3', \quad m_2 v_2^2 = m_2 v_2'^2 + m_3 v_3'^2,$$

$$K = \frac{E_{c_3}}{E_{c_2}} = \frac{m_3 \left( \frac{v_3'}{v_2} \right)^2}{(m_3 + m_2)^2} = \frac{4m_3 m_2}{9m_2^2} = \frac{8}{9} \simeq 0,89,$$

unde  $E_{c_3}$  este energia cinetică a bilei cu masa  $m_3$ , după ciocnire, iar  $E_{c_2}$  este energia cinetică a bilei cu masa  $m_2$  înainte de ciocnirea cu bila  $m_3$ .

Considerind acum ciocnirea perfect plastică a lui  $m_2$  cu  $m_3$ , viteza comună după ciocnire va fi  $u = \frac{m_2 v_2}{m_2 + m_3}$ , iar

$$K = \frac{E_{c_3}}{E_{c_2}} = \frac{m_3 \left( \frac{u}{v_2} \right)^2}{(m_2 + m_3)^2} = \frac{m_2 m_3}{2m_2^2} = \frac{2}{9} \simeq 0,22.$$

## 2. FIZICĂ MOLECULARĂ ȘI CĂLDURĂ TERMODINAMICĂ

18°. a) Presiunea din cilindru se obține cu ajutorul ecuației termice de stare a gazului ideal,  $pV = \nu RT$ , de unde  $p_1 = \frac{\nu RT}{V_1} = \frac{10^{-3} \cdot 8 \cdot 310 \cdot 300}{150 \cdot 10^{-4}} = 1,662 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$

b) În timpul  $t = 15 \text{ s}$  pistonul se deplasează pe distanța  $s = vt = 15 \text{ cm}$ . Volumul ocupat de gaz va fi  $V_2 = S(l - vt)$ , iar presiunea gazului va fi dată de aceeași ecuație:  $p_2 = \frac{\nu RT}{V_2} = \frac{\nu RT}{S(l - vt)} = \frac{10^{-3} \cdot 8 \cdot 310 \cdot 300}{100 \cdot 10^{-4}(1,5 - 0,15)} = 1,847 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$

c) Transformarea suferită de gaz fiind izotermă, lucrul efectuat pentru comprimarea gazului va fi  $L = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu RT \ln \frac{l - vt}{l} = 10^{-3} \cdot 8 \cdot 310 \cdot 300 \ln \frac{1,35}{1,5} = 2493 (\ln 9 - \ln 10) = 2493(2 \cdot 1,0986 - 2,3026) \simeq -263 \text{ J}$ . Semnul  $(-)$  arată că gazul primește lucrul mecanic.

d) Întrucît  $F = pS$ , cu ajutorul ecuației termice de stare a gazului ideal, avem:

$$F = \frac{\nu RT}{V} \cdot S = \frac{\nu RT}{l - vt}.$$

Aceasta este ecuația de variație a forței în funcție de timp, iar reprezentarea ei este dată în figura F.C.43 pentru intervalul 0—15 s.

19° a) Conform figurii F.C.44, poziția de echilibru a pistonului va fi cea pentru care forța  $F$  exercitată de gaz asupra pistonului echilibrează greutatea

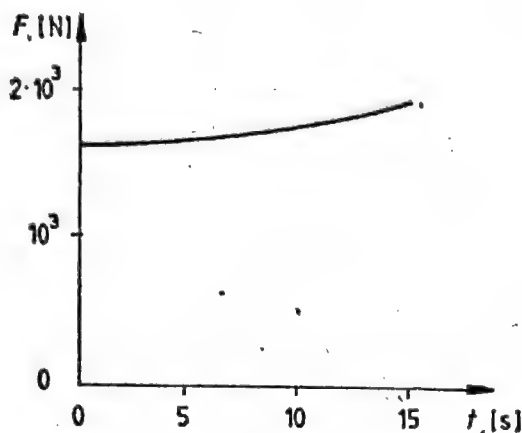


Fig. F.C.43

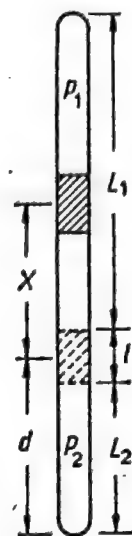


Fig. F.C.44

acestui. Centrul pistonului se va afla la distanța  $d = L_2 + \frac{l}{2}$  de capătul inferior al tubului. Asupra pistonului acționează forța

$$F = (p_2 - p_1)S = \nu RT \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) S = \nu RT \left( \frac{1}{L_2} - \frac{1}{L_1} \right), \quad (1)$$

unde s-a făcut uz de ecuația termică de stare a gazului. Întrucît  $L_1 + L_2 = L - l$ , ecuația (1) devine

$$F = \nu RT \frac{L - l - 2L_2}{L_2(L - l - L_2)}.$$

Utilizînd condiția de echilibru  $F = G$ , rezultă ecuația

$$GL_2^2 - [2\nu RT + G(L - l)]L_2 + \nu RT(L - l) = 0$$

a cărei soluție este

$$L_2 = \frac{2\nu RT + G(L - l)}{2G} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4G\nu RT(L - l)}{[2\nu RT + G(L - l)]^2}} \right).$$

Numai soluția cu semnul (—) în fața celui de al doilea termen este acceptabilă din punct de vedere fizic. Poziția de echilibru a pistonului va fi dată de

$$\begin{aligned} d = L_2 + \frac{l}{2} &= \frac{2\nu RT + G(L - l)}{2G} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4G\nu RT(L - l)}{[2\nu RT + G(L - l)]^2}} \right) + \frac{l}{2} = \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot 8\,310 \cdot 300 + 10(1 - 0,1)}{2 \cdot 10} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cdot 10 \cdot 10^{-5} \cdot 8\,310 \cdot 300(1 - 0,1)}{[2 \cdot 10^{-5} \cdot 8\,310 \cdot 300 + 10(1 - 0,1)]^2}} \right) + \\ &\quad + \frac{0,1}{2} = 0,459 \text{ m.} \end{aligned}$$

b) Într-o situație oarecare, cînd pistonul se află la distanța  $x$  de poziția de echilibru,  $L_2 \rightarrow d + x - \frac{l}{2}$ , astfel încît, utilizînd ecuația (1), forța care acționează asupra pistonului este

$$F = \nu RT \frac{L - 2(d + x)}{\left(d + x - \frac{l}{2}\right)\left(L - \frac{l}{2} - d - x\right)} - G. \quad (2)$$

Această expresie depinde în mod complicat de  $x$ . Dependența liniară se va obține numai pentru valori ale lui  $x$  extrem de mici, neglijabile în factorii de la numitor, adică pentru  $x \ll d - \frac{l}{2}$ ,  $x \ll L - \frac{l}{2} - d$ . Adunînd membru cu membru aceste inegalități, rezultă condiția

$$x \ll \frac{L - l}{2}.$$

Întrucît  $L - l = 90$  cm, înseamnă că valori ale lui  $x$  de ordinul a 1 cm satisfac această condiție. La numărător, în ecuația (2),  $x$  nu poate fi neglijat deoarece  $2x$  este comparabil cu  $L - 2d$ . Forța care pune pistonul în mișcare (2) devine

$$\begin{aligned} F &= \nu RT \frac{(L - 2d - 2x)}{\left(d - \frac{l}{2}\right)\left(L - \frac{l}{2} - d\right)} - \nu RT \frac{L - 2d}{\left(d - \frac{l}{2}\right)\left(L - \frac{l}{2} - d\right)} = \\ &= -\nu RT \frac{2x}{\left(d - \frac{l}{2}\right)\left(L - \frac{l}{2} - d\right)}. \end{aligned}$$

În acest caz forța este proporțională cu deplasarea și de sens opus, adică mișcarea este oscilatorie armonică.

c) În mișcarea oscilatorie armonică a unui corp de masă  $m$ , sub acțiunea unei forțe  $F = -kx$ , perioada este  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ . În cazul nostru

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\nu RT}{\left(d - \frac{l}{2}\right)\left(L - \frac{l}{2} - d\right)}, \text{ deci } T = 2\pi \sqrt{\frac{G\left(d - \frac{l}{2}\right)\left(L - \frac{l}{2} - d\right)}{g^2\nu RT}} = \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{10(0,4597 - 0,05)(1 - 0,05 - 0,4597)}{10 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 8310 \cdot 300}} = 0,399 \text{ s.} \end{aligned}$$

20°. a) Cantitatea de apă  $\Delta m_1$ , care intră în calorimetru de la momentul  $t_0 = 0$  pînă la momentul  $t_1$ , cînd în calorimetru se află numai gheață la temperatura  $T = 273$  K, va ceda o cantitate de căldură răcindu-se pînă la temperatura  $T$  și o cantitate de căldură datorită transformării ei în gheață. Aceste cantități de căldură sînt absorbite de gheață și calorimetru pentru a se încălzi de la  $T_1$  la  $T$ . Ecuația calorimetrică se va scrie:

$$\Delta m_1 c_a (T_2 - T) + \Delta m_1 \lambda + \Delta m_1 \frac{v^2}{2} = m_1 c_g (T - T_1) + C(T - T_1). \quad (1)$$



În această ecuație s-a ținut seama și de energia cîpătată de masa de apă în căderea de la înălțimea  $h$ . Întrucît  $\Delta m_1 = Dt_1$ , iar  $v = \sqrt{2gh}$ , din ecuația (1) se obține:

$$t_1 = \frac{(T - T_1)(m_1 c_a + C)}{D[c_a(T_2 - T) + \lambda + gh]} = \frac{(273 - 258)(0,5 \cdot 2,1 \cdot 10^3 + 1,2 \cdot 10^3)}{2 \cdot 10^{-3}[4180(323 - 273) + 334 \cdot 10^3 - 10 \cdot 5]} = 31,13 \text{ s.}$$

b) Pentru ca în calorimetru să existe numai apă cu temperatura  $T = 273 \text{ K}$ , cantitatea de căldură cedată de masa suplimentară de apă  $\Delta m_2$  spre a se răci de la temperatura  $T_2$  la temperatura  $T$  (plus energia ei cinetică) trebuie să fie suficientă pentru a topi gheața existentă în calorimetru în cantitatea  $m_1 + \Delta m_1$ . Ecuația calorimetrică se va scrie:

$$\Delta m_2 c_a (T_2 - T) + \Delta m_2 \frac{v^2}{2} = (m_1 + \Delta m_1) \lambda. \quad (2)$$

Notînd că  $\Delta m_2 = Dt_2$ , ecuația (2) conduce la:

$$t_2 = \frac{(m_1 + Dt_1) \lambda}{D[c_a(T_2 - T) + gh]} = \frac{(0,5 + 2 \cdot 10^{-3} \cdot 31,13) \cdot 334 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-3}[4180(323 - 273) + 10 \cdot 5]} = 449,16 \text{ s.}$$

Deci, de la începutul experimentului și pînă în momentul în care în calorimetru se află numai apă la  $T = 273 \text{ K}$ , s-a scurs un timp  $t = t_1 + t_2 = 31,13 + 449,16 = 480,29 \text{ s}$ .

c) Cantitatea de apă care a căzut în calorimetru în acest interval de timp este  $\Delta m = \Delta m_1 + \Delta m_2 = D(t_1 + t_2)$ . Energia cinetică a acestei mase, datorită căderii de la înălțimea  $h$ , este

$$E_c = \frac{\Delta m v^2}{2} = \Delta m gh = D(t_1 + t_2)gh = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 480,29 \cdot 10 \cdot 5 \approx 48 \text{ J.}$$

21°. a) Inițial pistonul se află în poziția  $A$  (figura F.C.45), deci aerul, la presiunea inițială, ocupă volumul  $V$  al recipientului. Ecuația termică de stare a gazului ideal  $pV = \frac{m}{\mu} RT$  permite obținerea masei de aer:

$$m = \frac{\mu p_0 V}{RT} = \frac{28,9 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{8310 \cdot 300} = 1,16 \cdot 10^{-3} \text{ kg.}$$

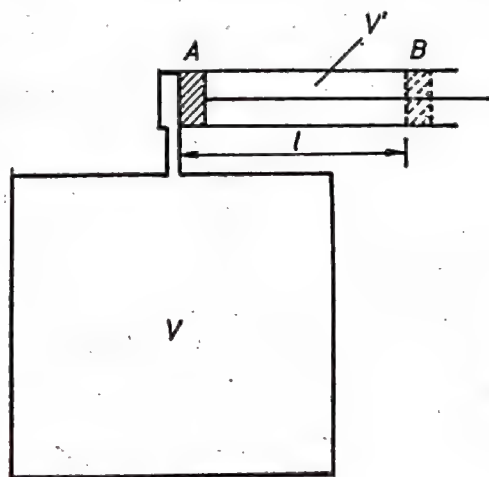


Fig. F.C.45

b) După prima cursă, pistonul ajunge în poziția  $B$ , deci gazul, care inițial ocupa volumul  $V$ , a ocupa acum volumul  $V + V'$ . Procesul fiind izoterm, se poate scrie.

$$p_0 V = p_1 (V + V'), \text{ de unde } p_1 = p_0 \frac{V}{V + V'}.$$

Înlocuind în ecuația termică de stare a gazului ideal, se obține masa  $m'$  din cilindru pompei:

$$m' = \frac{\mu p_1 V'}{RT} = \frac{\mu p_0 V}{RT} \cdot \frac{V'}{V + V'} = \frac{m V'}{V + V'} = \frac{m Sl}{V + Sl} = \frac{1,16 \cdot 10^{-3} \cdot 12,5 \cdot 10^{-4} \cdot 20 \cdot 10^{-2}}{10^3 \cdot 10^{-6} + 12,5 \cdot 10^{-4} \cdot 20 \cdot 10^{-2}} = 2,32 \cdot 10^{-4} \text{ kg.}$$

Aceasta este masa evacuată în prima cursă a pistonului.

c) Pentru fiecare cursă a pistonului se produce o transformare izotermă (masa de gaz este constantă pentru o cursă). Cursele succesive vor fi descrise de următoarele ecuații:  $p_0 V = p_1 (V + V')$ ,  $p_1 V = p_2 (V + V')$ ,  $p_2 V = p_3 (V + V')$ , ...,  $p_{n-1} V = p_n (V + V')$ .

Eliminând  $p_1, p_2, \dots$  și ținând seama că  $p_n = p_f$ , vom avea succesiv:

$$p_2 = p_0 \left( \frac{V}{V + V'} \right)^2, \quad p_3 = p_0 \left( \frac{V}{V + V'} \right)^3, \quad \dots, \quad p_f = p_0 \left( \frac{V}{V + V'} \right)^n.$$

Prin logaritmare, rezultă  $\lg \frac{p_f}{p_0} = n \lg \frac{V}{V + V'}$  de unde se obține

$$n = \frac{\lg \frac{p_0}{p_f}}{\lg \frac{V + V'}{V}} = \frac{\lg \frac{10^5}{10^3}}{\lg \frac{10^3 \cdot 10^{-6} + 250 \cdot 10^{-6}}{10^3 \cdot 10^{-6}}} = \frac{\lg 10^3}{\lg 5 - \lg 4} = \frac{3}{0,69897 - 0,60206} \approx 31.$$

22°. a) Situația descrisă în problemă ne conduce la următoarea expresie a randamentului primului ciclu:

$$\eta_1 = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_{23}|}{Q_{31}}, \quad (1)$$

unde am observat că gazul primește căldură în procesul izocor și cedează căldură în cel izoterm:

$$Q_{23} = \nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2}, \quad Q_{31} = \nu C_V (T_1 - T_2).$$

Înlocuind în (1), rezultă

$$\eta_1 = 1 - \frac{R \ln \frac{V_2}{V_3}}{C_V \left( \frac{T_1}{T_2} - 1 \right)} = 1 - \frac{R \ln \frac{V_2}{V_3}}{C_V (\varepsilon - 1)}. \quad (2)$$

În cazul celui de-al doilea ciclu

$$\eta_2 = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_{23'}|}{Q_{3'1}}, \quad (3)$$

unde acum căldura este primită în procesul izobar  $3' \rightarrow 1$ . Întrucât

$$Q_{23'} = \nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2}, \quad Q_{3'1} = \nu C_p (T_1 - T_2),$$

ecuația (3) devine

$$\eta_2 = 1 - \frac{R \ln \frac{V_2}{V_3}}{C_p (\varepsilon - 1)}. \quad (4)$$

Pentru a compara expresiile (3) și (4) trebuie să le exprimăm în raport cu aceleași cantități. Ținând seama de ecuațiile:

$$C_p = \gamma C_v \text{ și } C_p - C_v = R$$

obținem

$$C_p = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \text{ și } C_v = \frac{R}{\gamma - 1}. \quad (5)$$

Pentru izotermă  $p_2 V_2 = p_3 V_3$ .

Dar  $p_3 = p_1$ , deci rezultă  $p_2 V_2 = p_1 V_3$ , adică

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (6)$$

Pentru transformarea adiabatică  $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$  și  $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ , deci

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{V_2}{V_1} = \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \varepsilon^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (7)$$

Introducând ecuațiile (5) și (7), ecuația (2) devine:

$$\eta_1 = 1 - \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon - 1}. \quad (8)$$

Cu ajutorul relațiilor (5) și (7), ecuația (4) devine:

$$\eta_2 = 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma(\varepsilon - 1)} \ln \frac{p_1}{p_2} = 1 - \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon - 1}, \quad (9)$$

unde am ținut seama că  $\frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \varepsilon^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ .

Expresiile (8) și (9) sînt identice, deci randamentele celor două cicluri sînt egale.

b) Raționamentul fiind cu totul analog, este lăsat pe seama cititorului; se obține același rezultat: randamentele celor două cicluri sînt egale și au expresia

$$\eta'_1 = \eta'_2 = 1 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon \ln \varepsilon}.$$

23°. Ținând seama de condițiile descrise, fiind absent un schimb de energie al sistemului cu exteriorul prin intermediul căldurii, este vorba de o transformare adiabatică.

a) Relația lui Poisson ne permite a scrie:

$$p_i V_i^\gamma = p_f V_f^\gamma,$$

de unde

$$\ln V_f = \ln V_i + \gamma^{-1} \ln \frac{p_i}{p_f} = \ln 10 - \frac{5}{7} \ln 5 = 1,153$$

și

$$V_f = 3,16 \text{ l.}$$

b) Relația  $T V^{\gamma-1} = \text{const.}$  ne permite să scriem:

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1},$$

de unde

$$T_f = T_i \left( \frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1} = 293,15 \cdot \left( \frac{10}{3,16} \right)^{0,4} = 464,5 \text{ K} = 191,35^\circ \text{ C.}$$



$$c) U_f - U_i = \frac{1}{\gamma - 1} (p_f V_f - p_i V_i) = \frac{1}{1,4 - 1} (5 \cdot 1,013 \cdot 10^5 \cdot 3,16 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 1,013 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3}) = 1468 \text{ J.}$$

24°. Viteza sferei în momentul ciocnirii peretelui se poate găsi din relațiile:

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt, \quad (1)$$

adică

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2. \quad (2)$$

Introducînd în (2) pe

$$t = \frac{l}{v_x} = \frac{l}{v_0 \cos \alpha}, \quad (3)$$

rezultă

$$v^2 = v_0^2 - 2gl \tan \alpha + \frac{g^2 l^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (4)$$

Din legea conservării energiei,

$$\frac{1}{2} m v^2 = m C \Delta T, \quad (5)$$

rezultă

$$\Delta T = \frac{1}{2C} \left( v_0^2 - 2gl \tan \alpha + \frac{g^2 l^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) \cong 2,45 \cdot 10^{-2} \text{ K.} \quad (6)$$

25°. a)  $T_1 = 327^\circ + 273^\circ = 600 \text{ K}$ ,  $T_2 = 27 + 273 = 300 \text{ K}$ ,

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{600 - 300}{600} = 50\%.$$

b) Din figura F.C.46, avem:

$$Q_1 = 2,3 \frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (1)$$

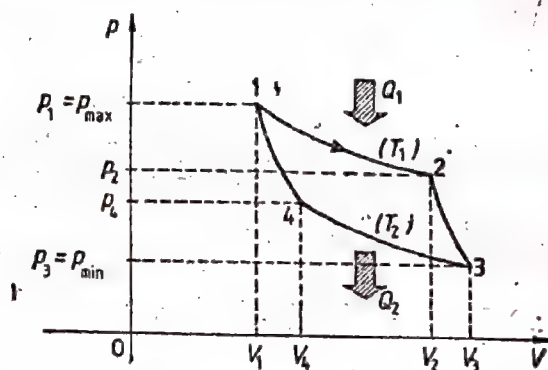


Fig. F.C.46

$$\left. \begin{aligned} p_1 V_1 &= p_2 V_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}, \\ p_2 V_2^\gamma &= p_3 V_3^\gamma \Rightarrow p_2 = p_3 \left( \frac{V_3}{V_2} \right)^\gamma, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_3} \left( \frac{V_2}{V_3} \right)^\gamma, \quad (2)$$

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \Rightarrow \left( \frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_3} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (3)$$

deci din (2) și (3) rezultă

$$\frac{V_2}{V_3} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \frac{p_1}{p_3}. \quad (4)$$

Introducând pe (4) în (1), avem:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2,3 \nu R T_1 \lg \left[ \frac{p_1}{p_3} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right] = \\ &= 2,3 \cdot 10^3 \cdot 8,314 \cdot 600 \lg \left[ 20 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1,41}{1,41-1}} \right] \simeq 3,058 \cdot 10^6 \text{ J} = 3,058 \text{ MJ}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} \Rightarrow Q_2 = Q_1(1 - \eta) = 3,058 \cdot 0,5 = 1,529 \text{ MJ}.$$

$$\text{d) } L = Q_1 - |Q_2| = 3,058 - 1,529 = 1,529 \text{ MJ}.$$

$$26^\circ. \text{ a) } pV^n = \text{const}, \frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^n \Rightarrow 8 = 4^n \Rightarrow n = \frac{3}{2}.$$

Astfel, pentru transformările  $1 \rightarrow 2$  și  $3 \rightarrow 4$ , există relațiile:

$$pV^{\frac{3}{2}} = \text{const.}, \quad TV^{1/2} = \text{const.} \text{ și } T^2V = \text{const.}, \quad (1)$$

$$\nu C \Delta T = \nu C_V \Delta T + p \Delta V, \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} (T + \Delta T)^2(V + \Delta V) - T^2V &= 0 \Rightarrow \Delta V = -2 \frac{V}{T} \Delta T, \\ pV = \nu RT \Rightarrow \frac{V}{T} &= \frac{\nu R}{p}, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta V = -2 \frac{\nu R}{p} \Delta T. \quad (3)$$

Introducând pe (3) în (2), avem  $\nu C \Delta T = \nu C_V \Delta T - 2\nu R \Delta T$ , adică

$$C = C_V - 2R. \quad (4)$$

$$\text{b) } \eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \quad (5)$$

$$Q_2 = Q_{12} + Q_{41} = \nu C T_1(1 - \varepsilon^{1/2}) + \nu C_V T_1(\mathcal{K} - 1), \quad (6)$$

$$Q_1 = Q_{23} + Q_{34} = \nu C_V T_2(\mathcal{K} - 1) + \nu C T_4(1 - \varepsilon^{1/2}), \quad (7)$$

$$\frac{T_3}{T_1} = \varepsilon^{1/2}, \quad \frac{T_3}{T_2} = \mathcal{K}, \quad \frac{T_3}{T_4} = \varepsilon^{1/2}, \quad \frac{T_4}{T_1} = \mathcal{K}. \quad (8)$$

Astfel, rezultă

$$\eta = 1 - \frac{C(1 - \varepsilon^{1/2}) + C_V(\mathcal{K} - 1)}{C\mathcal{K}(1 - \varepsilon^{1/2}) + C_V\varepsilon^{1/2}(\mathcal{K} - 1)}. \quad (9)$$

Deoarece  $C = C_V - 2R$ , conform relației (4), (9) devine

$$\eta = \frac{2R(\varepsilon^{1/2} - 1)(\mathcal{K} - 1)}{2R\mathcal{K}(\varepsilon^{1/2} - 1) + C_V(\mathcal{K} - \varepsilon^{1/2})}. \quad (10)$$

Mai departe, deoarece  $C_V = \frac{3}{2} R$ , avem

$$\eta = \frac{2(\epsilon^{1/2} - 1)(\kappa - 1)}{\frac{3}{2}(\kappa - \epsilon^{1/2}) + 2\kappa(\epsilon^{1/2} - 1)} \quad (11)$$

Pentru  $\kappa = 2$  și  $\epsilon = 4$ , se obține  $\eta = 0,5 = 50\%$ .

$$c) \eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{1}{\kappa \epsilon^{1/2}} = 0,75 = 75\%.$$

27°. a) Dacă în cilindru s-ar afla numai vapori de apă cu masa  $m_0$  și ei s-ar condensa, atunci volumul ocupat de apă ar fi egal cu  $0,286 \text{ l} = 0,286 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ . Deci, în comparație cu volumul cilindrului după compresie,  $V_2 = \frac{V_1}{k} = \frac{1}{3} \cong 0,33 \text{ m}^3$ , acesta ar fi neglijabil. Din această cauză, presiunea parțială a vaporilor,  $p_1$ , în timpul compresiei se poate considera constantă. Considerind că masa vaporilor de apă înainte de compresie este  $m_1$  și după compresie este  $m_2$ , din ecuația de stare, obținem:

$$m_1 = \mu_1 \frac{p_1 V_1}{RT} \text{ și } m_2 = \mu_1 \frac{p_1 V_2}{RT} = \mu_1 \frac{p_1 V_1}{kRT} \quad (1)$$

Masa vaporilor de apă care se vor condensa este:

$$m = m_1 - m_2 = \mu_1 \frac{p_1 V_1}{RT} \left( \frac{k-1}{k} \right) = 18 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{4,2 \cdot 10^3 \cdot 1}{8,314 \cdot 303} \left( \frac{3-1}{3} \right) = 0,020 \text{ kg.} \quad (2)$$

b) Masa de azot din cilindru este:

$$m_3 = m_0 - m_1 = \frac{m_0 RT - p_1 V_1 \mu_1}{RT}$$

Presiunea parțială a azotului este:

$$p_2 = \frac{m_3 RT}{\mu_2 V_1} = \frac{m_0 RT - p_1 V_1 \mu_1}{\mu_2 V_1}$$

Presiunea amestecului va fi:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{p_1 V_1 (\mu_2 - \mu_1) + m_0 RT}{\mu_2 V_1} = \frac{4,2 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot (28 - 18) \cdot 10^{-3} + 0,286 \cdot 8,314 \cdot 303}{28 \cdot 10^{-3} \cdot 1} = 2,72 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}.$$

28°. a) Notăm prin  $v_1$  și  $v_2$  numerele de moli de hidrogen  $\text{H}_2$ , respectiv de oxigen  $\text{O}_2$  în amestec, iar prin  $x$  raportul  $\frac{v_1}{v_2} (=x)$ . Deoarece arderea are loc după reacția  $2\text{H}_2 + \text{O}_2 = 2\text{H}_2\text{O}$ , se constată că pentru  $x \leq 2$  arde tot hidrogenul, iar pentru  $x > 2$  arde tot oxigenul. Cele două situații vor fi examinate succesiv.

Cazul I,  $x \leq 2$

În urma arderii a  $v_1$  moli hidrogen și a  $\frac{v_1}{2}$  moli oxigen, rămân nearși  $v_2 - \frac{v_1}{2} = v_1 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right)$  moli oxigen și se formează  $n_1$  moli de apă.



Aplicind între stările inițială (înaintea arderii) și finală (după încheierea arderii) primul principiu al termodinamicii,  $U_1 + Q = U_2$ , unde  $U_1 = \nu_1 \frac{5R}{2} T_0 + \frac{\nu_1}{x} \cdot \frac{5R}{2} T_0$  este energia internă a amestecului înainte arderii,  $Q = \nu_1 q$  este căldura degajată prin ardere, iar  $U_2 = \nu_1 \frac{7R}{2} T + \nu_1 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) \frac{5R}{2} T$  este energia internă a amestecului rezultat în urma arderii, reiese că temperatura finală a amestecului de vapori de apă și oxigen, rezultat prin ardere, este:

$$T = \frac{2[5RT_0(x+1) + 2qx]}{R(10+9x)}.$$

În conformitate cu ecuația termică de stare a gazelor perfecte și cu principiul lui Dalton relativ la presiunea exercitată de un amestec de gaze, presiunile exercitate de amestecurile de gaze existente în incintă înainte, respectiv după ardere, sînt:

$$p_0 = \left( \nu_1 + \frac{\nu_1}{x} \right) \frac{RT_0}{V}, \text{ respectiv } p = \left[ \nu_1 + \nu_1 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) \right] \frac{RT}{V},$$

deci creșterea presiunii în urma arderii este

$$k = \frac{p}{p_0} = \frac{x+2}{2(x+1)} \cdot \frac{T}{T_0} = \frac{[5RT_0(x+1) + 2qx](x+2)}{RT_0(10+9x)(x+1)}.$$

*Cazul II,  $x > 2$*

În urma arderii a  $\nu_2 = \frac{\nu_1}{x}$  moli de oxigen și a  $2\nu_2 = \frac{2\nu_1}{x}$  moli de hidrogen, rezultă  $2\nu_2 = \frac{2\nu_1}{x}$  moli de (vapori de) apă și (rămîn)  $\nu_1 - 2\nu_2 = \nu_1 \left( 1 - \frac{2}{x} \right)$  moli hidrogen.

Expresia specifică a primului principiu al termodinamicii pentru procese în cadrul cărora nu se efectuează lucru mecanic,  $U_1 + Q = U_2$ , capătă în acest caz forma

$$\nu_1 \frac{5R}{2} T_0 + \frac{\nu_1}{x} \cdot \frac{5R}{2} T_0 + \frac{\nu_1}{x} \cdot q = \frac{2\nu_1}{x} \cdot \frac{7R}{2} T + \nu_1 \left( 1 - \frac{2}{x} \right) \cdot \frac{5R}{2} T,$$

de unde rezultă că

$$T = \frac{5RT_0(x+1) + 4q}{R(4+5x)}.$$

În conformitate cu ecuația termică de stare a gazelor perfecte și cu legea lui Dalton:

$$p_0 = \left( \nu_1 + \frac{\nu_1}{x} \right) \frac{RT_0}{V}, \quad p = \left[ \frac{2\nu_1}{x} + \nu_1 \left( 1 - \frac{2}{x} \right) \right] \frac{RT}{V},$$

de unde

$$k = \frac{p}{p_0} = \frac{[5RT_0(x+1) + 4q]x}{RT_0(x+1)(5x+4)}.$$

b) Frațiunii 0,5% din masa oxigenului, reprezentată de masa hidrogenului din amestec, îi corespunde valoarea  $x = 5 \cdot 10^{-3} \frac{M_{O_2}}{M_{H_2}} = 0,08$  a frățiunii molare; această valoare a lui  $x$  situindu-se în primul caz studiat, se aplică prima expresie dedusă pentru  $k$  și se obține  $k = 6,7$ .

29°. a) Lucrurile mecanice efectuate și căldurile primite de gaz în fiecare dintre procesele ciclului considerat sînt (fig. F.C.47)

$$L_{AB} = Q_{AB} = \nu R T_1 \ln \frac{p_1}{p_2} > 0, \quad L_{BC} = p_2(V_C - V_B) = \nu R(T_2 - T_1) < 0, \\ Q_{BC} = \nu C_p(T_2 - T_1) < 0, \quad L_{CD} = -\Delta U_{CD} = \nu C_v(T_2 - T_3) < 0 \text{ și, desigur, } Q_{CD} = 0, \\ L_{DA} = p_1(V_A - V_D) = \nu R(T_1 - T_3) > 0, \quad Q_{DA} = \nu C_p(T_1 - T_3) > 0.$$

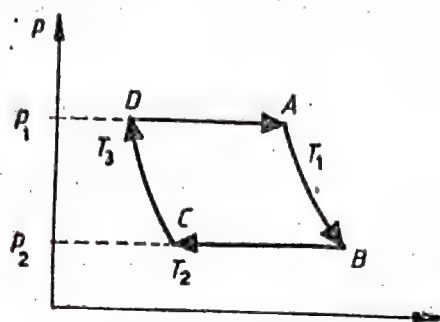


Fig. F.C.47

Rezultă că lucrul mecanic efectuat și căldura totală primită într-un ciclu sînt:

$$L = \nu R T_1 \ln \frac{p_1}{p_2} + \nu R(T_2 - T_1) + \nu C_v(T_2 - T_3) + \nu R(T_1 - T_3) = \\ = \nu R T_1 \ln \frac{p_1}{p_2} + \nu(C_v + R)(T_2 - T_3) = \nu C_p(T_2 - T_3) + \nu R T_1 \ln \frac{p_1}{p_2}, \\ Q_{\text{primit}} = Q_{AB} + Q_{DA} = \nu C_p(T_1 - T_3) + \nu R T_1 \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Pe de altă parte,  $pV^\gamma = \text{const.}$  este echivalent cu  $p \left(\frac{T}{p}\right)^\gamma = \text{const.}$  și cu  $Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{const.}$ , de unde

$$T_3 p_1^{(1-\gamma)/\gamma} = T_2 p_2^{(1-\gamma)/\gamma} \Rightarrow \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \frac{T_3}{T_2} \text{ și } \frac{\gamma-1}{\gamma} \ln \frac{p_1}{p_2} = \ln \frac{T_3}{T_2}.$$

$$\text{Cum } \gamma = \frac{C_p}{C_v}, \text{ avem } \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{C_p - C_v}{C_p} = \frac{R}{C_p}, \text{ deci } \frac{R}{C_p} \ln \frac{p_1}{p_2} = \ln \frac{T_3}{T_2}.$$

Rezultă că

$$\eta = \frac{L}{Q_{\text{primit}}} = \frac{\nu C_p(T_2 - T_3) + \nu R T_1 \ln \frac{p_1}{p_2}}{\nu C_p(T_1 - T_3) + \nu R T_1 \ln \frac{p_1}{p_2}} = \frac{T_2 - T_3 + T_1 \ln \frac{T_3}{T_2}}{T_1 - T_3 + T_1 \ln \frac{T_3}{T_2}}.$$

$$\text{b) } \eta_c = \frac{L_c}{Q_{AB}} = \frac{T_1 - T_r}{T_1}, \text{ deci } L_c = Q_{AB} \frac{T_1 - T_r}{T_1} = \nu R T_1 \ln \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{T_1 - T_r}{T_1} = \\ = \nu R(T_1 - T_r) \ln \frac{p_1}{p_2} = L = \nu C_p(T_2 - T_3) + \nu R T_1 \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Împărțind egalitatea ultimilor membri ai relației de mai sus (după reducerea termenului  $\nu R T_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$ ) cu  $\frac{\nu}{C_p}$ , obținem:

$$-T_r \cdot \frac{R}{C_p} \ln \frac{p_1}{p_2} = -T_r \cdot \ln \frac{T_3}{T_2} = T_2 - T_3, \text{ deci } T_r = \frac{T_3 - T_2}{\ln T_3 - \ln T_2}$$

(temperatura mediată „logaritmă”).

$$c) \epsilon = \frac{1 - \eta}{\eta} = \frac{1 - \frac{L}{Q_{\text{primit}}}}{\frac{L}{Q_{\text{primit}}}} = \frac{Q_{\text{cedat}}}{L_{\text{efectuat}}}. \text{ În cazul inversării sensului par-}$$

curgerii ciclului reversibil:  $\epsilon = \frac{Q_{\text{primit}}}{L_{\text{primit}}}$ , unde  $\epsilon$  reprezintă acum eficiența mașinii frigorifice (cu compresor), care funcționează după ciclul parcurs (în sens invers). Înlocuind rezultatele obținute la primul punct al problemei, rezultă

$$\epsilon = \frac{Q_{\text{primit}} - L}{L} = \frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_3 + T_1 \ln \frac{T_3}{T_2}}.$$

30°. a) Deoarece, pentru heliu,  $U = \frac{3}{2} \nu RT$ , atunci pentru  $U = \text{const.}$  rezultă  $T = \text{const.}$ , deci procesele elementare reprezentate prin segmente paralele cu axa  $S$  sînt *izoterme*.

Deoarece  $S = U_1(\ln p + \ln V^{5/3}) = U_1 \ln(pV^{5/3})$ , iar pentru heliu  $C_V = \frac{\Delta Q_V}{\nu \Delta T} = \frac{\Delta U}{\nu \Delta T} = \frac{3R}{2}$ ,  $C_p = C_V + R = \frac{5R}{2}$  și  $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3}$ , rezultă că  $S = \text{const.}$  implică  $pV^\gamma = \text{const.}$ , deci *procesele* elementare reprezentate prin segmente paralele cu axa  $U$  sînt *adiabatice*.

b) Gazul primește căldură numai în procesele elementare de destindere izotermă. În acest caz:

$$S = \frac{3}{2} \nu RT_1 \left( \ln p + \frac{5}{3} \ln V \right) = \nu T_1 (C_V \ln p + C_p \ln V) = \\ = \nu T_1 [C_V \ln(pV) + (C_p - C_V) \ln V] = \nu RT_1 \ln V + C,$$

unde  $C = \nu C_V T_1 \ln(\nu RT)$  este o constantă pentru procese izoterme. Căldura primită de gaz în cursul destinderii izoterme reprezentată prin segmentul orizontal  $k$  (fig. F.C.48 a) al porțiunii de sus a ciclului ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) va fi  $Q_{1k} = \nu RT_k \ln \frac{V_{fk}}{V_{ik}} = \frac{U_k}{U_1} \cdot \nu RT_1 \ln \frac{V_{fk}}{V_{ik}} = \frac{U_k(S_{fk} - S_{ik})}{U_1}$ , mărime proporțională cu

aria cuprinsă între izoterma elementară  $k$  și axă. Pentru ca  $Q_1 = \sum_{k=1}^n Q_{1k} =$

$= \frac{1}{U_1} \sum_{k=1}^n U_k(S_{fk} - S_{ik})$  să aibă o valoare maximă, *partea superioară a ciclului studiat trebuie să coincidă cu latura  $U_1 = \text{const.}$  a pătratului considerat.* În acest caz  $U_k = U_1$ ,  $n = 1$ ,  $S_{fk} = S_1$  și  $S_{ik} = S_2$ , deci  $Q_1 = S_1 - S_2 = 2 \text{ MJ}$ .

c) În mod asemănător, căldurii cedate în comprimarea izotermă reprezentată prin segmentul orizontal  $j$  ( $= n + 1, \dots, N$ ) îi corespunde expresia  $|Q_{2j}| = \nu RT_j \ln \frac{V_{ij}}{V_{fj}} = \frac{U_j}{U_1} \nu RT_1 \ln \frac{V_{ij}}{V_{fj}} = \frac{U_j}{U_1} (S_{ij} - S_{fj})$ , mărime proporțională — prin

același coeficient  $\left(\frac{1}{U_1}\right)$  — cu aria  $A_j$  cuprinsă între izoterma elementară  $j$  și axa  $S$ . Rezultă posibilitatea de a exprima căldura cedată  $Q_2$  prin aria  $A_{\text{inf.}}$  cuprinsă între partea inferioară a ciclului și axa  $S$ ,  $Q_2 = \frac{A_{\text{inf.}}}{U_1}$ , iar căldura primită  $Q_1$  prin aria

cuprinsă între porțiunea superioară a ciclului și axa  $S$ ,  $Q_1 = \frac{A_{\text{sup.}}}{U_1}$ , și, în fine, lucrul mecanic efectuat  $L$  prin aria  $A$  a ciclului,  $Q_1 - |Q_2| = L = \frac{A_{\text{sup.}} - A_{\text{inf.}}}{U_1} = \frac{A}{U_1}$ .



Deoarece randamentul motorului termic,  $\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{A}{A_{\text{sup.}}}$ , dintre toate ciclurile înscrise în pătratul considerat, care au o aceeași parte superioară (deci aceeași arie  $A_{\text{sup.}}$ ), randamentul maxim îl va avea ciclul a cărui parte de jos este un segment în lungul laturii  $U_2 = \text{const.}$  (figura F.C.48 b).

Dintre toate ciclurile a căror parte inferioară este un segment în lungul laturii  $U_2 = \text{const.}$ , randamentul cel mai mare corespunde ciclului având forma unui dreptunghi cu două din laturi (segmente) pe laturile  $U_1 = \text{const.}$ ,  $U_2 = \text{const.}$ , ale pătratului considerat (figura F.C.48 c). În acest caz, la numărătorul  $A$  și numitorul

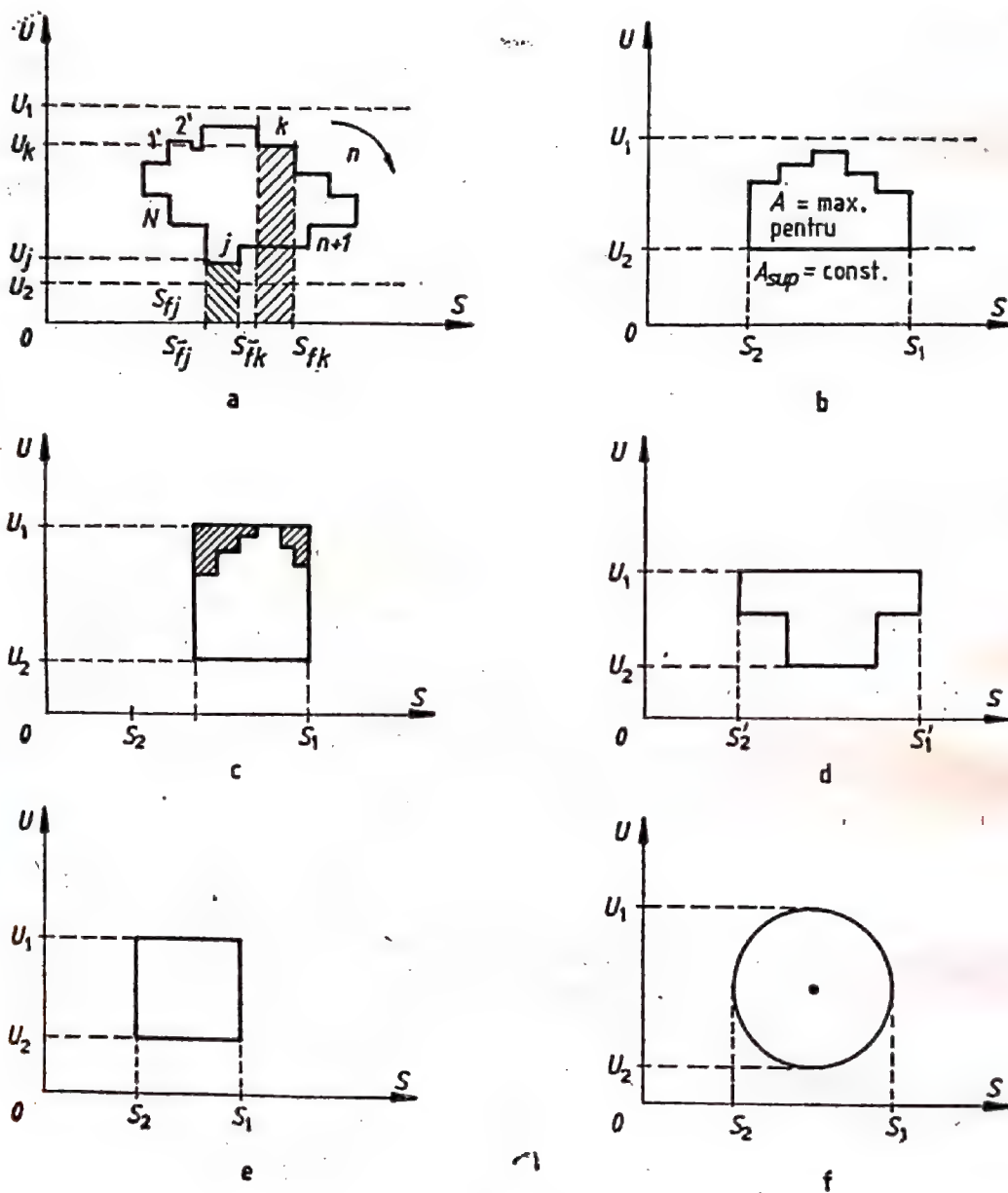


Fig. F.C.48

$A_{\text{sup.}}$  al fracției subunitare  $\eta$  s-a adăugat aceeași cantitate pozitivă, aria hașurată în fig. F.C.48 c, ceea ce mărește valoarea  $\eta$ . Nu se poate adăuga mai mult, pentru că atunci s-ar schimba partea de jos a ciclului (figura F.C.48 d) și în final s-ar ajunge tot la un ciclu de randament maxim de forma unui dreptunghi (eventual pătrat) între  $U_1$  și  $U_2 = \text{const.}$  (fig. F.C.48 e). Conform constatărilor de la primul punct al problemei, toate acestea sînt cicluri Carnot, al căror randament poate fi dedus

în baza relațiilor:  $A_{\text{sup.}} = U_1(S_1 - S_2)$ ,  $A_{\text{int.}} = U_2(S_1 - S_2)$ ,  $A = A_{\text{sup.}} - A_{\text{int.}} = (U_1 - U_2)(S_1 - S_2)$ , deci  $\eta = \frac{A}{A_{\text{sup.}}} = \frac{U_1 - U_2}{U_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$  ( $\eta = 0,5$  în cazul de față).

d) În acest caz  $A = \frac{\pi}{4}(U_1 - U_2)^2 = \pi[MJ]^2$  și  $A_{\text{sup.}} = \frac{\pi}{8}(U_1 - U_2)^2 + \frac{U_1 + U_2}{2}(S_1 - S_2) = 6 + \frac{\pi}{2}[MJ]^2$ , deci  $\eta = \frac{A}{A_{\text{sup.}}} = \frac{2\pi}{\pi + 12} \approx 0,413$ .

S-a ținut seama că este posibilă aproximarea oricât de precisă a circumferinței (fig. F.C.48 f) printr-un poligon cu  $N \rightarrow \infty$  laturi paralele cu axele  $U$ , respectiv  $S$  (conform condițiilor impuse în enunțul problemei).

31°. a) În baza relației lui Robert Meyer,  $C_p = C_v + R$ , expresia parametrului fizic  $S_{gp}$ , definit pentru gaze perfecte, capătă forma  $S_{gp} = \nu[C_v(\ln p + \ln V) + R \ln V] = \nu[C_v \ln(\nu RT) + R \ln V]$ . Rezultă posibilitatea de a exprima căldura primită de gazul perfect într-un proces izoterm ( $T_i = T = T_f$ ) prin relația:

$$Q = \nu RT \ln \frac{V_f}{V_i} = T(S_{gp, f} - S_{gp, i}),$$

unde  $S_{gp, f}$  și  $S_{gp, i}$  sînt valorile parametrului  $S_{gp}$  în stările finală și, respectiv, inițială.

b) Într-o transformare de fază, temperatura și presiunea rămîn constante,  $T_i = T_f = T$  și  $p_i = p_f = p$ , deci variația parametrului  $G$  într-o transformare de fază este dată de expresia  $\Delta G = G_f - G_i = \Delta U + p\Delta V - T\Delta S$ . Întrucît, conform enunțului,  $S$  este parametrul de tipul  $S_{gp}$ , definit prin relația dedusă la punctul a, generalizată pentru orice substanță, iar transformările de fază sînt procese izoterme, rezultă că — în relația de sus — avem  $T\Delta S = Q$ , deci  $\Delta G = \Delta U - Q + p\Delta V$ . Deoarece, conform primului principiu al termodinamicii,  $\Delta U = Q - L$ , expresia de mai sus capătă forma  $\Delta G = p\Delta V - L = 0$  ( $L$  este lucrul mecanic efectuat în cursul transformării de fază), rezultînd astfel că parametrul fizic  $G$  rămîne constant în cursul unei transformări de fază.

c) Notăm prin  $\delta G_i$  și  $\delta G_f$  variațiile — datorate modificărilor cu  $\delta p$  ale presiunii la care are loc transformarea de fază și (implicit) cu  $\delta T$  a temperaturii la care se produce transformarea de fază — ale parametrului  $G$  în fazele inițială și, respectiv, finală (rezultată după transformarea de fază). După cum transformarea de fază are loc la presiunea  $p$  și temperatura  $T$ , respectiv la presiunea  $p + \delta p$  și temperatura  $T + \delta T$ , condiția de constanță a parametrului  $G$  în cursul transformării de fază are forma:

$$G_i(p, T) = G_f(p, T),$$

$$G_i(p + \delta p, T + \delta T) = G_i(p, T) + \delta G_i = G_f(p + \delta p, T + \delta T) = G_f(p, T) + \delta G_f.$$

Scăzînd membru cu membru relațiile de mai sus, obținem

$$\delta G_i = \delta G_f. \text{ Ori, } \delta G_i = (\delta U_i + p_i \delta V_i - T_i \delta S_i) + \delta p \cdot V_i - \delta T \cdot S_i, \text{ iar}$$

$\delta G_f = (\delta U_f + p_f \delta V_f - T_f \delta S_f) + V_f \cdot \delta p - S_f \cdot \delta T$ ; în conformitate cu cele arătate la punctul precedent, avem  $\delta U_i + p_i \delta V_i - T_i \delta S_i = 0 = \delta U_f + p_f \delta V_f - T_f \delta S_f$ , deci  $V_i \cdot \delta p - S_i \cdot \delta T = \delta G_i = \delta G_f = V_f \cdot \delta p - S_f \cdot \delta T$ . Din ultima egalitate rezultă că  $\delta T(S_f - S_i) = \delta p(V_f - V_i)$ , deci  $\frac{\delta T}{\delta p} = \frac{V_f - V_i}{S_f - S_i}$ ; întrucît, în conformitate

cu cele arătate la punctul anterior,  $S_f - S_i = \Delta S = \frac{Q}{T}$ , unde căldura  $Q$  primită de o cantitate de substanță de masă  $m$  în cursul unei transformări de fază se

exprimă, cu ajutorul căldurii latente  $\lambda$  corespunzătoare, prin relația  $Q = m\lambda$ , raportul  $\frac{\delta T}{\delta p}$  poate fi scris în final în forma

$$\frac{\delta T}{\delta p} = \frac{T(V_f - V_i)}{m\lambda} \text{ (ecuația Clausius-Clapeyron).}$$

32°. a) Fie  $v_{Tb}$  viteza medie pătratică a particulelor browniene și  $v_{Ta}$  viteza medie pătratică a moleculelor de aer:

$$v_{Tb}^2 = \frac{3kT}{m_b}, \quad v_{Ta}^2 = \frac{3kT}{m_a}, \quad \frac{|v_{Tb}|}{|v_{Ta}|} = \sqrt{\frac{M_a}{N_A m_b}}.$$

Numeric:  $\frac{v_{Tb}}{v_{Ta}} = 0,7 \cdot 10^{-7}$ .

b)  $pV = \frac{m}{\mu_a} RT$ ,  $\rho = \frac{p\mu}{RT}$ ,  $v_{Ta} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_a}} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{p}{\rho}}$ .

Numeric:  $v_{Ta} = 1,73 \cdot 10^3$  m/s.

c)  $pV^\gamma = \text{const.}$ ,  $TV^{\gamma-1} = \text{const.}$ ,  $Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const.}$ ,

$$v_{Ta} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_a}} \sim T^{1/2} \sim p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = p^{\frac{1}{i+2}} \text{ și } v_{Ta} \sim V^{-\frac{1}{i}},$$

unde  $i$  reprezintă numărul gradelor de libertate ale moleculei.

Pentru un gaz monoatomic  $i = 3$ , iar pentru un gaz biatomic  $i = 5$ .

d) Se calculează lucrul mecanic necesar pentru deplasarea particulelor de  $R_0$  la  $\infty$ :

$$L = \int_{R_0}^{\infty} K \frac{m_0 M}{r^2} dr = K \frac{m_0 M}{R_0} = m_0 g R_0,$$

unde  $m_0$  este masa moleculei, iar  $M$  masa Pământului.

Din condiția  $\frac{1}{2} m_0 \tilde{v}^2 = \frac{3}{2} kT \geq m_0 g R_0$  rezultă  $T \geq \frac{2m_0 g R_0}{3k} = \frac{2AgR_0}{3R}$ .

Numeric:  $T > 2 \cdot 10^4$  K.

33°. Fie  $p_0$  și  $V_0$  parametrii gazului din cele două incinte, în poziție orizontală,  $p_1$ ,  $V_1$  și, respectiv,  $p_2$ ,  $V_2$  aceeași parametri în poziție verticală la temperatura  $T_1$ , iar  $p'_1$ ,  $V'_1$  și, respectiv,  $p'_2$ ,  $V'_2$  parametrii gazului după încălzire (fig. F.C.49).

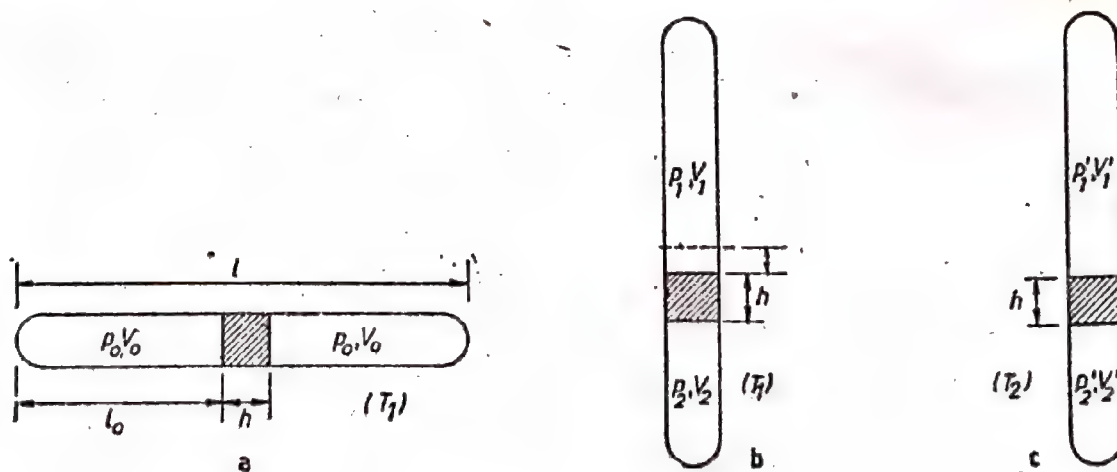


Fig. F.C.49



a)  $p_0 V_0 = p_1 V_1$ ,  $p_0 V_0 = p_2 V_2$ ,  $p_2 = p_1 + \rho g h$ ,  $V_0 = \frac{l-h}{2} S$ ,  $S$  fiind secțiunea tubului,  $V_1 = V_0 + S \Delta l$ ,  $V_2 = V_0 - S \Delta l$ .

Rezultă

$$p_2 = \rho g h \frac{\left(\frac{l-h}{2}\right)^2 - (\Delta l)^2}{\Delta l(l-h)} = 0,49 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

b) Între volume există relațiile:

$$n = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_0 + S \Delta l}{V_0 - S \Delta l} = \frac{l_0 + \Delta l}{l_0 - \Delta l} = \frac{5}{3} = 1,66(6), \quad x = \frac{V'_1}{V'_2}, \quad V_1 + V_2 = V'_1 + V'_2.$$

De asemenea, între presiuni mai există relațiile:

$$p_2 = \rho g h + p_1, \quad p'_2 = \rho g h + p'_1, \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{n} \text{ și } \frac{p'_1}{p'_2} = \frac{1}{x}.$$

Relațiile dintre volume determină egalitatea

$$V_1 \left(1 + \frac{1}{n}\right) = V'_1 \left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

iar relațiile dintre presiuni o egalitate asemănătoare:

$$p_1(n-1) = p'_1(x-1).$$

Masele gazului în cele două compartimente fiind egale, se pot scrie ecuația:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p'_1 V'_1}{T_2}.$$

Din ultimele trei egalități se obține o ecuație de gradul doi în  $x$ :

$$x^2 - \frac{T_1}{T_2} \left(n - \frac{1}{n}\right) x - 1 = 0,$$

care admite soluțiile  $x_{1,2} = \frac{T_1}{2T_2} \left(n - \frac{1}{n}\right) \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4T_2^2} \left(n - \frac{1}{n}\right)^2 + 1}$ .

Pentru cazul studiat,  $x_{1,2} = 0,50071 \pm 1,11835 = \begin{cases} 1,619, \\ -0,618. \end{cases}$

Evident, are sens fizic numai soluția  $x > 0$ .

34°. a) Variațiile de volum a lichidului și, respectiv, a sticlei, prin răcirea tubului, au expresiile  $\Delta V_l = V_0 - V_l = -S l_0 \gamma_l t$  și  $\Delta V_{st} = V_{0st} - V_{st} = -S l_0 \gamma_{st} t$ , unde  $S$  este secțiunea tubului.

Rezultă  $\Delta l = l_0 t (\gamma_{st} - \gamma_l)$ , deci  $t = -\frac{\Delta l}{l_0 (\gamma_l - \gamma_{st})}$ .

Numeric:  $t = -\frac{4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-1} (9 \cdot 10^{-4} - 0,348 \cdot 10^{-4})} = -23 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

b) Fie  $d_0 = \frac{l_0 - h_0}{2}$ , respectiv  $d = \frac{l-h}{2}$  distanțele dintre centrele de greutate al tubului, respectiv al mercurului, la  $0 \text{ } ^\circ\text{C}$ , respectiv la temperatura  $t$ . Din legile dilatării pentru sticlă și mercur rezultă:

$$l = l_0 (1 + \alpha_{st} t), \quad h = h_0 \frac{1 + \gamma_{Hg} t}{1 + 2\alpha_{st} t}, \quad d = \frac{d_0}{2}.$$

Din ecuația  $l_0(1 + \alpha_{st}t) = h_0 \frac{1 + \gamma_{Hg}t}{1 + 2\alpha_{st}t} = \frac{l_0 - h_0}{2}$ , se obține:

$$t = \frac{l_0 - h_0}{2[h_0(\gamma_{Hg} - 2\alpha_{st}) - 2l_0\alpha_{st}]}$$

Numeric:  $t = 128,6^\circ\text{C}$ .

### 3. ELECTRICITATE

35°. a) Conform figurii F.C.6, rezistența echivalentă a circuitului între punctele A și B, cînd  $K$  este închis, este  $R_e = R + \frac{R \cdot R}{R + R} = \frac{3R}{2}$ ; astfel, intensitatea curentului în ramura  $BC$  este  $I_1 = \frac{U}{\frac{3R}{2}} = \frac{2U}{3R} = \frac{2 \cdot 150}{3 \cdot 100} = 1 \text{ A}$ . Intensitățile curenților

în ramurile în paralel vor fi egale, deci  $I_1 = I_2 + I_3 = 2I_2$  sau  $I_2 = I_3 = \frac{I_1}{2} = 0,5 \text{ A}$ .

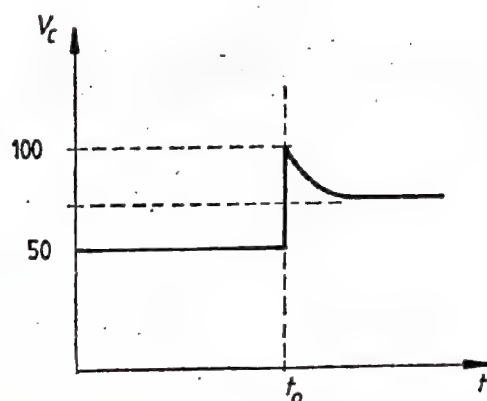


Fig. F.C.50

Cînd contactul  $K$  este deschis, rezistența echivalentă între punctele A și B este  $R_e = R + R = 2R$ . Intensitatea curentului în circuit este  $I'_1 = \frac{U}{2R} = \frac{150}{2 \cdot 100} = \frac{3}{4} \text{ A}$ .

b) Potențialul punctului C va fi mai mic decît potențialul punctului B cu tensiunea pe ramura  $BC$ , deci

$$V_C = V_B - U_{BC}$$

În cazul  $K$  închis,  $V_C = V_B - I_1 R = 150 - 1 \cdot 100 = 50 \text{ V}$ .

În cazul  $K$  deschis,  $V'_C = V_B - I'_1 R = 150 - \frac{3}{4} \cdot 100 = 75 \text{ V}$ .

c) Imediat după deschiderea contactului  $K$ , apare în bobină o tensiune electromotoare autoindusă care împiedică curentul să crească de la valoarea  $I_2$  la valoarea  $I'_1$ , deci intensitatea curentului prin circuit în momentul imediat ulterior deschiderii contactului este  $I_2$ . Potențialul punctului C va fi (fig. F.C.50)

$$V_C = V_B - U_{BC} = V_B - I_2 R = 150 - 0,5 \cdot 100 = 100 \text{ V}$$

Deci potențialul punctului C suferă un salt brusc de 50 V în momentul deschiderii contactului pentru ca apoi să scadă lent (exponențial) către valoarea finală  $V'_C$ . Evoluția este arătată în figura F.C.50, unde  $t_0$  este momentul deschiderii contactului  $K$ .

36°. a) Rezistențele filamentelor sînt obținute din ecuația

$$P = \frac{U^2}{R}, \text{ de unde}$$

$$R_1 = \frac{U^2}{P_1} = \frac{110^2}{40} = 302,5 \, \Omega; \quad R_2 = \frac{U^2}{P_2} = \frac{110^2}{60} = 201,66 \, \Omega.$$

Din ecuația  $P = UI$  rezultă

$$I_1 = \frac{P_1}{U} = \frac{40}{110} = 0,363 \, \text{A}, \quad I = \frac{P_2}{U} = 0,545 \, \text{A}.$$

b) Cînd cele două becuri sînt legate în serie, rezistența circuitului este  $R = R_1 + R_2 = 302,5 + 201,66 = 504,16 \, \Omega$ . Dacă becurile legate în serie sînt alimentate la tensiunea  $U' = 220 \, \text{V}$ , curentul care trece prin filamentele lor este

$$I' = \frac{U'}{R} = \frac{220}{504,16} = 0,436 \, \text{A}.$$

Dar acest curent este prea mare pentru becul de  $40 \, \text{W}$  care s-ar putea arde. Deci o parte din acest curent trebuie deviat cu ajutorul unei rezistențe legate în paralel cu acest bec, așa cum se arată în figura F.C.51.

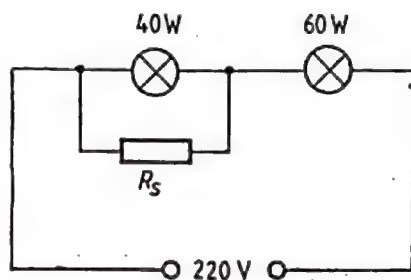


Fig. F.C.51

Rezistența  $R_s$  va fi determinată din condiția ca tensiunea  $U'$  să se dividă egal pe cele două becuri. În aceste condiții, intensitatea curentului prin circuit va fi  $I_2$ , iar gruparea formată din  $R_1$  și  $R_s$  va avea rezistența  $R_2$ , adică  $\frac{R_1 R_s}{R_1 + R_s} = R_2$  sau  $R_s = \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} = \frac{302,5 \cdot 201,66}{302,5 - 201,66} = 604,94 \, \Omega$ .

c) Legate așa cum se arată în figura F.C.51, becurile funcționează normal, deci puterea consumată de ele (puterea utilă) este  $P_u = P_1 + P_2 = 40 + 60 = 100 \, \text{W}$ . Puterea consumată de la sursă este  $P_G = U' I_2 = 220 \cdot \frac{60}{110} = 120 \, \text{W}$ . deci randamentul va fi

$$\eta = \frac{P_u}{P_G} = \frac{100}{120} = 0,83 = 83\%.$$

37°. a) Dacă deplasarea plăcilor se face în contact cu sursa, atunci diferența de potențial dintre plăci rămîne nemodificată. Capacitatea condensatorului variază de la valoarea  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$  la valoarea  $C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d_1}$ , deci devine  $C_1 = \frac{Cd}{d_1} = \frac{100 \cdot 10^{-12} \cdot 1,5 \cdot 10^{-2}}{10^{-2}} = 150 \, \text{pF}$ . Sarcina de pe placă va fi  $Q_1 = C_1 U = 150 \cdot 10^{-12} \cdot 500 = 7,5 \cdot 10^{-8} \, \text{C}$ .



b) Înainte de deplasarea plăcii, sarcina de pe armături are valoarea  $Q = CU = 100 \cdot 10^{-12} \cdot 500 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ .

În cursul deplasării plăcii se produce o variație a sarcinii cu  $\Delta Q = Q_1 - Q = 7,5 \cdot 10^{-8} - 5 \cdot 10^{-8} = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ .

În acest proces sursa debitează o energie egală cu lucrul efectuat pentru a deplasa această sarcină între cele două puncte (bornele sursei) între care există diferența de potențial  $U$ :

$$L = U\Delta Q = 500 \cdot 2,5 \cdot 10^{-8} = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

c) Prin introducerea plăcii de sticlă, capacitatea condensatorului se modifică. În noua situație, este ca și cum în jumătatea care conține sticla există două condensatoare legate în serie, unul,  $C_a$ , avînd ca dielectric aer, iar al doilea,  $C_s$ , avînd ca dielectric sticla. Cea de a doua jumătate constituie un condensator cu aer,  $C'_a$ , legat în paralel cu primele două. În figura F.C.52 se arată schema echivalentă descrisă.

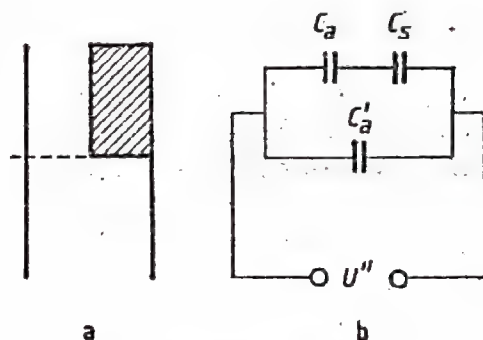


Fig. F.C.52

Capacitatea echivalentă a celor două condensatoare legate în serie este dată de relația  $\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_s}$ , de unde  $C_e = \frac{C_a C_s}{C_a + C_s}$ . Capacitatea condensatorului va fi  $C'' = C_e + C'_a = \frac{C_a C_s}{C_a + C_s} + C'_a$ . Pe de altă parte, placa de sticlă fiind introdusă pe jumătate din aria armăturilor și distanța dintre armături fiind  $d_1$ , vom avea

$$C_a = \frac{\epsilon_0 S}{2(d_1 - d')} = \frac{Cd}{2(d_1 - d')}, \quad C_s = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{2d'} = \frac{\epsilon_r Cd}{2d'}, \quad C'_a = \frac{\epsilon_0 S}{2d_1} = \frac{Cd}{2d_1}$$

Capacitatea condensatorului devine

$$\begin{aligned} C'' &= \frac{\frac{Cd}{2(d_1 - d')}}{\frac{Cd}{2(d_1 - d')} + \frac{\epsilon_r Cd}{2d'}} + \frac{Cd}{2d_1} = \frac{\epsilon_r Cd}{2[d' + \epsilon_r(d_1 - d')]} + \frac{Cd}{2d_1} = \\ &= \frac{Cd}{2} \left( \frac{\epsilon_r}{d' + \epsilon_r(d_1 - d')} + \frac{1}{d_1} \right) = \frac{100 \cdot 10^{-12} \cdot 1,5 \cdot 10^{-2}}{2} \times \\ &\times \left( \frac{2,8}{0,5 \cdot 10^{-2} + 2,8(1 \cdot 10^{-2} - 0,5 \cdot 10^{-2})} + \frac{1}{1 \cdot 10^{-2}} \right) = 185,5 \text{ pF} \end{aligned}$$

În procesul de introducere a plăcii de sticlă, sarcina de pe armături nu s-a schimbat, deci are tot valoarea  $Q_1$ , astfel încît diferența de potențial dintre armături va fi

$$U'' = \frac{Q_1}{C''} = \frac{7,5 \cdot 10^{-8}}{530 \cdot 10^{-12}} = 404,2 \text{ V}$$

38°. a) Valorile măsurate cu voltmetrul termic sînt valori efective. Prin toate elementele circuitului circulă același curent a cărui intensitate efectivă este (fig. F.C.53)

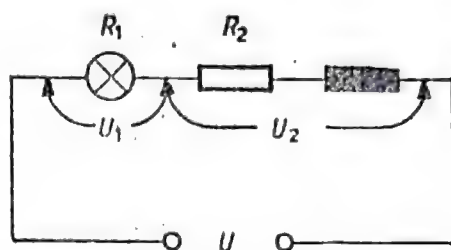


Fig. F.C.53

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{144}{120} = 1,2 \text{ A.}$$

Impedanța bobinei este  $Z_b = \sqrt{R_2^2 + L^2\omega^2}$ . Legea lui Ohm pentru bobină va fi  $I = \frac{U_2}{Z_b}$ , de unde rezultă ecuația

$$R_2^2 + L^2\omega^2 = \frac{U_2^2}{I^2}. \quad (1)$$

Impedanța circuitului din figura F.C.53 va fi  $Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + L^2\omega^2}$ , iar legea lui Ohm pentru circuit  $I = \frac{U}{Z}$ , de unde  $(R_1 + R_2)^2 + L^2\omega^2 = \frac{U^2}{I^2}$  (2).

Scăzînd membru cu membru ecuația (1) din ecuația (2), rezultă

$$R_2 = \frac{1}{2R_1} \left( \frac{U^2 - U_2^2}{I^2} - R_1^2 \right) = \frac{R_1}{2} \left( \frac{U^2 - U_2^2}{U_1^2} - 1 \right) = \frac{120}{2} \left( \frac{220^2 - 80^2}{144^2} - 1 \right) = 61,5 \Omega.$$

Din ecuația (1), rezultă

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left( \frac{U_2}{I} \right)^2 - R_2^2} = \frac{1}{2\pi \cdot 50} \sqrt{\left( \frac{80}{1,2} \right)^2 - 61,5^2} \approx 0,082 \text{ H} = 82 \text{ mH.}$$

b) Puterea activă consumată este  $P_a = (R_1 + R_2) I^2 = (120 + 61,5) 1,2^2 = 261,3 \text{ W.}$

Factorul de putere se obține cu ajutorul figurii F.C.54:

$$\cos \varphi = \frac{U_{R_1} + U_{R_2}}{U} = \frac{(R_1 + R_2) I}{U} = \frac{(120 + 61,5) \cdot 1,2}{220} \approx 0,99$$

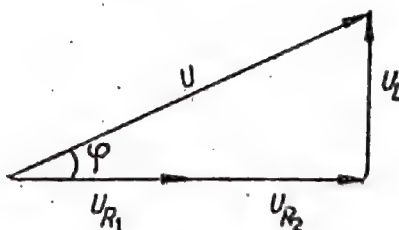


Fig. F.C.54

c) Intensitatea în circuit va fi maximă cînd se obține rezonanța, adică în cazul cînd  $C$  este dat de relația  $L\omega = \frac{1}{C\omega}$  sau  $C = \frac{1}{0,082 \cdot 4\pi^2 50^2} = 1,24 \cdot 10^{-4} \text{ F} = 124 \mu\text{F.}$

În cazul rezonanței, impedanța devine  $Z' = R_1 + R_2$ , deci intensitatea curentului este

$$I' = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{220}{120 + 61,5} = 1,212 \text{ A.}$$

$$39^\circ. \Phi = BS_1 = \mu_0 HNS,$$

Tensiunea electromotoare indusă în spirele bobinei la rotire este:

$$|e| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Curentul care trece prin circuit va fi:

$$i = \frac{|e|}{R} = \frac{\Delta\Phi}{R\Delta t},$$

iar sarcina electrică înregistrată de galvanometrul balistic

$$q = i\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{2\mu_0 HNS}{R}.$$

De aici rezultă

$$H = \frac{qR}{2\mu_0 NS} = \frac{8 \cdot 10^{-6} \cdot 3\pi}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 3 \cdot 10^{-6}} = 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}.$$

40°. a) În figura F.C.55, avem  $I_V = I_A = I_0 = 0,1 \text{ A}$  și  $R_A = R_V = R_0 = 9,8 \Omega$ . Relațiile  $I = I_A + I_S = I_0 + I_S$  și  $I_A R_A = I_0 R_0 = I_S R_S$  conduc la:

$$R_S = \frac{R_A}{\frac{I}{I_0} - 1} = \frac{9,8}{\frac{5}{0,1} - 1} = 0,2 \Omega. \quad (1)$$

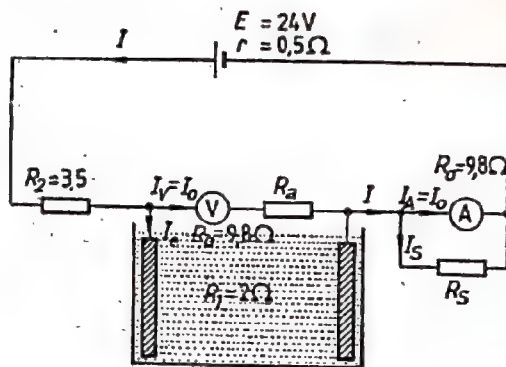


Fig. F.C.55

b) Din relațiile  $U_{R_1} = U_V + U_{R_a}$  și  $U_{R_1} = nU_V$ , ținând seama de faptul că  $I_V = I_0$ , se obține:

$$U_{R_A} = (n - 1) U_V. \quad (2)$$

Deoarece

$$\frac{U_V}{R_V} = \frac{U_{R_a}}{R_a} = \frac{(n - 1) U_V}{R_a}, \quad (3)$$



rezultă

$$R_a = R_V(n - 1) = R_0 \left( \frac{U_{R_1}}{I_0 R_0} - 1 \right) = \frac{U_{R_1}}{I_0} - R_0 = \frac{30}{0,1} - 9,8 = 290,2.$$

c) Schema circuitului este dată în figura F.C.56,

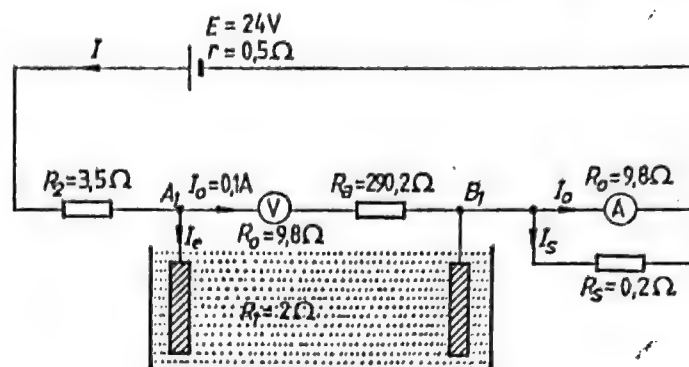


Fig. F.C.56

$$I = \frac{E}{r + R_{ech}} = \frac{E}{r + R_2 + \frac{(R_0 + R_a) R_1}{R_0 + R_a + R_1} + \frac{R_0 R_s}{R_0 + R_s}} =$$

$$= \frac{24}{0,5 + 3,5 + \frac{300 \cdot 2}{302} + \frac{9,8 \cdot 0,2}{10}} = 3,882 \text{ A},$$

$$I_e = I - I_0 = 3,882 - 0,1 = 3,782 \text{ A},$$

$$I_s = I - I_0 = I_e = 3,782 \text{ A}.$$

$$d) EI = (r + R_2) I^2 + (R_1 + R_s) I_e^2 + (2R_0 + R_a) I_0^2 \approx 94,8 \text{ W}.$$

$$e) m = K I_e t = 4,025 \cdot 10^{-3} \cdot 3,782 \cdot 2 = 3,0445 \cdot 10^{-2} \text{ kg} = 30,445 \text{ g}.$$

$$41^\circ. a) I_{ef} = \max, \text{ pentru } L = \frac{1}{4\pi^2 \nu_0^2 C} = L_1 + L_2 = \frac{\mu_0 N^2 S}{2l} + \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{2l},$$

adică

$$\mu_r = \frac{2l}{4\pi^2 \nu_0^2 C \mu_0 N^2 S} - 1 \approx 13,07.$$

$$b) I_0 = \frac{I_{ef \max}}{n} \Rightarrow n \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left( L' \cdot 2\pi \nu_0 - \frac{1}{C \cdot 2\pi \nu_0} \right)^2}} = \frac{U}{R},$$

rezultind

$$R = \frac{2\pi \nu_0 L' - \frac{1}{C \cdot 2\pi \nu_0}}{\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{2\pi \nu_0 \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{l} - \frac{1}{C \cdot 2\pi \nu_0}}{\sqrt{n^2 - 1}} = 8,75 \Omega.$$

Condiția pentru putere se scrie:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{U^2}{R} = \frac{U^2 R}{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow X_L - X_C = \pm R,$$

$$2\pi \nu_1 L - \frac{1}{2\pi \nu_1 C} = R \text{ și } 2\pi \nu_2 L - \frac{1}{2\pi \nu_2 C} = -R,$$

unde  $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{2l} (1 + \mu_r)$ . Rezultă:

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi} \left( \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{R^2}{4L^2}} + \frac{R}{2L} \right) = 10,837 \text{ kHz},$$

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi} \left( \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{R^2}{4L^2}} - \frac{R}{2L} \right) = 9,169 \text{ kHz}.$$

$$c) Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\nu_0}{\nu_1 - \nu_2} = 5,995.$$

42°. a) Accelerația barei pe distanța  $l_1$  este

$$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g = \frac{1,1}{0,275 + 1,1} 10 = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad (1)$$

Viteza barei la intrarea în cîmpul magnetic va fi:

$$v = \sqrt{2al_1} = \sqrt{2 \cdot 8 \cdot 1} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (2)$$

Bara de lungime  $l$  se mișcă în cîmpul magnetic cu viteza  $v$  și în ea se induce tensiunea electromotoare  $e = -Blv$ ; prin bară va trece curentul electric de intensitate

$$I = \frac{E + e}{R + r} = \frac{E - Blv}{R + r}. \quad (3)$$

Asupra barei, cînd se află în cîmpul magnetic de inducție  $B$ , acționează forțele  $m_2 g$  și  $BIl$ , deci:

$$m_2 g = B \frac{E - Blv}{R + r} l \quad (4)$$

sau

$$B^2 - 12B + 11 = 0,$$

obținîndu-se  $B_1 = 1 \text{ T}$  și  $B_2 = 11 \text{ T}$ .

$$b) t = t_1 + t_2 = \frac{v}{a} + \frac{l_2}{v} = \frac{4}{8} + \frac{0,8}{4} = 0,7 \text{ s}. \quad (5)$$

$$c) m_2 g v + (R + r) I^2 = EI \quad (6a)$$

sau

$$m_2 g v + (R + r) \left( \frac{E - Blv}{R + r} \right)^2 = E \frac{E - Blv}{R + r}$$

$$1,1 \cdot 10 \cdot 4 + \frac{(24 - 1 \cdot 0,5 \cdot 4)^2}{0,5 + 0,5} = 24 \cdot \frac{24 - 1 \cdot 0,5 \cdot 4}{0,5 + 0,5},$$

$$44 + 484 = 528, \text{ pentru } B = 1 \text{ T},$$

$$1,1 \cdot 10 \cdot 4 + \frac{(24 - 11 \cdot 0,5 \cdot 4)^2}{0,5 + 0,5} = 24 \cdot \frac{24 - 11 \cdot 0,5 \cdot 4}{0,5 + 0,5},$$

$$44 + 4 = 48, \text{ pentru } B = 11 \text{ T}.$$

$$43°. a) M = bF_1 = l \sin \theta \cdot Q_1 E = 0,2 \text{ m} \cdot \sin 30^\circ \cdot 10^{-3} \text{ C} \cdot 100 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 0,01 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Direcția momentului cuplului de forțe este perpendiculară pe planul  $xOy$ , sensul — dat de regula burghiului — fiind spre cititor (fig. F.C. 57a), deci:

$$\vec{M} = 0,01 \vec{1}_z [\text{N} \cdot \text{m}],$$

unde  $\vec{1}_z$  este vectorul unitar (versorul) al axei  $Oz$ , asociată axelor  $Ox$  și  $Oy$  în triedrul drept  $Oxyz$ .

b) Poziția de echilibru stabil este cea pentru care  $\theta = 0$ , iar poziția de echilibru instabil cea pentru care  $\theta = 180^\circ$ . Dacă  $Q_{1x}$  este poziția sarcinii  $Q_1$  la echilibrul stabil al tijei (fig. F.C.57b),  $OQ_{1x} = \frac{l}{2}$ , atunci lucrul mecanic cerut este:

$$L = 2Q_1Ed = 2Q_1E \frac{l}{2} (1 - \cos \theta) = Q_1El(1 - \cos \theta).$$

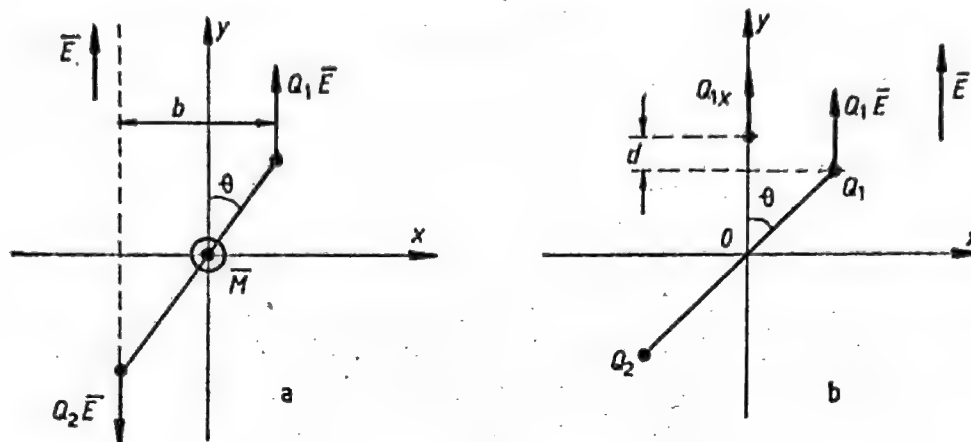


Fig. F.C.57

Efectuând calculele numerice, obținem:

$$L = 10^{-3} \cdot 100 \cdot 0,2 \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \approx 2,68 \cdot 10^{-3} \text{ J.}$$

c) În cazul micilor oscilații, cele două puncte materiale se deplasează ca și cînd ar fi legate printr-un fir inextensibil de lungime  $\frac{l}{2} = 0,1 \text{ m}$  în punctul fix  $O$  și ar fi supuse unui cîmp de forțe uniform de accelerație  $a = \frac{F_1}{m} = \frac{Q_1E}{m}$ .

Prin analogie cu problema micilor oscilații ale pendulului gravitațional, în locul expresiei  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ , vom avea  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l/2}{a}}$ , de unde  $T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{2a}$  și  $a = \frac{Q_1E}{m} = \frac{2\pi^2 l}{T^2}$ . Rezultă că

$$m = \frac{Q_1ET^2}{2\pi^2 l} = \frac{10^{-3} \cdot 100 \cdot 1}{19,78 \cdot 0,1} \approx 5,06 \cdot 10^{-2} \text{ kg (50,6 g).}$$

$$44^\circ. \text{ a) } E = \frac{U}{d} = \frac{Q}{dC} = \frac{Q}{\epsilon_a A} = \frac{\sigma}{\epsilon_a} = \frac{10^{-6}}{8,86 \cdot 10^{-12}} \approx 1,13 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

b) Fie  $E_+$  și  $E_-$  intensitățile cîmpurilor electrice produse de densitățile superficiale de sarcini electrice  $+\sigma$  și  $-\sigma$ . Evident (fig. F.C. 58), aceste intensități sînt

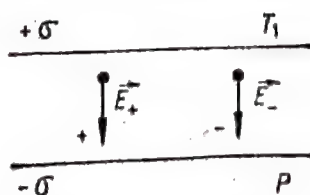


Fig. F.C.58

egale, inclusiv ca sens, deci  $E = 2E_-$  și  $E_- = \frac{E}{2}$ .



Rezultă că forța electrostatică de atragere a talerului  $T_1$  de către placa fixă  $P$  va fi  $F = QE_- = \sigma A \frac{E}{2}$ , iar masa corpului suplimentar care trebuie pus pe talerul  $T_2$  pentru reechilibrarea balanței este

$$m = \frac{F}{g} = \frac{\sigma A}{g} \cdot \frac{E}{2} = \frac{10^{-6} \cdot 10^{-2}}{9,8} \cdot \frac{1,13 \cdot 10^5}{2} \approx 57,6 \text{ mg.}$$

c)  $U_e = Ed_e = 1,13 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 226 \text{ V.}$

d) În acest caz:

$$F = CU_e \frac{U_e}{2d} = \frac{\epsilon_0 A}{2} \cdot \frac{U_e^2}{d^2} = mg \frac{d_e^2}{d^2} \begin{cases} < mg, \text{ pentru } d > d_0, \\ = mg, \text{ pentru } d = d_0, \\ > mg, \text{ pentru } d < d_0, \end{cases}$$

deci echilibrul mecanic (al balanței electrostatice) devine instabil.

45°. a) Integrind expresia indicată în enunț pentru permitivitatea diferențială pe ramura de repolarizare a ciclului histerezis,

$$\left( \frac{dD}{dE} \right)_{\text{repol.}} = \epsilon_i + RE + R_0 E_0,$$

se obține dependența de intensitatea  $E$  a cîmpului electric a inducției electrice  $D$  pe ramură de repolarizare:

$$D_{\text{repol.}}(E, E_0) = \epsilon_i E + R \frac{E^2}{2} + R_0 E_0 E + C.$$

Pentru  $E = \pm E_0$ , inducția electrică pe ramura de repolarizare atinge valorile extreme ( $\pm D_0$ ) corespunzătoare ciclului histerezis considerat, deci:

$$D_{\text{repol.}}(E_0, E_0) = D_0 = \epsilon_i E_0 + R \frac{E_0^2}{2} + R E_0^2 + C,$$

$$D_{\text{repol.}}(-E_0, E_0) = -D_0 = -\epsilon_i E_0 + R \frac{E_0^2}{2} - R E_0^2 + C.$$

Insumind membru cu membru ultimele două relații obținute, rezultă că  $0 = RE_0^2 + 2C$ , reieșind valoarea constantei  $C$  de integrare:  $C = -\frac{R}{2} E_0^2$ ; înlocuind în expresia de mai sus a inducției electrice pe ramura de repolarizare, găsim:

$$D_{\text{repol.}}(E, E_0) = (\epsilon_i + R_0 E_0)E + \frac{R}{2} (E^2 - E_0^2).$$

Datorită simetriei ciclului histerezis, inducția electrică pe ramura de depolarizare a ciclului este dată de expresia:

$$D_{\text{depol.}}(E, E_0) = -D_{\text{repol.}}(-E, E_0) = (\epsilon_i + R_0 E_0)E - \frac{R}{2} (E^2 - E_0^2).$$

b) În baza expresiilor obținute pentru ramurile ciclului histerezis, inducția maximă  $D_0$  este dată de relația:

$$D_0 = D_{\text{repol.}}(E_0, E_0) = D_{\text{depol.}}(E_0, E_0) = \epsilon_i E_0 + R_0 E_0^2,$$

care, în forma  $D_{pr. pol.} = \epsilon_i E + R_0 E^2$ , constituie și ecuația curbei de primă polarizare. Rezultă expresiile permitivității diferențiale:

$$\epsilon_d = \left( \frac{dD}{dE} \right)_{pr. pol.} = \epsilon_i + 2R_0 E,$$

respectiv totale, pe curba de primă polarizare:

$$\epsilon_{tot} = \left( \frac{D}{E} \right)_{pr. pol.} = \epsilon_i + R_0 E.$$

c). Densitatea volumică a energiei electrostatice disipate pentru parcurgerea unui ciclu histerezis este:

$$\frac{\Delta W}{\Delta V} = \int_{-E_0}^{E_0} (D_{depol.} - D_{repol.}) dE = R \int_{-E_0}^{E_0} (E_0^2 - E^2) dE = \frac{4R}{3} E_0^3.$$

În condițiile unui cîmp electric alternativ de perioadă  $T$  (și frecvență  $f$ ), densitatea volumică a puterii disipate este:

$$\frac{\Delta |\tilde{P}|}{\Delta V} = \frac{1}{T} \cdot \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{4R}{3} E_0^3 f.$$

d) Din ecuația fluxului electric scrisă pentru o suprafață a cilindrului de rază  $r$ , coaxială cu armăturile considerate, găsim:  $2\pi r L \cdot E(r) = \frac{Q_{int.}}{\epsilon}$ , unde  $Q_{int.}$  este sarcina electrică de pe armătura interioară. Rezultă că  $E(r) = \frac{Q_{int.}}{2\pi \epsilon L} \cdot \frac{1}{r}$ , iar tensiunea dintre armături (fig. F.C.59):

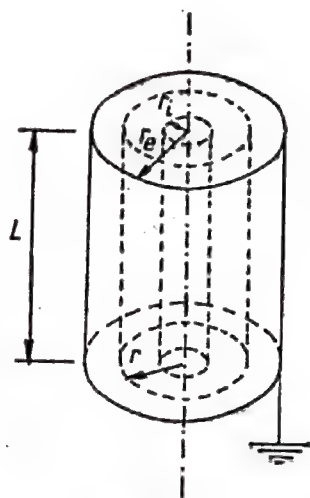


Fig. F.C.59

$U = - \int_{r_e}^r E(r) dr = \frac{Q_{int.}}{2\pi \epsilon L} \ln \frac{r_e}{r_i}$ . Împărțind membru cu membru ultimele două relații, găsim că  $E(r) = \frac{U}{r \ln \frac{r_e}{r_i}}$ . Deoarece  $r_e - r_i \ll r$ , avem (între armături)

$$E_0(r) \approx E_0(r_i) = \frac{U_0}{r_i \ln \frac{r_e}{r_i}}.$$

Rezultă puterea disipată pentru parcurgerea repetată a ciclului feroelectric:

$$P = f \cdot \pi(r_e^2 - r_i^2)L \cdot \frac{4R}{3} \left[ \frac{U_0}{r_i \ln \frac{r_e}{r_i}} \right]^3.$$

Comparind această expresie cu aceea a puterii disipate pe rezistența echivalentă  $R_f$  pentru o tensiune alternativă de frecvență  $f$  și amplitudine  $U_0$ ,  $P = \frac{U_0^2}{2R_f}$ , găsim:

$$R_f = \frac{3}{4\pi R(r_e^2 - r_i^2)LU_0f} \left( r_i \ln \frac{r_e}{r_i} \right)^3.$$

$$46^\circ. \text{ a) } \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{1}{L} = \omega_0^2, \text{ deci } \frac{1}{C_2} = L\omega_0^2 - \frac{1}{C_1} = 0,3 \cdot 25 \cdot 10^4 - \frac{1}{4 \cdot 10^{-5}},$$

obținind  $C_2 = 2 \cdot 10^{-5} F (= 20 \mu F)$ .

b) Sarcina electrică a condensatorului format din înfășurarea solenoidului și armăturile condensatoarelor  $C_1$  și  $C_2$ , legate de înfășurare, nu variază în timp:  $Q = C_1 u_1 + C_2 u_2 = \text{const.} (t)$ . Rezultă că potențialul punctului înfășurării solenoidului aflat la fracțiunea  $\frac{C_1}{C_1 + C_2}$  (din înfășurare) spre condensatorul  $C_1$  și fracțiunea  $\frac{C_2}{C_1 + C_2}$  spre condensatorul  $C_2$  este  $u = u_1 \frac{C_1}{C_1 + C_2} + u_2 \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \text{const.} (t)$ .

c) În cazul problemei de față, potențialul  $u$  constant în timp are valoarea  $u = \frac{1}{C_1 + C_2} (C_1 u_{10} + C_2 u_{20}) = 0$ . În aceste condiții, se poate scrie condiția de conservare a energiei electromagnetice (în absența elementelor disipative) pentru circuitul format din condensatorul  $C_1$  și fracțiunea  $\frac{C_2}{C_1 + C_2}$  din înfășurarea solenoidului, obținind:

$$\frac{C_1 u_{10}^2}{2} + \frac{C_2 L}{C_1 + C_2} \cdot \frac{I_0^2}{2} = \frac{C_1 u_{10}^2}{2} + \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{\Phi_0^2}{2L} = \frac{C_1 u_{1, \max}^2}{2}$$

obținind:

$$u_{1, \max} = \sqrt{u_{10}^2 + \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{\Phi_0^2}{L(C_1 + C_2)}} = \sqrt{1^2 + \frac{2}{4} \cdot \frac{9 \cdot 10^{-6}}{0,3 \cdot 6 \cdot 10^{-5}}} \approx 1,12 \text{ V}.$$

d) Pornind de la expresia pulsației de rezonanță în circuitul serie  $C_1 LC_2$ ,

$$\omega_{\text{rez}} = \frac{1}{\sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}},$$

și de la expresiile energiilor electrostatică (într-un condensator inserat într-un circuit cu fluxuri magnetice) și magnetostatică (într-o bobină),

$$W_{\text{es}} = \frac{Cu^2}{2} = \frac{C}{2} \left( \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right)^2, \quad W_{\text{ms}} = \frac{\Phi^2}{2L},$$



comparate cu energiile cinetică  $W_c = \frac{m}{2} \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2$  și elastică  $W_e = \frac{kx^2}{2}$ , se stabilesc parametrii fizici analogi:

Electromagnetici	$\Phi$	$u \left( = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right)$	$C$	$Q (= Cu)$	$I \left( = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \right)$	$L \left( = \frac{\Phi}{I} \right)$
Mecanici	$x$	$V \left( = \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)$	$m$	$p (= mv)$	$F \left( = \frac{\Delta p}{\Delta t} \right)$	$\frac{1}{k} \left( = \frac{x}{F} \right)$

și sistemul mecanic oscilant analog (fig. F.C.60).

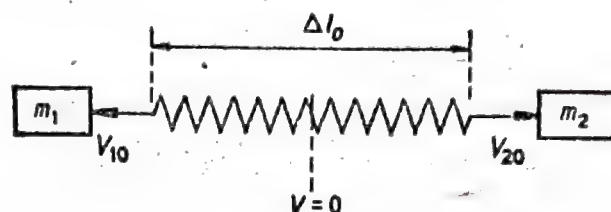


Fig. F.C.60

47°. a) Impedanța  $Z$  a ramurii  $RLC$  serie este:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2};$$

deci, amplitudinea  $U_0$  a tensiunii la bornele circuitului este:

$$U_0 = r i_0 = Z I_{s0} = I_{s0} \sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}. \quad (1)$$

Deoarece tensiunea  $U_{AB}$  la bornele circuitului este în fază cu intensitatea  $i$  a curentului electric prin rezistorul  $r$ , defazajul  $\varphi_s$  dintre oscilațiile curenților  $i$  și  $I_s$  este același cu defazajul dintre tensiunea  $U_{AB}$  la bornele ramurii serie  $RLC$  și intensitatea  $I_s$  a curentului prin această ramură, fiind dat de expresiile:

$$\cos \varphi_s = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}, \quad \sin \varphi_s = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{Z} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{\sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{1}{R} \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right). \quad (2)$$

Oscilațiile  $I_s$  sînt în urmă cu  $\varphi_s$ ; deci, dacă  $U_{AB} = U_0 \cos \omega t$  și  $i = i_0 \cos \omega t$ , atunci  $I_s = I_{s0} \cos (\omega t - \varphi_s)$ .

b) Conform primei legi a lui Kirchhoff,  $I_c = I_s + i$ , deci

$$I_s = I_c - i. \quad (3)$$

Deducerile relației dintre amplitudinile  $I_0$  și  $i_0$ , precum și a expresiei defazajului,  $\varphi$ , pot fi efectuate atât pe cale fazorială, cît și prin procedura algebrică, utilizarea acestor metode fiind prezentată mai jos.

### Metoda I (fazorială)

Din diagrama fazorială a curenților (fig. F.C.61) avem:  $I_0^2 = i_0^2 + I_{s0}^2 + 2i_0 I_{s0} \cos \varphi_s$ , de unde — înlocuind  $I_{s0}$  prin  $i_0$  în baza relației (2) — găsim:

$$I_0^2 = i_0^2 \left[ 1 + \frac{r^2}{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} + 2 \frac{rR}{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \right] =$$

$$= i_0^2 \cdot \frac{(R+r)^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}. \quad (4)$$

Din fig. F.C.61 rezultă și relațiile

$$I_0 \cos \varphi = i_0 + I_{s0} \cos \varphi_s \quad (5)$$

și, respectiv,

$$I_0 \sin \varphi = I_{s0} \sin \varphi_s. \quad (6)$$

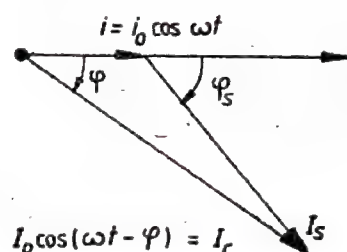


Fig. F.C.61

Înlocuind în relațiile (5) și (6) valorile  $\frac{I_{s0}}{i_0}$ ,  $\cos \varphi_s$  și  $\sin \varphi_s$ ,  $\frac{i_0}{I_0}$  date de relațiile (1), (2) și — respectiv — (4), se obțin expresiile:

$$\cos \varphi = \frac{R(R+r) + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}{\sqrt{\left[ R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right] \left[ (R+r)^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right]}} \quad (7)$$

$$\sin \varphi = \frac{r \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}{\sqrt{\left[ R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right] \left[ (R+r)^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right]}} \quad (8)$$

### Metoda a II-a (algebrică)

Legea I a lui Kirchhoff ne dă:

$$I_c(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi) = i(t) + I_s(t) = i_0 \cos \omega t + I_{s0} \cos(\omega t - \varphi_s)$$

Descompunând funcțiile  $\cos(\omega t - \varphi)$  și  $\cos(\omega t - \varphi_s)$ , obținem:

$$I_0 \cos \varphi \cdot \cos \omega t + I_0 \sin \varphi \cdot \sin \omega t = (i_0 + I_{s0} \cos \varphi_s) \cos \omega t + I_{s0} \sin \varphi_s \cdot \sin \omega t. \quad (9)$$

Deoarece relația de mai sus trebuie satisfăcută la orice moment  $t$ , ea este o identitate; întrucât identitatea  $A \sin x + B \cos x = 0$  ( $x$  poate fi  $\omega t$ ) impune cu necesitate  $A = B = 0$ , coeficienții funcțiilor  $\cos \omega t$ , respectiv  $\sin \omega t$ , din membrii stîng și drept ai identității (9) trebuie să fie egali:  $I_0 \cos \varphi = i_0 + I_{s0} \cdot \cos \varphi_s$ , (5)

$$I_0 \sin \varphi = I_{s0} \sin \varphi_s. \quad (6)$$

Ținând seamă de relațiile (1) și (2), relațiile (5) și (6) devin:

$$I_0 \cos \varphi = i_0 \frac{R^2 + Rr + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}, \quad I_0 \sin \varphi = i_0 \frac{r \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}. \quad (10)$$

Împărțind membru cu membru relațiile (10), respectiv ridicându-le la pătrat și adunându-le membru cu membru, se obține:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R^2 + r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}. \quad (11)$$

[relație echivalentă cu (7) și (8)], precum și relația (4).

*Notă.* Relația (4) se poate obține și observând că bilanțul tensiunilor în ochiul  $ARCLBrA$  este echivalent cu cel din ochiul din fig. F.C.62.

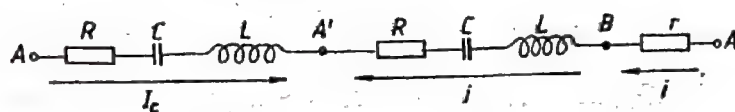


Fig. F.C.62

Deoarece, la orice moment  $t$ , suma diferențelor de potențial electric  $U_{A'} - U_A$  și  $U_A - U_{A'}$  este nulă,  $U_{A'A}(t) + U_{AA'}(t) = 0$ , amplitudinile respectivelor tensiuni sînt egale:

$$I_0 Z = I_0 \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = i_0 \sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = i_0 Z_0, \quad (4')$$

unde  $Z_0$  este impedanța ochiului  $RCLr$  real.

$$c) \quad U_0 = r i_0 = r I_0 \sqrt{\frac{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = r I_0 \left[ 1 + \frac{r(2R+r)}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Se constată că dependența de frecvență a amplitudinii  $U_0$  are forma din figura F.C.63, cu un minim pentru frecvența  $\nu_0$  (de „rezonanță”) pentru care:

$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0, \text{ deci } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ și } \nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

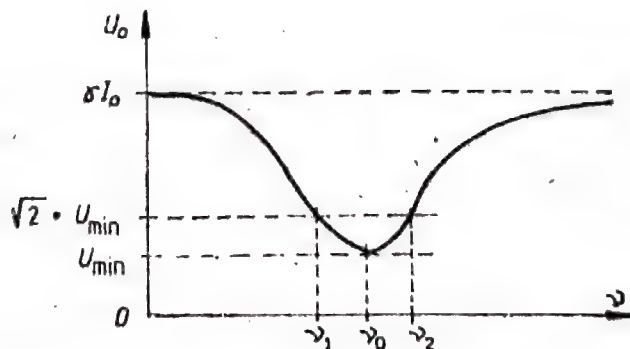


Fig. F.C.63



d) Pentru ca amplitudinea  $U_0$  a tensiunii între bornele  $A$  și  $B$  să fie egală cu  $\sqrt{2} U_{\min}$  pentru pulsațiile  $\omega_1 = 2\pi\nu_1$  și  $\omega_2 = 2\pi\nu_2$ , trebuie ca

$$U_0(\omega_{1,2}) = rI_0 \left[ 1 + \frac{r(2R+r)}{R^2 + \left( L\omega_{1,2} - \frac{1}{C\omega_{1,2}} \right)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2} U_{\min} = \sqrt{2} I_0 \frac{Rr}{R+r},$$

de unde

$$\left( L\omega_{1,2} - \frac{1}{C\omega_{1,2}} \right)^2 = R'^2, \text{ unde } R' = \frac{R(R+r)}{\sqrt{2Rr+r^2-R^2}}. \quad (12)$$

Se obține în continuare:

$$L\omega_{1,2} - \frac{1}{C\omega_{1,2}} = \pm R', \text{ de unde } LC\omega_{1,2}^2 \mp R'C\omega_{1,2} - 1 = 0, \text{ cu soluțiile}$$

$$\omega_{1,2} = \frac{\pm R'C \pm \sqrt{R'^2 C^2 + 4LC'}}{2LC}.$$

Deoarece radicalul este mai mare decât termenul  $R'C$  din față, soluțiile cu semnificație fizică sînt cele cu „+” în fața radicalului:  $\omega_1 = \frac{\sqrt{R'^2 C^2 + 4LC} - R'C}{2LC}$ ,  $\omega_2 = \frac{\sqrt{R'^2 C^2 + 4LC} + R'C}{2LC}$ :

Rezultă că factorul de calitate pentru selectivitate are expresia:

$$Q = \frac{\nu_0}{\nu_2 - \nu_1} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{\frac{2R'C}{2LC}} = \frac{L\omega_0}{R'} = \frac{L\omega_0 \sqrt{2Rr+r^2-R^2}}{R(R+r)}. \quad (13)$$

Pentru ca definiția dată pentru factorul de calitate să aibă sens, este necesar ca

$$U_{\max} = [\lim_{\omega \rightarrow 0} U_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} U_0(\omega)] = rI_0 \geq \sqrt{2} U_{\min} = \sqrt{2} \frac{Rr}{R+r} I_0, \quad (14)$$

de unde  $R+r \geq \sqrt{2} R$ , adică  $r \geq (\sqrt{2} - 1) R$ .

*Notă.* La același rezultat se ajunge și din condiția „matematică”, rezultată de expresia (13), ca

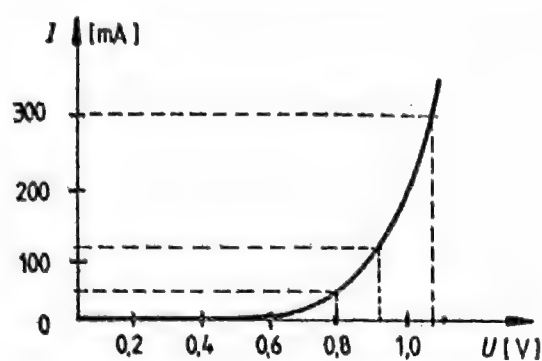
$$0 \leq 2Rr + r^2 - R^2 = (R+r)^2 - 2R^2.$$

48°. a) Reprezentînd grafic valorile indicate în enunț pentru anumite puncte ale caracteristicii  $I = f(U)$  corespunzînd dipolului obținut prin scurtcircuitarea bornelor 1 și 2, pentru conexiunea  $A$ , respectiv  $B$ , a bateriei electrice externe, se obțin figurile F.C.64 a și b, respectiv — prin sinteza acestora — caracteristica din figura F.C.64 c.

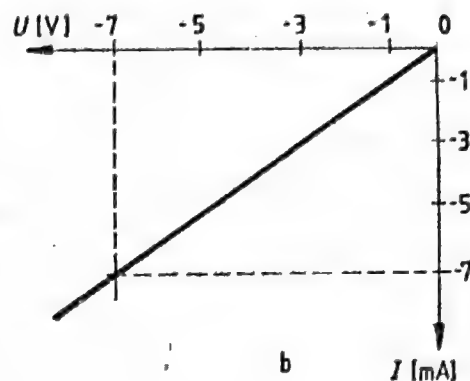
Din caracteristica  $I = f(U)$  se pot stabili următoarele concluzii:

1. Deoarece pentru  $U = 0$ , s-a obținut  $I = 0$ , reiese că în dipol nu este inclusă vreo sursă de curent electric.

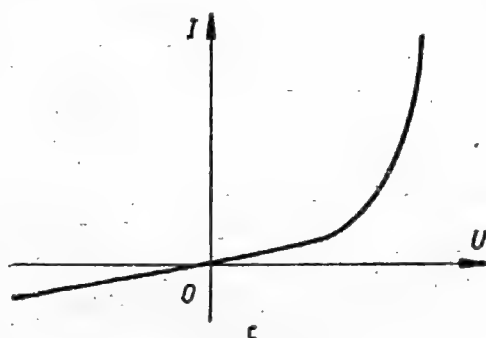
2. Din figura F.C.64a reiese că în dipol este inclus un element neliniar — o diodă, iar din figura F.C.64b că există și un element liniar — un rezistor.



a



b



c

Fig. F.C.64

3. Cele două elemente sînt legate în paralel (altfel, n-ar fi putut fi observat curentul „invers”, prin diodă, a cărei rezistență inversă este foarte („infini” mare), borna 3 separînd dioda de rezistor, așa cum s-a indicat în figura F.C.65.

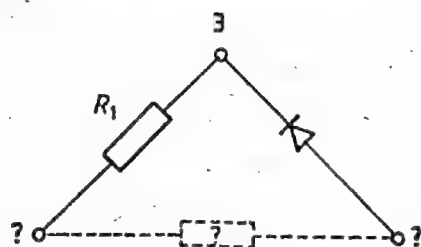


Fig. F.C.65

4. Din graficul liniar (dus printre punctele obținute prin reprezentarea datelor numerice ale tabelului din enunț) din figura F.C.65 se poate determina — în baza relației  $R = \frac{\Delta U}{\Delta I}$  — valoarea aproximativă a rezistenței. Deoarece rezistența inversă a diodei este mult mai mare decît panta (de cca.  $1 \text{ k}\Omega$ , a) caracteristicii  $U = f(I)$  din figura b, rezultă că  $R_1 \approx 1 \text{ k}\Omega$ .

Notă. Caracterul practic liniar al dependenței  $U = f(I)$  corespunzător datelor tabelului din enunț (pentru conexiunea inversă (B) și scurtcircuitarea bornelor 1 și 2) poate fi constatat și prin calculul coeficientului de corelație  $r(U, I)$  corespunzător celor 8 perechi de valori  $\{U_k, I_k; k = 1, 2, \dots, 8\}$  indicate în tabel:

$$r(U, I) = \frac{\sum_k \left( U_k - \frac{1}{8} \sum_i U_i \right) \left( I_k - \frac{1}{8} \sum_j I_j \right)}{\sqrt{\left[ \sum_k \left( U_k - \frac{1}{8} \sum_i U_i \right)^2 \right] \left[ \sum_k \left( I_k - \frac{1}{8} \sum_j I_j \right)^2 \right]}}$$

Valoarea de peste 0,99 obținută pentru  $r(U, I)$ , foarte apropiată de valoarea maximă (1, pentru o dependență perfect liniară) a coeficientului de corelație, atestă cuasiliniariitatea dependenței  $U(I)$  înregistrată în conexiunea inversă (B) a sursei electrice externe. După cum este arătat și în manualul „Prelucrarea datelor experimentale în fizică”, pentru clasele XI și XII (autori Tr. Crețu și V. Fălie, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1980), metoda celor mai mici pătrate permite și evaluarea precisă a pantei dependențelor liniare (aici, a rezistenței  $R_1$ ) în baza expresiei particularizate aici în forma ( $b = R_1$ ,  $x_i = U_i$ ,  $y_i = I_i$ ,  $n = 8$ ):

$$R_1 = \frac{\sum_{i=1}^8 U_i I_i - \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 U_i \cdot \sum_{i=1}^8 I_i}{\sum_{i=1}^8 I_i^2 - \frac{1}{8} \left( \sum_{i=1}^8 I_i \right)^2}.$$

Calculule efectuate pe baza acestei relații conduc la valoarea  $R_1 \simeq 945 \, \Omega$ .

Reprezentînd grafic valorile indicate în enunț pentru anumite puncte ale caracteristicii  $I=f(U)$  corespunzînd dipolului obținut prin scurtcircuitarea bornelor 1 și 3, pentru cele două conexiuni A și B ale bateriei electrice externe, se obțin grafice asemănătoare celor din figurile F.C.64 a – c. Ca urmare, din noile grafice rezultă concluzii similare celor din primul caz, conform cărora la borna 2 este conectată o diodă, iar în cealaltă parte un rezistor, după cum este arătat în figura F.C.66. Din punctele caracteristicii  $I=f(U)$ , pentru conexiunea B și bornele 1 și 3 scurtcircuitate, reiese prin metoda celor mai mici pătrate (v. mai sus), sau calculînd panta dreptei trasate „printre puncte” – că  $R_2 \simeq 2,7 \, \text{k}\Omega$ .

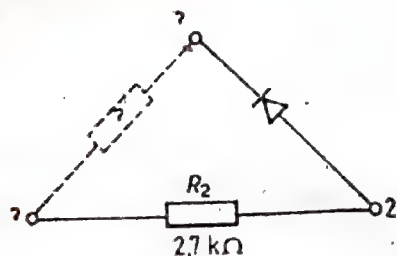


Fig. F.C.66

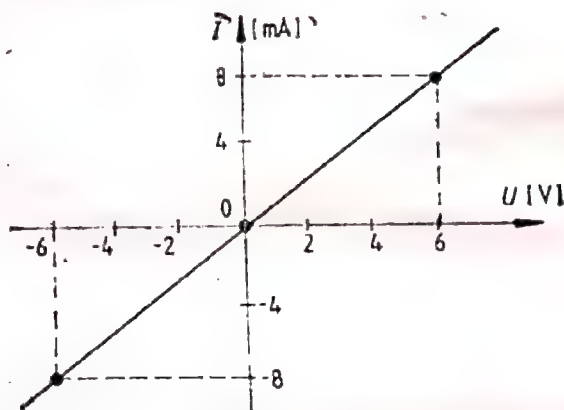


Fig. F.C.67

În fine, reprezentînd grafic valorile indicate în enunț pentru anumite puncte ale caracteristicii  $I=f(U)$  corespunzătoare dipolului obținut prin scurtcircuitarea bornelor 2 și 3, pentru cele două conexiuni ale bateriei electrice externe, se obține graficul din figura F.C.67. Atît din reprezentarea grafică, cît și din valoarea înaltă (peste 0,99) a coeficientului de corelație  $r(U, I)$  calculat similar celor indicate mai sus, reiese caracterul liniar al dependenței  $U(I)$  pentru ambele conexiuni ale sursei externe. Rezultă următoarele concluzii: 1. Deoarece pentru  $U = 0$ , se obține  $I = 0$ , reiese că în dipol nu există surse de t.e.m.; 2. În dipol sînt incluse numai elemente liniare – rezistori; 3. Deoarece rezistența echivalentă grupării derivație obținută prin scurtcircuitarea bornelor 2 și 3, calculată din caracteristica din figura F.C.67 este finită:

$$\check{R} = \frac{\Delta U}{\Delta I} \simeq 700 \, \Omega,$$



ambele ramuri (1—2 și 1—3) ale acestui dipol conțin câte un rezistor, de rezistență de ordinul  $k\Omega$ ; 4. Întrucât rezistența echivalentă grupării derivație a rezistorilor  $R_1$ ,  $R_2$ , evidențiați anterior:

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2,7 \cdot 10^3}{2,7 + 1} \approx 0,73 \text{ k}\Omega,$$

coincide în bună măsură cu valoarea lui  $R$  dedusă din graficul din figura F.C.67, iar rezistorii  $R_1$  și  $R_2$  sînt conectați la bornele 3, respectiv 2, conform constatărilor anterioare, reiese că natura elementelor schemei electrice conținute de „cutia neagră” este cea din figura F.C.68.

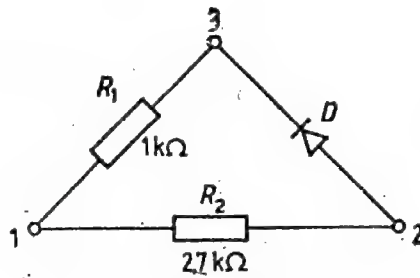


Fig. F.C.68

b) Valorile rezistențelor rezistorilor  $R_1$  și  $R_2$  au fost determinate mai înainte:  $R_1 \approx 945 \Omega$ ,  $R_2 \approx 2700 \Omega$ . Din graficul din figura F.C.64a, corespunzător grupării derivație formate de diodă și rezistorul  $R_1$ , se poate determina rezistența internă  $R_D$  a diodei, pentru diferite porțiuni ale graficului, în baza relației:

$$R_D = \frac{R_1 \frac{\Delta U}{\Delta I}}{R_1 - \frac{\Delta U}{\Delta I}}.$$

49°. A. a) Din ecuația („legea”) circuitului magnetic scrisă pentru o linie de cîmp magnetic avînd forma unei circumferințe de rază  $r$ , cu centrul situat pe axa de simetrie a torului:

$$H(r) \cdot 2\pi r = NI,$$

reiese dependența intensității cîmpului magnetic în tor de distanța  $r$  pînă la axa de simetrie:

$$H(r) = \frac{NI}{2\pi r}.$$

Rezultă că expresia fluxului magnetic prin porțiunea de lățime  $dr$  a unei secțiuni axiale este (în prezența a  $N$  spire):

$$d\Phi(r, r + dr) = NBdA = N\mu H(r)gdr = \mu \frac{N^2 g I}{2\pi r} dr.$$

b) Fluxul magnetic prin întreaga secțiune a torului reiese ca fiind

$$\Phi = \int_{r_i}^{r_e} \mu \frac{N^2 g I}{2\pi r} dr = \frac{\mu N^2 g I}{2\pi} \ln \frac{r_e}{r_i}.$$

Rezultă că inductanța bobinei toroidale este

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu N^2 g}{2\pi} \ln \frac{r_e}{r_i}.$$

Deoarece frecvența de rezonanță a circuitului oscilant este dată de expresia (Thompson)  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ , găsim că

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C} = \frac{\mu N^2 g}{2\pi} \ln \frac{r_e}{r_i},$$

de unde

$$\mu = \frac{1}{2\pi g N^2 f_0^2 C \ln \frac{r_e}{r_i}}.$$

Efectuind calculele, se obține  $\mu_{\text{aer}} \simeq 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$ .

B. a) Avem  $\lambda = \frac{v}{f_0} = \frac{1}{f_0 \sqrt{\epsilon \mu \mu_0}}$ ; efectuind calculele, se obține  $\lambda \simeq 17,7 \text{ km}$ .

b) Între densitatea volumică medie (în timp) a energiei unei unde electromagnetice,  $\varpi = \frac{\epsilon E_0^2}{2} = \frac{\mu H_0^2}{2}$  (unde  $E_0$  și  $H_0$  sînt amplitudinile intensităților cîmpurilor electrice, respectiv magnetice, ale unde) și densitatea (medie în timp, a) fluxului de energie electromagnetică a unde există relația:

$$S = \varpi v = \frac{\epsilon E_0^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{\mu H_0^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}.$$

Rezultă că

$E_0 = \sqrt{2\zeta S}$ , iar  $H_0 = \sqrt{\frac{2S}{\zeta}} = \frac{E_0}{\zeta}$ , unde  $\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  este impedanța electromagnetică a mediului.

Pentru mediul considerat, avem

$$\zeta = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{10^{-11}}} \simeq 354,5 \Omega,$$

deci

$$E_0 \approx \sqrt{2 \cdot 354,5 \cdot 14} = 99,63 \frac{\text{V}}{\text{m}},$$

$$H_0 \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 14}{354,5}} \approx 0,28 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

50°. a) Fie  $i = I \sqrt{2} \cos \omega t$  și  $u_2 = U_2 \sqrt{2} \cos (\omega t + \varphi)$  valorile instantanee ale curentului și, respectiv, tensiunii la bornele consumatorului. Întrucît  $P_2 = U_2 I \cos \varphi$  se obține

$$I = \frac{P_2}{U_2 \cos \varphi} = 25 \text{ A}.$$

b)  $u_1 = Ri + u_2$ , unde  $u_2 = U_2 \sqrt{2} \cos (\omega t + \psi)$ ,  $\psi$  fiind defazajul dintre curentul  $i$  și tensiunea  $u_1$  între punctele A și B.

Dacă se proiectează relația fazorială  $u_1 = R_1 i + u_2$  pe suportul lui  $i$  și pe o axă perpendiculară pe prima, se obțin ecuațiile (fig. F.C.69)

$$U_1 \cos \psi = R_1 I + U_2 \cos \varphi,$$

$$U_1 \sin \psi = U_2 \sin \varphi.$$

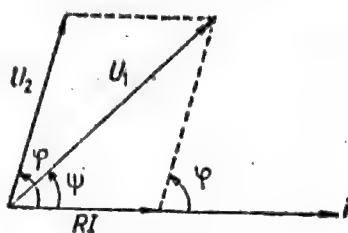


Fig. F.C.69

Prin eliminarea lui  $\psi$  între aceste ecuații și ținând seama de expresia puterii  $P_2$ , rezultă:

$$U_1 = \sqrt{U_2^2 + 2R_1 P_2 + \frac{R_1^2 P_2^2}{U_2^2 \cos^2 \varphi}} = 121 \text{ V.}$$

Puterea activă între punctele  $A$  și  $B$  are expresia:

$$P_1 = RI^2 + P_2.$$

Numeric:

$$P_1 = 2\,625 \text{ W.}$$

c) Prin împărțirea ecuațiilor rezultate prin proiecția relației fazoriale  $u_1 = R_1 i + u_2$ , membru cu membru, se obține:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{U_2 \sin \varphi}{R_1 I + U_2 \cos \varphi},$$

unde

$$\sin \psi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = 0,6.$$

Numeric:

$$\operatorname{tg} \psi = 0,571 \Rightarrow \psi \approx 29^\circ 45'.$$

51°. a) În circuitul din figura F.C.70:

$$i = I \sqrt{2} \cos \omega t,$$

$$i_c = I_c \sqrt{2} \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$i_2 = I_2 \sqrt{2} \cos (\omega t - \varphi),$$

$$i = i_2 + i_c.$$

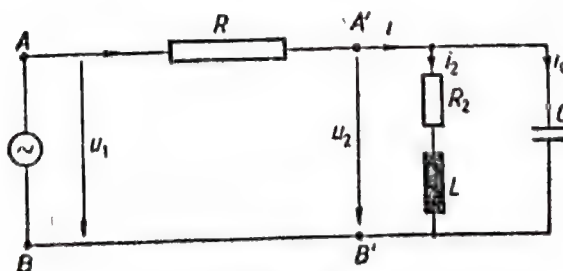


Fig. F.C.70



Prin proiecția ultimei relații pe axele din figura F.C.71 se obțin ecuațiile:

$$I = I_2 \cos \varphi,$$

$$U = I_c = I_2 \sin \varphi,$$

$$\sin \varphi = \frac{I_c}{I_2},$$

$$\cos \varphi = \frac{I}{I_2},$$

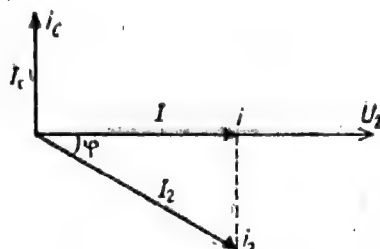


Fig. F.C.71

unde

$$I_2 = \frac{P_2}{U_2} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$$

și

$$I_c = \frac{U_2}{1/\omega C} = 2\pi f C U_2.$$

Se poate scrie

$$\sin \varphi = \frac{I_c}{I_2} = \frac{U_2 C 2\pi f}{P_2 / (U_2 \cos \varphi)} = \frac{2\pi f U_2^2 C}{P_2} \cos \varphi,$$

deci

$$C = \frac{P_2 \tan \varphi}{U_2^2 2\pi f}.$$

Numeric:

$$C = 478 \mu\text{F}.$$

b) Din expresia lui  $I_c$  rezultă  $I_c = 2\pi f C U_2 = 15 \text{ A}$ . Se observă totodată, că

$$I_2 = \frac{I_c}{\sin \varphi} = \frac{15}{0,6} = 25 \text{ A},$$

$$I = I_2 \cos \varphi = 20 \text{ A}.$$

c)

$$P_1 = R_1 I^2 + P_2,$$

$$P_1 = 2400 \text{ W}.$$

52°. Bara  $CD$  se deplasează sub acțiunea propriei sale greutate  $G = mg$ , producând variația fluxului magnetic, care traversează circuitul închis  $BCDB'$ . Ca urmare, în circuit se induce o tensiune electromotoare  $e = Blv$ , care determină curentul indus

$$i = \frac{e}{R} = \frac{Blv}{R}.$$

Bara  $CD$  este supusă forței electromagnetice

$$F = Bil = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

dirijată în sus, conform regulii lui Lenz.

Ecuatia de mișcare a barei are forma:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{B^2 l^2 v}{R}.$$

Pentru integrare se separă variabilele:

$$\frac{dv}{g - \frac{B^2 l^2}{mR} v} = dt.$$

Cu notația  $\tau = \frac{mR}{B^2 l^2}$  se obține

$$\lg \frac{(g - v/\tau)}{C} = - \frac{t}{\tau},$$

$$v = \tau(g - Ce^{-t/\tau}),$$

unde  $C$  este o constantă de integrare.

Pentru  $t = 0$ ,  $v = 0$  astfel încît rezultă  $C = g$ .

În final se obține expresia

$$v = \tau g(1 - e^{-t/\tau})$$

reprezentată grafic în figura F.C.72.

b) Viteza limită a barei se obține pentru  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = g\tau = v_0,$$

$$v_0 = \frac{gmR}{B^2 l^2} = \frac{9,8 \cdot 10^{-2} \cdot 10}{(0,1)^2} = 98 \text{ m/s}.$$

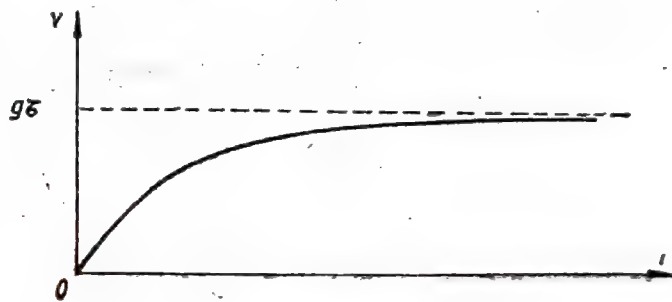


Fig. F.C.72

c) Pentru  $v = \frac{v_0}{2} = \frac{g\tau}{2}$ , se obține  $\frac{1}{2} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$ , adică  $e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{2}$  sau  $-\frac{t}{\tau} =$

$= -\ln 2$ , de unde  $t = \tau \ln 2$ . Deoarece  $\tau = \frac{10^{-2} \cdot 10}{10^{-2}} = 10 \text{ s}$ ,  $\rightarrow t = 6,93 \text{ s}$ .

$$i = \frac{Blv}{R} \rightarrow i = \frac{Blv_0}{2R} = \frac{1 \cdot 0,1 \cdot 98}{2 \cdot 10} = 0,49 \text{ A}.$$

53°. a) Avem montajul din figura F.C.73:

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{d_1} = 8,85 \text{ pF},$$

$$C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{d_1/2} = 17,70 \text{ pF},$$

$$Q_1 = C_1 U_0 = 8,85 \cdot 10^{-9} \text{ C},$$

$$Q_2 = 2Q_1 = 17,70 \cdot 10^{-9} \text{ C},$$

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U_0^2 = 4,425 \cdot 10^{-6} \text{ J},$$

$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 U_0^2 = 8,85 \cdot 10^{-6} \text{ J}.$$

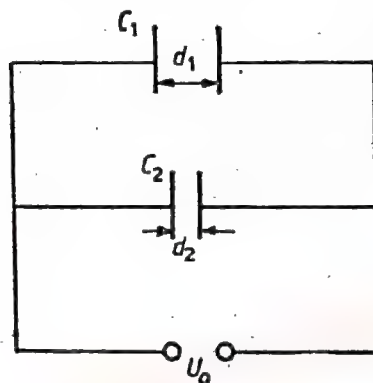


Fig. F.C.73

b) Pentru sistemul izolat se conservă sarcina totală:

$$Q_{\text{total}} = Q_1 + Q_2 = 3\epsilon_0 \frac{S}{d_1} U_0$$

$$C_1 = C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{d_1} = 8,85 \text{ pF}$$

$$Q = \frac{Q_1 + Q_2}{2} = 13,275 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$U = \frac{Q}{C_1} = \frac{3}{2} U_0 = 1500 \text{ V}$$

$$W = \frac{1}{2} Q U = \frac{9}{8} \epsilon_0 \frac{S}{d_1} U_0^2 = 9,956 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

c) Într-o stare intermediară pentru care distanța dintre armăturile condensatorului \$C\_2\$ este \$x\$, se notează cu \$Q'\_1\$ și \$Q'\_2\$ sarcinile pe cei doi condensatori și cu \$U'\$ tensiunea dintre armături.

$$U' = \frac{Q'_1}{C_1} = \frac{Q'_2}{C_2} = \frac{Q'_1 + Q'_2}{C_1 + C_2}$$

unde

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{d_1} \text{ și } C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{x}$$



astfel încît

$$Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2$$

Se obține:

$$U' = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = \frac{3U_0}{1 + d_1/x}$$

Variația energiei înmagazinată în condensatoare este determinată de lucrul mecanic efectuat de forța  $F$ :

$$dW = -Fdx$$

deci

$$F = -\frac{dW}{dx}$$

unde

$$W = \frac{1}{2}(Q'_1 U' + Q'_2 U') = \frac{1}{2} U'(Q_1 + Q_2)$$

Se obține

$$W = \frac{9}{2} \epsilon_0 \frac{SU_0^2}{d_1(1 + d_1/x)}$$

astfel încît

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{9}{2} \epsilon_0 \frac{SU_0^2}{(x + d_1)^2}$$

Pentru  $x = 3d_1/4$  se obține

$$F = -\frac{9}{2} \epsilon_0 \frac{SU_0^2}{\left(\frac{7d_1}{4}\right)^2} = -\frac{72}{49} \cdot \frac{\epsilon_0 SU_0^2}{d_1^2} = -\frac{72}{49} \cdot \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}}{10^{-4}} 10^6 \approx -1,3 \cdot 10^{-3} \text{ N,}$$

semnul minus indică caracterul atractiv al acestei forțe.

54°. a) Aplicînd legile lui Kirchhoff se obține:

$$I = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}.$$

— A doua metodă constă în aplicarea legilor lui Kirchhoff rețelei pentru  $E_1 = 0$ , respectiv  $E_2 = 0$ . Rezultă

$$I' = \frac{R_1 E_2}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

și

$$I'' = \frac{R_2 E_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2},$$

astfel că  $I = I' + I''$ .

Pentru datele problemei,  $I = 0,5 \text{ A}$ .

b) Circuitul echivalent este prezentat în figura F.C.74 alăturată. Se exprimă  $I$  din legea lui Ohm:

$$I = \frac{E}{R + r}$$

și se compară cu expresia lui  $I$  de la punctul a).

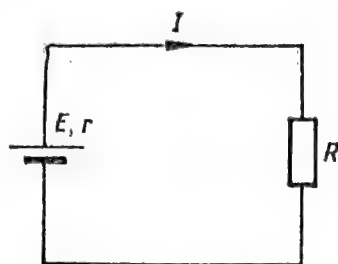


Fig. F.C.74

Prin identificare rezultă:

$$E = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R_1 + R_2}$$

și

$$r = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Înlocuind se obține  $E = 80 \text{ V}$  și  $r = 10 \text{ } \Omega$ .

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad U = RI &= \frac{R(R_2 E_1 + R_1 E_2)}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2} \\ U &= 75 \text{ V} \end{aligned}$$

$$P = RI^2 = UI = 75 \cdot 0,5 = 37,5 \text{ W.}$$

55°. a) Pentru sensurile din figurile F.C.75 legile lui Kirchhoff se scriu astfel:

$$I_1 = I_2 + I_3,$$

$$r_1 I_1 + r_3 I_3 = E_1 - \frac{P}{I_3},$$

$$r_2 I_2 - r_3 I_3 = \frac{P}{I_3} - E_2.$$

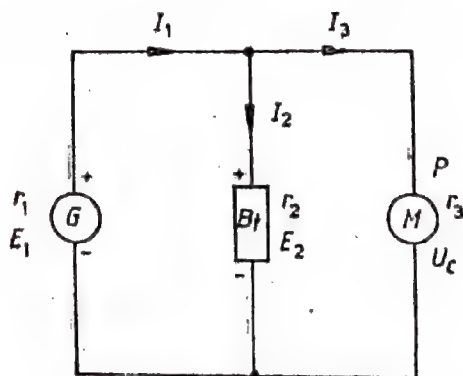


Fig. F.C.75

Între aceste ecuații se elimină  $I_1$  și  $I_2$  și se obține ecuația următoare de gradul doi în  $I_3$ :

$$I_3^2 \cdot \left[ r_3 + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right] - I_3 \left[ \frac{r_1 E_2 + r_2 E_1}{r_1 + r_2} \right] + P = 0.$$

Ecuația admite cel puțin o soluție, dacă discriminantul său este pozitiv sau nul:

$$\left[ \frac{r_1 E_2 + r_2 E_1}{r_1 + r_2} \right]^2 - 4P \left[ r_3 + \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \right] \geq 0,$$

sau

$$P \leq \frac{(r_1 E_2 + r_2 E_1)^2}{4(r_1 + r_2) [r_3(r_1 + r_2) + r_1 r_2]}.$$

Numeric se obține ecuația

$$8I_3^2 - 320I_3 + 3P = 0,$$

astfel încît

$$P \leq \frac{3 \cdot 200}{3} \text{ W } (\approx 1,067 \text{ kW}).$$

b)

$$U_c = \frac{P}{I_3}.$$

Introducînd expresia lui  $I_3 = \frac{P}{U_c}$  în ecuația obținută mai sus, rezultă

$$\frac{8P^2}{U_c^2} - 320 \frac{P}{U_c} + 3P = 0$$

sau

$$3U_c^2 - 320U_c + 8P = 0 \quad (P \neq 0).$$

Din ecuațiile lui Kirchhoff se obține

$$I_2 = \frac{E_1 - E_2 - r_1 I_3}{r_1 + r_2}.$$

Pentru  $I_2 = 0$  se obține

$$I_3 = \frac{E_1 - E_2}{r_1} = 10 \text{ A},$$

valoare care, introdusă în ecuația de gradul doi verificată de  $I_3$ , conduce la  $P = 800 \text{ W}$ . Rezultă că  $U_c = \frac{P}{I_3} = 80 \text{ V}$ .

c) Pentru  $P = 650 \text{ W}$ , din ecuația lui  $I_3$  se obțin soluțiile  $I_3 = 32,5 \text{ A}$  și  $I_3 = 7,5 \text{ A}$ . Rezultă apoi și  $I_2 = -15 \text{ A}$  și  $I_2 = 1,67 \text{ A}$ , astfel încît  $I_1 = 17,5 \text{ A}$ , respectiv,  $I_1 = 9,17 \text{ A}$ .

#### 4. OPTICĂ

56°. a) Conform formulei convergenței lentilelor

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

În cazul de față,  $R_1$  și  $R_2$  au aceleași sensuri, deci

$$n = \frac{R_1 R_2}{f(R_1 - R_2)} + 1 = \frac{0,9 \cdot 0,1}{0,15(0,9 - 0,1)} + 1 = 1,75.$$



b) Distanța pînă la imagine este dată de formula lentilelor subțiri:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}, \text{ unde } x_1 = -25 \text{ cm.}$$

Rezultă

$$x_2 = \frac{fx_1}{f + x_1} = \frac{0,15(-0,25)}{0,15 - 0,25} = 37,5 \text{ cm.}$$

Din relația  $\frac{i}{o} = \frac{x_2}{x_1}$  obținem  $i = t \cdot \frac{x_2}{x_1} = \frac{f}{\sqrt{3}} \cdot \frac{37,5}{(-25)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}f \approx -0,13 \text{ m}$ , semnul minus indicînd faptul că imaginea este răsturnată față de obiect.

c) Construcția imaginii în prezența oglinzii așezate la distanța de 37,5 cm de lentilă este arătată în figura F.C.76. Punctat este arătată imaginea  $A'B'$  care se formează în absența oglinzii. Din datele problemei se observă că unghiul  $\alpha$  este de  $30^\circ$ , deoarece  $\text{tg } \alpha = \frac{OC}{OF} = \frac{AB}{f} = \frac{f}{f\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

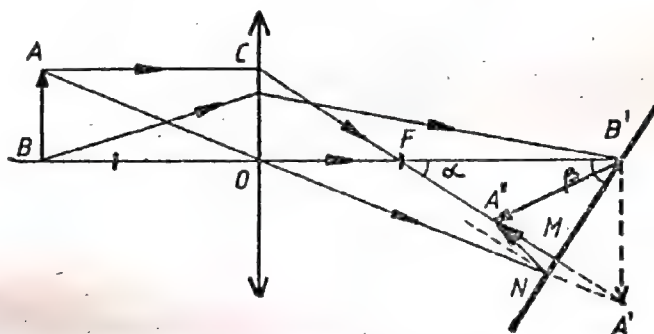


Fig. F.C.76

Inseamnă că raza  $ACF$  cade perpendicular pe oglindă, deci se va reflecta pe aceeași direcție. Raza  $AO$ , după reflexia pe oglindă, va intersecta raza  $ACF$  în punctul  $A''$ . Deci  $A''$  este imaginea punctului  $A$ . Toate razele care pornesc din  $B$  vor fi adunate de lentilă în punctul  $B'$ . Întrucît acest punct aparține suprafeței oglinzii, imaginea lui va coincide cu el. Astfel, imaginea obiectului  $AB$ , dată de sistemul lentilă plus oglindă, va fi segmentul  $B'A''$ . Deoarece  $\widehat{FA'B'} = 90^\circ - \alpha = 60^\circ$ , iar  $A''$  este simetric cu  $A'$  față de  $B'MN$ , rezultă că triunghiul  $A''B'A'$  este echilateral, deci imaginea  $A''B'$  formează un unghi de  $30^\circ$  cu axa optică și are lungimea  $A''B' = A'B' \approx 0,13 \text{ m}$ .

57°. a) Mărirea dată de un sistem format din două lentile subțiri este egală produsul măririlor celor două lentile.

$$\beta = \beta_1 \beta_2. \quad (1)$$

Notînd cu  $x_1$  distanța de la prima lentilă la obiect și cu  $x_2$  distanța de la lentilă la imaginea dată de ea, atunci mărirea dată de aceasta este  $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1}$ . Analog,

$\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'}$  și, cu notațiile din figura F.C.77,  $\beta = \frac{X_2}{X_1}$ . Ținînd seama de formula lentilelor subțiri putem scrie

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{X_2} - \frac{1}{X_1}, \quad \frac{1}{f_1} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}, \quad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1'}$$

de unde

$$X_2 = \frac{fX_1}{f + X_1}, \quad x_2 = \frac{f_1x_1}{f_1 + x_1}, \quad x_2' = \frac{f_2x_1'}{f_2 + x_1'}$$

Înlocuind aceste relații în expresiile măririlor, ecuația (1) devine

$$\frac{f}{f + X_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} \cdot \frac{f_2}{f_2 + x'_1} \quad (2)$$

Pe de altă parte, conform figurii F.C.77, există relațiile:

$$x_1 - X_1 = \varepsilon \quad \text{și} \quad x_2 + (-x'_1) = d.$$

Eliminând cu ajutorul lor mărimile  $X_1$  și  $x'_1$ , ecuația (2) capătă forma

$$\frac{f}{f + x_1 - \varepsilon} = \frac{f_1 f_2}{f_1 f_2 + x_1 f_2 + x_1 f_1 - f_1 d - x_1 d}$$

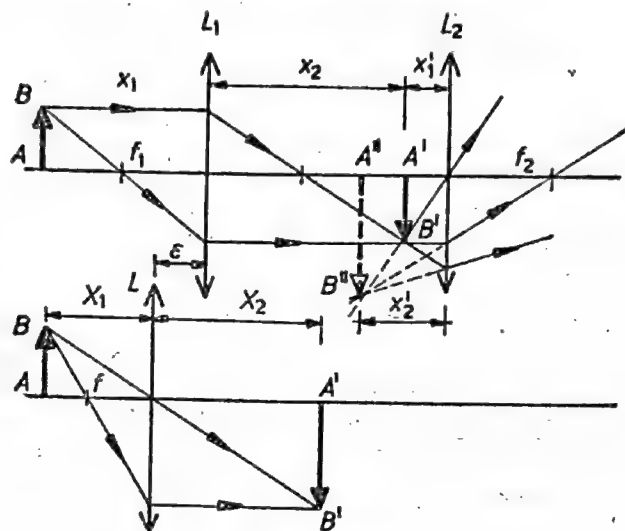


Fig. F.C.77

sau, inversînd cele două rapoarte,

$$1 + \frac{x_1}{f} - \frac{\varepsilon}{f} = 1 + \frac{x_1}{f_1} + \frac{x_1}{f_2} - \frac{d}{f_2} - \frac{x_1 d}{f_1 f_2} \quad (3)$$

Condiția impusă de problemă este ca ecuația (3), echivalentă cu (1), să fie satisfăcută oricare ar fi poziția obiectului față de sistem, deci, pentru orice  $x_1$ . Aceasta poate fi satisfăcută numai dacă coeficientul lui  $x_1$  din ecuația (3) este nul, adică

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2} = 0. \quad (4)$$

Din ecuația (4) rezultă distanța focală  $f$  a lentilei

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d}. \quad (5)$$

b) Cu condiția (4) ecuația (3) devine

$$\frac{\varepsilon}{f} = \frac{d}{f_2},$$

de unde, ținînd seama de (5), se obține

$$\varepsilon = \frac{f_1 d}{f_1 + f_2 - d}.$$

58°. a) Formula măririi  $\frac{I}{O} = -\frac{x_2}{x_1}$  conduce la  $-\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{4}$ , rezultînd  $x_1 = -4x_2$ . Imaginea fiind virtuală,  $x_2 = -0,12$  m și obiectul se află la  $x_1 = 0,48$  m de oglindă.

b) Din formula de conjugare,  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f}$ , se obține  $\frac{1}{f} = -\frac{1}{0,16}$ . Focarul fiind negativ, după convenție, oglinda este convexă.

c)  $f = -0,16$  m, deci oglinda are distanța focală de 0,16 m.

59°. a)  $f = \frac{R}{2} = \frac{0,75}{2} = 0,375$  m;  $x_1 = 1$  m.

Din expresia

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f}, \quad (1)$$

se deduce  $\frac{1}{x_2} = \frac{8}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1}{0,6}$ , adică  $x_2 = 0,6$  m (fig. F.C.78).

b) Cuvă cu apă joacă rolul unei lame cu fețe paralele și lumina ajunge la oglindă părind să vină de la un obiect apropiat cu (în cazul fasciculelor paraxiale)

$$e \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0,32 \left(1 - \frac{3}{4}\right) = 0,08 \text{ m}. \quad (2)$$

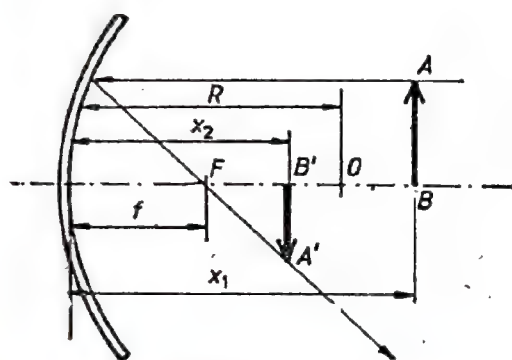


Fig. F.C.78

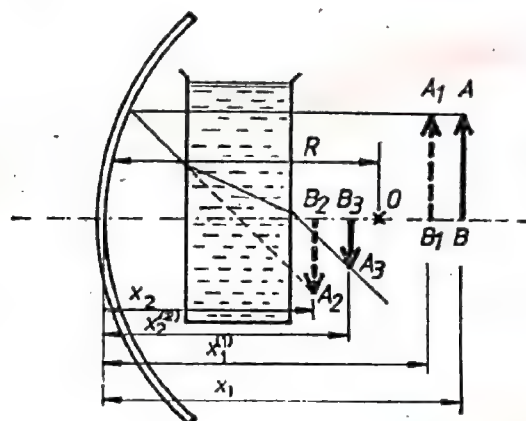


Fig. F.C.79

Noua valoare a lui  $x_1$  va fi  $x_1^{(1)} = x_1 - e \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - 0,08 = 0,92$  m (fig. F.C.79). Dacă razele reflectate pe oglindă n-ar mai trece prin cuvă, noul obiect (aparent)  $A_1B_1$  ar da o imagine  $A_2B_2$ , astfel încît

$$\frac{1}{0,92} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{0,375}, \quad (3)$$

rezultînd  $x_2 = \frac{69}{109} \approx 0,633$  m.

Însă trebuie să remarcăm că razele trec tot prin cuvă după reflexie. Deci ele întîlnesc din nou o lamă cu fețe paralele și nu se formează imaginea  $A_2B_2$ . Noua refracție care are loc va da o nouă imagine reală  $A_3B_3$ , deplasată cu aceeași cantitate — ca la prima refracție — față de  $A_2B_2$ . Deci

$$x_2^{(1)} = x_2 + e \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0,633 + 0,08 = 0,713 \text{ m} \quad (4)$$

față de oglindă.

Pentru a determina mărimea imaginii este suficient să se facă să intervină mărirea dată de oglindă, deoarece lama cu fețe paralele dă imagini egale cu mărimea ale obiectelor. Această mărime trebuie să se calculeze plecînd de la un obiect situat la  $x_1^{(1)} = 0,92$  m de oglindă, și nu la  $x_1 = 1$  m. Astfel,

$$\frac{I}{O} = -\frac{x_2}{x_1^{(1)}} = -\frac{0,633}{0,92} = -0,688, \quad (5)$$

semnul minus arătînd că imaginea este inversată.



60°. a) Se ştie că focarul unei lentile în funcţie de indicele de refracţie  $n$  şi razele de curbură ale feţelor, este dat de:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (1)$$

Lentila fiind echiconvexă,  $-R_1 = R_2$ . Imaginile obiectelor la infinit trebuie să se formeze pe retină, deci

$$\frac{1}{1,5} = (1,5 - 1) \frac{2}{R_1}, \quad (2)$$

obţinându-se  $R_1 = -R_2 = 1,5$  cm.

b) În acest caz, formula de conjugare, asociată cu formula precedentă, va da valoarea lui  $R_2$ . Deci, din relaţia

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{1,5} = (1,5 - 1) \left( \frac{1}{1,5} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (3)$$

rezultă

$$R_2 = -\frac{1,5}{1,15} = -1,304 \text{ cm.}$$

61°. a) Pentru maxime de interferenţă, diferenţa de drum optic trebuie să îndeplinească condiţia  $\delta = k\lambda$ . Diferenţa de drum optic dintre două raze din fasciculul incident (fig. F.C.80) sub un unghi  $\alpha$  (pe film) este  $\delta = d \sin \alpha$ .

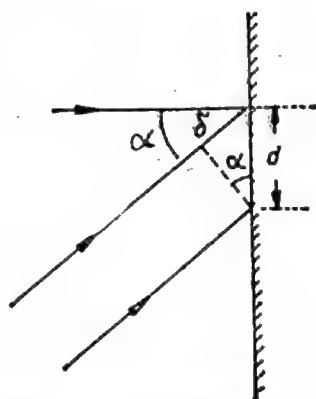


Fig. F.C.80

Rezultă că interfranţa  $i$  satisface relaţia:

$$\delta = d \sin \alpha = i \sin \alpha = \lambda, \text{ adică } i = \frac{\lambda}{\sin \alpha}. \quad (1)$$

$$b) \quad N = \frac{10^{-3} \text{ m}}{i} = 10^{-3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\lambda}. \quad (2)$$

$$\text{Pentru } \alpha = 90^\circ, \rightarrow N = N_{\max} = \frac{10^{-3}}{\lambda} = \frac{10^{-3}}{5 \cdot 10^{-7}} = 2000. \quad (3)$$

c) Perioada reţelei de difracţie este egală cu interfranţa,  $d = i$ .

Diferenţa de drum optic dintre două raze difractate sub unghiul  $\theta$  faţă de normală, de la marginile unor trăsături succesive este

$$\delta = d \sin \theta. \quad (4)$$

Condiţia pentru observarea maximumului de difracţie de ordinul  $k$  este:

$$d \sin \theta = k\lambda. \quad (5)$$

Rezultă

$$k = \frac{i \sin \theta}{\lambda_1} = \frac{\lambda \sin \theta}{\lambda_1 \sin \alpha}, \quad (6)$$

$$k_{\max} = \left[ \frac{\lambda}{\lambda_1 \sin \alpha} \right], \text{ unde } [x] \text{ este partea întreagă a numărului real } x; \quad (7)$$

$$\text{se obține } k_{\max} = \left[ \frac{0,65}{0,5 \cdot 0,195} \right] = 6.$$

Condiția de suprapunere a maximului de ordinul  $k$  pentru  $\lambda'$  cu maximul de ordinul  $k + 1$  pentru  $\lambda_1$ , este

$$k\lambda' = (k + 1)\lambda_1, \quad (8)$$

rezultind  $\lambda' = \left(1 + \frac{1}{k}\right)\lambda_1$ . Deci

$$\lambda_{\min} < \lambda' < \lambda_{\max}, \quad \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_1} < 1 + \frac{1}{k} < \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_1},$$

$$\frac{0,4}{0,5} = 0,8 < 1 + \frac{1}{k} < \frac{0,7}{0,5} = 1,4 \quad \text{și } k \leq k_{\max} = 6,$$

obținind  $k = 3$  (de unde  $\lambda' = \frac{4}{3}\lambda_1 \approx 0,667 \mu\text{m}$ ),  $k = 4$  ( $\lambda' = \frac{5}{4}\lambda_1 = 0,625 \mu\text{m}$ ),  $k = 5$  ( $\lambda' = \frac{6}{5}\lambda_1 = 0,6 \mu\text{m}$ ) și  $k = 6$  ( $\lambda' = \frac{7}{6}\lambda_1 \approx 0,583 \mu\text{m}$ ).

62. a) În condițiile specificate în enunț, unghiul de incidență al fascicului de lumină pe fața de intrare a prisme este egal cu unghiul  $\theta$  (fig. F.C.81) al prisme. Notăm prin  $r$  și  $r'$  unghiurile formate de fasciculul transmis în prismă cu normalele

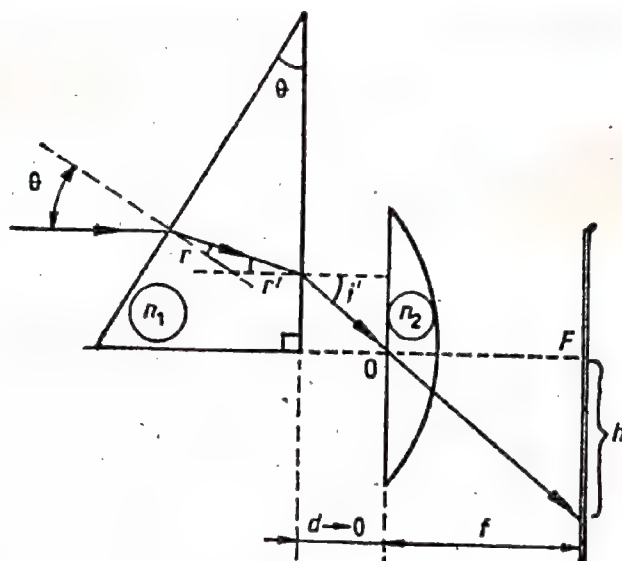


Fig. F.C.81

la fața de intrare, respectiv la fața de ieșire a prisme, iar prin  $i'$  unghiul format de normala la fața de ieșire a prisme cu fasciculul emergent din prismă în stratul de aer foarte subțire ( $d \rightarrow 0$ ) care separă prisma de lentilă (cele două componente optice sînt „alipite“, dar nu „sudate“!). În conformitate cu proprietățile lentilelor subțiri, imaginea fascicului paralel incident pe lentila (subțire)  $L$  sub unghiul  $i'$  se va găsi în punctul în care prelungirea razei incidente în centrul optic  $O$  al lentilei sub unghiul  $i'$  taie planul focal al lentilei (planul perpendicular pe axa optică a lentilei, trecînd prin focarul  $F$  al acesteia).

Pornind de la expresia cunoscută a convergenței unei lentile subțiri,  $\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ , și ținând seama că în condițiile problemei de față,  $n = n_2$ ,  $R_1 \rightarrow \infty$  (fața de intrare a lentilei este plană), iar  $R_2 = -R$ , găsim că:

$$f = \frac{R}{n_2 - 1}.$$

În conformitate cu legea Snellius-Descartes a refracției,

$$\frac{\sin i'}{\sin r'} = \frac{n_1}{n_{\text{aer}}}, \text{ iar } \frac{\sin \theta}{\sin r} = \frac{n_1}{n_{\text{aer}}},$$

unghiul  $r'$  fiind determinat în funcție de unghiul  $r$  prin relația:  $r' = \theta - r$  (v. fig. F.C. 81).

Ținând seamă de constatările de mai sus, distanța  $h$  de la imaginea fascicului considerat pînă la axa optică a lentilei este  $h = f \operatorname{tg} i' \approx f \sin i'$  (ținând seamă de aproximația unghiurilor mici).

Înlocuind în ultima relație expresiile obținute pentru  $f$  și  $i'$ , găsim că

$$\begin{aligned} h &\approx \frac{R}{n_2 - 1} \cdot \frac{n_1}{n_{\text{aer}}} \sin(\theta - r) = \frac{R}{n_2 - 1} \cdot \frac{n_1}{n_{\text{aer}}} [\sin \theta \sqrt{1 - \sin^2 r} - \cos \theta \cdot \sin r] = \\ &= \frac{R}{n_2 - 1} \cdot \frac{n_1}{n_{\text{aer}}} \left[ \sin \theta \sqrt{1 - \frac{n_{\text{aer}}^2}{n_1^2} \sin^2 \theta} - \cos \theta \cdot \frac{n_{\text{aer}}}{n_1} \cdot \sin \theta \right] = \\ &= \frac{R \sin \theta}{n_2 - 1} \left[ \sqrt{\frac{n_1^2}{n_{\text{aer}}^2} - \sin^2 \theta} - \cos \theta \right]. \end{aligned}$$

Efectuînd calculele, se obțin valorile  $f = 12,5 \text{ cm}$  și  $h \approx 1,6 \text{ cm}$  (se ține seamă că  $n_{\text{aer}} \approx 1$ ).

b) Fasciculul luminos îngust emergent din prismă atinge lentila numai dacă distanța  $d$  de la prismă la lentilă, diametrul  $D$  al lentilei și coordonatele  $x_{V_1}$ ,  $x_{V_2}$  ale vîrfurilor prisme îndeplinesc condiția (fig. F.C.82):

$$x_{V_1} - d \cdot \operatorname{tg} i' \text{ sau } (\text{și}) x_{V_2} - d \cdot \operatorname{tg} i' \in \left( -\frac{D}{2}, \frac{D}{2} \right).$$

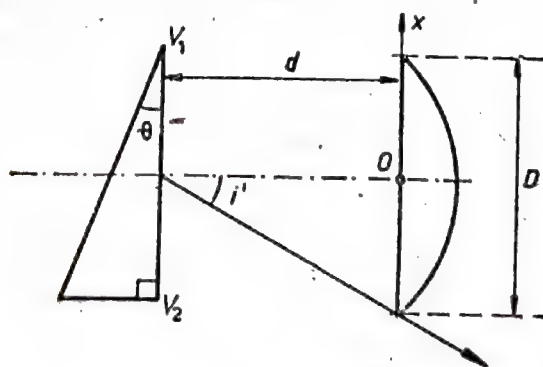


Fig. F.C.82

În acest caz, distanța  $h$  de la imagine la axa optică a lentilei va fi dată de expresia:

$h = f \cdot \operatorname{tg} i' \approx f \cdot \sin i'$ , imaginea rămînînd în planul focal al lentilei considerate. Pentru  $x_{V_{1,2}} - d \cdot \operatorname{tg} i' \notin \left( -\frac{D}{2}, \frac{D}{2} \right)$ , sistemul considerat dă un fascicul emergent paralel și îngust, fără a mai da o imagine.



În cazul în care  $n_1 \sin r' > n_{\text{aer}}$ , pe suprafața a doua a prisme se produce fenomenul de reflexie totală, ceea ce face ca în acest caz din prismă să nu iasă un fascicul emergent spre lentilă.

$$63^\circ. a) \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{1}{0,12} - \frac{1}{0,72} = -\frac{1}{0,18}, \text{ deci } p' = -0,18 \text{ m (fig. F.C.83);}$$

$$\frac{S_1 S_2}{a} = -\frac{p'}{f}, \text{ deci } S_1 S_2 = -\frac{p'}{f} a = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m;}$$

$$\frac{r - a/2}{d_0} = \frac{S_1 S_2}{d_0 - p'} = \frac{r - a/2 - S_1 S_2}{p'}, \text{ deci}$$

$$d_0 = p' \frac{r - a/2}{r - a/2 - S_1 S_2} = 0,36 \text{ m.}$$

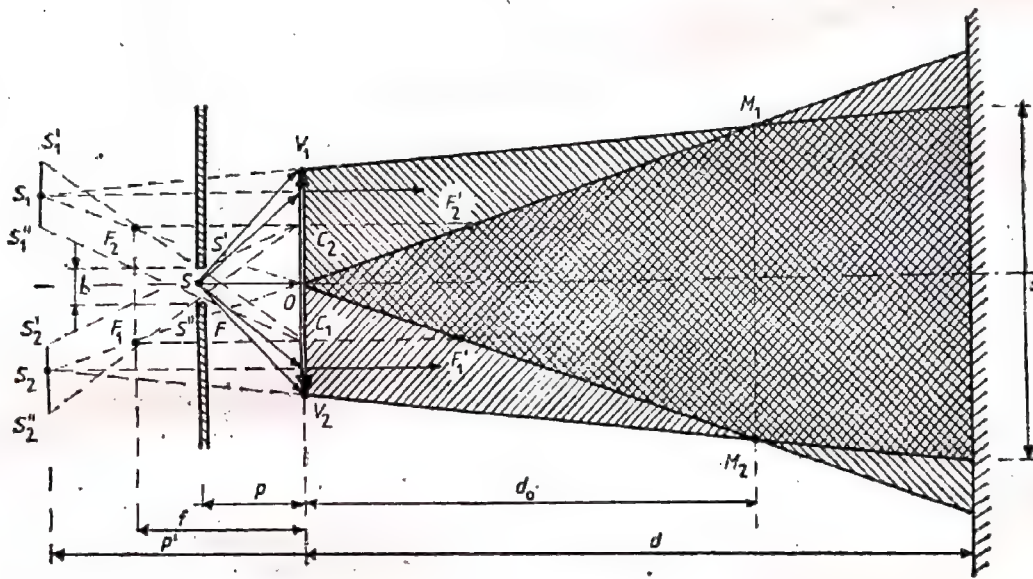


Fig. F.C.83

Deoarece  $d = 0,82 \text{ m} > d_0 = 0,36 \text{ m}$ , rezultă că ecranul se găsește în zona de interferență delimitată de direcțiile  $S_1 M_1$  și  $S_2 M_2$ . Lărgimea  $s$  a zonei de interferență pe ecran va fi

$$s = S_1 S_2 - \frac{d - p'}{p'} (2r - a - S_1 S_2) \approx 1,71 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

Deoarece interfranja

$$i(\lambda) = \frac{\lambda D}{S_1 S_2} = \frac{\lambda(d - p')}{S_1 S_2} = 10^{-4} \text{ m,}$$

rezultă că numărul franjelor observabile este

$$N = 1 + 2 \left[ \frac{1,71 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-4}} \right] = 17 \text{ franje.}$$

$$b) k \left[ \frac{(\lambda + \delta\lambda) D}{S_1 S_2} - \frac{\lambda D}{S_1 S_2} \right] \leq \frac{1}{2} i(\lambda) = \frac{\lambda D}{2 S_1 S_2}, \text{ deci } k \leq \frac{\lambda}{2 \delta\lambda} = 3.$$

Rezultă că numărul franjelor observabile va fi

$$N_{\text{obs.}} = 1 + 2k_{\text{max}} = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \text{ franje.}$$

c) Imaginile  $S'_1 S_1 S''_1$ ,  $S'_2 S_2 S''_2$  ale fantei prin cele două jumătăți ale lentilei au dimensiunea  $i = -b \frac{p'}{p} = \frac{5}{2} b$  și sint distanțate între ele cu  $S_1 S_2 = 1,5 \text{ mm}$ .

Luînd în considerație diferențele de drum suplimentare  $S'V_2 - V_2 S'_2 - S'V_1 + V_1 S'_1$ ,  $S''V_2 - V_2 S''_2 - S''V_1 + V_1 S''_1$  etc., intervenind în expresiile diferențelor de drum ale radiațiilor care interferă pe ecran venind prin  $S'_1$  și  $S'_2$ , respectiv  $S''_1$  și  $S''_2$  etc., rezultă că pe ecran se va obține un sistem de figuri de interferență elementare deplasate între ele cu  $\frac{bd}{p}$  (fig. F.C.84). Rezultă că pentru ca franjele să poată fi observate:

$$\frac{bd}{p} \leq \frac{1}{2} i(\lambda), \text{ deci } b_{\max} = \frac{p \cdot i(\lambda)}{2d} \approx 4,4 \mu\text{m}.$$

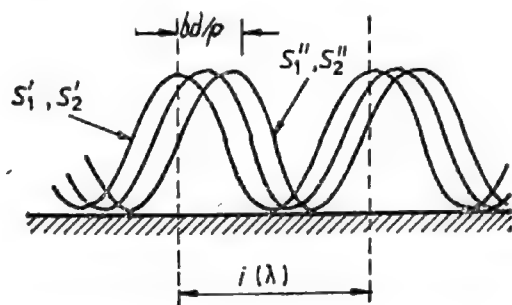


Fig. F.C.84

64°. a) Datorită simetriei dispozitivului față de axa „orizontală” trecînd prin sursă, dispozitivul este de tipul Young, interfranja observată fiind dată de expresia  $i = \frac{\lambda D}{2l}$ . Deoarece  $D$  crește cu  $b$ , singura posibilitate ca valoarea interfranjei să rămînă constantă, indiferent de valoarea distanței  $b$ , este ca  $\frac{D}{l} = \text{constant}$ , în condițiile în care  $D$  este mult mai mare decît dimensiunile instalației. Pentru ca sursele virtuale să fie situate la infinit este necesar ca fasciculus incident pe bi-prismă să fie paralel (fig. F.C.85). Rezultă că  $f = p = 0,2 \text{ m}$ .

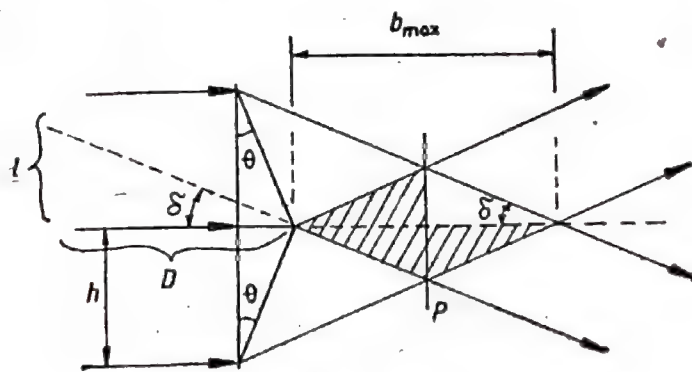


Fig. F.C.85

b) Din figura F.C. 86 reiese că  $i_1 = \alpha = \arctg \frac{y}{q} < \arctg \frac{h}{q} \ll 1 \text{ rad}$ , deci

$$r_1 = \arcsin \left( \frac{\sin i_1}{n} \right) \approx \frac{\alpha}{n}, \text{ iar}$$

$$r_2 = 0 - r_1 = 0 - \frac{\alpha}{n} (\ll 1 \text{ rad}) \text{ și } i_2 = \arcsin (n \sin r_2) \approx n\theta - \alpha.$$

Rezultă că unghiul de deviație (față de direcția de incidență) al fasciculului emergent dintr-una din prisme este  $\delta = i_1 + i_2 - \theta \approx (n - 1) \theta$ . Pe de altă parte, din figura F.C.85, rezultă că  $\frac{l}{D} = \tan \delta \approx (n - 1) \theta$ , deci interfranja are expresia  $i = \frac{\lambda D}{2l} \approx \frac{\lambda}{2(n - 1) \theta}$  ( $2l$  este distanța dintre sursele virtuale, de la care par a proveni fasciculele emergente din cele două prisme). În final  $\theta \approx \frac{\lambda}{2i(n - 1)} = 10^{-3}$  rad.

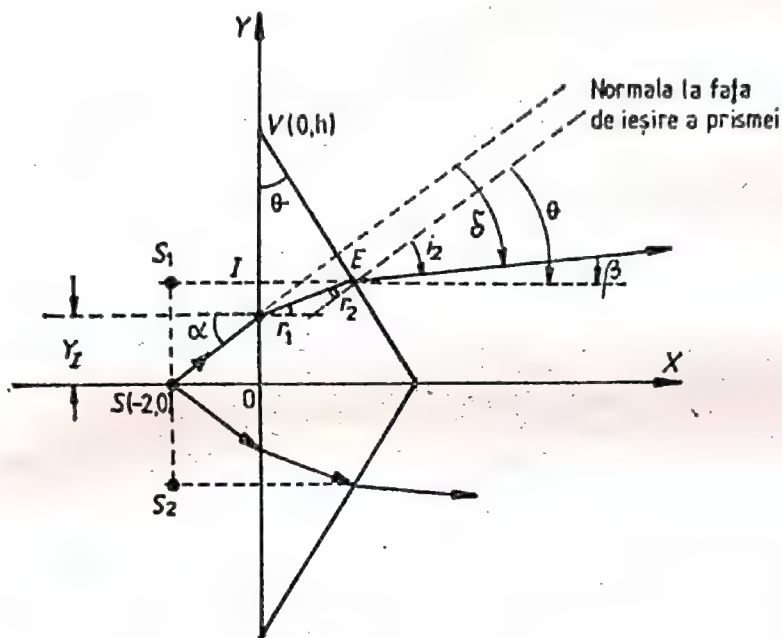


Fig. F.C.86

c) Din figura F.C.85 reiese de asemenea, că  $2h \approx 2b_{\max} \tan \delta \approx 2b_{\max} \theta(n - 1)$ , unde  $b_{\max}$  ( $= 11,5$  m) este lungimea maximă a zonei de interferență (hașurată în figura F.C. 85). Efectuând calculele, se obține  $2h = 1,15$  cm.

d) De fiecare parte a axei de simetrie avem — în planul  $P$  în care zona de interferență are o lățime maximă (fig. F.C.85) — cite  $\frac{h}{2} \cdot \frac{1}{i} = 5,75$  interfranje.

Deoarece franjele întunecate se găsesc la cotele  $y = -5,5i; -4,5i; \dots +5,5i$ , rezultă că numărul maxim al franjelor întunecate care vor putea fi observate este  $N_{\max} = 12$ . Poziția ecranului pentru care numărul franjelor care pot fi observate este maxim, este dată de distanța (fig. F.C. 85):

$$b = \frac{b_{\max}}{2} = 5,75 \text{ m}$$

(care poate fi eventual variată cu  $\pm 0,25$  m, ținând seamă că semilățimea maximă a zonei de interferență este egală cu 5,75 interfranje, în timp ce franjele întunecate extreme se situează la 5,5 interfranje de axa de simetrie a dispozitivului).

e) Coordonatele punctului  $E$  de emergență a razelor din prisma de sus (v. fig. F.C.86) rezultă din ecuațiile:

$$Y - q/\alpha = Y - Y_I = \tan r_1 \cdot X \approx \frac{\alpha}{n} \cdot X \text{ (raza transmisă în prisma de sus) și}$$

$$Y - h = -\cotg \theta \cdot X \approx -\frac{X}{\theta} \text{ (muchia prisme de sus).}$$

$$\text{Se obține: } X_E = \frac{\theta n(h - q\alpha)}{n + \theta\alpha}, \quad Y_E \approx \frac{(h\theta + nq)}{n + \theta\alpha} \alpha.$$

Cum  $n \gg \theta \alpha$ , iar  $nq \gg h\theta$ , rezultă că  $X_E \approx \theta(h - q\alpha)$ ,  $Y_E \approx q\alpha$ .



Ecuatia fascicului emergent este:

$$Y - Y_E = Y - q\alpha = \operatorname{tg}\beta(X - X_E) \approx (\theta - i_2)(X - X_E) \approx [\alpha - (n - 1)\theta](X - X_E)$$

Pentru distanțe uzuale în dispozitiv:  $X \gg X_E = \theta(h - q\alpha)$ , avem:

$Y - q(n - 1)\theta = [\alpha - (n - 1)\theta](X + q)$ , care reprezintă ecuația unui fascicul de drepte care trec prin sursa virtuală  $S_1$  de coordonate  $X_{S_1} = -q$ ,  $Y_{S_1} = q(n - 1)\theta$ .

Repetind raționamentele de mai sus pentru fasciculele emergente din prisma de jos, rezultă că acestea par a proveni din sursă virtuală  $S_2$  de coordonate  $X_{S_2} = -q$ ,  $Y_{S_2} = -q(n - 1)\theta$ . Efectuind calculele, se obține:

$$X_{S_1} = X_{S_2} = -p - a = -0,5 \text{ m},$$

$$Y_{S_1} = -Y_{S_2} = (p + a)(n - 1)\theta = 0,25 \text{ mm}.$$

65°. a) Diferența de drum geometric între fasciculele difractat sub unghiul  $\theta$ , respectiv incident sub unghiul  $\theta_0$  față de planul rețelei (fig. F.C. 87) este:  $\Delta d = AA' - B'B = d(\cos \theta - \cos \theta_0)$ . Pentru maximum de ordinul  $k$ :  $\Delta d = k\lambda$ , deci unghiul  $\theta$  corespunzând maximumului de difracție de ordinul  $k$  este dat de relația:  $\cos \theta = \cos \theta_0 + \frac{k\lambda}{d} = \cos \theta_0 + nk\lambda$ . Efectuind calculele, obținem:

$$\cos \theta \approx 0,7071, \text{ deci } \theta \approx 45^\circ.$$

b) Impunând condiția de suprapunere a maximumului de ordinul  $k$  al componente  $\lambda + G$  cu maximum de ordinul  $(k + 1)$  al componente  $\lambda$ , obținem:  $k(\lambda + G) = (k + 1)\lambda$ , de unde:

$$G = \frac{\lambda}{k} \approx 51,1 \text{ nm}.$$

c) Reprezentînd fazorial oscilațiile intensităților cîmpurilor electrice  $E_1, E_2, \dots, E_N$  ale fasciculelor difractate de porțiunile transparente succesive ale rețelei, se constată că primul minim nă care urmează maximumului de ordinul  $k$  va corespunde (fig. F.C.88) unui defazaj suplimentar între oscilațiile cîmpului electric în 2 fascicule

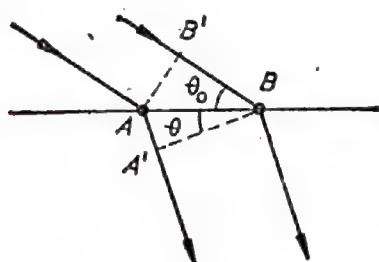


Fig. F.C.87

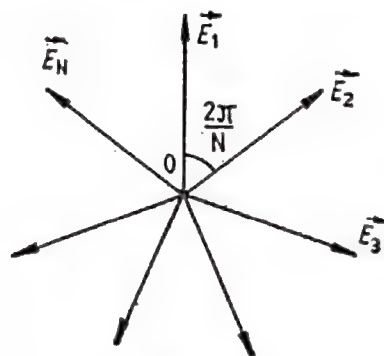


Fig. F.C.88

successive egal cu  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$  radiani. Deoarece:  $\Delta\varphi = \omega\Delta t = \omega \cdot \frac{\Delta\delta}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\delta$ , diferența suplimentară de drum optic va fi:  $\Delta\delta = \frac{\lambda}{2\pi} \Delta\varphi = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{N} = \frac{\lambda}{N}$ , deci diferența de drum optic pentru primul minim nă care urmează maximumului principal de ordinul  $k$  este:  $\delta = k\lambda + \frac{\lambda}{N}$ .

Punind condiția de suprapunere cu maximum de ordinul  $k$  al componentei  $\lambda + \delta\lambda$ , obținem:

$$\delta = k\lambda + \frac{\lambda}{N} = k(\lambda + \delta\lambda),$$

de unde:

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{kN} = \frac{\lambda}{knL} \cong 0,511 \cdot 10^{-10} \text{ m } (= 0,511 \text{ Å}).$$

$$66^\circ. \text{ a) } C_1 = \frac{1}{f_1} = (n_1 - 1) \left[ \frac{1}{\infty} - \frac{1}{R} \right];$$

deci

$$f_1 = -\frac{R}{n_1 - 1},$$

$$C_2 = \frac{1}{f_2} = (n_2 - 1) \left[ \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right].$$

Astfel

$$f_2 = \frac{R R'}{(n_2 - 1)(R' + R)}.$$

b)

$$C = C_1 + C_2,$$

rezultind

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2},$$

$$\frac{1}{F} = \frac{R'(n_2 - n_1) + R(n_2 - 1)}{R R'}.$$

$$F' = \frac{1}{\frac{n_2 - n_1}{R} + \frac{n_2 - 1}{R'}}.$$

$$\text{c) } F(\text{galben}) = F(\text{albastru}) = 12 \text{ cm},$$

$$\frac{1}{F} = \frac{n_2 - n_1}{R} + \frac{n_2 - 1}{R'}.$$

$$\text{În lumină galbenă: } \frac{1}{12} = -\frac{0,105}{R} + \frac{0,512}{R'}.$$

$$\text{În lumină albastră: } \frac{1}{12} = -\frac{0,111}{R} + \frac{0,518}{R'}.$$

Scăzind membru cu membru aceste ecuații, rezultă

$$R = R',$$

astfel încît  $R = R' = 4,88 \text{ cm}$ .

67°. a) Distanța focală a lentilei  $C_1$  este:

$$f_1 = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ m } = 20 \text{ cm}.$$

Imaginea punctului  $A$  în raport cu lentila  $C_1$  este poziționată în punctul  $A_1$ , astfel încît:

$$O_1 A_1 = p'_1 = \frac{p_1 f_1}{p_1 - f_1}.$$

Numeric:  $p'_1 = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ .

În raport cu lentila  $C_2$  imaginea  $A_1$  joacă rol de obiect și este situat la distanța  $p_2 = 30 \text{ cm}$  de  $O_2$ .

Distanța focală a lentilei  $C_2$  este:

$$f_2 = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ m} = 25 \text{ cm}.$$

Imaginea finală a lui  $A$  este poziționată în punctul  $A_2$  astfel încît:

$$O_2A_2 = p'_2 = \frac{p_2 f_2}{p_2 - f_2} = 1,5 \text{ m} = 150 \text{ cm}.$$

b) În apă, datorită refracției, imaginea  $A_2$  se va situa mai departe (în  $A_3$ ), astfel încît deplasarea  $A_2A_3$  se calculează direct,

$$A_2A_3 = d_2 = d_1 \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n} (d_2 + O_2A_2 - O_2B) = \frac{n-1}{n} (d_2 + 0,75).$$

Din această ecuație rezultă:

$$d_2 = 0,75(n-1) = 0,25 \text{ m} = 25 \text{ cm}.$$

c) Fie  $p_3$  și  $p'_3$  distanțele obiect lentilă și lentilă imagine care satisfac condiția impusă

$$A_1A_3 = p_3 + p'_3 = p_2 + p'_2 + d_2 = 30 \text{ cm} + 150 \text{ cm} + 25 \text{ cm} = 205 \text{ cm},$$

deci

$$p'_3 = 205 - p_3.$$

Din ecuația:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p'_3} \text{ sau } \frac{1}{p_3} + \frac{1}{205 - p_3} = \frac{1}{25},$$

rezultă ecuația de gradul doi:

$$p_3^2 - 205 p_3 + 5125 = 0,$$

care admite soluțiile:

$$p_{3,1} \approx 29,15 \text{ cm} \text{ și } p_{3,2} \approx 175,85 \text{ cm}.$$

Pentru a aduce lentila  $C_2$  în cea mai apropiată poziție ( $p_2 - p_{3,1} \ll p_{3,2} - p_2$ ), care satisface cerința specificată, lentila trebuie apropiată de  $A_1$  cu 0,85 cm.

68°. a) Diferența de drum optic între razele  $1'$  și  $1''$  care interferează în planul focal al lentilei are expresia:

$$\delta = 2nd \cos r + \frac{\lambda}{2}.$$

Termenul  $\lambda/2$  se datorește reflexiei pe suprafața de sus aer-sticlă care se face cu un salt de fază de  $\pi$ .

Diferența de drum optic pentru razele care interferează în centrul planului focal al lentilei este

$$\delta_0 = 2nd + \frac{\lambda}{2}.$$

Diferența de drum corespunzătoare inelului de ordinul  $k$  este:

$$\delta_k = \delta_0 - k\lambda = 2nd + \frac{\lambda}{2} - k\lambda.$$

Numeric:

$$\delta_k = 6 \cdot 10^8 \text{ Å} - 1,17 \cdot 10^5 \text{ Å}.$$



b) Dacă  $\delta_0 = 2nd + \frac{\lambda}{2}$  este un număr par de  $\frac{\lambda}{2}$ , în centrul figurii de interferență se obține maxim, iar dacă este un număr impar de  $\frac{\lambda}{2}$  se obține minim.

Numeric:

$$\delta_0 = 2 \cdot 1,5 \cdot 2 \cdot 10^8 + \frac{6000}{2} = \frac{\lambda}{2} (2 \cdot 10^5 + 1).$$

Intrucât  $\delta$  este un număr impar de  $\frac{\lambda}{2}$ , centrul figurii de interferență va fi întunecat (minim).

c) Fie  $R$  raza inelului:

$R = f \operatorname{tg} i \cong f \sin i \simeq f \cdot i$  (pentru unghiuri de incidență mici).

$$2nd \cos r + \frac{\lambda}{2} = 2nd + \frac{\lambda}{2} - k\lambda,$$

$$k\lambda = 2nd(1 - \cos r) = 2nd \cdot 2 \sin^2 \frac{r}{2} \simeq ndr^2,$$

deci

$$r = \sqrt{\frac{k\lambda}{nd}},$$

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} \simeq \frac{i}{r},$$

$$i = \sqrt{\frac{nk\lambda}{d}},$$

$$R = f \sqrt{\frac{nk\lambda}{d}} \simeq 0,212 \text{ cm.}$$

## 5. FIZICĂ ATOMICĂ ȘI NUCLEARĂ

$$69^\circ. \text{ a) } L_e = h \frac{c}{\lambda} \cong \frac{6,625 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{3,2 \cdot 10^{-7}} \cong 6,21 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3,88 \text{ eV.}$$

$$\text{b) } |V_0| = \frac{1}{e} \left( h \frac{c}{\lambda} - L_e \right) \cong$$

$$\cong \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} \cdot \left( 6,625 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{2,4 \cdot 10^{-7}} - 6,21 \cdot 10^{-19} \right) \cong 1,3 \text{ V.}$$

$$\text{c) } \frac{1}{2} mv^2 = e |V_0| = E_c,$$

$$v = \sqrt{\frac{2e |V_0|}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,3}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \cong 6,8 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}} = \frac{h}{\sqrt{2me |V_0|}} = \frac{6,625 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,3}} \cong 10,8 \text{ Å.}$$

70°. Procesul care are loc este reprezentat în figura F.C.89.

$$a) \quad \lambda_f - \lambda_0 = \Lambda(1 - \cos \theta), \quad (1)$$

$$\lambda_0 - \lambda_i = -\Lambda(1 - \cos \theta), \quad (2)$$

$$\text{unde } \Lambda = \frac{h}{m_0 c} = \frac{6,625 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} \simeq 2,42 \cdot 10^{-12} \text{ m.}$$

Se observă că:

$$\lambda_i = \lambda_f = 1,25 \cdot 10^{-10} \text{ m,}$$

$$\lambda_0 = 1,25 \cdot 10^{-10} - 2,42 \cdot 10^{-12}(1 - \cos 60^\circ) = 1,2379 \cdot 10^{-10} \text{ m,}$$

$$E_{c_e} = h\nu_0 - h\nu_i = hc \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_i} \right) =$$

$$= 6,625 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{1,21 \cdot 10^{-12}}{1,2379 \cdot 1,25 \cdot 10^{-20}} = 1,554 \cdot 10^{-17} \text{ J,}$$

$$\lambda_e = \frac{h}{p_e} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_{c_e}}} = \frac{6,625 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,554 \cdot 10^{-17}}} \simeq 1,24573 \cdot 10^{-10} \text{ m,}$$

$$\lambda_{er} = \frac{hc}{\sqrt{E_{c_e}(E_{c_e} + 2m_0 c^2)}} =$$

$$= \frac{6,625 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{1,554 \cdot 10^{-17}(1,554 \cdot 10^{-17} + 2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16})}} \simeq 1,24567 \cdot 10^{-10} \text{ m.}$$

$$b) E_{c_1} = E_{c_2} = h\nu_0 - h\nu_f = h\nu_0 - h\nu_i = 1,554 \cdot 10^{-17} \text{ J} \simeq 97,1 \text{ eV,}$$

$$\sin \varphi = -\frac{1}{mv} \frac{h\nu_f}{c} \sin \theta \simeq -\frac{c}{2h\nu_0 \sin \frac{\theta}{2}} \frac{h\nu_f}{c} 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \simeq -\cos \frac{\theta}{2},$$

în aproximația  $\nu_f \simeq \nu_0$ . Deci:

$$\sin \varphi = -\cos \frac{60}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = -60^\circ.$$

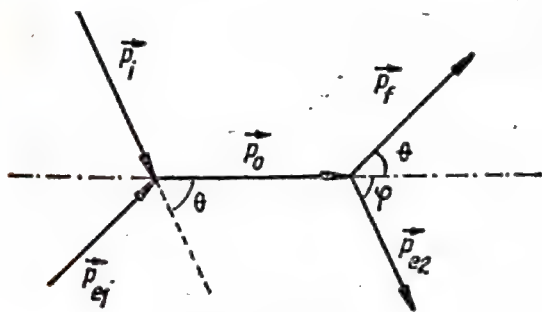


Fig. F.C.89

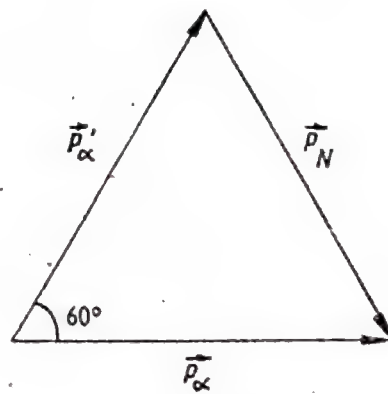


Fig. F.C.90

71°. În cazul bombardamentului cu electroni, din energia electronilor de 6 eV, atomul absoarbe 4,86 eV (energia nivelului mai jos, însă cel mai apropiat de 6 eV), energia electronilor nefiind cuantificată.

În cazul bombardamentului cu fotoni, atomul nu absoarbe energie de la aceștia, deoarece  $E_n - E_1 = \hbar\omega \neq 6 \text{ eV}$ .

$$72^\circ. a) \quad \vec{p}_{\text{inițial}} = \vec{p}_{\text{final}},$$

$$\vec{p}_\alpha = \vec{p}'_\alpha + \vec{p}_N \text{ (v. figura F.C.90).}$$

Deoarece  $|\vec{v}_\alpha| = |\vec{v}'_\alpha|$ , avem  $|\vec{p}'_\alpha| = |\vec{p}_\alpha|$ .

În figura F.C.90 se observă că avem un triunghi isoscel cu unghiul de la vîrf de  $60^\circ$ , adică, avem un triunghi echilateral. Rezultă:

$$p_N = p_\alpha = m_\alpha \cdot v_\alpha = 6,62 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 6,62 \cdot 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b)  $p_N = m_N v_N,$

$$v_N = \frac{p_N}{m_N} = \frac{6,62 \cdot 10^{-20}}{3,3 \cdot 10^{-25}} \cong 2 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

c)  $E_{cN} = \frac{1}{2} m_N v_N^2 = \frac{1}{2} \cdot 3,3 \cdot 10^{-25} \cdot (2 \cdot 10^5)^2 = 6,6 \cdot 10^{-15} \text{ J}.$

*Observație*

$$\frac{E_{cN}}{E_{c\alpha}} = \frac{\frac{1}{2} m_N v_N^2}{\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2} = \frac{3,3 \cdot 10^{-25}}{6,62 \cdot 10^{-27}} \left( \frac{2 \cdot 10^5}{10^7} \right)^2 = 0,02.$$

Rezultă că presupunerea inițială a fost justificată.

73°. a) Energia particulelor alfa este energie cinetică. Schema experienței este dată în figura F.C.91.

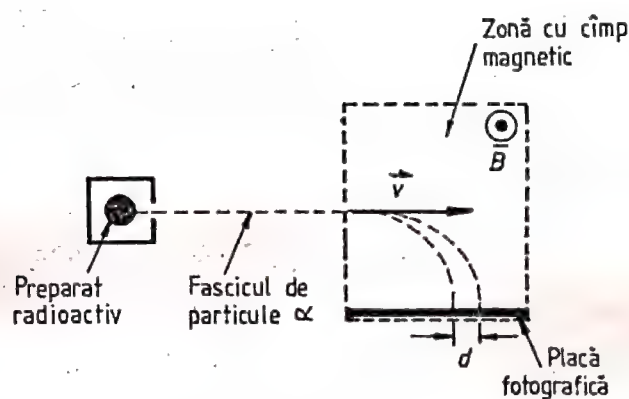


Fig. F.C.91

Întrucît nu avem nici o indicație despre mărimea vitezei va trebui să facem o tratare relativistă. Energia cinetică  $E_c$  se scrie ca diferența dintre energia relativistă totală,  $mc^2$  și energia relativistă de repaus,  $m_0c^2$ :  $E_c = mc^2 - m_0c^2$ . Întrucît

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ rezultă } \frac{E_c}{m_0c^2} = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right),$$

de unde

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0c^2}{E_c + m_0c^2}.$$

Ridicînd la pătrat și separînd viteza, se obține

$$v = c \sqrt{1 - \left( \frac{m_0c^2}{E_c + m_0c^2} \right)^2}.$$



Pentru cele două tipuri de particule alfa vom avea:

$$v_1 = c \sqrt{1 - \left( \frac{m_0 c^2}{E_{c_1} + m_0 c^2} \right)^2} = 3 \cdot 10^8 \sqrt{1 - \left( \frac{4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{6,25 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} + 4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}} \right)^2} =$$

$$= 0,0576 \cdot 3 \cdot 10^8 = 1,728 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$v_2 = c \sqrt{1 - \left( \frac{m_0 c^2}{E_{c_2} + m_0 c^2} \right)^2} = 10^8 \sqrt{1 - \left( \frac{4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} + 4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}} \right)^2} =$$

$$= 0,069 \cdot 10^8 = 2,07 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Se observă că în ambele cazuri  $v$  este mai mic decât  $c/10$ , astfel încât aproximația nerelativistă ar fi fost suficient de bună. Într-adevăr, scriind  $\frac{m_0 v^2}{2} = E_c$ , rezultă

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E_{c_1}}{m_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,25 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13}}{4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}}} = 1,73 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

deci, în concordanță foarte bună cu valoarea obținută prin tratarea relativistă.

b) Razele traiectoriilor se obțin din condiția de echilibru între forța Lorentz și forța centrifugă de inerție:

$$qvB = \frac{m_0 v^2}{r} \text{ sau } r = \frac{m_0 v}{qB}.$$

În cele două cazuri avem:

$$r_1 = \frac{m_0 v_1}{qB} = \frac{4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 1,73 \cdot 10^7}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1} = 0,361 \text{ m},$$

$$r_2 = \frac{m_0 v_2}{qB} = \frac{4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 2,07 \cdot 10^7}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1} = 0,432 \text{ m}.$$

c) Ambele particule vor parcurge aproximativ un sfert de cerc de la intrarea în zona cu cîmp magnetic pînă la placa fotografică, așa cum se vede din figura F.C. 91, deci, distanța pe placă între punctele de incidență ale celor două tipuri de particule alfa va fi

$$d = r_2 - r_1 = 0,432 - 0,361 = 0,071 \text{ m} = 7,1 \text{ cm}.$$

74°. În procesul de interacțiune se conservă energia și impulsul. Conservarea energiei se scrie

$$E_\alpha + Q = E_c + E_n. \quad (1)$$

Ecuția conservării impulsului se obține aplicînd teorema cosinusului în triunghiul format de impulsurile celor 3 particule  $\vec{p}_\alpha$ ,  $\vec{p}_c$  și  $\vec{p}_n$  (figura F.C.92):

$$p_c^2 = p_\alpha^2 + p_n^2 - 2 p_\alpha p_n \cos \theta. \quad (2)$$

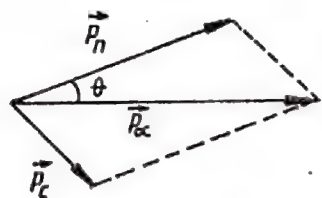


Fig. F.C.92

Ținînd seama de relația dintre energia cinetică a unei particule și impulsul ei avem:

$$p_c^2 = 2E_c m_c, \quad p_\alpha^2 = 2E_\alpha m_\alpha, \quad p_n^2 = 2E_n m_n. \quad (3)$$

Introducind în ecuația (2) și eliminând  $E_c$  cu ajutorul ecuației (1) se obține:

$$E_n(m_c + m_n) - 2\sqrt{m_n m_\alpha E_\alpha E_n} \cos \theta - E_\alpha(m_c - m_\alpha) - Qm_c = 0. \quad (4)$$

Introducind notația  $E_n = \varepsilon^2$  se observă că ecuația (4) este de gradul doi deci soluția ei are forma:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{m_n m_\alpha E_\alpha} \cos \theta + \sqrt{m_n m_\alpha E_\alpha \cos^2 \theta + E_\alpha(m_c - m_\alpha)(m_c + m_n) + Qm_c(m_n + m_c)}}{m_n + m_c}. \quad (5)$$

Pătratul acestei expresii dă energia cinetică a neutronului ca funcție de unghiul  $\theta$ .

Pentru  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \theta = 0$ , deci

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{E_\alpha(m_c - m_\alpha)(m_c + m_n) + Qm_c(m_n + m_c)}}{m_n + m_c},$$

astfel încît

$$E_n = \varepsilon^2 = \frac{m_c}{m_c + m_n} \left( Q + \frac{m_c - m_\alpha}{m_c} E_\alpha \right) = 8,46 \text{ MeV.}$$

75°. a) Lungimile de undă ale radiațiilor rezultate în urma tranzițiilor între stările atomilor de hidrogen sînt date de expresia:  $\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)$ , unde

$R = \frac{m_e e^4}{8ch^3 \varepsilon_0^2}$  este constanta lui Rydberg, a cărei valoare ( $\approx 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ ) poate

fi calculată în baza datelor enunțului. Deoarece  $n$  și  $k$  sînt numere naturale, se constată ușor că radiația de lungime de undă  $\lambda_0 = 4861 \text{ \AA}$  nu aparține nici seriei Lyman,

$n = 1$  (pentru care lungimea de undă cea mai mare — corespunzînd valorii

$k = 2$  — este:  $\lambda_{L, \max} = \frac{4}{3R} \approx 1215 \text{ \AA}$ ) și nici seriilor Paschen, Brackett, ... cu

$n \geq 3$  (pentru care lungimea de undă cea mai mică — corespunzînd valorilor  $n = 3$ ,

$k \rightarrow \infty$  — este:  $\lambda_{P, \min} = \frac{9}{R} \approx 8204 \text{ \AA}$ ). Rezultă că radiația de lungime de undă

$\lambda_0 = 4861 \text{ \AA}$  aparține seriei Balmer ( $n = 2$ ). În ceea ce privește valoarea numărului

cuantic  $k$ , aceasta se poate determina din relația:  $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{R\lambda_0}$ , obținînd  $k = 4$ .

b) (i) Deoarece energia cinetică imprimată ionilor  $H_2^+$  de tensiunea accelera-toare,  $U : W_c = eU = 43 \text{ keV}$  este mult mai mică decît energia corespunzătoare masei de repaus a acestor ioni:  $W_0 = mc^2 = 3 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 1,9 \cdot 10^8 \text{ eV}$ , energia cine-tică a ionilor  $H_2^+$  poate fi dată de expresia nerelativistă, deci:

$$\frac{mv^2}{2} = eU, \text{ de unde: } v = \frac{2eU}{m} 2,04 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

(ii) În figura F.C.93 sînt reprezentate pozițiile observatorului  $O$  și sursei (atomilor H ai ionilor  $H_2^+$ ) în momentele în care sursa emite fa. ele  $O$  ( $S_0$ ), respectiv  $2\pi$  ( $S_{2\pi}$ ) ale unor oscilații (toate pozițiile sînt date de sistemul de referință al observatorului). Deoarece:  $S_0 S_{2\pi} = v \cdot T < c \cdot T = \lambda_0 \ll OS_0$  (dimensiunile instalației

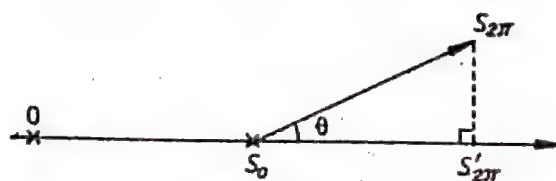


Fig. F.C.93

fiind de ordinul decimetrilor), avem:  $OS_{2\pi} \cong OS'_{2\pi} = OS_0 + v \cdot T \cdot \cos \theta$ , unde  $\theta$  este unghiul format de direcția mișcării sursei cu direcția  $OS_0$  de observație. Deoarece  $T$  este perioada oscilațiilor sursei în sistemul de referință al sursei, care se deplasează cu viteza  $v$  față de sistemul de referință al observatorului, în acest ultim sistem de referință — conform relațiilor relativității restrinse — perioada oscilațiilor apare ca fiind „dilatată” la valoarea  $\frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}}$ , unde  $\beta = \frac{v}{c}$ .

În tabelul care urmează sint indicate momentele de emisie de către sursă, respectiv de recepție de către observator, ale fazelor  $0$  și  $2\pi$  ale oscilației considerate.

Faza	Momentul emisie la sursă	Momentul recepției de către observator
$0$	$t_e$	$t_e + \frac{OS_e}{c}$
$2\pi$	$t_e + \frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}}$	$t_e + \frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{1}{c} \left( OS_0 + v \cdot \frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \cos \theta \right)$

Rezultă expresia perioadei oscilațiilor, așa cum o constată observatorul:

$$T_{\text{obs}} = t_{\text{recepție faza } 2\pi} - t_{\text{recepție faza } 0} = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot T.$$

Deoarece viteza luminii este aceeași în raport cu orice sistem de referință inerțial, lungimea de undă observată este:

$$\lambda_{\text{obs}} = c \cdot T_{\text{obs}} = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \lambda.$$

În cazul experienței Ives-Stilwell, radițiile care ajung la spectroscop în urma reflexiei pe oglinda  $O$  par a proveni de la un fascicul virtual, a cărui direcție (simetrică față de oglinda  $O$  cu direcția fascicului real) formează cu direcția de observație (care coincide aici cu axa spectroscopului și normala la suprafața oglinzii) unghiul  $\theta_r = \pi - \theta$  (fig.F.C.94). În consecință, lungimile de undă  $\lambda_1, \lambda_2$  observate

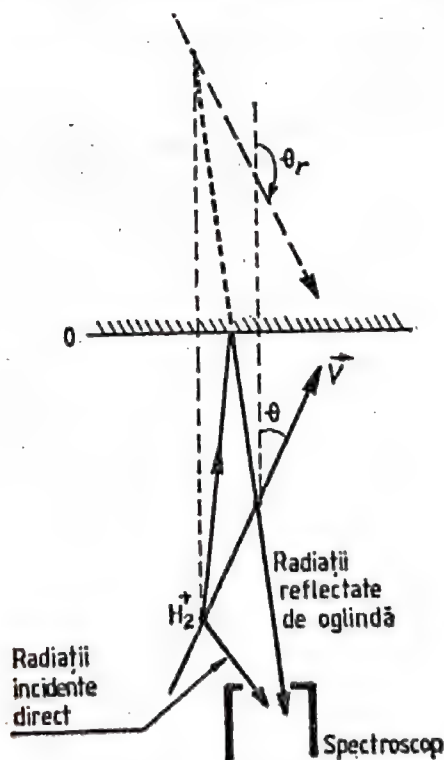


Fig. F.C.94



cu ajutorul spectroscopului pentru radiațiile de lungime de undă (proprie)  $\lambda_0$  emise de ionii  $\text{H}_2^+$  și incidente la spectroscop direct, respectiv după reflexia pe oglindă, sint date de expresiile:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \lambda_0, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \beta \cos \theta_r}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \lambda_0 = \frac{1 - \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \lambda_0.$$

Deoarece viteza  $v$  a ionilor este mult mai mică decît viteza  $c$  a luminii în vid (v. rezultatele punctului precedent), avem  $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$ , deci  $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right)$ .

Rezultă că:

$$\lambda_1 \approx \lambda_0(1 + \beta \cos \theta) \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) \cong \lambda_0 + \lambda_0 \beta \cos \theta + \lambda_0 \frac{\beta^2}{2}, \text{ iar:}$$

$$\lambda_2 \cong \lambda_0(1 - \beta \cos \theta) \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) \approx \lambda_0 - \lambda_0 \beta \cos \theta + \lambda_0 \frac{\beta^2}{2},$$

de unde — prin comparație cu enunțul:

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \beta \cos \theta, \quad \Delta\lambda' = \lambda_0 \cdot \frac{\beta^2}{2}.$$

Din expresia componentei nerelativiste ( $\Delta\lambda$ ) a efectului Doppler, rezultă că:

$$v = c \cdot \beta = \frac{c \cdot \Delta\lambda}{\lambda_0 \cos \theta} \approx \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 35}{4861 \cdot 0,993} \simeq 2,175 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

iar din expresia componentei relativiste ( $\Delta\lambda'$ ) a efectului Doppler obținem:

$$v = c \cdot \beta = c \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta\lambda'}{\lambda_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,12}{4861}} \cdot 3 \cdot 10^8 = 2,108 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Se constată buna concordanță a valorilor obținute pentru viteza ionilor  $\text{H}_2^+$  în baza considerentelor energetice ( $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \simeq 2,04 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ), respectiv a componentelor nerelativiste, respectiv relativistă a efectului Doppler. Această concordanță constituie una dintre verificările experimentale a efectului relativist al „dilatării” duratelor.

76°. Rezultatele analizei efectuate sint prezentate în figura F.C.95.

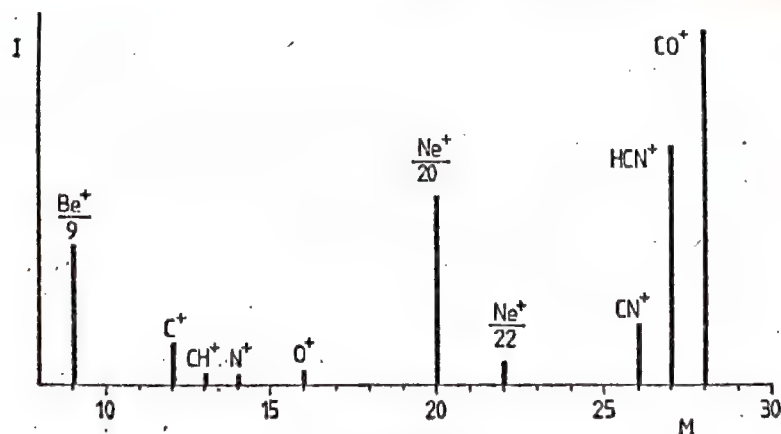
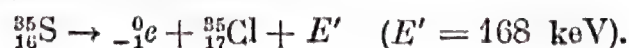


Fig. F.C.95

77°. a) Reacția dezintegrării izotopului  $^{35}_{17}\text{C}$ :



Reacția dezintegrării radiosulfului:



$$b) m_{Cl} + m_n = 34,98007 + 1,00898 = 35,98905 \text{ u},$$

$$m_S + m_p = 34,98022 + 1,00759 = 35,98781 \text{ u},$$

$$\Delta m = 0,00124 \text{ u},$$

$$E = c^2 \cdot \Delta m = 1,155 \text{ MeV},$$

$E > 0$ ; deci, reacția este exoenergetică.

c) Scriind legea dezintegrării radioactive sub forma:

$$\Delta N = -N_0 \lambda \cdot \Delta t,$$

unde  $N_0$  este numărul inițial de nuclee de radiosulf, se obține

$$N_0 = - \frac{\Delta N}{\lambda \Delta t}.$$

Numărul de nuclee dezintegrate ( $-\Delta N$ ) se obține din relația:

$$-\Delta N = \frac{Q}{E'}.$$

Numeric:

$$-\Delta N = \frac{20}{0,168 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 7,44 \cdot 10^{14} \text{ dezintegrări}$$

$$N_0 = - \frac{\Delta N}{\lambda \Delta t} = - \frac{\Delta N \cdot T_{1/2}}{\ln 2 \cdot \Delta t}.$$

Numeric:

$$T_{1/2} = 87 \cdot 86\,400 \text{ s},$$

$$N_0 \simeq 8 \cdot 10^{21} \text{ nuclee}.$$

$$78^\circ. a) {}^{59}_{27}\text{Co} + {}^1_0n \rightarrow {}^{60}_{27}\text{Co} + \gamma$$

$${}^{60}_{27}\text{Co} \rightarrow {}^0_{-1}e + {}^{60}_{28}\text{Ni} + h\nu.$$

$$b) h\nu \rightarrow {}^0_{-1}e + {}^0_1e + E_c,$$

$$h\nu = 2m_0c^2 + m_0v^2,$$

$$v = \sqrt{\frac{h\nu}{m_0} - 2c^2}.$$

Numeric:

$$v = \sqrt{\frac{1,15 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}} - 2 \cdot 9 \cdot 10^{16}} = \sqrt{(20,2 - 18) \cdot 10^{16}} = \\ = \sqrt{2,2 \cdot 10^{16}} = 1,48 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

$$c) -\Delta N = N_0 \lambda \Delta t = \frac{N_0 \ln 2 \cdot \Delta t}{T_{1/2}} = \frac{10^{22} \cdot 0,693}{5,3 \cdot 365 \cdot 24} = 1,49 \cdot 10^{17} \text{ nuclee}.$$

Energia produsă într-o dezintegrare este:

$$E = 0,4 + 1,5 = 1,9 \text{ MeV} = 1,9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} = 3,04 \cdot 10^{-13} \text{ J},$$

$$Q = -\Delta N \cdot E.$$

Numeric:

$$Q = 1,49 \cdot 10^{17} \cdot 3,04 \cdot 10^{-13} = 4,53 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

79°. a)  $h\nu_1 - h\nu_0 = eU_{f1}$ ,

$$h\nu_2 - h\nu_0 = eU_{f2},$$

$$hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = e(U_{f1} - U_{f2}),$$

$$h = e \frac{(U_{f1} - U_{f2}) \lambda_1 \lambda_2}{c(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Numeric:

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s},$$

$$\nu_0 = \frac{h\nu_1 + eU_{f1}}{h} = \nu_1 + \frac{eU_{f1}}{h}$$

și

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}.$$

Numeric:

$$\lambda_0 = 0,68 \text{ } \mu\text{m}.$$

b) Pentru  $\lambda_1$  se obține:

$$E_c = h\nu_1 - h\nu_0 + eU = 2(h\nu_1 - h\nu_0) = 2eU_{f1},$$

$$U = U_{f1} = 0,709 \text{ V}.$$

Analog, pentru  $\lambda_2$  rezultă

$$U = U_{f2} = 1,258 \text{ V}.$$

$$\text{c) } \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_c}} = \frac{h}{\sqrt{4m_0 eU_{f1}}}.$$

Numeric:

$$\lambda = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{4 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,709}} = 10,302 \text{ } \text{\AA}.$$

80°. Legea conservării impulsului are forma:

$$mv = mv' + MV'.$$

Fiind ciocnire neelastică, conservarea energiei se scrie astfel:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2 + \Delta E.$$

Eliminând pe  $V'$  între ecuațiile de mai sus, rezultă ecuația de gradul doi în  $v'$ :

$$(m + M)v'^2 - 2mvv' - v^2(M - m) + \frac{2M \cdot \Delta E}{m} = 0.$$

Din condiția ca discriminantul acestei ecuații să fie pozitiv sau nul

$$v^2 \geq 2 \cdot \Delta E \frac{M + m}{Mm},$$

rezultă

$$v \geq \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta E}{m} \left(1 + \frac{m}{M}\right)},$$

în concordanță cu condiția limitativă:

$$\frac{1}{2}\mu v^2 > \Delta E,$$

unde  $\mu = \frac{mM}{m+M}$  este masa redusă a sistemului electron-atom.



**CHIMIE**

## A. BREVIAR

Manualele de chimie după care se studiază în clasele IX—XII stau la baza programei pentru admitere în facultate și conțin noțiuni de bază din domeniul chimiei anorganice, chimiei organice, chimiei fizice, precum și unele noțiuni de tehnologie chimică.

Problematica este complexă, materialul este prezentat într-o succesiune care ține seama și se bazează pe noțiunile de chimie care au fost predate în clasele a VII-a și a VIII-a, a căror cunoaștere este indispensabilă în înțelegerea noilor cunoștințe.

Examenul de admitere în învățământul superior are ca scop selectarea celor mai buni candidați și, prin probele care se dau, testează nivelul de cunoștințe și modul de gândire, capacitatea de a opera cu noțiunile însușite.

De aceea, atragem atenția ca, în perioada de pregătire, de recapitulare, să se acorde o atenție deosebită următoarelor probleme:

1. modul de a învăța, acesta fiind determinant în pregătirea profesională;
2. conținutul programei de admitere;
3. necesitatea corelării cunoștințelor, a fenomenelor.

Luând în considerație aceste trei puncte, vom insista în continuare asupra principalelor aspecte, făcând totodată și unele aprecieri generale asupra unor tipuri de subiecte, de probleme și asupra rezolvării lor.

### 1. MODUL DE ÎNVĂȚARE

Această problemă prezintă o importanță deosebită și subliniem în primul rând necesitatea însușirii raționale și integrale a materialului prevăzut în programă.

Termenul de învățare rațională este folosit în sensul înțelegerii cunoștințelor predate și reținerii noțiunilor tratate în manuale și nu a memorizării lor automate.

Pentru elementele chimice, substanțele anorganice sau organice, pentru interacțiunile care pot avea loc între diferiți compuși în anumite condiții, când se pot produce reacții chimice, ș.a., se folosesc anumite denumiri și modalități de reprezentare grafică, abstracții convenționale la nivel internațional, cu care operăm în mod curent în domeniul chimiei.

Încă de la începutul studiului chimiei, elevul își însușește o serie de noțiuni, pe parcursul anilor acestea se înmulțesc, unele se completează, altele se amplifică, iar pentru redarea acestora este folosit un limbaj specific chimiei, în cadrul căruia înglobăm și *nomenclatura chimică*, problemă de mare importanță și complexitate, asupra căreia atragem în mod special atenția. În sens restrins prin *nomenclatura chimică* înțelegem denumirile care se dau substanțelor anorganice sau organice.

Cu cât chimia s-a dezvoltat ca știință, s-a impus necesitatea unor sistematizări pe această linie, a stabilirii unor reguli, a realizării unei concordanțe între structura și formula chimică a unui compus, pe de o parte, și între structura reprezentată prin

formula chimică și denumirea care se atribuie compusului — *denumire rațională* —, pe de altă parte.

Menționăm că pentru unele substanțe, alături de denumirile raționale, se utilizează și în prezent denumiri uzuale (comune, empirice, triviale) care le-au fost atribuite inițial, fără ca acestea să aibă vreo legătură cu structura compusului respectiv.

În această succintă prezentare nu ne propunem să tratăm sau să exemplificăm unele probleme de nomenclatură chimică, ci atenționăm candidații la admitere în învățământul superior, asupra importanței cunoașterii ei (atât a celei raționale, cât și a celei uzuale) deoarece fiecărei *specii moleculare* i se atribuie o formulă chimică și o denumire proprie.

Recomandăm ca în cursul învățării să se dea atenție însușirii corecte a nomenclaturii, a unor reguli generale care au fost indicate în manuale, în special în clasa a X-a, respectiv la chimie organică. Pe baza cunoașterii acestor reguli, dându-se o formulă de structură oarecare, se poate solicita aplicarea regulilor și deci deduce denumirea rațională a compusului corespunzător, sau, dându-se denumirea, se poate cere atribuirea formulei de structură, denumirea sugerind în mod firesc și unele aspecte ale proprietăților.

Se impune, în mod special, acordarea unei atenții deosebite concordanței dintre formă și fond, simbolistica utilizată în chimie, la care ne-am referit, reprezentând pe de o parte modalități de a reprezenta realități obiective, „materia” (proprietățile și posibilitățile de transformare a acesteia), iar pe de altă parte, prin această simbolistică specifică „Chimiei”, candidatul evidențiază în tratarea subiectelor la examene, bagajul de cunoștințe acumulat și nivelul de înțelegere a fenomenelor chimice studiate.

Problema formei de redare a cunoștințelor de chimie la examenul scris nu elimină modul clar de exprimare, de scriere corectă și descifrabilă (uneori greșeli de redare grafică afectează fondul), de înlănțuire logică a ideilor în tratarea unui subiect teoretic, de ordonare a ecuațiilor chimice, a calculelor, a prezentării rezultatului, dacă ne referim la probleme cu calcule.

Subliniem, în mod special; atenția ce trebuie acordată modului în care se operează cu abstracțiile în chimie (întreaga simbolistică utilizată) pentru a reda aspecte calitative, cantitative sau exprimări matematice ale unor regularități.

— Un aspect deosebit de important în procesul de învățare a chimiei îl constituie însușirea corectă a noțiunilor și reflectarea gradului de cunoaștere prin modul de prezentare a cunoștințelor dobândite.

După parcurgerea întregului material prezentat în manuale, subliniem necesitatea de a reflecta (utilizând toate cunoștințele acumulate) asupra semnificației simbolurilor elementelor, a formulelor moleculare, a ecuațiilor chimice, a relațiilor matematice pe baza cărora, pentru o anumită transformare chimică, se pot calcula o serie de mărimi caracteristice procesului respectiv.

Pentru fixarea cunoștințelor, etapă importantă a procesului de învățare, să se facă apel la lucrările practice (multe fiind realizate în laboratorul școlii) sau la aspectele experimentale descrise în manual, rezultatul activității practice fiind punctul de plecare a generalizărilor teoretice.

Corelarea cunoștințelor teoretice, cu aplicarea acestora la rezolvarea de probleme, să se facă după ce primele au fost însușite temeinic. Rezolvarea automată a unor probleme, introducerea unor date numerice în relații matematice memorate (fără a li se fi înțeles semnificația), învățarea mecanică de a rezolva tipuri de probleme, nu reprezintă decât o stocare de cunoștințe pentru scurtă durată, consum de energie intelectuală fără randament, îndepărtarea de scopul deosebit de important — *de a învăța cu plăcere* — și a găsi satisfacție în rezolvări corecte, prin manipularea bagajului de cunoștințe teoretice acumulate și aplicarea lor cu discernămint în *n* cazuri, diferite de cele rezolvate anterior.



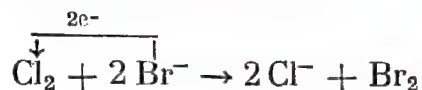
Învățarea, bazată inevitabil în fiecare etapă pe cunoștințele anterioare, și recapitularea trebuie să conducă în mod firesc la corelarea noțiunilor, fapt care asigură posibilitatea tratării unor subiecte de sinteză, a rezolvării problemelor care fac apel la cunoștințe din capitole diferite, din ani diferiți de studiu.

Pentru a exemplifica acest aspect al corelării cunoștințelor, ne vom referi în cele ce urmează la elementul clor, care a fost prezentat în linii generale în clasa a VIII-a, din punct de vedere al poziției în sistemul periodic al elementelor, apoi obținerea, reactivitatea, prezentarea succintă a citorva combinații chimice ale clorului.

$Z = 17$		— hidracidul corespunzător (HCl); săruri ale acidului — clo-
Cl	M 7	ruri — (NaCl); oxizi; acizi oxigenați; săruri ale unor acizi
	L 8	oxigenați ai clorului.
$A = 35$	K 2	

În manualele din clasele a IX-a — XII-a se prezintă noi noțiuni, care definesc mai clar, cu explicații bazate pe experiment, conceptele de clor molecular ( $\text{Cl}_2$ ), atomic ( $\text{Cl}^\bullet$ ), ionic ( $\text{Cl}^-$  și  $\text{Cl}^+$ ).

a) Caracterul nemetalic al clorului, mai accentuat decât al bromului, este evidențiat prin reacția dintre clor molecular și ioni de brom, reacția putând fi efectuată în laborator.

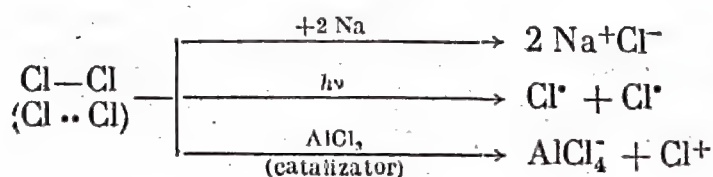


De la o proprietate dovedită experimental, se trece la generalizarea:

Caracterul nemetalic scade în grupă de sus în jos. (În grupa a VII-a iodul are deci caracterul nemetalic cel mai slab).

b) Modul de scindare a moleculei de clor ( $\text{Cl}_2$ ;  $\text{Cl}-\text{Cl}$ ) în funcție de condițiile de lucru, problemă abordată în diferite capitole ale manualelor, evidențiază posibilitatea formării de legături ionice sau covalente polare între clor și atomi ai altor elemente.

La această generalizare, bazată de asemenea pe date experimentale, se ajunge în mod firesc după parcurgerea tuturor manualelor, aceasta dînd candidatului la admitere capacitatea de a trata subiecte de sinteză.



În primul caz se formează ioni  $\text{Cl}^-$  și, respectiv, clorura de sodiu (legătură ionică); în al doilea caz se formează atomi de clor care pot reacționa, de exemplu, cu un substrat organic ( $\text{CH}_4$  sau alte hidrocarburi) cu eliminare de acid clorhidric — se formează o legătură covalentă polară carbon-clor prin punerea în comun a cîte unui electron de către cei doi atomi, clor și carbon; în al treilea caz, prin interacția  $\text{Cl}_2$  cu catalizatorul ( $\text{AlCl}_3$ ) se formează în mediul de reacție ionul  $\text{Cl}^+$ , care reacționează cu substratul organic formîndu-se de asemenea o legătură covalentă carbon-clor, de data aceasta dubletul de electroni necesar legăturii covalente fiind furnizat de substratul hidrocarbonat (reacția Friedel-Crafts).

Reacția dintre clor și sodiu este exemplificată în cîteva rinduri în manuale, subliniindu-se modul de formare a ionilor, reacție cu transfer de electroni, capacitatea celor doi ioni ( $\text{Cl}^-$  și  $\text{Na}^+$ ) de a forma un compus ionic.

Reacția clorului atomic cu hidrocarburile alifatică sau aromatică cu catenă laterală — reacție de *substitufie homolitică*, sau reacția ionului  $\text{Cl}^+$  cu hidrocarburile aromatice — *substitufie heterolitică electrolilă* de asemenea sînt exemplificate în mai multe moduri; pot fi luate în considerație și reacțiile de adiție a clorului la legăturile multiple carbon-carbon, în anumite condiții de lucru, care condiționează mecanismul de reacție.

Speciile  $\text{Cl}_2$ ;  $\text{Cl}^-$ ;  $\text{Cl}^\bullet$ ;  $\text{Cl}^+$  se întîlnesc într-o serie de reacții principale sau secundare, vezi: electroliza  $\text{NaCl}$ , halogenarea directă a hidrocarburilor alifatică sau a celor aromatice, diferite procese redox.

c) Alte aspecte importante tratate în manuale și în care este implicat elementul clor se referă la explicarea complexității unor procese; sînt abordate unele reacții cu aplicații industriale (ca, de exemplu, reacția dintre clor și hidrogen utilizată pentru obținerea industrială a acidului clorhidric) prin prisma influenței condițiilor de lucru care determină mecanismul reacției, desfășurarea ei în timp (aspectele cinetice), probleme privind echilibrul chimic.

d) Clorul fiind o substanță gazoasă prezentă în multe procese chimice, reamintim necesitatea corelării cunoștințelor generale cu noțiunile însușite la studierea legilor gazelor, legea lui Avogadro, ecuația de stare a gazelor perfecte ș.a. în vederea completării ansamblului de cunoștințe și a rezolvării unor probleme.

Candidatul la examenul de admitere poate găsi foarte multe exemple asemănătoare cu cel la care ne-am referit. De asemenea, recomandăm să se dea o atenție mai mare în etapa de fixare a cunoștințelor, problemelor de complexitate mai mare, cu grad apreciabil de abstractizare, sau aspectelor aparent diferite, care formează totuși un tot unitar caracterizînd un anumit proces chimic, precum și legăturii dintre metodele de obținere, de sinteză și proprietățile chimice ale unor elemente, ale unor compuși.

Se impune totodată realizarea în scris, în timpul învățării, a unor sistematizări proprii, în care formulele chimice și relațiile matematice să fie scrise clar, aceste conspecte reprezentînd rezultatul unui studiu individual sistematic și totodată un ghid în recapitularea cunoștințelor de bază.

## 2. CONȚINUTUL PROGRAMEI DE ADMITERE

În cele ce urmează ne-am putea opri asupra unor probleme de conținut, cu scopul de a face unele recomandări, ținînd seama de ordinea în care sînt tratate acestea în clasele a IX-a — XII-a, sau s-ar putea face referiri pe domenii ale chimiei, respectiv chimie anorganică, chimie organică, chimie fizică. Deși această clasificare este utilă din punct de vedere didactic și, totodată, din punctul de vedere al însușirii generalizărilor pe baza studierii anterioare a compușilor anorganici și organici sub aspectul structurii lor, a obținerii, a proprietăților fizice și chimice condiționate de structură, vom urmări totuși din aproape în aproape tematica manualelor referindu-ne doar la unele probleme de conținut însoțite de recomandări.

### a) CHIMIA PENTRU CLASA A IX-a

— *Capitolul 1. Structura învelișului electronic al atomului* prezintă o importanță deosebită. Este necesar să fie învățat cu multă atenție, cu sistemul periodic al elementelor în față, cu revederea cunoștințelor anterioare, în special la studiul noțiunii de valență și studiul proprietăților chimice.

Sugerăm să se revadă principalele substanțe chimice studiate anterior, formulele chimice ale acestora, semnificația lor în lumina noilor cunoștințe.



— *Capitolul 2. Proprietăți ale substanțelor solide, lichide și gazoase, determinate de tipul de legătură.* Capitolul conține noțiuni teoretice și explicații care fac posibilă înțelegerea celor mai importante proprietăți fizice și chimice ale unor substanțe în special anorganice. Se corelează problemele privind legăturile chimice cu starea de agregare și unele proprietăți caracteristice.

Subcapitolul 2.4. *Starea gazoasă* prezintă noțiuni care au fost tratate mai amplu la Fizică. Recomandăm revederea legilor gazelor, a legii lui Avogadro, ș.a., exprimate prin relațiile care sînt date în manual, și a căror semnificație este necesar să fie foarte clară, să fie înțeles sensul lor fizic.

Relațiile matematice, indicate în manual, sînt utilizate curent în rezolvarea unor probleme, în cazul în care se lucrează cu substanțe în stare gazoasă (reactanți sau produși de reacție anorganici sau organici), și dau posibilitatea să se calculeze volumul unui gaz în anumite condiții, presiunea, temperatura, volumul molar, densitatea, fracția molară, presiunea parțială a unui gaz din amestec, volumul total al unui amestec de gaze ș.a., mărimi a căror valoare prezintă importanță deosebită în practica chimică.

Recomandăm revederea noțiunilor cu foarte mult discernămint, înțelegerea condiționării reciproce a parametrilor menționați, importanța lor cînd ne referim la anumite procese chimice în condiții bine determinate de laborator sau la nivel industrial.

— *Capitolul 3. Sisteme disperse* tratează probleme cu aspect de generalitate, care vizează interacții între substanțe de diverse tipuri insistîndu-se în special asupra soluțiilor, asupra fenomenului de dizolvare și a efectelor care se produc, corelate cu o proprietate fizică importantă a substanțelor chimice, *solubilitatea*, și factorii care o influențează.

Dizolvarea substanțelor în diferiți solvenți conduce la soluții care, în mod firesc, conțin o anumită cantitate de substanță dizolvată într-o anumită cantitate de solvent — spunem deci că are o concentrație bine determinată —, iar importanța acesteia în practica chimică este foarte mare.

Un număr mare de reacții chimice se produc cînd se lucrează cu substanțe în soluție, fie că reacțiile respective se realizează în scop analitic sau în scop sintetic.

De aceea, cunoașterea factorilor care influențează solubilitatea, proprietățile soluțiilor, obținerea unor soluții de anumite concentrații, precum și determinarea concentrației necunoscute a unor soluții, sînt probleme cu implicații directe în practica de laborator și industrială, a căror efectuare corectă se bazează pe cunoașterea problemelor teoretice și aplicarea acestora cu rigurozitate în practică.

Dintre problemele tratate în acest capitol, insistăm asupra subcapitolului 3.6. *Concentrația soluțiilor*, în care se subliniază posibilitatea de exprimare a concentrațiilor soluțiilor, respectiv concentrație procentuală, concentrație molară sau molari-tatea, concentrație normală (normalitatea sau concentrație valară).

Recomandăm ca după însușirea acestor cunoștințe să se compare între ele diferite moduri de exprimare a concentrației, pentru a rămîne cu o imagine clară referitoare la faptul că în toate cazurile o anumită masă de substanță luată în grame, dizolvată într-o anumită cantitate de solvent formează o anumită cantitate de soluție, a cărei concentrație poate fi exprimată fie în procente, fie în moli sau echivalenți la litru.

Din punct de vedere cantitativ între *solvit* și *solvat* există o anumită relație, iar această relație poate fi exprimată în diferite moduri, după cum se ia în considerație de exemplu: masa soluției exprimată în g (masă solvit + masă solvent) și masa de substanță (solvitul) exprimată în g, existentă în 100 g de soluție; sau



pornind de la masa substanței dizolvate, se calculează numărul de moli care corespund acesteia, cantitatea de soluție în care se găsește numărul de moli la care ne-am referit fiind exprimată în litri ș.a.m.d.

Pentru fiecare caz în parte este necesar să se încerce deducerea formulelor utilizate pentru calculul concentrației, care se bazează, de altfel, pe regula de trei simplă, nefiind necesară memorarea lor.

Exprimarea concentrației pentru o anumită soluție în procente și trecerea de la aceasta la exprimarea în concentrație molară sau normală, și invers, se cere frecvent în unele probleme; de asemenea, utilizarea unor soluții de concentrații diferite pentru obținerea unei soluții de o concentrație intermediară se utilizează adesea în practica de laborator; acestea sînt probleme cu care se confruntă în mod obișnuit candidații la examene.

— *Capitolele 4, 5 și 6* abordează succint unele probleme generale ale reacțiilor chimice exemplificate la transformările chimice pe care le suferă unele substanțe chimice anorganice studiate anterior, insistînd asupra efectelor termice, asupra echilibrului chimic și a factorilor care îl influențează, asupra desfășurării reacțiilor chimice în timp și a factorilor care influențează viteza de reacție. Se insistă de asemenea asupra acizilor și bazelor, asupra proceselor redox, asupra mecanismului și legilor electrolizei.

Problematica abordată permite rezolvarea unor probleme care implică calcule stoechiometrice, respectiv calcularea randamentului ( $\eta$ ) unor reacții exprimat procentual, calculul gradului de ionizare ( $\alpha$ ), calculul, de exemplu, al masei compușilor obținuți în baia de electroliză, al intensității curentului folosit, al volumului soluției inițiale supusă electrolizei ș.a., pe baza legilor electrolizei.

Menționăm că rezolvarea unor astfel de probleme *nu este posibilă fără cunoașterea fenomenelor chimice* care stau la bază și a celorlalte cunoștințe acumulate (concentrația soluțiilor, legile gazelor etc.).

Recomandăm să se revadă cu atenție experiențele de laborator, acestea constituind argumentarea directă care condiționează înțelegerea și reținerea cunoștințelor.

Unele probleme tratate succint sau enunțate în manualul pentru clasa a IX-a sînt redată mai amplu în manualul pentru clasa a XI-a.

## b) CHIMIA PENTRU CLASA A X-a

Manualul prezintă cele mai importante probleme ale chimiei organice, dînd o imagine de ansamblu asupra acestui domeniu important al chimiei. Compușii organici naturali au o răspîndire universală în organismele vii, joacă un rol important în procesele vieții și ca materii prime, iar compușii organici de sinteză, care nu își au corespondent în natură, realizați în laboratoare într-un număr impresionant și mulți dintre ei la nivel industrial, își găsesc cele mai diverse aplicații.

*Capitolul I. Introducere în chimia organică* conține noțiuni generale a căror însușire stă la baza înțelegerii raționale a problemelor care se tratează în continuare.

Vom insista puțin asupra noțiunilor de *formulă brută*, *formulă moleculară*, *formulă de structură* care prezintă o importanță deosebită ca instrumente de lucru; toate redau caracteristici ale unei specii moleculare organice *pure*, dar fiecare evidențiază anumite particularități ale unei substanțe, formulele de structură fiind mult mai bogate în conținutul lor informativ.

Rezultatele analizei chimice, stabilirea masei moleculare, determinarea unor proprietăți fizice și chimice dau posibilitatea stabilirii formulelor menționate, pentru o substanță organică oarecare.

Analiza chimică calitativă și cantitativă conduce la stabilirea *formulei brute*, care indică felul atomilor și raportul în care se găsesc aceștia în masa substanței.

Masa moleculară și rezultatele anterioare dau posibilitatea stabilirii *formulei moleculare*, care redă felul și numărul atomilor ce constituie molecula.

Proprietățile fizice și chimice dau o imagine asupra modului în care sînt legați atomii în moleculă, tipurile de legături chimice covalente existente, deci succesiunea atomilor, modul de legare între ei și, eventual, influențele reciproce care se pot stabili între atomii legați sau nelegați direct; toate acestea conduc la formula de structură.

Cunoștințele privind hibridizarea atomului de carbon (clasa a IX-a) aplicate în cazul compușilor organici cu legături simple și multiple, completează aspecte importante ale structurii, dacă se face legătura între tipul de hibridizare și efectul steric al acesteia, cu alte cuvinte orientarea în spațiu bine determinată a legăturilor covalente, a atomilor care formează o anumită moleculă.

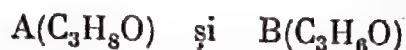
Studiul chimiei organice pornește inevitabil de la concepția argumentată experimental, că moleculele compușilor organici au o structură bine determinată, care poate fi stabilită și pe care o putem reprezenta sub aspectele ei cele mai generale prin formulele de structură.

Elevul, candidatul la admitere în învățămîntul superior, trebuie să aibă permanent în minte imaginea cît mai apropiată de realitate a abstracțiilor pe care le utilizează.

Este o realitate faptul că moleculele compușilor organici au o structură spațială, dar nu întotdeauna folosim formulele corespunzătoare pentru a sugera particularitățile sterice, pe care le subînțelegem în mod convențional și atunci cînd lucrăm în mod curent cu formule plane sau formule restrinse.

Chimia organică nu reprezintă doar o multitudine de formule (fiecare corespunzînd unui compus chimic), pe care mulți se străduiesc să le reproducă, și o multitudine de metode de sinteză și de proprietăți atribuite acestor compuși, pe care se străduiesc să le memorizeze.

Pentru a exemplifica posibilitatea de a interpreta corect unele date, de a trece pe baza noțiunilor fundamentale însușite corect la abordarea unor probleme care nu au fost tratate în manual, dar căroră, pe baza cunoștințelor generale, a corelării lor, li se poate da un răspuns corect, vom lua în considerație două formule moleculare:

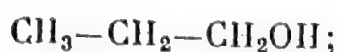


Mai mulți compuși organici pot avea aceeași formulă moleculară, deosebirea între ei datorîndu-se modului diferit de legare și de orientare spațială a atomilor care formează molecula. Pornind de la valența elementelor formatoare, din formula moleculară A se poate deduce faptul că toți atomii de carbon prezintă hibridizare  $sp^3$ , deci în molecula fiecărui izomer posibil vor exista numai legături covalente simple. Formula moleculară B evidențiază posibilitatea prezenței atomilor de carbon cu hibridizare  $sp^2$ , în moleculă poate exista o legătură dublă sau, ca și în primul caz, cei trei atomi de carbon pot prezenta hibridizare  $sp^3$ , dar modul de legare al acestora este diferit, respectiv pot forma un ciclu.

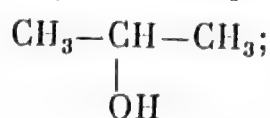


De la caz la caz, pot fi folosite formule de structură restrinse, plane sau tridimensionale (în funcție de solicitarea examinatorului).

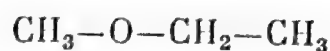
A ( $C_3H_8O$ )



1

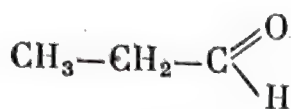


2

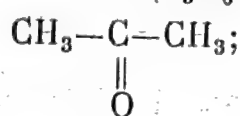


3

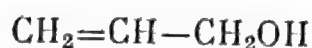
B ( $C_3H_6O$ )



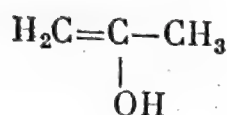
1



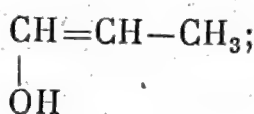
2



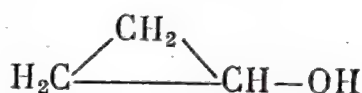
3



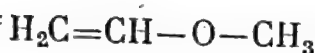
4



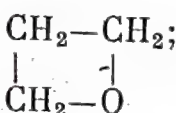
5



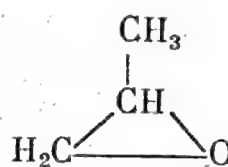
6



7



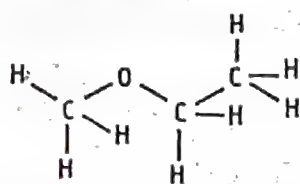
8



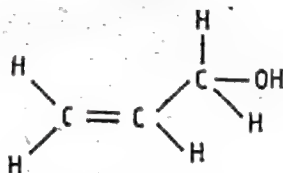
9

Menționăm că nu toate aceste posibilități de legare a atomilor conduc la structuri stabile (ex.  $B_4$ ,  $B_5$  ș.a). De aceea pentru unele substanțe nu se cunosc toți izomerii teoretic posibili.

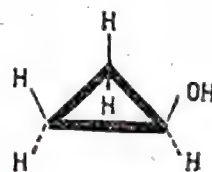
Dacă pentru unii dintre izomerii substanței A sau B s-ar cere să se indice orientarea atomilor în spațiu, de exemplu pentru:  $A_3$ ;  $B_3$ ;  $B_6$ , pe baza cunoștințelor generale se pot reprezenta cu ușurință formulele de structură care evidențiază unele particularități sterice.



$A_3$



$B_3$



$B_6$

Considerăm că trecerea de la formula de structură plană la cea tridimensională este foarte simplă. Un asemenea subiect dat la examen ar fi considerat de unii candidați ca nefiind în programă. Este o concepție complet greșită și în mod intenționat am dat acest exemplu, pentru a sugera și a recomanda ca pe parcursul studiului să nu se treacă mai departe dacă nu s-au înțeles cunoștințele în înălțuirea lor logică firească.

Cu exemplul dat am abordat și problema izomeriei, care reprezintă cheia înțelegerii diversității compuşilor organici și a relațiilor dintre structură și proprietăți.

Dacă am lua în considerație din exemplul dat anterior doar compuşii  $A_1$  și  $A_2$  care sînt izomeri de poziție și compuşii  $B_1$  și  $B_2$  care sînt izomeri de funcțiune și am solicita candidatului să aducă pe baza proprietăților chimice argumente pentru



formulele de structură ale izomerilor menționați, să indice metode de sinteză, modul în care ar putea reacționa aceștia cu anumiți compuși indicați, tipul de reacții pe care le pot da, mecanismul acestora ș.a. — de asemenea ar fi o problemă simplă pentru cel care a parcurs toată chimia organică; unele probleme sînt tratate în manual, unele răspunsuri ar trebui deduse. Răspunsul nu ar fi nimic altceva decît evidențierea modului de gîndire, de utilizare corectă a cunoștințelor însușite.

Manualul tratează hidrocarburile, apoi principalele clase de compuși organici cu funcțiuni simple — compuși halogenați, hidroxilici, amine, compuși carbonilici, compuși carboxilici, precum și derivații funcționali ai acizilor carboxilici. Toate subcapitolele prezintă importante probleme privind reprezentanții de bază ai acestor clase, posibilități de sinteză, proprietăți fizice și chimice, precum și exerciții și probleme; unele probleme, în mod firesc, necesită și utilizarea cunoștințelor dobîndite în clasa a IX-a.

Însușirea temeinică a cunoștințelor de chimie organică necesită încă de la început, și aceasta este valabil pentru fiecare capitol, în etapa de descifrare a cunoștințelor, scrierea corectă și cît mai detaliată a formulelor chimice, pentru a înțelege bine care sînt legăturile chimice implicate în transformarea unui compus (a unui substrat), cum se formează noile legături care condiționează structura produsului de reacție.

În capitolele 5 și 6 sînt prezentate succint unele clase de compuși naturali — amino-acizi, proteine, zaharide —, precum și compuși macromoleculari.

Studiul acestor clase de substanțe evidențiază aplicarea cunoștințelor generale privind reactivitatea specifică a diverselor grupe funcționale, în cazurile tratate, reactivitatea grupelor — amino, carboxil, amidă, carbonil (aldehidic sau cetonc), alcool, eter — și, în mod deosebit, evidențiază interacțiunile reciproce intramoleculare (caracterul de amfion al amino-acizilor, formele ciclice ale monozaharidelor ș.a.), care prezintă o importanță deosebită în înțelegerea particularităților acestor compuși, precum și unele interacții intermoleculare (la celuloză, proteine etc.).

Complexitatea mai mare a formulelor de structură, corespunzătoare compușilor naturali, a celor macromoleculari (naturali sau de sinteză), poate fi depășită și formulele pot fi reținute corect, cu ușurință, dacă așa cum am subliniat, se ține seama permanent de principiile de bază.

O vedere de ansamblu asupra noțiunilor cuprinse în manualul de clasa a X-a face posibilă înțelegerea relațiilor dintre diferite clase de compuși organici, rolul proprietăților chimice în sinteza organică, pe care se bazează de fapt industrializarea unor produse chimice, pentru care baza de materii prime este accesibilă.

### c) CHIMIA PENTRU CLASA A XI-a

În manual sînt prezentate procesele redox cu implicații în diverse domenii ale chimiei, noțiuni de electrochimie, noțiuni privind energia chimică și energia termică, reacțiile chimice ca procese ce se petrec în timp, echilibrul chimic.

Recomandăm efectuarea sau revederea tuturor experiențelor indicate în manual pentru înțelegerea acestor aspecte, dintre care unele au fost doar enunțate sau prezentate succint în clasa a IX-a.

O serie de reacții chimice ale compușilor anorganici sau organici sînt reluate și abordate din alte puncte de vedere, care vin să completeze noțiunile de bază asimilate pînă în clasa a XI-a, referitoare la procesele chimice, și să evidențieze complexitatea acestora.

În toate capitolele, tratarea pornește de la un anumit fenomen chimic ales astfel încît, prin desfășurarea lui, să se pună în evidență în mod direct diversele aspecte care caracterizează și condiționează fenomenul, ca de exemplu: *potențialul de oxido-reducere*, care determină sensul unor reacții chimice; *entalpia de reacție*, pe baza căreia se pot determina căldurile absorbite sau degajate în cursul reacțiilor;



*entalpia liberă de reacție*, care determină sensul de evoluție spontană a sistemelor chimice; *energia de activare*, pe baza căreia se pot stabili condițiile de lucru în care procesul să se desfășoare în condiții optime etc.

În manual sînt abordate o serie de probleme care vizează procese ca, de exemplu, electroliza, legile și aplicațiile ei, unele procese chimice practicate la nivel industrial, care sînt condiționate în desfășurarea lor de unii parametri ce influențează viteza de reacție, starea de echilibru și deplasarea acestuia în sensul dorit. De asemenea, sînt prezentate noțiunile de bază referitoare la mecanismele de reacție, importanța cunoașterii acestora în diferite condiții de lucru pentru dirijarea procesului în condiții de maximă eficiență, rolul și importanța catalizatorilor, precum și mecanismul de acțiune al acestora.

După parcurgerea întregului material prezentat în clasa a XI-a elevul se confruntă cu necesitatea de a face o legătură între noțiunile însușite, care reprezintă un tot unitar în caracterizarea unui proces chimic oarecare. În egală măsură trebuie să învețe astfel, încît să capete deprinderea de a calcula pe baza relațiilor matematice însușite (și al căror sens fizic a fost înțeles), valori numerice ale unor mărimi caracteristice sistemelor studiate.

Din rezultatele obținute de candidați la concursurile de admitere desfășurate pe parcursul anilor, se desprinde un aspect general și anume, lipsa capacității multora de a aprecia orientativ ordinul de mărime al rezultatului numeric obținut — raportat la valorile inițiale utilizate, fapt care denotă un mod de aplicare mecanică a relațiilor și formulelor învățate.

#### d) CHIMIA PENTRU CLASA A XII-a

În capitolul 1 — *Structura compușilor organici* —, este abordată noțiunea de structură, punindu-se accent pe aspectele electronice și sterice. Efectele inductiv și electromer dau posibilitatea înțelegerii reactivității compușilor organici și a mecanismelor de reacție într-o mai mare măsură. Izomeria geometrică și izomeria optică, ca tipuri de izomerie sterică, evidențiază alte aspecte, de mai mare finețe pe care le ridică structura unor compuși organici. Este recomandabil ca pentru înțelegerea noțiunilor date să se utilizeze cu atenție modelele moleculare, pentru a sesiza corect diferențele structurale dintre izomerii *cis* și *trans*, dintre *enantiomeri*, *diastereoizomeri* și *mezoforme*. Studiul capitolului menționat necesită multă atenție și revederea unor noțiuni ca, de exemplu, diferența de electronegativitate, caracteristicile legăturilor multiple, corelarea tipului de hibridizare a atomilor de carbon (în special) cu structura spațială a compușilor respectivi, ș.a.

În capitolul 2. *Reactivitatea compușilor organici*, pornind de la posibilitățile de scindare a legăturilor chimice întâlnite în compușii organici, problemă care necesită corelarea cu sensul deplasării norului electronilor de valență sub influența efectelor inductiv, electromer și sub influența factorilor externi, se exemplifică reactivitatea compușilor organici prin tipurile de reacții de: *substituție*, *adiție*, *eliminare* și *reacții care decurg cu transpoziție*. Pentru fiecare se evidențiază posibilitatea ca din punct de vedere al mecanismului electronic, condiționat de modul de scindare a legăturilor chimice, să se deosebească *reacții heterolitice* — *nucleofile sau electrophile* — și *homolitice (radicalice)*. O serie de reacții chimice studiate în clasa a X-a pot fi revăzute prin prisma noilor noțiuni, fapt care, de altfel, este amplu evidențiat în capitolul 5, în care sînt tratate unele reacții chimice ale compușilor organici, cu aplicații tehnologice.

În manualul pentru clasa a XII-a se completează și se aprofundează noțiunile de chimie organică din clasa a X-a și, totodată, se dă și o imagine succintă asupra problemelor complexe pe care le ridică transpunerea unor procese chimice la nivel industrial. Acestea pot fi înțelese într-un alt mod după însușirea cunoștințelor din clasa a XI-a, care dau o imagine mai clară asupra complexității proceselor chimice.



Calculul conversiei utile, al conversiei totale, al randamentului, ș.a. se bazează pe folosirea unor noțiuni anterioare; este bine să se deducă relațiile indicate pentru calcul și să se gîndească asupra semnificației lor.

Tratarea capitolelor *scheme de chimizare* a unor materii prime sugerează multiple posibilități de transformare chimică, importante din punct de vedere industrial, și recomandăm ca pentru toate căile de chimizare indicate, acolo unde este posibil (ținînd seama de cunoștințele existente în manual), să se folosească (sub formă de exerciții individuale) formule chimice, ecuații chimice.

În afara celor menționate, recomandăm rezolvarea cu atenție a tuturor întrebărilor, exercițiilor și problemelor existente în manuale, indiferent dacă acestea sînt incluse în textul general al lecțiilor sau la sfîrșitul capitolelor.

Confruntarea programei pentru admitere cu manualul, nu trebuie să se facă mecanic, deoarece cunoștințele se condiționează reciproc, iar acolo unde este cazul, trebuie să se revadă unele chestiuni din capitolele existente în manuale, dar care nu sînt prevăzute în programă, dacă acele noțiuni pot fi utile înțelegerii sau aprofundării unor cunoștințe inserate în alte capitole (desigur, aprecierea rămîne la latitudinea candidatului, care trebuie să fie conștient de nivelul pregătirii sale).

### 3. NECESITATEA CORELĂRII CUNOȘTINȚELOR, A FENOMENELOR

Acest aspect a fost abordat anterior în mod tangențial, dar în cele ce urmează ne vom referi, în special, la unele tipuri de subiecte, dintre acestea marea lor majoritate necesitînd pentru o tratare corectă și completă corelarea cunoștințelor și înțelegerea fenomenelor chimice, sub multiplele lor aspecte.

Programa de admitere permite formularea unui mare număr de subiecte pentru diversele profile cărora se adresează, acestea putînd fi structurate astfel încît să se verifice cunoștințele dobîndite, gradul în care au fost înțelese și reținute.

De obicei, fiecare probă reprezintă de fapt un set de subiecte (conține mai multe puncte), iar pentru acestea menționăm următoarele posibilități.

a) Subiectul poate fi formulat astfel încît, să corespundă unui titlu care are o anumită pondere în manual. În acest caz tratarea subiectului necesită uneori redarea în scris a noțiunilor tratate la titlul sau subtitlul din manualul respectiv, sau necesită unele completări, noțiuni ce fac parte din același subiect fiind tratate într-un alt manual care a fost studiat în timpul liceului.

b) Subiectul poate avea o formulare care ea însăși evidențiază faptul că este un subiect de sinteză (bineînțeles formularea nu corespunde vreunui titlu din manuale), ca de exemplu: „*Reacții de adiție ale compușilor organici*“, „*Reacții de reducere ale compușilor organici*“, „*Tipuri de legături chimice și posibilități de scindare a acestora în procesele chimice*“, „*Reacții mai importante ale unor compuși anorganici care stau la baza proceselor industriale cunoscute*“ etc., se poate formula un număr foarte mare de subiecte de sinteză.

Subiectele de sinteză pot fi de o complexitate mai mare sau mai mică, tratarea lor necesitînd o bună sistematizare, ordine de prezentare și, bineînțeles, să cuprindă toate problemele care au fost studiate și fac parte din subiect, indiferent dacă acestea au fost prezentate într-un anumit an de studiu sau în ani diferiți. Cele menționate subliniază clar necesitatea corelării cunoștințelor.

c) Subiectul poate fi un exercițiu care are ca scop, de exemplu, testarea cunoștințelor în domeniul sintezei și al proprietăților unor compuși chimici, solicitînd candidatului să treacă de la o clasă de compuși la alta, trebuind totodată să precizeze unele materii prime de la care se poate porni pentru a se obține anumiți compuși care sînt indicați, să precizeze care sînt produșii de reacție dacă se pornește de la anumiți reactanți. Desigur, exemplele care se cer au fost studiate, fac parte



din programă, dar o astfel de formulare testează capacitatea candidatului de a utiliza cunoștințele.

d) Subiectul poate fi formulat tip schemă de reacții, mai simplă sau mai complexă, în care se indică produsul inițial care, în anumite condiții de lucru (acestea fiind precizate), conduce în urma transformărilor chimice suferite la un număr mai mare sau mai mic de compuși chimici a căror structură trebuie să fie dedusă de la etapă la etapă. Schema poate indica structura unor compuși, care se obțin în diferite etape, și solicită stabilirea structurii compusului inițial, a unor compuși intermediari ș.a. Uneori se pot indica pentru unii compuși formulele moleculare, în alte cazuri indicându-se formula de structură a compuşilor care se obțin, se cere să se precizeze reactivii necesari etc. Astfel de scheme de reacții pot fi de o mare diversitate.

e) Subiectul poate fi formulat tip problemă, care necesită calcule numerice. Problemele, ca și celelalte tipuri de subiecte menționate, pot fi diferite, cu grad de complexitate variabil, de obicei gradul de complexitate al subiectelor de celălalt tip (denumite teoretice) și al problemelor se echilibrează în proba dată la examen astfel încât prin setul de subiecte dat să se poată trece prin programa tuturor anilor de studiu. Rezolvarea problemelor cu calcule numerice, în funcție de conținutul enunțului, poate solicita candidatul în mod diferențiat. În marea majoritate a cazurilor (cu excepția, în special, a problemelor de la subcapitolul *Soluții*), pentru a fi corect rezolvate, trebuie să fie cunoscută reacția, sau reacțiile chimice, la care se referă enunțul.

Problemele cu un grad relativ mai mare de dificultate necesită o foarte bună corelare a cunoștințelor teoretice, o cunoaștere a relațiilor matematice necesare calculării valorii unor mărimi solicitate de problemă, o prezentare logică a etapelor rezolvării.

Mărimile care se cer a fi determinate, începând eventual de la numărul particulelor existente în nucleele unor elemente, pentru care se indică  $Z$  și  $A$  și până la determinarea cantităților unor compuși formați în urma unei reacții (sau dintr-un amestec dat), în condiții bine determinate, utilizând o metodă indicată sau alegând o cale pe baza cunoștințelor acumulate, sînt cele care au fost indicate în manuale. Acestea se pot condiționa, se pot corela în diferite moduri și utiliza în cadrul unor probleme în cele mai variate feluri testînd prin ele cunoștințe din toate capitolele.

Desigur, de la profil la profil, subiectele din setul probei de examen se asamblează în concordanță cu programa și cu cerințele concursului de admitere.

Din cele menționate apare clar faptul că elevul, viitorul candidat la examenul de admitere în învățămîntul superior trebuie să știe să învețe, să cunoască toată materia prevăzută de programă, să fie capabil să utilizeze cunoștințele, și nu doar să le reproducă compartimentat, să poată reda clar prin scris ceea ce știe pentru a se putea aprecia corect ceea ce știe.]

În încheierea acestui breviar dorim să atenționăm cititorii asupra faptului că pentru mulți tineri din țara noastră și din lumea întreagă, chimia nu este doar un oarecare obiect care se studiază în școală, care devine important atunci cînd reprezintă una dintre disciplinele obligatorii la examenul de admitere în facultate, ci este o cale de cunoaștere, de înțelegere „a vieții“, o cale de a concretiza condițiile de trai cu trăsăturile lor specifice în anumite etape.

Calea care conduce la cele menționate este de fapt o îmbinare de muncă sistematică și dăruire. Cu cit un tînar care înțelege bine de la început ceea ce oferă primele manuale de chimie și reflectează la definiția chimiei ca „știință a materiei“, materie fiind tot ceea ce ne înconjoară, și realizează care sînt posibilitățile pe care le

oferă chimia de a descifra compoziția materiei și schimbările pe care le suferă aceasta, cu atât va căuta să cunoască mai mult.

Această dorință vie, stimulată și orientată de profesori, îi conduce în final pe cei dotați, perseverenți și pasionați la cucerirea treaptă cu treaptă a unor bine-meritate recunoașteri a calității pregătirii lor profesionale în domeniul chimiei, în cadrul concursurilor, olimpiadelor, care se organizează în țară la diferite nivele, inclusiv la olimpiadele internaționale de chimie, în cadrul cărora reprezentanții țării noastre au obținut de-a lungul anilor frumoase rezultate.

Deoarece prin subiectele care se dau la examenele de admitere ne ridicăm în cadrul unei programe doar până la un anumit nivel, am selectat și introdus în această lucrare și unele probleme date la olimpiade, la etapa națională, pentru a atenționa asupra multiplelor posibilități și grade de dificultate ale unor probleme care nu depășesc prin conținutul lor actualele programe.

Pentru că viața este de fapt un concurs continuu cu nespus de multe fațete și implicații, iar uneori nu ne cunoaștem suficient sau deloc concurenții, pentru că este strict necesar să știm ce ni se cere, la ce nivel sîntem, unde trebuie să ajungem, am selectat și citeva exemple de probleme care s-au dat în ultimii ani la olimpiadele internaționale de chimie.

Parcursirea rezolvărilor acestor probleme va evidenția faptul că absolvenții de liceu, participanți la concursurile internaționale orientați spre chimie, pasionați, probabil viitorii deschizători de noi drumuri în chimie au un nivel de pregătire ridicat. Aceste concursuri impun aprofundarea unor domenii moderne care nu sînt studiate în școală.

Modul de a pune problemele, legarea lor de viață, de aspecte concrete, atenția care se dă biochimiei, apoi corelarea cunoștințelor de chimie anorganică, organică, chimie-fizică, biochimie, sugerează necesitatea unui anumit mod de a învăța, necesitatea realizării conexiunilor după cunoașterea temeinică a problemelor de bază.

Într-o carte recentă se afirma: „*Toate științele se întrepătrund puternic cu chimia, ele depind de ea și se bazează în mare măsură pe ea. Se poate considera că într-adevăr chimia reprezintă o parte din fiecare dintre științele naturii și nimeni nu poate ajunge departe într-un domeniu dat fără cunoștințe din domeniul chimiei*”.

Să reflectăm asupra acestei realități și singuri vom găsi multe argumente care vin în sprijinul studiului chimiei.

Afirmăm adesea, și nu greșim, că *chimia este o știință experimentală*; dar aceasta nu exclude teoria, aspectele teoretice ale modificării compoziției chimice trebuie cunoscute, respectiv în ce condiții au loc sau nu transformările chimice, de ce au loc, ce compus se va forma? Toate acestea sînt aspecte teoretice, iar teoria devine subiectul experimentului.

Dacă absolvenții liceelor noastre sînt familiarizați cu unele probleme generale ale domeniilor chimiei — chimie anorganică, chimie organică, chimie analitică, chimie fizică —, care s-au dezvoltat în mod impresionant în ultimele decenii, aceasta și datorită matematicii și fizicii, să aruncăm totuși, măcar un glînd fugar — pentru ceea ce există azi în vastul domeniu al acestei științe — *chimia* —, respectiv atîtea alte direcții, ca întrepătrunderi ale domeniilor de bază, ale acestora cu alte științe, sau noi dezvoltări ca de exemplu: *biochimie, chimia polimerilor, chimie bioanorganică, chimie bioorganică, chimie-fizică organică, chimie farmaceutică, chimie clinică, chimie agricolă, chimia solului, geochimie, oceanochimie, cosmochimie, chimia mediului ambiant* și enumerarea poate continua.



Cunoașterea compoziției materiei și a transformărilor ei, necesitățile societății umane, a condus inventivitatea omului mai departe și prin ingineria chimică, care oferă posibilitatea de a aplica realizări de laborator la nivel industrial prin proiectarea și exploatarea uzinelor chimice, chimia a intrat adinc în viața oamenilor, este strins legată de toate aspectele ei.

Frumusețea acestei științe, „chimia“, care poate fi înțeleasă cu mintea și care uimește prin ceea ce oferă, face posibilă înțelegerea unei lumi fascinante, a atomilor, ionilor, moleculelor care au o dinamică extraordinară și specifică.

Generații de pasionați s-au străduit de-a lungul deceniilor, în laboratoare create din ingeniozitate și pe baza unor noi date acumulate și metode de lucru inventate, să cunoască și să aprofundeze cunoașterea, să enunțe legile chimiei, să pătrundă cit mai adinc în complexitatea fenomenelor chimice pe care să le stăpânească, să le modeleze și să le pună cinstit în slujba omului.

Mai subliniem în acest context doar faptul că datoria fiecăruia este să înțeleagă că știe încă foarte puțin și că trebuie să lupte pentru a ști cit mai mult.



## B. PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR

### ENUNȚURI 1984

#### 1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC ȘI UNIVERSITAR

##### α. PROFILURILE CHIMIE, BIOCHIMIE, CHIMIE FIZICĂ

I.1°. Indicați care dintre sărurile

$\text{Na}_2\text{S}$ ,  $\text{K}_2\text{SO}_4$ ,  $\text{FeCl}_3$ ,  $\text{AgBr}$ ,  $\text{Al}(\text{NO}_3)_3$ ,  $\text{NaCl}$ ,  $\text{KCN}$  și  $\text{CuSO}_4$

hidrolizează în soluție apoasă și ce caracter acido-bazic are soluția. În cazul  $\text{KCN}$  scrieți expresia constantei de hidroliză.

2°. Se prepară 1,5 kg soluție  $\text{H}_2\text{SO}_4$  40% prin amestecarea unei soluții de  $\text{H}_2\text{SO}_4$  80% cu o soluție de  $\text{H}_2\text{SO}_4$  20%. Presupunind că volumul nu variază la amestecare, se cere:

a) cantitățile de soluție 80% și, respectiv 20% (exprimate în g), ce trebuie amestecate;

b) volumul de hidrogen (măsurat în condiții normale) ce se poate obține teoretic prin reacția soluției obținute cu 0,52 kg zinc pur;

c) cantitatea de zinc (kg) care nu a reacționat;

d) scrieți ecuațiile reacțiilor acidului sulfuric cu următoarele substanțe:



Mase atomice: H—1, O—16; S—32, Zn—65.

3°. Scrieți reacțiile posibile cu acidul clorhidric și, respectiv, clorul la următoarele hidrocarburi: a) propenă; b) acetilenă; c) benzen; d) toluen. Pentru toluen se vor scrie și mecanismele de reacție.

4°. Un monoester provenit de la un acid alifatic saturat și un alcool alifatic saturat are compoziția exprimată prin raportul de masă:  $\text{C}:\text{H}:\text{O} = 6:1:4$ . Se cere:

a) formula brută și moleculară a esterului;

b) scrieți toți esterii izomeri posibili;

c) scrieți mecanismul reacției de esterificare directă;

d) preparați unul din izomerii de la punctul b) folosind acetilena ca materie primă.

Mase atomice: C—12; H—1; O—16.

5°. Cum se prepară:

a) acid clorhidric din  $\text{NaCl}$ ;

b) carbonat de sodiu (procedeul amoniacal);

c) propilamină din etanol;

d)  $\epsilon$ -caprolactamă din fenol.

II.1°. Reacțiile de obținere (fără mecanism și tehnologie):

a)  $\text{H}_2\text{SO}_4$  din pirită ( $\text{FeS}_2$ );

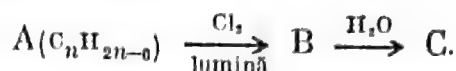
b)  $\text{H}_2$  din reacția fierului înroșit cu apă.

2°. Câte grame de  $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$  sînt necesare pentru a prepara 1 kg soluție 10% de  $\text{CuSO}_4$ ? Ce volum de apă este necesar pentru prepararea acestei cantități de soluție? Densitatea apei se consideră  $1 \text{ g/cm}^3$ .

Mase atomice: Cu—64; S—32; O—16; H—1.

3°. Reacția benzenului cu etena și propena: produși, mecanism de reacție, importanța compuşilor obținuți.

4°. Se dă succesiunea de reacții:



Știind că s-a pornit de la 3,68 kg hidrocarbură A cu masa moleculară 92 și s-au consumat 1,792 m<sup>3</sup> (condiții normale) de clor, se cere:

- formula moleculară și de structură a compuşilor A și B știind că tot clorul introdus se consumă și reacția decurge cantitativ;
- cantitatea de compus B care rezultă (moli și g);
- cantitatea (moli și g) de compus C care se formează, știind că hidroliza decurge cu randament de 75%;
- scrieți 3 reacții ale compusului C.

Mase atomice: H—1; C—12; O—16; Cl—35,5.

III.1°. Scrieți ecuațiile reacțiilor care stau la baza obținerii:

- Ca(OH)<sub>2</sub> din CaCO<sub>3</sub>; b) Cl<sub>2</sub> din NaCl.

2°. 4 l soluție H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> de concentrație 63% cu densitatea  $\rho_1 = 1,53 \text{ g/cm}^3$  se amestecă cu 6 l soluție H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> de concentrație 2 M cu densitatea  $\rho_2 = 1,14 \text{ g/cm}^3$ . Se cere concentrația procentuală și molară a soluției rezultate. (Se consideră că amestecarea celor două soluții are loc fără variație de volum.)

Mase atomice: H—1; O—16; S—32.

3°. Esterii acizilor organici: preparare. Reprezentanți: acetatul de vinil, terom (polietilentereftalat) — obținere.

4°. Un alcan A conține 17,24% hidrogen (procente de masă); prin dehidrogenare se obține hidrocarbura B a cărei compoziție este exprimată prin raportul de masă carbon/hidrogen = 6/1.

Se cere:

- formulele celor două hidrocarburi;
- scrieți toți izomerii hidrocarburilor A și B;
- scrieți reacția de adiție a apei la toți izomerii hidrocarburi B;
- calculați cantitatea (kmoli, kg) de produs B care se obține cu randament 80% din 14 m<sup>3</sup> (condiții normale) de alcan A.

### β. PROFILUL MECANO-CHIMIC

IV.1°. Care din următoarele reacții sînt posibile și care nu? Pentru reacțiile posibile discutați condițiile în care se produc și stabiliți coeficienții:

- NaCl + H<sub>2</sub>CO<sub>3</sub> →
- K<sub>2</sub>Cr<sub>2</sub>O<sub>7</sub> + H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> + KI →
- MgCO<sub>3</sub> + H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> →
- AgCl + HNO<sub>3</sub> →
- KMnO<sub>4</sub> + HCl →

2°. Tratînd cu apă un amestec de oxid de calciu și carbură de calciu (CaC<sub>2</sub>) se obțin 296 g hidroxid de calciu și se consumă 108 g apă. Considerînd substanțele pure și reacțiile totale, se cere:

- scrierea ecuațiilor reacțiilor chimice;
- masa amestecului inițial în g;
- compoziția amestecului inițial în moli și procente de masă.

Mase atomice: H—1; C—12; O—16; Ca—40.

3°. Sulfonarea benzenului, toluenului și naftalinei. Mecanismul reacției de sulfonare în seria aromatică. Utilizarea industrială a acizilor sulfonici aromatici.

4°. Hidrocarbura A cu formula C<sub>n</sub>H<sub>2n</sub> decolorează apa de brom. Știind că prin ardere din 0,1 moli A se obțin 9 g apă, se cere:

- formula moleculară a hidrocarburi A;
- scrieți alchenele izomere pentru formula de la punctul a);



- c) ce dă fiecare izomer de la punctul b) la tratare cu HCl;  
 d) scrieți pentru fiecare alchenă de la punctul b) reacția cu  $K_2Cr_2O_7 + H_2SO_4$ .  
 Mase atomice: C—12; H—1; O—16.

5°. Preparați: a) acid azotic din amoniac; b) hidroxid de sodiu din NaCl; c) acetonă din propenă; d) *p*-toluidină (*p*-aminotoluen) din benzen.

## γ. PROFILUL CHIMIE ALIMENTARĂ

V.1°. Reacții de adiție ale acetilenei.

2°. Amidonul.

3°. Mecanismul reacției de polimerizare a alchenelor în prezența acizilor tari.

4°. Să se calculeze cantitatea, în g, de acrilonitril necesară pentru a prepara 295 g propilamină, știind că randamentul reacției este de 92%.

Mase atomice: C—12; H—1; N—14.

## 2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC ȘI UNIVERSITAR (biologie)

VI.1°. Cloruri de acizi.

2°. Reacții de substituție electrofilă. Exemple. Mecanism.

3°. Care din xileni (dimetil-benzeni) conduce la un monobromderivat, la doi monobromderivați și la trei monobromderivați izomeri.

4°. Un compus cu masa moleculară  $M = 56$ , dă la analiza elementară cantitativă 85,15% C și 14,2% H. Se cer:

a) formula moleculară;

b) formulele de structură ale izomerilor posibili și denumirile lor;

c) tipul de izomerie.

Mase atomice: C—12; H—1.

VII.1°. Glicerina.

2°. Proprietățile aminoacizilor.

3°. Să se scrie ecuațiile reacțiilor chimice de transformare a etenei în: polietilenă, etanol, oxid de etilenă și etilbenzen.

4°. Din carbura de calciu de puritate 85% se obțin 134,4 l acetilenă măsurată la 0°C și 1 atm.

Se cer:

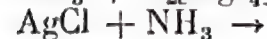
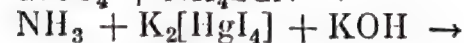
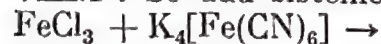
a) ecuațiile reacțiilor chimice care au loc și reactivii necesari;

b) cantitatea de carbură de calciu necesară, exprimată în g.

c) cantitatea de metan, în l, necesară pentru obținerea aceleiași cantități de acetilenă folosind procedeul cracării în arc electric prin care se realizează un randament de 60%.

Mase atomice: H—1; C—12; Ca—40.

VIII.1°. Se dau sistemele chimice:



Se cere:

a) să se scrie ecuațiile reacțiilor chimice;

b) să se denumească produșii de reacție.

2°. Electroliza sulfatului de cupru în soluție apoasă. Variante. Aplicații.

3°. Influența presiunii asupra echilibrului chimic. Exemple.



4°. Pentru oxidarea ionilor  $\text{Fe}^{2+}$ , conținuți în 50 ml soluție  $\text{FeSO}_4$  de concentrație 0,3 N, în prezență de acid sulfuric, se folosește un volum de 30 ml soluție  $\text{KMnO}_4$ .

Se cere:

- ecuația reacției chimice;
- normalitatea soluției de  $\text{KMnO}_4$ .

## ENUNȚURI

1985

### 1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC ȘI UNIVERSITAR

#### α. PROFILURILE CHIMIE, BIOCHIMIE, CHIMIE FIZICĂ

IX.1°. Indicați elementele chimice (metale și nemetale) care se obțin industrial prin electroliză și precizați:

- substanța supusă electrolizei;
- condițiile (soluție sau topitură).

2°. Se diluează 42 ml soluție de acid clorhidric 37% ( $\rho = 1,19 \text{ g/cm}^3$ ) până la un volum de 500 ml. La neutralizarea a 250 ml din această soluție cu o soluție diluată de hidroxid de potasiu se degajă o cantitate de căldură de 14,51 kJ. La neutralizarea a 250 ml de soluție de hidroxid de sodiu 2 M cu o soluție diluată de acid bromhidric se degajă o cantitate de căldură de 28,63 kJ.

Să se determine căldurile de neutralizare și să se interpreteze rezultatele obținute în cele două cazuri (Mase atomice: H—1; Cl—35,5).

3°. Peptide.

4°. Un alcool aciclic monohidroxilic saturat conține 60% carbon.

Se cere:

- formula alcoolului;
- izomeri posibili;
- indicați metoda de obținere a izomerilor de la punctul b) pornind de la o alchenă conținând același număr de atomi de carbon în moleculă.

Mase atomice: H—1; C—12; O—16.

5°. Scrieți succesiunea reacțiilor (fără mecanisme de reacție) necesare pentru obținerea:

- carbonatului de sodiu, prin procedeul sodei amoniacale;
- ciclohexanonoximei din fenol;
- 1-butanolului din acetilenă;
- acetatului de etil, din glucoză.

X.1°. Produsul ionic al apei și pH-ul soluțiilor apoase.

2°. Ce cantități de zinc și acid clorhidric 10% (în procente de masă) sînt necesare pentru a obține 15 l hidrogen (măsurați în condiții normale).

Mase atomice: H—1; Cl—35,5; Zn—65,4.

3° Cicloalcani.

4°. a) Cite g de anilină se pot obține dintr-un mol de benzen, dacă randamentul global al transformărilor este de 80%.

b) Calculați formula procentuală a anilinei.

Mase atomice: H—1; C—12; N—14.

## β. PROFILUL CHIMIE ALIMENTARĂ

### XI.1°. Acetiluri metalice.

2°. Definiția, nomenclatura și metodele de preparare ale aminelor.

3°. Să se scrie succesiunea reacțiilor în cazul următoarelor transformări:

a) amidon  $\rightarrow$  acetat de etil;

b) clorură de alil  $\rightarrow$  glicerină;

c) benzen  $\rightarrow$  benzoat de fenil.

4°. Calculați cantitatea de fenol, exprimată în kg, obținută din 10 kmoli cumen (izopropilbenzen) dacă randamentul global al reacțiilor este 70%.

Mase atomice: H—1; C—12; O—16.

## 2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC ȘI UNIVERSITAR (biologie)

### XII.1°. Compuși organici cu legături ionice

2°. Reacții de substituție radicalică.

3°. Compuși tensioactivi.

4°. O hidrocarbură A, rezultată în urma reacției de cracare, conține 85,7%C și are masa moleculară 28. Printr-o reacție Friedel-Crafts, A reacționează cu o altă hidrocarbură B, care conține 7,6% H, cu masa moleculară 78, dând compusul C. Acesta prin dehidrogenare conduce la compusul D care prin polimerizare trece în compusul macromolecular E.

Dacă se fabrică 520 kg de compus D să se afle:

a) volumul necesar de compus A;

b) volumul și cantitatea de compus B intrată în reacție, știind că densitatea acesteia este de 0,9 g/cm<sup>3</sup>;

c) masa moleculară a polimerului E dacă gradul de plimerizare este de 10 000.

Mase atomice: C—12, H—1.

### XIII.1°. Aminoacizi. Proprietăți.

2°. Reacții ale compușilor organici cu acidul sulfuric.

3°. Pornind de la 1-butanol să se indice o cale de obținere a 3-clor-2-butanolu-ului folosind reactivi anorganici.

Se cere:

a) condițiile de reacție;

b) precizarea tipului de mecanism de reacție al fiecărei etape;

c) numărul de enantiomeri ai compusului final.

4°. Știind că masa moleculară medie a produsului obținut prin policondensarea acidului tereftalic cu etilenglicolul este 2942, să se determine gradul de policondensare al produsului și cantitatea de *p*-xilen necesară pentru obținerea a 1920 kg produs, dacă randamentul global este 75%.

Mase atomice: C—12, H—1, O—16.

XIV.1°. Hibridizarea de tip  $sp^3$ . Dați exemple de molecule și ioni poliatomici care prezintă o astfel de hibridizare.

2°. Explicați de ce entropia grafitului este mai mare decât aceea a diamantului.

3°. Dați exemple de reacții de oxido-reducere în care drept agent oxidant să funcționeze permanganatul de potasiu, respectiv dioxidul de mangan. Scrieți ecuațiile reacțiilor chimice.

4°. Se consideră două soluții apoase de acid clorhidric și acid bromhidric, ambele cu concentrație 1% (procente de masă) și densitate 1 g/cm<sup>3</sup>. Considerând ambii acizi complet ionizați, se cere să se precizeze în care din cele două soluții concentrația ionilor de hidrogen este mai mare.

Mase atomice: H—1; Cl—35,5; Br—80.



1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC ȘI UNIVERSITAR

α. PROFILURILE CHIMIE, BIOCHIMIE, CHIMIE FIZICĂ

XV.1°. 1.1. Deduceți relația generală de calcul a masei de substanță separată la electrod în procesele de electroliză.

Aplicațiile electrolizei cu anod solubil. Dați două exemple.

1.2. Scrieți ecuațiile reacțiilor chimice pentru obținerea industrială a acidului sulfuric pornind de la pirită ( $\text{FeS}_2$ ). Scrieți expresia constantei de aciditate pentru acidul sulfuric în treapta a doua de ionizare.

Scrieți ecuația reacției acidului sulfuric cu azotatul de plumb și arătați de ce are loc această reacție.

2°. La temperatura de  $850^\circ\text{C}$ , constanta de echilibru a reacției:



are valoarea  $K_c = 1$ . Presupunând că inițial, în vasul de reacție având capacitatea de 1 l se găsesc 0,2 moli de  $\text{CO}_2$  și 0,8 moli de  $\text{H}_2$ , să se calculeze:

- concentrațiile de echilibru ale celor patru componenți;
- volumul soluției de  $\text{Ca}(\text{OH})_2$  de concentrație 0,01 N care absoarbe dioxidul de carbon aflat în sistem la stabilirea echilibrului (se formează sare neutră).

Mase atomice: Ca—40; C—12; O—16; H—1.

3°. Nitrarea compușilor aromatici. Exemplificați la: benzen, toluen, naftalină, fenol și anilină (pentru benzen și toluen se cer ecuațiile mono-, di- și trinitrării). Mecanismul nitrării.

4°. Un volum de  $67,2 \text{ m}^3$  (condiții normale) metan se supune pirolizei, amestecul gazos rezultat fiind format din acetilenă și hidrogen. Cu acetilena formată se pot prepara 13 kg benzen (randament cantitativ).

Se cere:

- scrieți reacțiile chimice;
- calculați randamentul de obținere a acetilenei;
- preparați aldehida crotonică pornind de la acetilenă; ce cantitate de aldehidă crotonică se poate hidrogena (catalizator Ni) cu hidrogenul obținut la piroliză;
- ce monomeri vinilici se obțin din acetilenă? Scrieți reacțiile.

Mase atomice: C—12; H—1; O—16.

5°. 5.1. Se dau următoarele transformări:



Stabiliți formula substanței A; scrieți ecuațiile corespunzătoare transformărilor cerute; precizați comportarea acido-bazică a compusului A.

5.2. Obțineți din etenă acid acetic și, respectiv, acid propionic, iar din toluen acid fenilacetic ( $\text{C}_6\text{H}_5\text{—CH}_2\text{COOH}$ ). Aranjați cei trei acizi carboxilici în ordinea creșterii constantei lor de aciditate.

XVI.1°. 1.1. Definiți noțiunile: oxidare, agent oxidant, proces redox.

1.2. Scrieți ecuațiile chimice ale următoarelor procese de oxido-reducere:

- obținerea  $\text{SO}_2$  din pirită ( $\text{FeS}_2$ );
- obținerea clorului din HCl și  $\text{KMnO}_4$ .

2°. Ce volum de soluție 0,3 N de  $\text{HNO}_3$  este necesar pentru neutralizarea a  $30 \text{ cm}^3$  soluție 0,1 M  $\text{Ca}(\text{OH})_2$ .

Mase atomice: Ca—40; O—16; N—14; H—1.

3°. 3.1. Reacția benzenului cu clorul în prezența  $\text{AlCl}_3$ . Produși, mecanism de reacție.



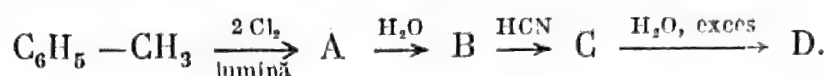
3.2. Scrieți ecuația 2-butenei cu  $\text{KMnO}_4$  în soluție bazică. Scrieți stereoizomerii produsului de reacție.

3.3. Obțineți acetona din propenă și substanțe anorganice.

3.4.  $(\text{CH}_3)_2\text{CH}-\underset{\text{NH}_2}{\text{CH}}-\text{COOH}$ , denumire și reacții chimice cu: a)  $\text{CH}_3\text{COCl}$ ;

b)  $\text{NaOH}$ ; c)  $\text{HCl}$ .

3.5. Completați succesiunea de reacții:



Pentru formarea lui A scrieți și mecanismul.

4°. Esterul etilic saturat  $\text{R}-\text{COOC}_2\text{H}_5$  are raportul de masă  $\text{H/O} = 1/4$ .

Se cere:

a) formula moleculară a esterului;

b) scrieți izomerii (acizi carboxilici și esteri) corespunzători formulei moleculare de la punctul a);

c) calculați cantitățile de acid și alcool etilic necesare obținerii a 61,6 g ester etilic știind că amestecul supus esterificării este echimolecular, randamentul de reacție fiind 70%.

Mase atomice: C—12; H—1; O—16.

## 2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC UNIVERSITAR (biologie)

XVII.1°. Reacții catalizate de săruri.

2°. Compuși halogenați nesaturați.

3°. Să se scrie formulele tetrapeptidelor izomere care rezultă din reacțiile alanil-glicinei cu valina și serina.

4°. La obținerea  $\text{CH}_3\text{Cl}$  din metan și clor se supun clorurării 168 l de metan, clorul consumându-se integral. Din reacție rezultă un amestec de  $\text{CH}_3\text{Cl}$ ,  $\text{CH}_2\text{Cl}_2$ ,  $\text{CHCl}_3$ ,  $\text{CCl}_4$  și  $\text{CH}_4$  nereacționat în rapoarte molare de 5:3:2:1,5:1.

Se cere:

a) conversia utilă și randamentul;

b) volumul de clor măsurat în condiții normale;

c) volumul de acetilenă ce se poate obține prin cracarea metanului nereacționat, cu o conversie utilă de 60%.

XVIII.1°. Reacții cu formarea unei noi legături C—C.

2°. Adiția electrofilă.

3°. Un compus A dă la analiza elementară cantitativă 85,71% C, 14,29% H și are masa moleculară 84.

Se cere:

a) formula brută și formula moleculară a compusului A;

b) izomerii posibili cu catenă normală;

c) indicarea izomerilor etenici și precizarea tipului de izomerie;

d) formula de structură a compusului A, știind că prin oxidare conduce la acid 2,2-dimetilpropanoic și acid formic.

4°. 560 ml dintr-un amestec de propan și propenă, măsurat în condiții normale, consumă 800 mg brom.

Se cere:

a) compoziția amestecului de hidrocarburi în procente;

b) volumul de dioxid de carbon (ml în condiții normale) și cantitatea de apă (în g) ce rezultă prin arderea amestecului.

Mase atomice: H—1; C—12; O—16; Br—80.

- XIX.1°.** 1. Enunțați legea lui Hess și dați exemple de aplicație.  
Enunțați legea Laplace-Lavoisier și dați un exemplu de aplicație.  
2. Scrieți expresia pentru  $K_p$  a reacției



în funcție de presiunile parțiale și în funcție de numărul de moli. Scrieți ecuația de viteză pentru reacția  $\text{N}_2\text{O}_4 \rightarrow 2 \text{NO}_2$  și precizați ordinul de reacție. Indicați unitățile de măsură în care se exprimă fiecare termen al ecuației de viteză.

**2°.** 1. Scrieți ecuațiile chimice pentru reacția acidului azotic cu cuprul și pentru reacția acidului azotic cu hidroxidul de magneziu. Precizați ce caracter chimic manifestă  $\text{HNO}_3$  în fiecare reacție.

2. Scrieți ecuațiile reacțiilor principale care au loc la obținerea sodiei calcinate, prin procedeul amoniacal. Scrieți ecuația reacției chimice care are loc la dizolvarea în apă a carbonatului de sodiu.

**3°.** Într-un litru de soluție 0,1 N sulfat de cupru se cufundă o plăcuță de zinc. După un anumit timp, plăcuța se scoate din soluție și se constată că masa acesteia a scăzut cu 45 mg.

Se cere:

a) calculați cantitatea de metal depusă pe plăcuță și normalitatea soluției de sulfat de cupru în momentul scoaterii plăcuței;

b) reprezentați celula galvanică care are la bază reacția dintre plăcuță și soluție.

Mase atomice: Cu—63,5; Zn—65.

**4°.** Așezați următorii oxoacizi:  $\text{H}_2\text{SO}_4$ ;  $\text{HClO}_4$ ;  $\text{H}_4\text{SiO}_4$ ;  $\text{H}_3\text{PO}_4$  în ordinea crescătoare a tăriei acizilor și indicați factorul de care depinde variația tăriei acestor oxoacizi.

## ENUNȚURI

1987

### 1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC ȘI UNIVERSITAR

#### α. PROFILURILE CHIMIE, BIOCHIMIE, CHIMIE FIZICĂ

**XX. 1°.** Se consideră grupa metalelor alcaline. Se cere:

1. precizați variația caracterului metalic și a energiei de ionizare a elementelor în grupă;

2. metoda industrială de obținere a sodiului;

3. scrieți ecuațiile reacțiilor chimice ale hidroxidului de sodiu cu clorul, clorura de amoniu și, respectiv, sulfat de aluminiu (fără și cu exces de hidroxid de sodiu);

4. precizați natura legăturii care apare în compusul format de potasiu cu elementul cu numărul atomic  $Z = 9$  și indicați proprietățile fizice ale compusului.

**2°.** 50 ml soluție 0,1 N de  $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$  se acidulează cu  $\text{H}_2\text{SO}_4$  și se tratează cu 1 g KI pur. Se cere:

1. ecuația reacției chimice dintre  $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ , KI și  $\text{H}_2\text{SO}_4$ ;

2. masa teoretică (în g) de iod eliberată în reacție și masa (în g) de KI în exces;

3. masa (în g) de  $\text{H}_2\text{SO}_4$  consumată în reacție;

4. întreaga cantitate de iod formată în reacția de mai sus este separată și introdusă într-un vas de reacție împreună cu cantitatea stoechiometrică de hidrogen.



Vasul se încălzește pînă la temperatura de  $350^{\circ}\text{C}$  cînd se stabilește echilibrul chimic în fază gazoasă (constantă de echilibru  $K_c = 64$ ). Calculați masa de HI formată(g).  
Mase atomice: H — 1; O — 16; S — 32; K — 39; Cr — 52; I — 127.

3°. Monomeri vinilici. Obținere. Mecanismul general al polimerizării vinilice.

4°. Cifra de iod a unei gliceride, considerată compus unitar, este 57,33. Știind că prin hidroliza acesteia se obține glicerină, acid oleic și acid stearic, se cere:

1. formula de structură a gliceridei cu moleculă simetrică;

2. masa de săpun obținută prin hidroliza cu NaOH în exces a 1 772 kg gliceridă, știind că săpunul mai conține 10% apă (randament cantitativ);

3. volumul de hidrogen (măsurat la  $27^{\circ}\text{C}$  și 10 atm) necesar hidrogenării a 443 kg gliceridă.

Mase atomice: H — 1; C — 12; O — 16; Na — 23; I — 127.

XXI. 1°. Se consideră grupa halogenilor.

Se cere:

1. precizați variația afinității pentru electroni și a razelor ionice în grupă; aranjați halogenii în ordinea crescătoare a entropiei lor în stare gazoasă (fără precizarea valorilor numerice);

2. metoda industrială de obținere a clorului; scrieți ecuațiile a două reacții de obținere a clorului în laborator;

3. scrieți expresiile constantelor  $K_c$  și  $K_p$  pentru sistemul în echilibru:  $\text{I}_2 + \text{H}_2 \rightleftharpoons 2 \text{HI}$ ; deduceți relația dintre cele două constante;

4. scrieți ecuațiile reacțiilor clorului cu: NaOH; Fe;  $\text{H}_2\text{O}$ ; KBr.

2°. Se supune descompunerii termice cu randament 100%, 2 g dolomită impură. Se obțin 1,12 g reziduu solid (impuritățile nu se descompun termic și nu se volatilizează). O cantitate egală din aceeași dolomită tratată cu 100 ml soluție de HCl 2 N, lasă un reziduu solid de 0,16 g (impuritățile nu reacționează cu HCl).  
Se cere:

1. compoziția procentuală (procente de masă) în  $\text{CaCO}_3$ ,  $\text{MgCO}_3$  și în impurități a dolomitei;

2. volumul de  $\text{CO}_2$  (condiții normale) format în urma descompunerii termice a dolomitei și, respectiv, în reacția cu HCl;

3. cantitățile exprimate în g, de  $\text{CaCl}_2$  și  $\text{MgCl}_2$  (săruri anhidre) rezultate în urma reacției cu acidul clorhidric;

4. concentrația normală a HCl nereacționat în soluția finală (se neglijează variația de volum a soluției).

Mase atomice: O—16; Mg—24; Cl—35,5; Ca—40; C—12.

3°. Reacțiile compușilor organici cu acidul azotic. Mecanismul reacției de nitrare a naftalinei.

4°. Un copolimer A, butadien— $\alpha$ -metilstiren, conține 90,00% (procente de masă) carbon.

Se cere:

1. raportul molar butadienă— $\alpha$ -metilstiren;

2. masa moleculară medie, știind că gradul de polimerizare mediu este 100;

3. cantitatea de cumen (izopropilbenzen), în kg și în kmoli, necesară obținerii  $\alpha$ -metilstirenului cu care se poate fabrica o cantitate de 560 kg copolimer A, știind că randamentul reacției de dehidrogenare este de 75%. Mase atomice: H—1; C—12.

XXII. 1°. Se consideră următoarele elemente din perioada a 3-a: Na, Mg, Al, Si, P, S, Cl.

Se cere:

1. arătați care sînt elementele cu caracter metalic și elementele cu caracter nemetalic; scrieți formulele chimice ale hidroxizilor formați de elementele cu caracter metalic și, respectiv, ale acizilor oxigenați superiori formați de elementele cu caracter nemetalic;



2. aranjați hidroxizii și, respectiv, acizii de la punctul 1 în ordinea creșterii tăriei acestora;

3. scrieți ecuațiile reacțiilor chimice care au loc la electrozi și reacția totală la obținerea industrială pe cale electrolitică a hidroxidului de sodiu;

4. calculați pH-ul unei soluții care conține 1,005 g  $\text{HClO}_4$  în 100 ml soluție (se consideră acidul percloric total ionizat).

Mase atomice: H—1; O—16; Cl—35,5.

2°. La un volum de 500 ml soluție saturată la 25°C de clorură de argint se adaugă  $2,775 \cdot 10^{-2}$  g clorură de calciu. Considerând că prin aceasta volumul și temperatura soluției nu se modifică, se cere:

1. expresia produsului de solubilitate al clorurii de argint;

2. solubilitatea clorurii de argint la 25°C (mol/l) în apă pură;

3. concentrația ionilor de argint și, respectiv, de clor (g/l) în soluția de la punctul 2;

4. solubilitatea clorurii de argint (mol/l) în soluția obținută după adăugarea clorurii de calciu;

5. concentrația ionilor de argint și, respectiv, de clor (g/l) în soluția de la punctul 4. Se dă:  $P_{S(\text{AgCl})} = 1 \cdot 10^{-10}$  ( $\text{mol}^2/\text{l}^2$ ).

Mase atomice: Cl—35,5; Ca—40; Ag—108.

3°. Proprietățile chimice ale alcoolilor monohidroxilici și ale fenolului (fără mecanisme de reacție).

4°. La tratarea a 10,8 g dintr-o alchină A (omolog al acetilenei) cu o soluție amoniacală de hidroxid de argint se obține o cantitate de 32,2 g precipitat. Se cere:

1. formula de structură a hidrocarburii A;

2. izomerii aciclici ai hidrocarburii A;

3. ecuațiile reacțiilor alchinei A cu: a) apă; b) acid clorhidric; c) acid cianhidric; d) brom;

4. mecanismul reacției de adiție a clorului la alchina A.

Mase atomice: H—1; C—12; Ag—108.

XXIII. 1°. Se consideră elementele: C, F, N, O.

Se cere:

1. aranjați elementele în ordinea creșterii caracterului nemetalic;

2. precizați care dintre elementele menționate prezintă forme alotropice și prin ce se deosebesc acestea în fiecare caz;

3. enunțați legea lui Hess; exemplificați legea pentru cazul reacțiilor de combinare ale carbonului cu oxigenul (fără date numerice).

2°. 17,8 g aliaj Zn-Mg se tratează cu o soluție diluată de acid sulfuric, obținându-se 8,96 l hidrogen (condiții normale).

Știind că ambele metale reacționează total, se cere:

1. compoziția aliajului în procente de masă;

2. cantitatea de acid sulfuric exprimată în g, consumată în reacție;

3. cantitățile de săruri anhidre, exprimate în g, ce rezultă din reacția de mai sus.

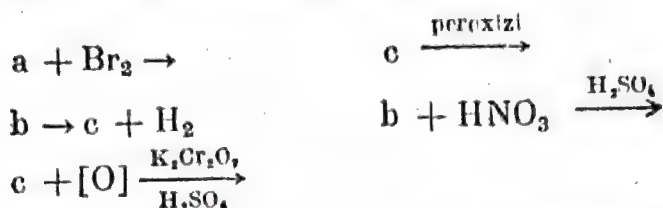
Mase atomice: H—1; O—16; Mg—24; S—32; Zn—65.

3°. Hidroliza derivaților halogenați. Mecanismul reacției de hidroliză a 2-clor-2-metil-propanului (clorura de *terț*-butil) știind că reacția decurge prin intermediul unui carbocation.

4°. Prin monoalchilarea benzenului cu o alchenă a se obține hidrocarbura b cu masa moleculară 106.

Se cere:

1. formulele de structură ale hidrocarburilor a și b.
2. să se completeze ecuațiile reacțiilor:



3. Volumul de alchenă a (condiții normale) necesar obținerii a 2 kmoli de b, dacă alchena se transformă cu un randament de 75%.

Mase atomice: H—1; C—12.

XXIV. 1°. Se consideră următoarele elemente din grupa a II-a principală: Mg ( $Z = 12$ ); Ca ( $Z = 20$ ); Sr ( $Z = 38$ ).

Se cere:

1. configurațiile electronice ale atomilor și, respectiv, ale ionilor stabili formați de aceste elemente;

2. variația caracterului bazic al hidroxizilor formați de elementele considerate;

3. scrieți ecuațiile reacțiilor:  $\text{CaCO}_3 \xrightarrow{t^\circ} \text{Ca} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{Ca}(\text{OH})_2 + \text{HNO}_3 \rightarrow$

2°. Ce cantitate de apă (g) trebuie să se adauge la 400 ml soluție de acid clorhidric de concentrație 22% (masă) și densitate 1,11 g/l pentru a obține o soluție de concentrație 10% (masă).

— Ce volum de soluție (ml) hidroxid de sodiu 5 M neutralizează complet acidul clorhidric din cantitatea de soluție 10% care rezultă mai sus.

Mase atomice: H—1; O—16; Na—23; Cl—35,5.

3°. Reacții comune aldehydelor și cetonelor (fără mecanisme de reacție).

4°. Prin oxidarea unei alchene A, ce are masa moleculară 70, cu dicromat de potasiu și acid sulfuric, se obține o cetonă B și un acid C (care nu are caracter reducător).

Se cere:

1. ecuațiile reacției de oxidare și denumirile substanțelor A, B, C;

2. ecuațiile reacțiilor dintre acidul C și: a) Zn; b) NaOH; c)  $\text{NaHCO}_3$ ; d)  $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ ; e)  $\text{PCl}_5$ ;

3. mecanismul reacției de adiție a acidului clorhidric la cetona B;

4. volumul de hidrogen (condiții normale) necesar hidrogenării a 5 kmoli de cetonă B.

Mase atomice: H—1; C—12; O—16.

### β. PROFILUL CHIMIE ALIMENTARĂ (SUBINGINERI)

XXV. 1°. Reacțiile de adiție ale alchenelor. Mecanismul reacției de adiție a hidracizilor la alchene.

2°. Să se calculeze cantitatea, exprimată în g, de acetilparatoluidină necesară pentru a prepara 280 g acid *para*-aminobenzoic, știind că randamentul global al reacțiilor este de 95,25%. Stabiliți formula procentuală a acetil-*para*-toluidinei.

Mase atomice: C—12; H—1; O—16.



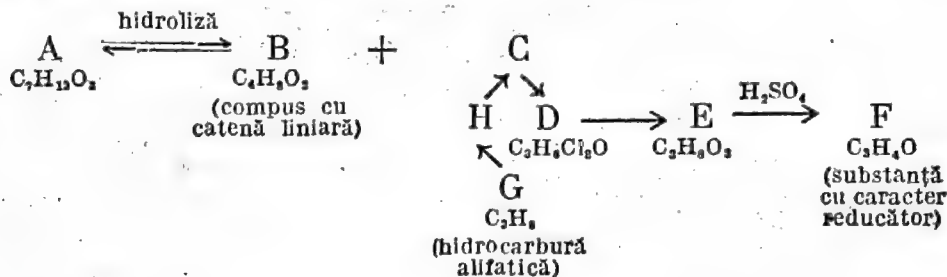
3°. Scrieți pentru amidon formula moleculară, iar pentru restul substanțelor formulele de structură și ecuațiile reacțiilor care au loc în transformările de mai jos, completând de la caz la caz, reactanții și etapele omise.

1. bromură de etil  $\rightarrow$  fluorură de etil
2. amidon  $\rightarrow$  A  $\rightarrow$  pentaacetilglucoză
3. izobutenă  $\rightarrow$  A  $\rightarrow$  izopropanol  $\xrightarrow{\text{HCl}}$  B  $\xrightarrow{\text{C}_2\text{H}_5}$  cumen  $\rightarrow$  fenol
4. clorură de metil  $\xrightarrow{\text{C}_6\text{H}_6}$  toluen  $\xrightarrow[\text{Cl}_2]{h\nu}$  A  $\xrightarrow{\text{sulfat de sodiu}}$  B
5. acetilenă  $\rightarrow$  acetaldehidă  $\rightarrow$  A  $\rightarrow$  M  $\rightarrow$  butanol  $\xrightarrow[\text{acetică}]{\text{anhidridă}}$  B
6. acetilenă  $\rightarrow$  cauciuc cloroprenic
7. benzensulfonat de sodiu  $\rightarrow$  A  $\rightarrow$  anisol
8. dioleostearină  $\xrightarrow{2\text{H}_2}$  A  $\xrightarrow{\text{hidroliză}}$  B + C
9. acetat de amoniu  $\rightarrow$  acetonitril  $\xrightarrow{2\text{H}_2}$  A  $\xrightarrow[\text{exces}]{\text{CH}_3\text{Cl}}$  B.

## 2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC ȘI UNIVERSITAR (BIOLOGIE)

XXVI. 1°. Reacțiile de adiție la alchine și hidrocarburi aromatice. (Dintre mecanismele de reacție se va trata numai mecanismul de adiție a clorului la alchine.)

2°. Se dă schema:



Se cere:

1. Formulele de structură ale compușilor A  $\rightarrow$  H; denumirile substanțelor, ecuațiile reacțiilor și reactanții necesari.
2. Cantitatea de hidrocarbură G, exprimată în l (condiții normale), necesară obținerii a 10 kg compus C (randamentul global al reacțiilor fiind 80%).
3. Precizați dacă vreunul dintre compușii A  $\rightarrow$  H prezintă izomerie geometrică sau optică. Motivați răspunsul.
4. Să se calculeze formula procentuală a substanței G.

Mase atomice: C—12; H—1; O—16.

3°. O substanță A cu catenă liniară și masă moleculară 171, conținând 70,2% C; 12,26% H; 8,24% N și 9,3% O, poate reacționa cu  $\text{P}_2\text{O}_5$ ;  $\text{H}_2\text{O}$ ;  $2\text{H}_2$  ducând la compușii organici B, C și, respectiv, D. Se precizează că:

- substanța D se poate obține și din compusul B;
- substanța C se poate prepara din compusul B sau din glicerida E (care la hidroliză dă un amestec de reacție ce conține un mol substanță C alături de doi moli acid oleic (notat cu F) — precizind că substanța C esterifică grupa OH secundară).
- Substanța D prin tratare cu clorură de metil în exces, formează compusul G.

Se cere:

1. formula moleculară a substanței A; formulele de structură ale substanțelor A  $\rightarrow$  G; ecuațiile reacțiilor respective și reactanții necesari;



2. cantitatea de compus D, exprimată în moli, necesară pentru a prepara 21,666 kg substanță G, reacția decurgând cu un randament global de 92%;

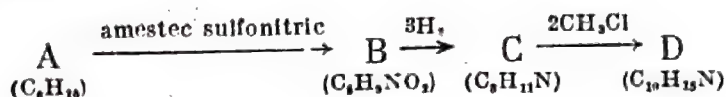
3. masa moleculară, formula moleculară și formula de structură a unui omolog inferior, notat cu H (termen cu număr mai mic de grupări  $\text{CH}_2$ ), din seria compusului C știind că prin tratarea substanței H cu amoniac se obține substanța I care conține 10,48% H; 13,33% N; 30,45% O.

Mase atomice C—12; O—16; N—14; Cl—35,5.

**XXVII. 1°.** Reacții ale grupării funcționale  $-\text{C} \begin{smallmatrix} \text{O} \\ \parallel \\ \text{H} \end{smallmatrix}$ ; exemplificări pe repre-

zentanți ai compușilor cu funcțiuni simple și cu funcțiuni mixte. (Dintre mecanismele de reacție se va trata numai mecanismul condensării aldolice, exemplificat pe acetaldehidă.)

2°. Se dă schema:



Se precizează că substanța A dă prin oxidare un compus având formula moleculară  $\text{C}_8\text{H}_6\text{O}_4$ , iar prin nitrare un singur mononitroderivat, notat B. Se cere:

1. formula procentuală a compusului A și formulele de structură ale izomerilor cu caracter aromatic ai substanței A; formula de structură a lui D;

2. formulele de structură ale izomerilor de poziție ai substanței B; mecanismul reacției de nitrare cu amestec sulfonitric pentru etapa  $\text{A} \rightarrow \text{B}$ ;

3. formula de structură corespunzătoare unui izomer al substanței C (notat cu E) care se poate obține din clorură de benzil și amina primară necesară; ecuația reacției și cantitatea exprimată în g de clorură de benzil (de puritate 90%) care se folosește pentru a prepara 200 g compus E, randamentul reacției fiind de 92%.

Mase atomice C—12; H—1; Cl—35,5; N—14.

3°. Un amestec de trei hidrocarburi izomere aciclice cu catenă ramificată notate A, B și C în raport molar 2:1:1 conținând 85,72% C și 14,28% H, având masa moleculară 70, se oxidează cu  $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7/\text{H}_2\text{SO}_4$ . Din amestecul de reacție rezultat, se separă compușii; D (provenit din A) și E (provenit din C). Prin hidrogenare D duce la F, iar din E se obține substanța G (numai compusul F poate fi separat în enantiomeri). Știind că substanța D se poate obține și din hidrocarburile izomere I sau H prin reacție Kucarov (precizând că numai H reacționează cu sodiu la cald), se cere:

1. formula moleculară a hidrocarburilor A, B și C; formulele de structură ale compușilor  $\text{A} \rightarrow \text{I}$  și ecuațiile reacțiilor la care s-au făcut referiri;

2. cantitatea de amestec ( $\text{A} + \text{B} + \text{C}$ ), exprimată în g, necesară pentru a prepara 74 g substanță F; știind că randamentul global al reacțiilor (raportat la compusul A) este de 90%;

3. să se precizeze care dintre hidrocarburile din amestecul inițial ( $\text{A} + \text{B} + \text{C}$ ) prin adăugare de acid bromhidric, duce la un derivat halogenat separabil în enantiomeri? Formulele de structură ale enantiomerilor.

Mase atomice: C—12; H—1; O—16.

**XXVIII. 1°.** Reacții ale compușilor organici catalizate de clorura de aluminu. (Dintre mecanismele de reacție se va trata numai mecanismul general al SE, cu exemplificarea acestuia la sinteza etilbenzenului.)



2°. 1. Indicați sensul în care crește polaritatea și tăria hidracizilor halogenilor.

Explicați variația entropiei acestora (exprimată în J/kmol K) în stare gazoasă:

HCl: 186,7; HBr: 198,7; HI: 206,3

Justificați răspunsul.

2. Indicați mecanismul reacțiilor dintre:

— hidrogen și iod;

— hidrogen și clor.

3. Scrieți ecuațiile a două reacții chimice de obținere a clorului pornind de la acid clorhidric.

3°. Se consideră reacția:



care decurge în fază gazoasă, la temperatura de 127°C.

Știind că la echilibru concentrațiile substanțelor sunt:

$[A] = 0,5$  moli/l;  $[B] = 1$  mol/l;  $[C] = 2,5$  moli/l

și că inițial  $[C] = 0$ , se cere:

1. concentrațiile inițiale ale substanțelor A și B;

2. valoarea constantei de echilibru  $K_c$ ;

3. valoarea constantei de echilibru  $K_p$ , la aceeași temperatură. Se dă constanta gazelor perfecte  $R = 0,082$  l·atm/mol K.



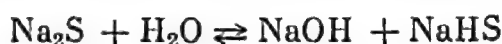
I. 1°. Subiectul se tratează conform manualului de liceu pentru clasa a XI-a avîndu-se în vedere următoarele probleme:

Definiția reacției de hidroliză a sărurilor. Tipuri de săruri care hidrolizează. Expresia generală a constantei de hidroliză. Expresii particulare cînd sarea provine de la un acid slab și o bază tare sau de la o bază slabă și un acid tare.

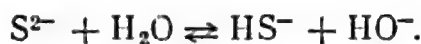
Cazul sărurilor date:

Dintre sărurile date nu hidrolizează  $K_2SO_4$  și  $NaCl$  deoarece provin de la acizi tari și baze tari și deci soluțiile apoase ale acestora vor avea un caracter practic neutru ( $pH = 7$ ). De asemenea, nu va hidroliza  $AgBr$  care este practic insolubilă în apă.

$Na_2S$  și  $KCN$  sînt săruri care provin de la baze tari și acizi slabi, deci soluțiile acestora vor avea caracter bazic ( $pH > 7$ ). În cazul  $Na_2S$  reacția de hidroliză este:



sau ionic:



Aceasta este reacția principală, cea de a doua treaptă de hidroliză, cu formare de  $H_2S$ , avînd o pondere mică la temperatura obișnuită. În cazul  $KCN$  reacția de hidroliză se va scrie:



sau ionic:



Constanta de echilibru a acestei reacții va fi:

$$K = \frac{[HCN] \cdot [HO^-]}{[CN^-] \cdot [H_2O]}.$$

Considerînd că variația concentrației apei este foarte mică și deci  $[H_2O] = \text{const}$ , ea se poate îngloba în valoarea constantei, obținîndu-se expresia constantei de hidroliză:

$$K_h = K[H_2O] = \frac{[HCN] \cdot [HO^-]}{[CN^-]}.$$

Această expresie se poate aduce la o altă formă înmulțind-o și împărțind-o cu  $[H_3O^+]$ :

$$K_h = \frac{[HCN][HO^-] \cdot [H_3O^+]}{[CN^-][H_3O^+]} = \frac{K_{H_2O}}{K_a}$$

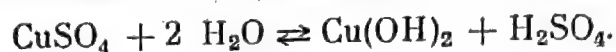
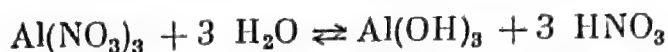
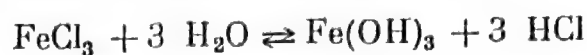
unde  $K_{H_2O} = [HO^-][H_3O^+]$  este produsul ionic al apei, iar

$$K_a = \frac{[CN^-][H_3O^+]}{[HCN]}$$

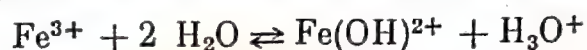
este constanta de aciditate a acidului cianhidric, HCN.

Celelalte săruri date,  $FeCl_3$ ,  $Al(NO_3)_3$  și  $CuSO_4$  sînt săruri care provin de la baze slabe și acizi tari și ca atare ele hidrolizează în soluții apoase, soluțiile avînd un caracter acid ( $pH < 7$ ).

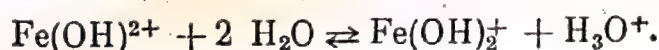
Reacțiile de hidroliză totală a acestor săruri vor fi:



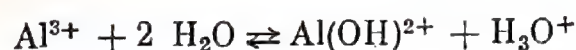
În realitate la dizolvarea acestor săruri în apă nu are loc hidroliza lor totală, ci numai parțială, în trepte, care se poate reprezenta prin următoarele reacții ionice:



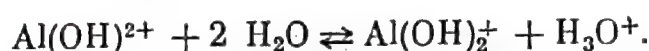
și în mai mică măsură:



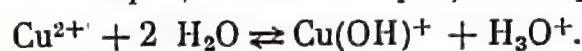
De asemenea:



și



În cazul sulfatului de cupru, hidroliza sa parțială se poate scrie ionic astfel:



La hidroliză totală se poate ajunge dacă din sistemele respective în echilibru se îndepărtează ionii  $H_3O^+$  (de exemplu prin adăugare de baze tari) sau prin încălzire puternică.

2°. a) Fie  $X$  masa în g de soluție  $H_2SO_4$  80% și, respectiv,  $Y$  masa în g de soluție de  $H_2SO_4$  20%, care trebuie amestecate pentru a obține cele 1,5 kg soluție de  $H_2SO_4$  40%. Evident că  $X + Y = 1500$ .

Cealaltă ecuație necesară se obține din bilanțul acidului sulfuric pur. Cantitatea de  $H_2SO_4$  pur existent în cele două soluții care se amestecă se regăsește în soluția de concentrație 40% preparată. Deci:

$$\begin{cases} X + Y = 1500 \\ \frac{80 X}{100} + \frac{20 Y}{100} = 1500 \cdot \frac{40}{100} \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul se obține:

$$X = 500 \text{ g soluție } H_2SO_4 \text{ 80\%}$$

$$Y = 1000 \text{ g soluție } H_2SO_4 \text{ 20\%}.$$

**Observație:** Problema se poate rezolva și prin regula dreptunghiului (vezi manualul de clasa a IX-a).

b) Ecuația reacției este:



Conform punctului c) din enunț, zincul este în exces, deci volumul de hidrogen se va calcula în funcție de acidul sulfuric pur existent în soluția obținută (600 g):

98 g $\text{H}_2\text{SO}_4$	.....	22,4 l $\text{H}_2$
600 g $\text{H}_2\text{SO}_4$	.....	X l $\text{H}_2$
X = 137,14 l $\text{H}_2$ (c.n.).		

e) Se calculează, după aceeași ecuație, cantitatea de zinc ce reacționează:

98 g $\text{H}_2\text{SO}_4$	.....	65 g Zn
600 g $\text{H}_2\text{SO}_4$	.....	Y
Y = 397,96 g Zn intrat în reacție.		

Deci cantitatea de zinc care nu a reacționat este:

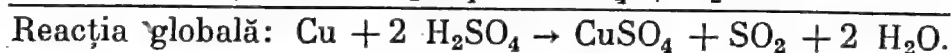
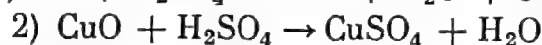
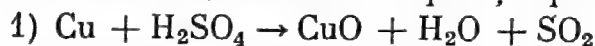
$$m = 520 \text{ g} - 397,96 \text{ g} = 122,04 \text{ g} = 0,122 \text{ kg Zn.}$$

d)  $\text{CaCO}_3 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{CaSO}_4 + \text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}$ .

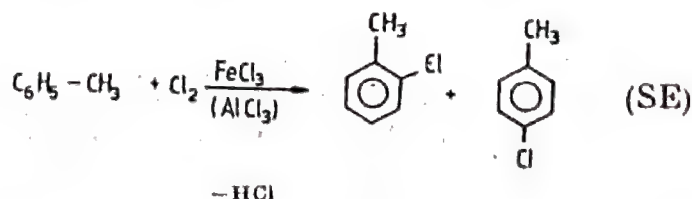
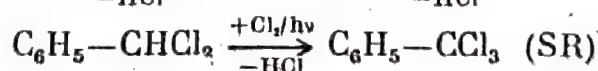
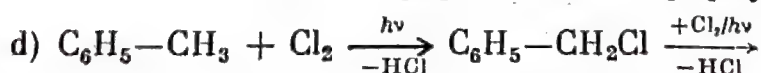
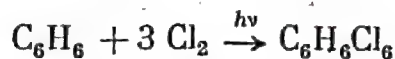
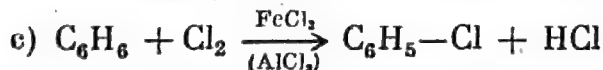
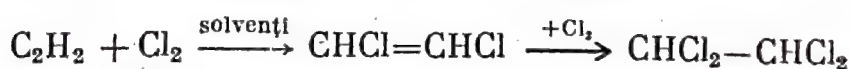
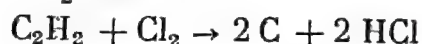
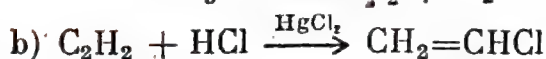
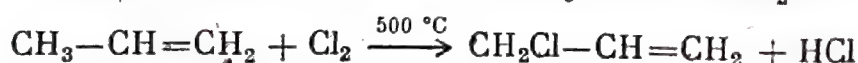
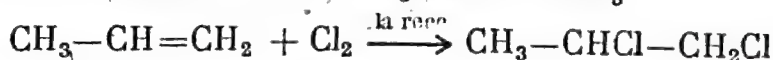
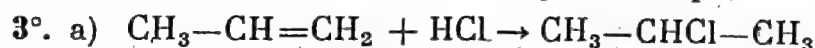
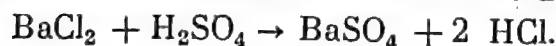
Carbonatul de calciu fiind sarea unui acid slab (acidul carbonic) este descompus de acidul sulfuric cu punerea în libertate a acidului carbonic, iar acesta fiind instabil se descompune în  $\text{CO}_2$  și  $\text{H}_2\text{O}$ .

Cuprul nu reacționează cu acidul sulfuric diluat (în absența oxigenului). Cu acidul sulfuric concentrat însă reacționează la încălzire reacția putând fi considerată ca având loc în două etape.

În prima, acidul sulfuric oxidează cuprul la  $\text{CuO}$ , sulful din acid reducându-se la  $\text{SO}_2$  (trece de la starea de oxidare +6 la +4). În etapa următoare oxidul de cupru se dizolvă în acid sulfuric formând sulfatul de cupru și apă:

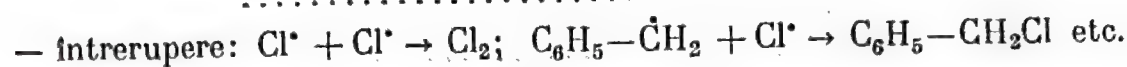
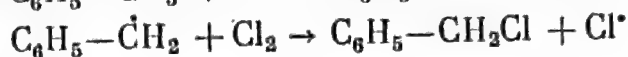
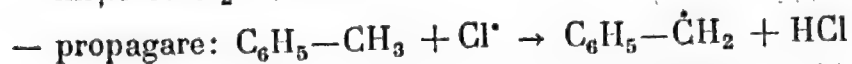
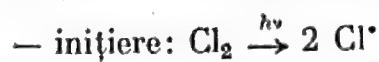


$\text{BaCl}_2$  formează cu acidul sulfuric sulfatul de bariu insolubil:

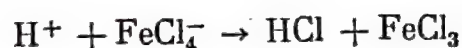
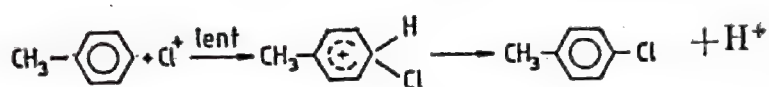




Mecanismul clorurării fotochimice a toluenului:



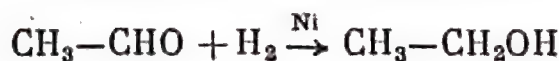
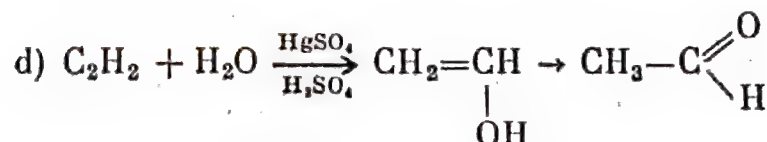
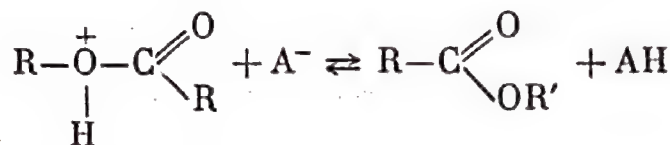
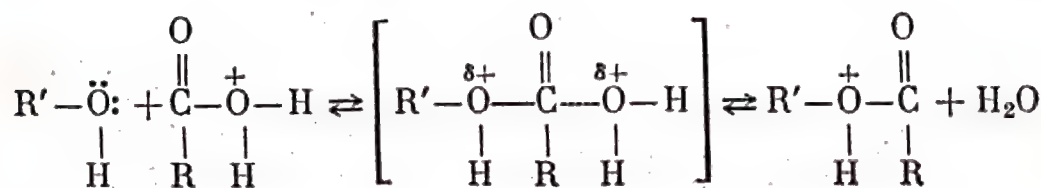
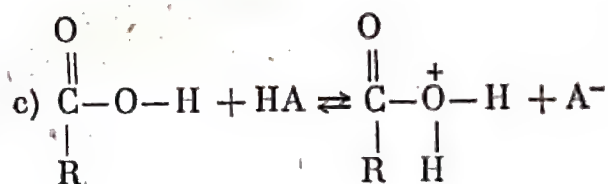
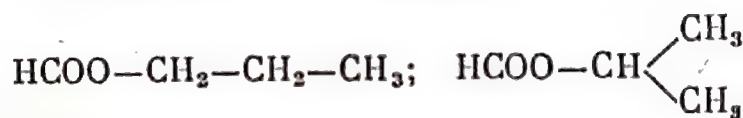
Mecanismul clorurării catalitice a toluenului:



4°. a) Se calculează formula brută și moleculară:

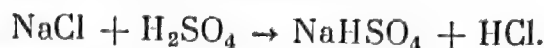
$\text{C} : \frac{6}{12} = 0,5; \text{H} : \frac{1}{1} = 1; \text{O} : \frac{4}{16} = 0,25.$

Deci formula brută este  $\text{C}_2\text{H}_4\text{O}$ , iar formula moleculară  $\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_2$  (fiind mono-ester are doi atomi de oxigen în moleculă).



5°. a) Acidul clorhidric se poate obține din NaCl prin mai multe metode din care două prezintă interes practic.

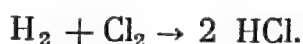
1) Prin tratarea NaCl cu acid sulfuric:



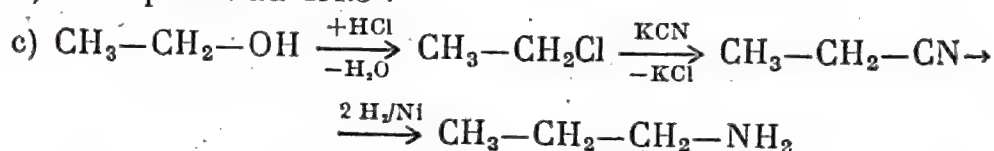
Acidul clorhidric fiind volatil, reacția are loc în acest sens și de obicei se oprește la acest stadiu la temperatură obișnuită. La temperatură mai ridicată, reacția poate decurge pînă la formarea sulfatului neutru de sodiu:



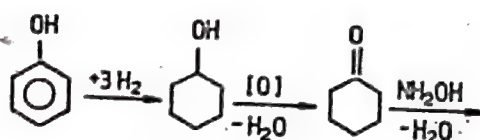
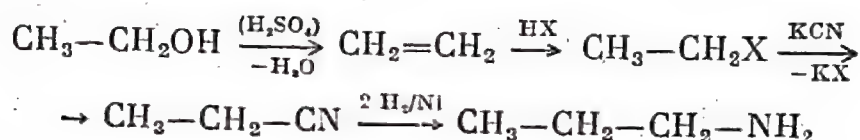
2) Prin electroliza soluției apoase de NaCl (utilizînd diverse procedee cum ar fi cel cu diafragmă sau cu catod de mercur) se obține clor gazos la anod, hidrogen gazos la catod și apoi se poate obține HCl prin sinteza din elemente:



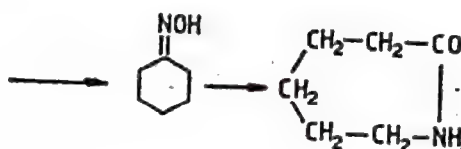
b) Vezi problema IX.5°.



sau:



d)



II. 1°. a) Vezi problema XV.1°.

b) Hidrogenul se poate obține prin trecerea vaporilor de apă peste fier înroșit (încălzit pînă la roșu). Reacția ce are loc este:



Din oxidul de fier format se poate obține din nou fierul, trecînd peste acesta un curent de oxid de carbon (din gaz de apă):



În acest fel aceeași cantitate de fier poate fi folosită de mai multe ori.

2°. Soluția ce trebuie preparată avînd concentrația procentuală 10% (procente de masă) într-un kg soluție vom avea:

$$\begin{array}{rcl} 100 \text{ g sol.} & \dots\dots\dots & 10 \text{ g CuSO}_4 \\ 1000 \text{ g sol.} & \dots\dots\dots & X \text{ g CuSO}_4 \\ \hline & & X = 100 \text{ g CuSO}_4. \end{array}$$

Se calculează cantitatea de cristalohidrat  $\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$  care conține 100 g  $\text{CuSO}_4$

Masa molară a  $\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O} = 250$ .

Masa molară a  $\text{CuSO}_4 = 160$ .

Deci:

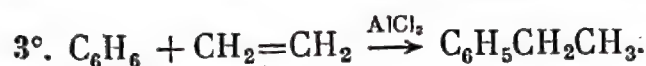
$$\begin{array}{rcl} 250 \text{ g } \text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O} & \dots\dots\dots & 160 \text{ g } \text{CuSO}_4 \\ X \text{ g } \text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O} & \dots\dots\dots & 100 \text{ g } \text{CuSO}_4 \\ \hline X = 156,25 \text{ g } \text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}. \end{array}$$

Deci pentru prepararea a 1 kg soluție 10%  $\text{CuSO}_4$  sint necesare:

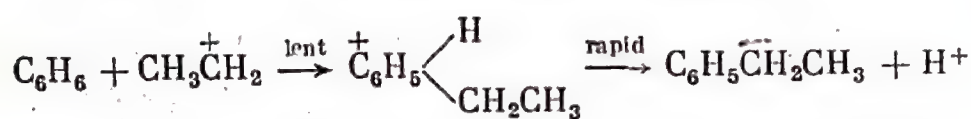
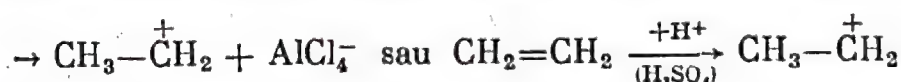
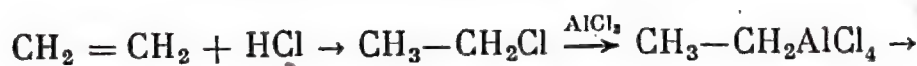
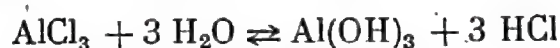
$$\begin{array}{l} 156,25 \text{ g } \text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O} \quad \text{și} \\ 1000 - 156,25 = 843,75 \text{ g apă.} \end{array}$$

Densitatea apei fiind 1 g/cm<sup>3</sup> volumul de apă necesar va fi

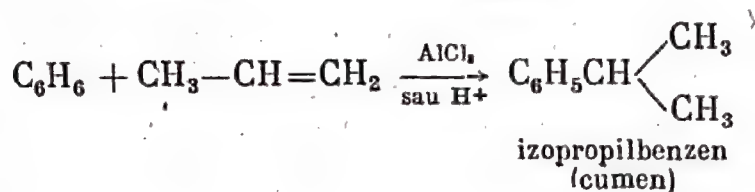
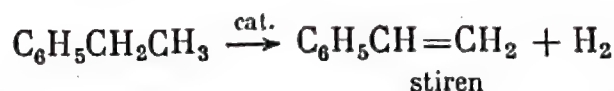
$$v = \frac{843,75 \text{ g}}{1 \text{ g/cm}^3} = 843,75 \text{ cm}^3.$$



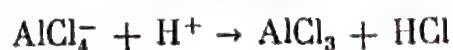
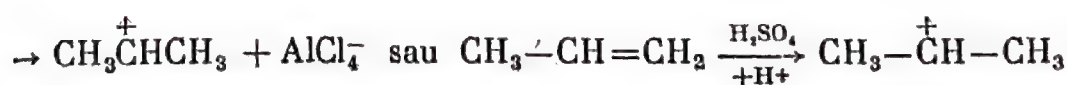
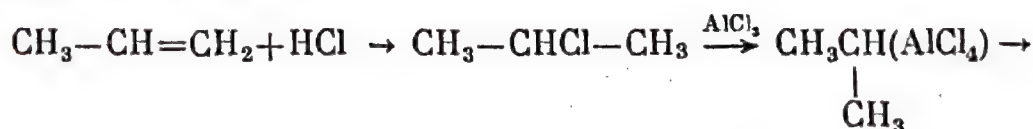
Mecanismul reacției:



Aplicații:



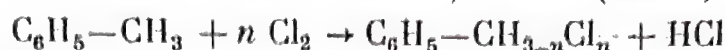
Mecanismul reacției:





4°. a) Determinarea formulei moleculare a hidrocarburii A:

$$14n - 6 = 92; n = 7 \text{ (toluen)}$$



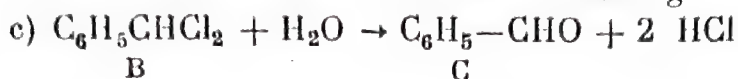
$$92 \text{ kg A} \dots\dots\dots n \cdot 22,4 \text{ m}^3 \text{ Cl}_2$$

$$3,68 \text{ kg} \dots\dots\dots 1,782 \text{ m}^3$$

$$n = 2; \text{ B} = \text{C}_6\text{H}_5-\text{CHCl}_2.$$

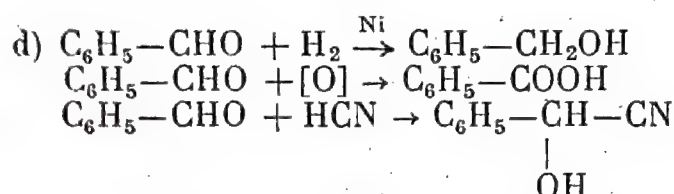
b) — număr de moli A:  $3680 : 92 = 40$  moli;

— număr de moli B:  $= 40$  moli  $= 6440$  g.



$$40 \text{ moli B} \rightarrow 40 \text{ moli C} = 4240 \text{ g};$$

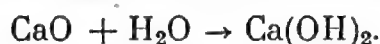
$$4240 \cdot \frac{75}{100} = 3180 \text{ g aldehydă benzoică.}$$



III. 1°. a) Prin încălzire la cca  $1000^\circ\text{C}$  are loc descompunerea calcarului:



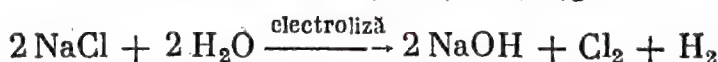
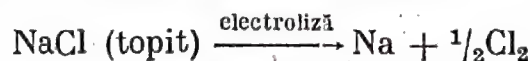
Reacția este reversibilă dar prin îndepărtarea  $\text{CO}_2$  din sistem se obține  $\text{CaO}$  (varul). Prin tratare cu apă (stingerea varului) se obține hidroxidul de calciu:



Această reacție este puternic exotermă.

b) Practic se obține numai prin electroliză.

Electroliza se poate face în topitură sau în soluție:



În principiu clorul se mai poate obține din  $\text{NaCl}$  prin acțiunea unui alt halogen cu caracter oxidant mai puternic decât clorul, adică prin acțiunea fluorului:



Reacția însă nu prezintă interes practic.

2°. Pentru a obține concentrația procentuală a soluției rezultate se calculează masele celor două soluții care se amestecă:

$$m_1 = V_1 \rho_1 = 4000 \text{ cm}^3 \cdot 1,53 \text{ g/cm}^3 = 6120 \text{ g sol. de concentrație } 63\%.$$

$$m_2 = V_2 \rho_2 = 6000 \text{ cm}^3 \cdot 1,14 \text{ g/cm}^3 = 6840 \text{ g sol. de concentrație } 2 \text{ M.}$$

Masa soluției obținute:

$$m = m_1 + m_2 = 12960 \text{ g.}$$

Prima soluție conține:

$$m_1 \cdot \frac{63}{100} = 3855,6 \text{ g H}_2\text{SO}_4.$$

Cea de a doua soluție conține

$$6 \times 2 \times 98 = 1176 \text{ g H}_2\text{SO}_4.$$

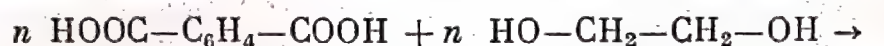
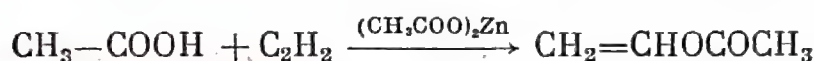
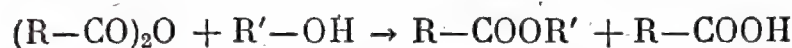
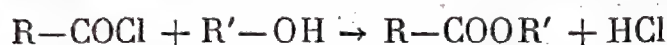
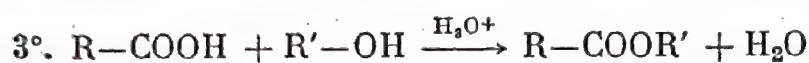
Total acid în soluția obținută  $1\,176 + 3\,855,6 = 5\,031,6$  g  $\text{H}_2\text{SO}_4$ . Deci concentrația procentuală (în procente de masă) va fi:

$$\begin{array}{rcl} 12\,960 \text{ g sol.} & \dots\dots\dots & 5\,031,6 \text{ g } \text{H}_2\text{SO}_4 \\ 100 \text{ g sol.} & \dots\dots\dots & X \\ \hline & & X = 38,82\% \end{array}$$

Pentru calculul concentrației molare se calculează volumul total al soluției obținute care este 10 l (căci amestecarea are loc fără variație de volum). Numărul de moli de acid sulfuric din această soluție este

$$n = \frac{5\,031,6}{98} = 51,34 \text{ moli.}$$

Deci la 1 l soluție revin 5,134 moli și concentrația molară a acestei soluții este 5,134 M.



$$4^\circ. \text{a) } \%C = 100 - 17,24 = 82,76\% \text{ C; } \text{C}_x\text{H}_y;$$

$$\text{C} : \frac{82,76}{12} = 6,896;$$

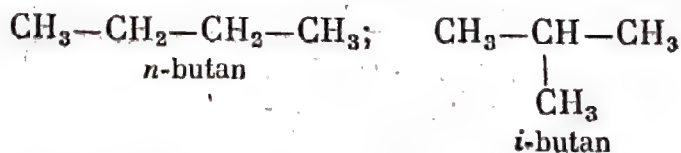
$$\text{H} : \frac{17,24}{1} = 17,24; \quad x = 1; \quad y = 2,5;$$

deci:  $x = 2; \quad y = 5$ .

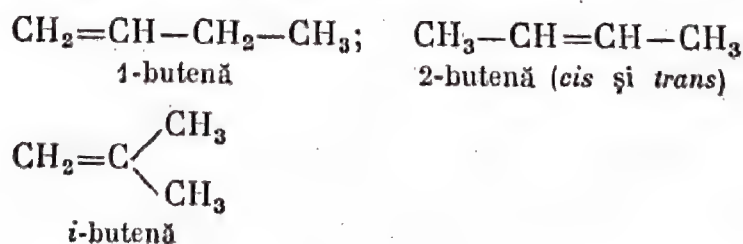
Formula brută:  $\text{C}_2\text{H}_5$ .

Nu există hidrocarburi cu număr impar de atomi de hidrogen, deci formula A este  $\text{C}_4\text{H}_{10}$ ; această formulă moleculară se încadrează în formula generală a alcanilor. Hidrocarbura B rezultată prin dehidrogenare are formula  $(\text{CH}_2)_n$  și este deci o alchenă cu formula moleculară  $\text{C}_4\text{H}_8$ .

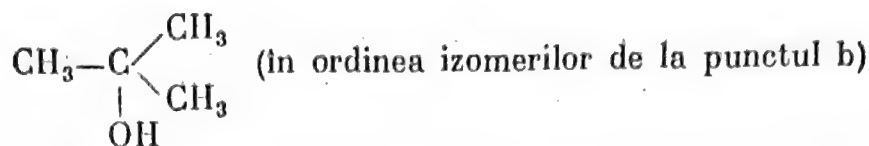
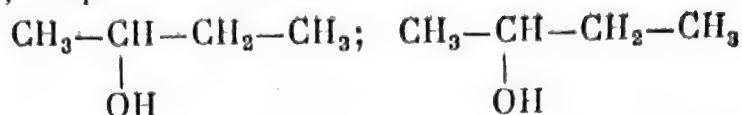
b) Hidrocarbura A are următorii izomeri:



Hidrocarbura B are următorii izomeri:



c) Prin adiția apei rezultă:

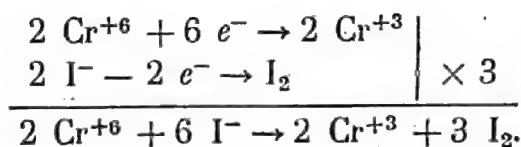


d)  $v_B = \frac{14}{22,4} = 0,625 \text{ kmoli B}$ ; la un randament de 80% rezultă  $0,625 \cdot \frac{80}{100} = 0,5 \text{ kmoli B}$ .

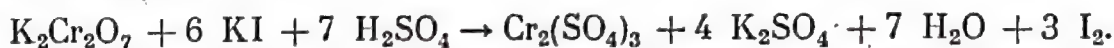
Cantitatea de butenă este egală cu  $0,5 \cdot 56 = 28 \text{ kg}$ .

IV. 1°. a) Reacția nu este posibilă fiind vorba de acțiunea unui acid slab (acidul carbonic) asupra sării unui acid tare (acidul clorhidric).

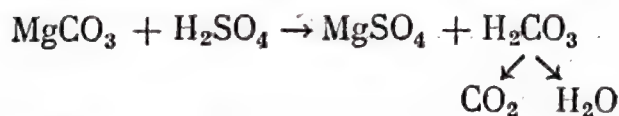
b) Este o reacție de oxido-reducere în care dicromatul de potasiu oxidează iodura de potasiu. Cromul se reduce trecând de la starea de oxidare +6, în dicromat, la starea de oxidare +3, în sulfatul de crom, pe cînd iodul se oxidează de la starea de oxidare -1, în iodura de potasiu, la starea de oxidare zero, în iodul elementar:



Reacția completă va fi:



c) Reacția este posibilă deoarece acidul sulfuric (acid tare) acționează asupra sării unui acid slab (acidul carbonic) pe care îl scoate din sarea sa. Acidul carbonic fiind instabil se descompune în  $\text{CO}_2$  și  $\text{H}_2\text{O}$ . Ecuația reacției este următoarea:

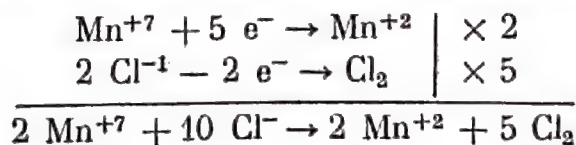


d) Reacția nu este posibilă deoarece clorura de argint este insolubilă în acid azotic.

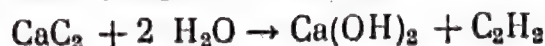
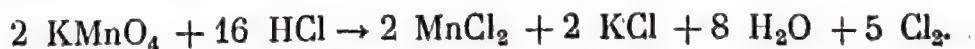
e) Este o reacție de oxido-reducere în care permanganatul de potasiu oxidează acidul clorhidric la clor elementar.

Manganul se reduce de la starea de oxidare +7, în permanganat, la starea de oxidare +2, în clorura de mangan, iar clorul se oxidează de la starea de oxidare -1, în acidul clorhidric, la starea de oxidare zero, în clorul elementar.

Reacția constituie o metodă de preparare a clorului în laborator.



Reacția completă este:





În prima reacție oxidul de calciu (varul nestins) prin reacția cu apa trece în hidroxid de calciu (var stins). În cea de a doua reacție carbura de calciu, numită și carbid, prin reacție cu apa formează acetilena și hidroxid de calciu.

b) Fie  $X$  masa oxidului de calciu exprimată în g și  $Y$  masa carburii de calciu exprimată de asemenea în g.

Se calculează masele moleculare:

$$\begin{aligned} M_{\text{CaO}} &= 56; & M_{\text{CaC}_2} &= 64 \\ M_{\text{Ca(OH)}_2} &= 74 & M_{\text{H}_2\text{O}} &= 18. \end{aligned}$$

Pe baza ecuațiilor reacțiilor chimice se calculează în funcție de  $X$  și  $Y$  cantitățile de  $\text{Ca(OH)}_2$  care rezultă din cele două reacții:

$$\begin{array}{rcl} 56 \text{ g CaO} & \dots\dots\dots & 74 \text{ g Ca(OH)}_2 \\ X \text{ g CaO} & \dots\dots\dots & m_1 \text{ g Ca(OH)}_2 \\ \hline m_1 & = & \frac{74 X}{56} \text{ g Ca(OH)}_2. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 64 \text{ g CaC}_2 & \dots\dots\dots & 74 \text{ g Ca(OH)}_2 \\ Y \text{ g CaC}_2 & \dots\dots\dots & m_2 \text{ g Ca(OH)}_2 \\ \hline m_2 & = & \frac{74 Y}{64} \text{ g Ca(OH)}_2. \end{array}$$

Cantitatea totală de  $\text{Ca(OH)}_2$  obținută din prima ecuație care leagă cele două necunoscute:

$$\frac{74 X}{56} + \frac{74 Y}{64} = 296.$$

În mod analog se calculează cantitatea de apă care reacționează cu cele  $X$  g de  $\text{CaO}$  și, respectiv,  $Y$  g de  $\text{CaC}_2$ :

$$\begin{array}{rcl} 56 \text{ g CaO} & \dots\dots\dots & 18 \text{ g H}_2\text{O} \\ X \text{ g CaO} & \dots\dots\dots & m_3 \text{ g H}_2\text{O} \\ \hline m_3 & = & \frac{18 X}{56} \text{ g H}_2\text{O}. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 64 \text{ g CaC}_2 & \dots\dots\dots & 2 \cdot 18 \text{ g H}_2\text{O} \\ Y \text{ g CaC}_2 & \dots\dots\dots & m_4 \text{ g H}_2\text{O} \\ \hline m_4 & = & \frac{36 Y}{64} \text{ g H}_2\text{O}. \end{array}$$

Cantitatea totală de apă ce rezultă din cele două reacții reprezintă cea de a doua ecuație necesară pentru rezolvarea sistemului:

$$\frac{18 X}{56} + \frac{36 Y}{64} = 108.$$

Simplificând prima ecuație cu 74 și cea de a doua cu 18 rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{X}{56} + \frac{Y}{64} &= 4 \\ \frac{X}{56} + \frac{2Y}{64} &= 6. \end{aligned}$$

Rezolvind și sistemul se obține:

$$X = 112 \text{ g CaO}; \quad Y = 128 \text{ g CaC}_2.$$

Deci sistemul inițial are masa

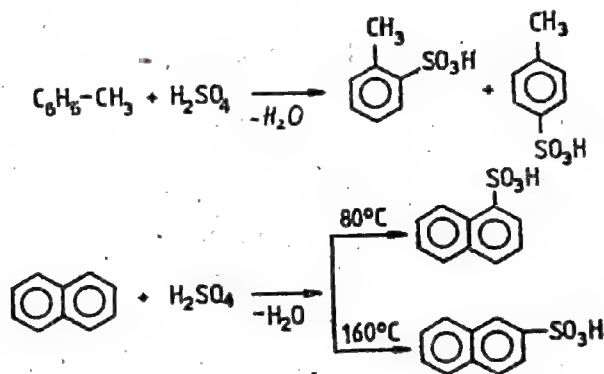
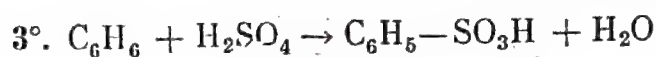
$$m = X + Y = 240 \text{ g.}$$

c) Numărul de moli de CaO din amestec este  $n_1 = \frac{112}{56} = 2$  moli, iar cel de CaC<sub>2</sub> este  $n_2 = \frac{128}{64} = 2$  moli.

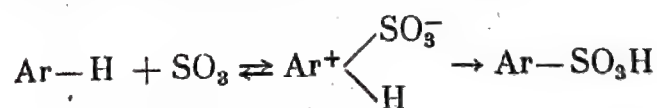
Deci amestecul este echimolecular.

Compoziția în procente de masă va fi:

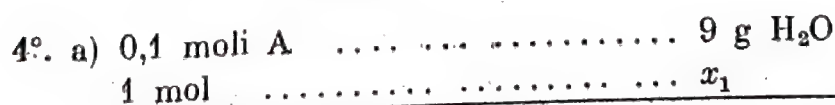
240 g amestec .....	112 g CaO
100 g amestec .....	X
<hr/>	
$X = 46,67\% \text{ CaO}$	
240 g amestec .....	128 g CaO
100 g amestec .....	Y
<hr/>	
$Y = 53,33\% \text{ CaC}_2.$	



Mecanismul reacției de sulfonare a arenelor:



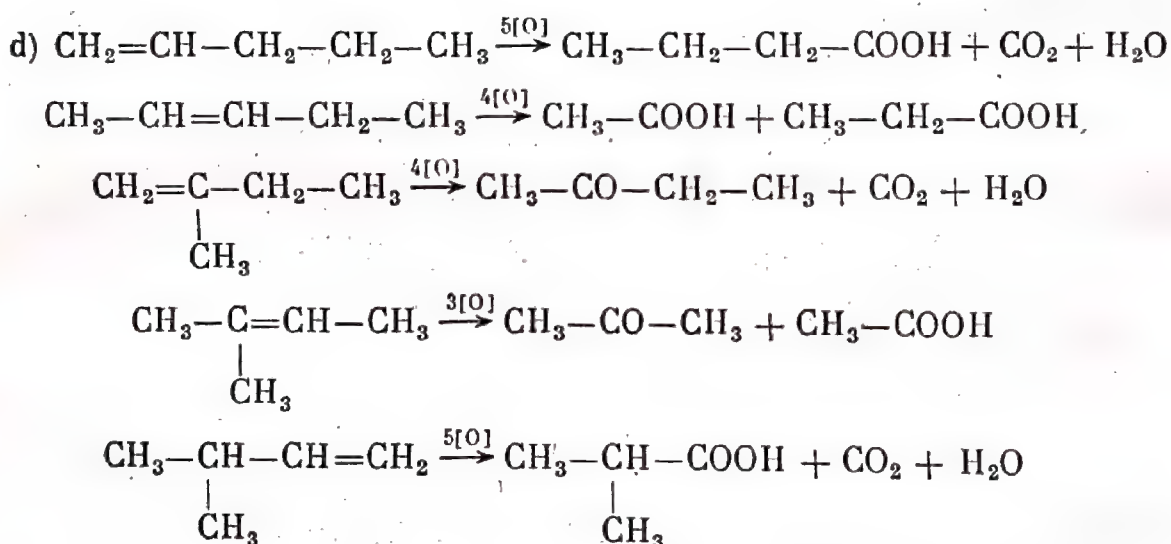
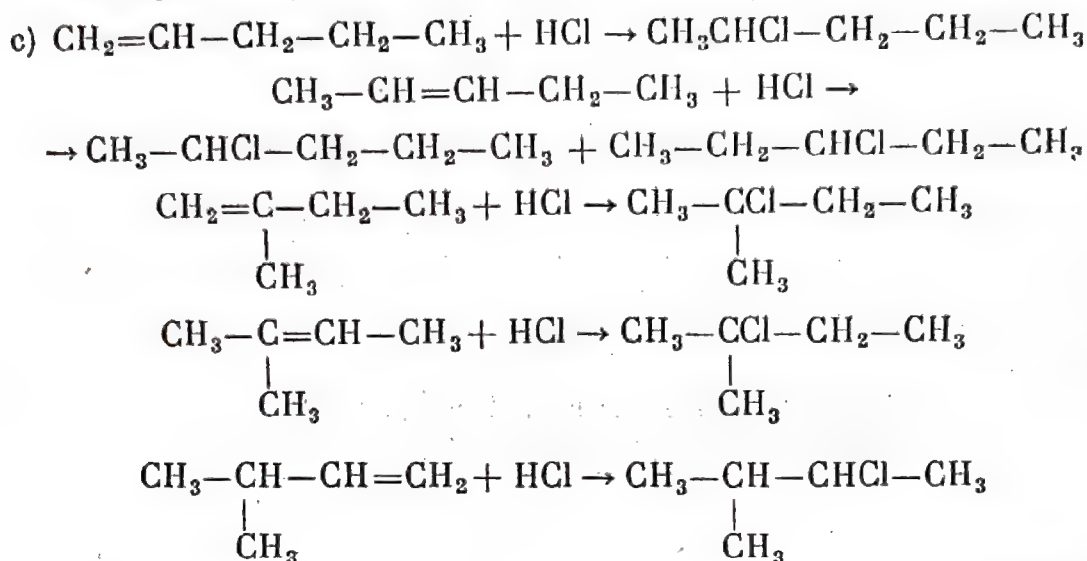
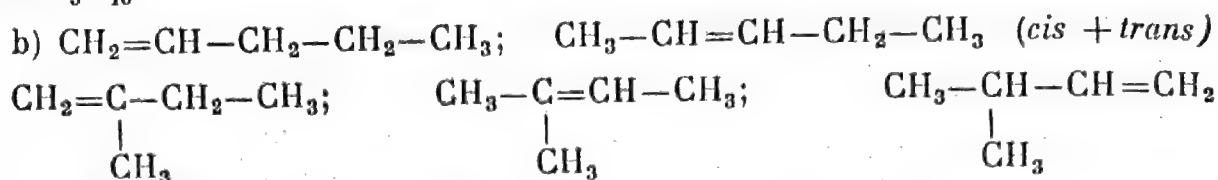
Obținerea fenolilor din acizi sulfonici aromatici:



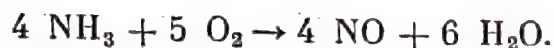
$$x_1 = 90 \text{ g H}_2\text{O}$$

$$90 : 18 = 5 \text{ moli H}_2\text{O.}$$

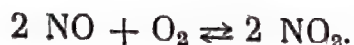
Deci A are 10 atomi de hidrogen în moleculă și-i corespunde formula moleculară  $C_5H_{10}$ .



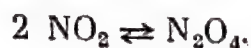
5°. a) Acidul azotic se obține industrial prin oxidarea catalitică a amoniacului, proces în care rezultă oxizi de azot care apoi sint absorbiți în apă. Principala reacție de oxidare a amoniacului este:



Reacția este catalizată de un aliaj de platină cu 3–5% rodiiu. Urmează oxidarea oxidului de azot la dioxid:

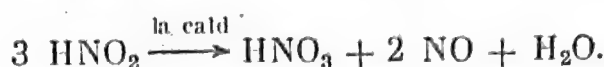
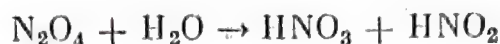
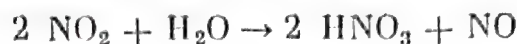


Reacția avînd loc cu contracție de volum va fi favorizată de creșterea presiunii. La temperaturi joase dioxidul de azot dimerizează:





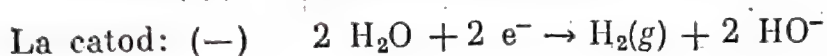
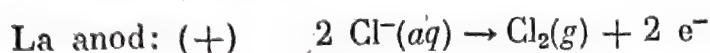
Amestecul de gaze nitroase ce conține  $\text{NO}_2$ ,  $\text{N}_2\text{O}_4$  și  $\text{NO}$  este supus absorbției în apă. Reacțiile principale ce au loc sînt:



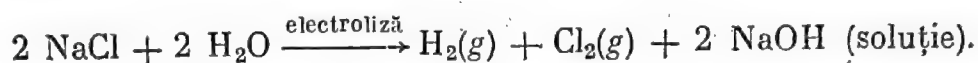
Oxidul de azot este reintrodus în proces. Procesele de absorbție sînt favorizate de temperatură scăzută și presiune ridicată.

b) Hidroxidul de sodiu se poate obține din clorura de sodiu prin electroliza acestuia în soluții apoase concentrate.

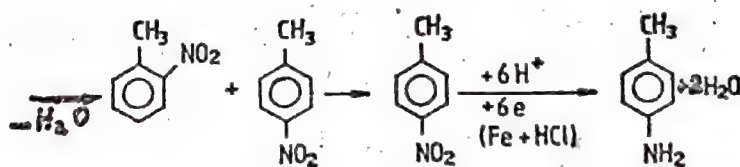
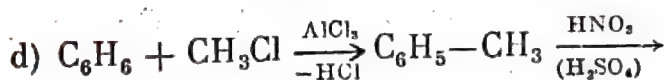
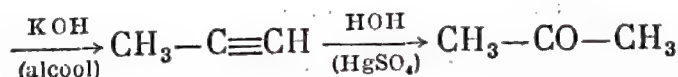
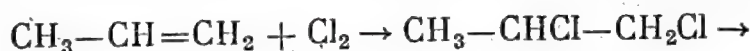
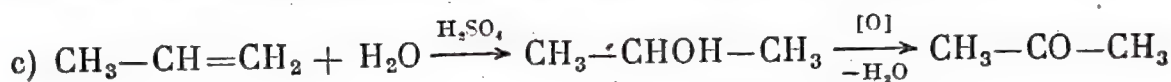
Reacțiile care au loc sînt:



Reacția totală:



În practica industrială se folosesc în principal două procedee și anume procedeul cu catod de mercur și procedeul cu diafragmă (vezi manualul pentru clasa a XI-a).

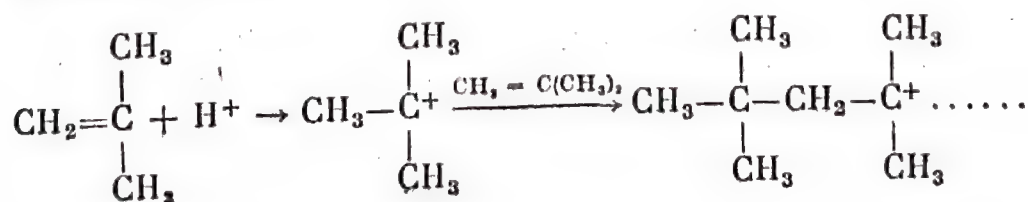


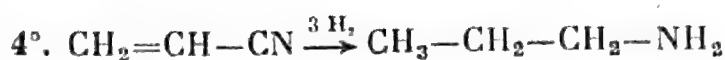
V.1°. Reacțiile acetilenei cu hidrogenul, acidul clorhidric, apa, acidul cianhidric și acidul acetic. Mecanismul adității electrophile. Dimerizarea și trimerizarea acetilenei.

2°. Amidon. Stare naturală, Compoziție.

Formulă moleculară. Proprietăți. Utilizări.

3°.  $\text{HA} \rightleftharpoons \text{H}^+ + \text{A}^-$





53 g acrilonitril ..... 59 g propilamină  
X ..... 295 g

$$X = 265 \text{ g (pentru } \eta = 100\%)$$

$$265 \cdot \frac{100}{92} = 288 \text{ g (pentru } \eta = 92\%).$$

VI. 1°. Subiectul se poate trata după următorul plan:

Definiția clorurilor acide. Formulă generală. Metode de obținere. Proprietăți chimice (reacțiile cu arene, alcooli, fenoli, amoniac, amine; reacția de hidroliză).

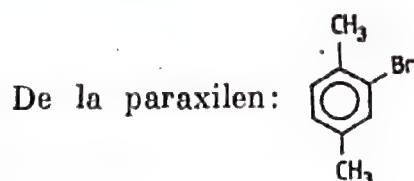
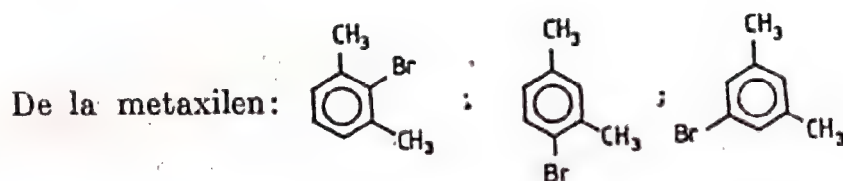
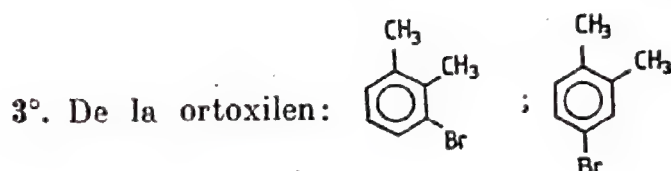
2°. Planul orientativ de tratare a acestui subiect este următorul:

Definiția reacției de substituție electrofilă. Mecanismul general al reacției de substituție electrofilă la arene.

Exemple de reacții de substituție electrofilă la arene (halogenarea, nitrarea, sulfonarea, alchilarea, acilarea).

Orientarea substituției electrofile la arene.

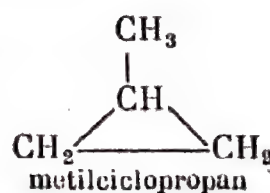
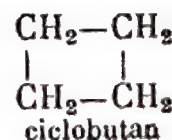
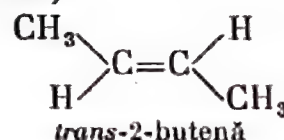
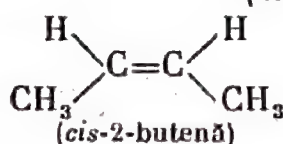
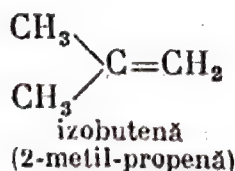
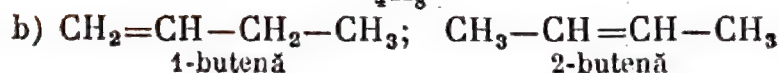
Hidroliza derivaților organomagnezieni.



4°. a) Stabilirea formulei moleculare:

$$\text{C} : \frac{85,15 \cdot 56}{12 \cdot 100} = 4 \text{ at. de C}$$

$$\text{H} : \frac{14,2 \cdot 56}{1 \cdot 100} = 8 \text{ at. de H}$$



- c) 1-butenă cu 2-butenă — izomeri de poziție,  
 izobutena cu 1-butena sau cu 2-butena — izomeri de catenă  
*cis*- și *trans*-2-butena — izomeri geometrici.

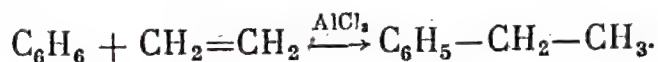
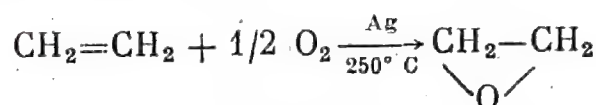
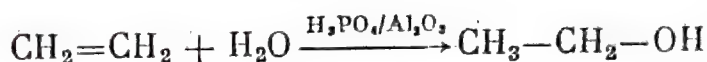
VII. 1°. Subiectul se poate trata după următorul plan orientativ:

Formula structurală și denumirea rațională a glicerinei. Metode de obținere.  
 Proprietăți fizice și chimice. Utilizări.

2°. Definiția aminoacizilor. Formulă generală.

Proprietăți fizice. Proprietăți chimice (ionizarea, reacții datorate grupei carboxil și reacții datorate grupei amino; condensarea aminoacizilor cu formarea de peptide simple și mixte).

3°.  $n\text{CH}_2=\text{CH}_2 \rightarrow (\text{CH}_2-\text{CH}_2)_n$



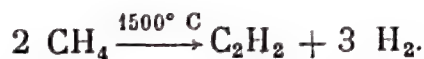
4°.  $\text{CaC}_2 + 2 \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{C}_2\text{H}_2 + \text{Ca}(\text{OH})_2$

64 g $\text{CaC}_2$ .....	22,4 l $\text{C}_2\text{H}_2$
$x_1$ .....	134,4 l

---

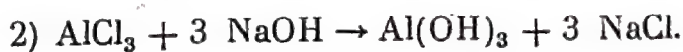

$$x_1 = 384 \text{ g } \text{CaC}_2 \text{ pură}$$

$$384 \cdot \frac{100}{85} = 451,7 \text{ g } \text{CaC}_2 \text{ de puritate } 85\%$$



$$\text{Volumul de metan: } 2 \cdot 134,4 \cdot \frac{100}{60} = 448 \text{ l.}$$

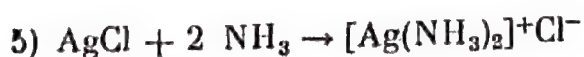
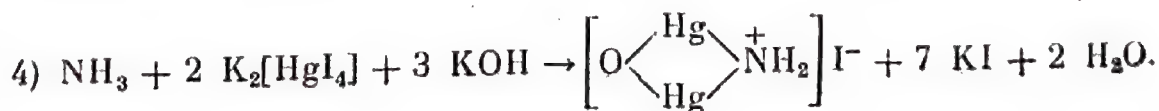
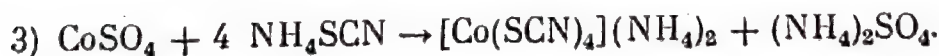
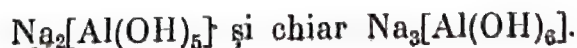
VIII. 1°. a) 1)  $4 \text{FeCl}_3 + 3 \text{K}_4[\text{Fe}(\text{CN})_6] \rightarrow \text{Fe}_4[\text{Fe}(\text{CN})_6]_3 + 12 \text{KCl}$



In exces de NaOH:



Se mai poate forma de asemenea:





b) 1) Se obține un precipitat albastru (albastru de Berlin) și clorură de potasiu. Denumirea chimică a albastrului de Berlin este hexacianoferat (II) de fier (III).

2) În prima etapă rezultă precipitatul de hidroxid de aluminiu și clorură de sodiu. Într-un exces de hidroxid de sodiu precipitatul de hidroxid de aluminiu se dizolvă formînd combinația complexă al cărei nume este tetrahidroxoaluminat de sodiu. În exces mare de NaOH pot rezulta de asemenea pentahidroxoaluminat (III) de sodiu și hexahidroxoaluminat (III) de sodiu.

3) Se formează o combinație complexă a cobaltului divalent de culoare albastră intensă, denumită tetrasulfocianocobaltiat (II) de amoniu. Rezultă de asemenea sulfat de amoniu.

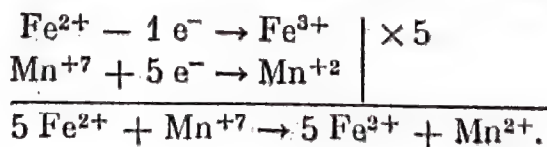
4) Prin acțiunea iodurii de potasiu asupra clorurii de mercur (II) se formează mai întîi un precipitat roșu de  $\text{HgI}_2$  care se dizolvă în exces de KI formînd combinația complexă  $\text{K}_2[\text{HgI}_4]$  — tetraiodomercuriat (II) de potasiu, denumită și reactivul lui Nessler. Acesta în prezența hidroxidului de potasiu poate fi folosit pentru recunoașterea amoniacului sau a ionilor amoniu cu care formează un precipitat roșu brun ce are structura  $\left[ \text{O} \begin{array}{c} \text{Hg} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{Hg} \end{array} \text{NH}_2^+ \right] \text{I}^-$ . Rezultă de asemenea iodură de potasiu și apă.

5) Un exces de amoniac dizolvă precipitatul de clorură de argint formînd combinația complexă numită clorură de diamino argint (I).

2°. Subiectul se tratează conform manualelor de liceu pentru clasele a IX-a și a XI-a urmărindu-se următoarele probleme: Definiția electrolizei. Fenomenele redox ce au loc la electrozi. Reacții primare și reacții secundare la electrozi. Justificarea ordinei în care se descarcă ionii la electrozi în cazul electrolizei soluțiilor apoase. Supratensiunea. Electroliza soluției de sulfat de cupru cu electrozi inerti (din platină sau cărbune). Reacții la anod și la catod. Reacția globală. Electroliza soluției apoase de sulfat de cupru cu electrozi din cupru. Reacții la electrozi, dizolvarea anodică a cuprului. Rafinarea electrolitică a cuprului. Acoperiri metalice prin depuneri electrolitice, procesul de cuprare.

3°. Subiectul se tratează conform manualelor de liceu pentru clasele a IX-a și a XI-a, avîndu-se în vedere următoarele probleme: Reacții reversibile și ireversibile. Exemple. Conceptul de echilibru chimic. Condiția termodinamică de echilibru chimic. Factori care influențează starea de echilibru. Principiul lui Le Chatelier. Influența presiunii asupra echilibrelor chimice în gaze. Cazul reacțiilor fără variația numărului de moli, cînd presiunea nu influențează echilibrul chimic. Expresia constantei de echilibru  $K_p$  funcție de gradul de avansare a reacției. Exemple de asemenea reacții. Cazul reacțiilor chimice cu variația numărului de moli. Expresia constantei de echilibru în funcție de gradul de avansare a reacției și presiunea totală. Exemple de asemenea reacții de echilibru. Aplicații practice ale deplasării echilibrelor chimice în sisteme gazoase prin intermediul presiunii. Sinteza amoniacului.

4°. a) Oxidarea ionilor  $\text{Fe}^{2+}$  la  $\text{Fe}^{3+}$  cu ajutorul permanganatului de potasiu în mediu de acid sulfuric este un proces redox în care fierul se oxidează de la starea de oxidare +2 la starea de oxidare +3, iar manganul din permanganat se reduce de la starea de oxidare +7 la starea de oxidare +2 (în sulfatul de mangan):



Reacția totală:



În procesele redox echivalentul-gram este raportul dintre masa molară și variația numărului de oxidare, deci:

$$E_{\text{FeSO}_4} = 1 \text{ mol și } E_{\text{KMnO}_4} = 1 \text{ mol/5}.$$

Se calculează numărul de moli de  $\text{FeSO}_4$  existenți în cei 50 ml soluție utilizată:

$$\begin{array}{rcl} 1000 \text{ ml sol.} & \dots\dots\dots & 0,3 \text{ Eg} = 0,3 \text{ moli Fe}^{2+} \\ 50 \text{ ml sol.} & \dots\dots\dots & X \\ \hline & & X = 0,015 \text{ moli FeSO}_4. \end{array}$$

Conform ecuației reacției chimice:

$$\begin{array}{rcl} 10 \text{ moli FeSO}_4 & \dots\dots\dots & 2 \text{ moli KMnO}_4 \\ 0,015 \text{ moli FeSO}_4 & \dots\dots\dots & Y \\ \hline & & Y = 0,003 \text{ moli KMnO}_4. \end{array}$$

Deci soluția de permanganat de potasiu a conținut 0,003 moli, adică 0,015 echivalenți-gram, în 30 ml de soluție. Deci normalitatea ei este:

$$\begin{array}{rcl} 30 \text{ ml sol.} & \dots\dots\dots & 0,015 \text{ Eg} \\ 1000 \text{ ml sol.} & \dots\dots\dots & Z \\ \hline & & Z = 0,5 \text{ N.} \end{array}$$

*Observație:* Problema se poate rezolva și mult mai simplu dacă se are în vedere că ținând cont de faptul că numărul de electroni cedați într-un proces redox trebuie să fie egal cu numărul de electroni acceptați în același proces, ceea ce conduce la relația:

$$N_{\text{ox}} \cdot V_{\text{ox}} = N_{\text{red}} \cdot V_{\text{red}}$$

unde  $N_{\text{ox}}$  și  $V_{\text{ox}}$  sint normalitatea și, respectiv, volumul soluției de oxidant, iar  $N_{\text{red}}$  și  $V_{\text{red}}$  normalitatea și, respectiv, volumul soluției de reducător. Deci:

$$N_{\text{KMnO}_4} \cdot V_{\text{KMnO}_4} = N_{\text{FeSO}_4} \cdot V_{\text{FeSO}_4}$$

de unde:

$$N_{\text{KMnO}_4} = \frac{0,3 \times 50}{30} = 0,5 \text{ N.}$$

**IX. 1°.** Subiectul se tratează conform manualelor de liceu pentru clasele a IX-a și a XI-a. Se va avea în vedere obținerea prin electroliză a halogenilor ( $\text{F}_2$ ,  $\text{Cl}_2$ ,  $\text{Br}_2$ ,  $\text{I}_2$ ), a oxigenului și hidrogenului dintre nemetale și a metalelor din grupa I-a principală (Li, Na, K, Rb, Cs), grupa a II-a principală (Be, Mg, Ca), a aluminiului, cuprului și argintului.

La obținerea fluorului se supune electrolizei un amestec de HF și  $\text{CaF}_2$ , pentru obținerea clorului și electrolizează atât topitura de NaCl, cât și soluția apoasă de NaCl (saramură), iar bromul și iodul se pot obține din soluții sau topituri ale halogenurilor respective de potasiu.

Oxigenul și hidrogenul se obțin prin electroliza apei acidulate cu acid sulfuric sau alcalinizate cu hidroxid de sodiu. Hidrogenul se mai obține și la electroliza soluției de NaCl. Metalele alcaline se obțin prin electroliza topiturilor halogenurilor sau hidroxizilor acestora.



Metalele grupei a doua principale (Be, Mg, Ca) se obțin prin electroliza topiturilor halogenurilor respective.

Aluminiul se obține prin electroliza unei topituri formate dintr-un amestec de  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (alumină) și  $\text{Na}_3[\text{AlF}_6]$  (criolit). Cuprul se obține din electroliza unei soluții de sulfat de cupru, metoda fiind utilizată mai ales pentru purificarea cuprului obținut prin metode pirometalurgice. Cuprul impur se leagă la anodul instalației de electroliză unde se dizolvă și se depune la catod sub formă de cupru pur, concentrația soluției de  $\text{CuSO}_4$  din baia de electroliză rămânând practic neschimbată.

În mod analog se purifică și argintul folosind ca electrolit azotatul de argint.

2°. Prin definiție, căldura de neutralizare este cantitatea de căldură degajată la neutralizarea unui echivalent-gram de acid tare cu un echivalent-gram de bază tare, sau, ceea ce reprezintă același lucru, căldura degajată în reacția de formare a unui mol de apă dintr-un mol de ioni  $\text{H}^+$  și un mol de ioni  $\text{HO}^-$ .

Se calculează cantitatea de HCl pur existent în soluția dată:

$$m_{\text{soluție}} = 42 \text{ cm}^3 \cdot 1,19 \text{ g/cm}^3 \simeq 50 \text{ g soluție KCl}$$

$$\begin{array}{rcl} 100 \text{ g soluție} & \dots\dots\dots & 37 \text{ g HCl pur} \\ 50 \text{ g soluție} & \dots\dots\dots & X \text{ g HCl pur} \end{array}$$

$$X = 18,5 \text{ g HCl} = \frac{18,5}{36,5} = 0,507 \text{ moli HCl.}$$

Din această cantitate de HCl se supun neutralizării numai jumătate adică:

$$\frac{250}{500} \cdot 0,507 = 0,253 \text{ moli HCl.}$$

Deoarece în cazul HCl, un mol este egal cu un echivalent gram, înseamnă că aceea cantitate de căldură care se va degaja la neutralizarea unui mol de HCl va fi chiar căldura de neutralizare.

Deci:

$$\begin{array}{rcl} 0,253 \text{ moli HCl} & \dots\dots\dots & 14,51 \text{ kJ} \\ 1 \text{ mol HCl} & \dots\dots\dots & Q_{\text{neutralizare}} \end{array}$$

$$Q_{\text{neutralizare}} = \frac{14,51}{0,253} = 57,24 \text{ kJ/mol.}$$

În al doilea caz, numărul de moli NaOH existenți în cei  $250 \text{ cm}^3$  soluție de concentrația 2 molar va fi:

$$\begin{array}{rcl} 1000 \text{ cm}^3 \text{ sol.} & \dots\dots\dots & 2 \text{ moli NaOH} \\ 250 \text{ cm}^3 \text{ sol.} & \dots\dots\dots & X \end{array}$$

$$X = 0,5 \text{ moli NaOH} = 0,5 \text{ echivalenți-gram NaOH.}$$

Căldura de neutralizare va fi în acest caz căldura rezultată la neutralizarea unui mol (egal cu un echivalent-gram) de NaOH adică:

$$Q_{\text{neutralizare}} = \frac{28,63}{0,5} = 57,26 \text{ kJ/mol.}$$

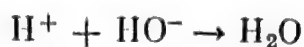
Din cele două experimente rezultă că în cazul neutralizării unor acizi tari cu baze tari, căldura de neutralizare nu depinde de natura acidului sau bazei utilizate pentru neutralizare. Acest lucru se explică prin aceea că acizii tari și bazele tari



în soluții apoase diluate sînt complet ionizați și reacția de neutralizare are practic loc între ionii  $H^+$  și ionii  $HO^-$ :



Cum ionii  $A^-$  și  $B^+$  există în soluție și înainte și după neutralizare, se poate considera că reacția de neutralizare cu formarea unui mol de apă se poate scrie, simplificat, în forma ionică:



ceea ce demonstrează independența căldurii de neutralizare de natura acidului și bazei din care provin ionii  $H^+$  și  $HO^-$ .

3°. Subiectul se tratează după următorul plan orientativ:

Definiția peptidelor. Clasificare. Obținere. Exemple.

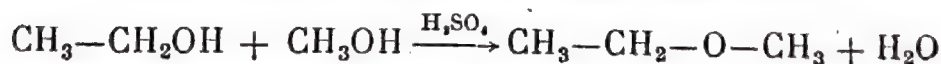
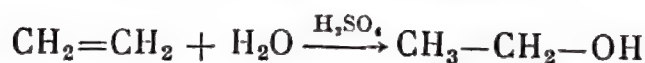
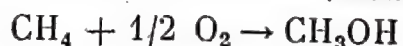
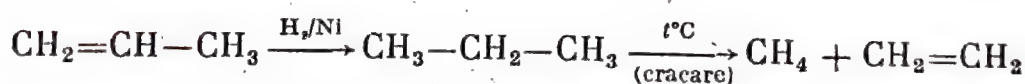
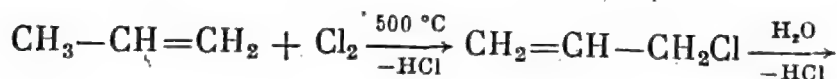
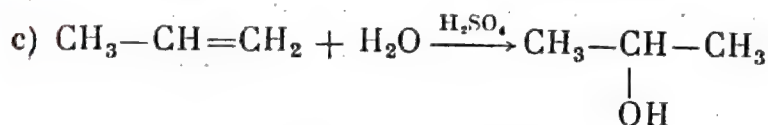
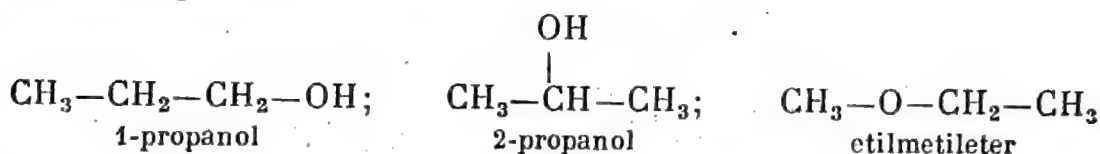
4°. a) Formula generală a unui alcool aciclic monohidroxilic saturat este  $C_nH_{2n+2}O$ .

Deci:

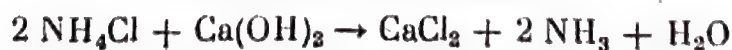
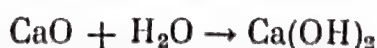
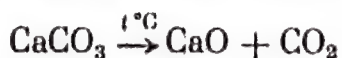
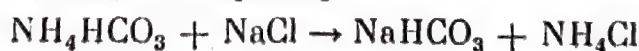
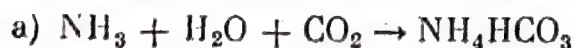
$$\begin{array}{rcl} 14n + 2 + 16 \text{ g alcool} & \dots\dots\dots & 12n \text{ g C} \\ 100 \text{ g} & \dots\dots\dots & 60 \text{ g C} \\ \hline & & n = 3. \end{array}$$

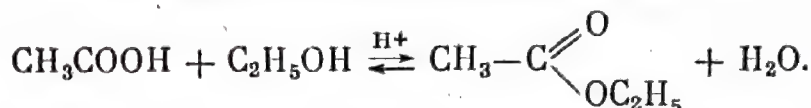
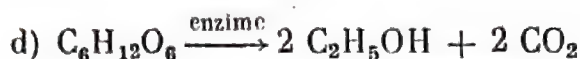
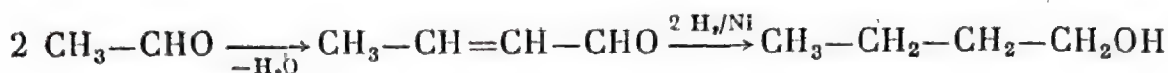
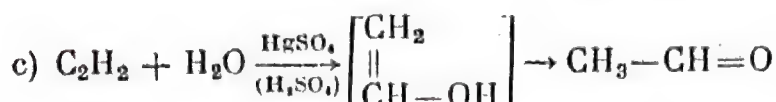
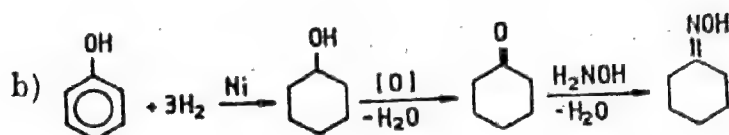
Formula moleculară a alcoolului este  $C_3H_8O$ .

b) Izomeri posibili:



5°. Ecuațiile reacțiilor sînt următoarele:





X. 1°. Subiectul se tratează conform manualelor de liceu pentru clasele a IX-a și a XI-a avându-se în vedere următoarele probleme: Ionizarea apei, echilibrul respectiv de ionizare, apa ca amfolit. Expresia constantei de echilibru  $K_c$  și produsul ionic al apei. Valoarea numerică a produsului ionic al apei în condiții standard și valorile concentrațiilor ionilor  $\text{H}_3\text{O}^+$  și  $\text{HO}^-$  în apa pură. Definiția noțiunii de  $pH$  ( $pH = -\lg[\text{H}_3\text{O}^+]$ ). Valorile numerice ale  $pH$ -ului în mediu neutru, acid și bazic, precum și concentrațiile ionilor  $\text{H}_3\text{O}^+$  și  $\text{HO}^-$  în mediile respective.

2°. Ecuația reacției chimice este:



Zincul avînd un potențial standard de reducere mai negativ decît hidrogenul se oxidează mai ușor decît acesta și ca atare cedează 2 electroni trecînd în ioni  $\text{Zn}^{2+}$ , electronii fiind acceptați de ionii de hidrogen care se reduc trecînd în hidrogen molecular. Cu alte cuvinte, zincul fiind situat înaintea hidrogenului în seria activității a lui Beketov-Volta va scoate hidrogenul din acizi.

Numărul de moli de hidrogen degajat este egal cu numărul de moli de zinc consumat în reacție. Deci:

$$\frac{15}{22,4} = \frac{X}{65,4} \quad X = \frac{15 \times 65,4}{22,4} = 43,8 \text{ g Zn.}$$

Numărul de moli de HCl consumat este dublul numărului de moli de hidrogen degajat, adică:

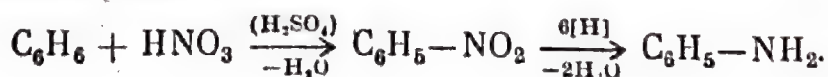
$$\frac{Y}{2 \cdot 36,5} = \frac{15}{22,4} \quad Y = \frac{2 \cdot 36,5 \cdot 15}{22,4} = 48,9 \text{ g HCl.}$$

Masa soluției de HCl, de concentrație 10%, care este necesară va fi:

$$\begin{array}{rcl} 100 \text{ g sol.} & \dots\dots\dots & 10 \text{ g HCl pur} \\ Z \text{ g sol.} & \dots\dots\dots & 48,9 \text{ g HCl pur} \\ \hline Z & = & 489 \text{ g soluție HCl necesară.} \end{array}$$

3°. Subiectul se tratează după următorul plan: Definiția cicloalcanilor. Nomenclatură. Exemple. Obținere. Proprietăți. Izomerie geometrică.

4°. a) Ecuațiile reacțiilor:



Dintr-un mol de benzen se obțin 93 g anilină (1 mol) cu randament de 100%.  
La un randament global al reacțiilor de 80% se obțin

$$93 \cdot \frac{80}{100} = 74,4 \text{ g anilină.}$$

$$\begin{array}{l} \text{b) } 93 \text{ g anilină conține } 72 \text{ g C} \dots\dots 14 \text{ g N} \dots\dots 7 \text{ g H} \\ 100 \text{ g} \dots\dots\dots x_1 \dots\dots\dots x_2 \dots\dots\dots x_3 \end{array}$$

$$x_1 = 77,42\% \text{ C}$$

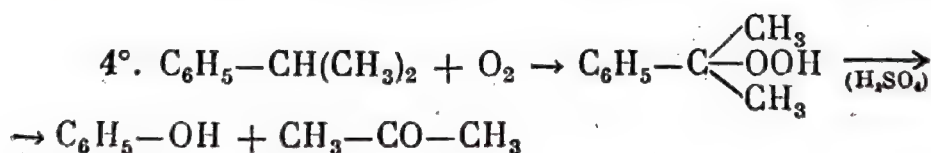
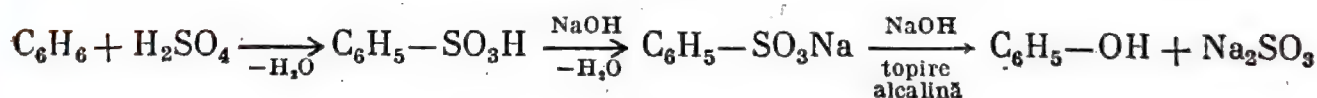
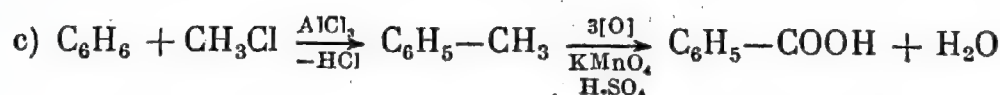
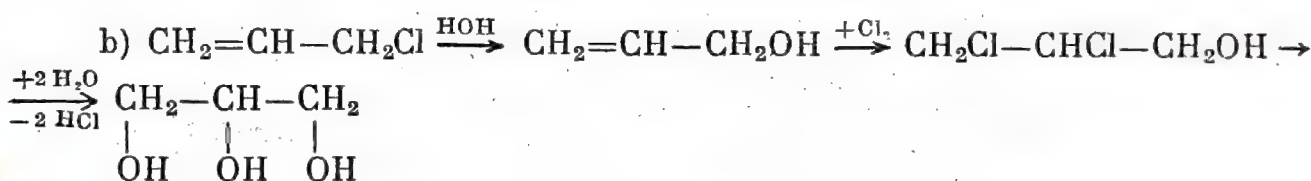
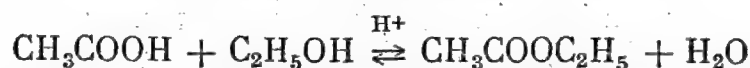
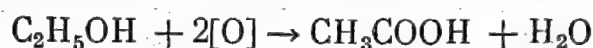
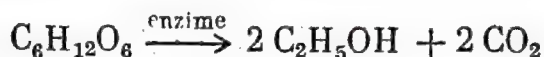
$$x_2 = 15,05\% \text{ N}$$

$$x_3 = 7,52\% \text{ H.}$$

XI. 1°. Planul de tratare a subiectului este următorul: Definiția acetilurilor.  
Ecuațiile reacțiilor de obținere a acetilurilor de calciu, sodiu, argint și cupru.  
Proprietățile acetilurilor.

2°. Subiectul se tratează după următorul plan. Definiția aminelor. Nomenclatură. Clasificare. Obținere.

$$3^\circ. \text{ a) amidon} \xrightarrow[\text{enzime}]{\text{hidroliză}} \alpha\text{-glucoză}$$



$$1 \text{ kmol cumen} \dots\dots\dots 94 \text{ kg fenol (1 kmol)}$$

$$10 \text{ kmoli} \dots\dots\dots x_1$$

$$x_1 = 940 \text{ kg fenol (teoretic)}$$

$$x_2 = 940 \cdot \frac{70}{100} = 658 \text{ kg fenol obținut.}$$



XII. 1°. Subiectul se tratează în conformitate cu manualele școlare, urmînd următorul plan orientativ:

- a) acetiluri (exemple, obținere, proprietăți);
- b) alcoxizi și fenoxizi (definiție, exemple, obținere, proprietăți);
- c) săruri de alchil (aril) amoniu (formule structurale, obținere exemple);
- d) săruri de diazoniu (formulă generală, obținere, reacții);
- e) săruri ale acizilor carboxilici (formulă generală, obținere, proprietăți);
- f) săruri ale acizilor sulfonici (formulă generală, obținere, proprietăți);
- g) săruri ale sulfatilor acizi de alchil;
- h) săruri ale aminoacizilor. Amfiioni.

2°. La tratarea subiectului se va avea în vedere următoarele puncte:

- a) scurtă introducere (definiția reacției de substituție, formarea intermediarilor radicalici, exemple de reacții de substituție radicalică);
- b) halogenarea metanului. Mecanism;
- c) halogenarea toluenului. Mecanism;
- d) halogenarea propenei în poziție alilică.

3°. Subiectul se va trata după următorul plan orientativ:

- a) scurtă introducere (definiția compușilor tensioactivi, structura acestora);
- b) săpunuri (definiție, obținere, proprietăți);
- c) detergenți anionici (săruri ale acizilor alchilsulfonici și alchilaril-sulfonici, săruri ale sulfatilor acizi de alchil);
- d) detergenți cationici. Halogenuri de alchiltrimetilamoniu;
- e) detergenți neionici (alcooli polietoxilați, fenoli polietoxilați, acizi carboxilici polietoxilați).

4°. Stabilirea formulei moleculare a hidrocarburii A:

$$C : \frac{85,7 \cdot 28}{100 \cdot 12} = 2 \text{ at. de C}; \quad H : \frac{14,3 \cdot 28}{100 \cdot 1} = 4 \text{ at. de H.}$$

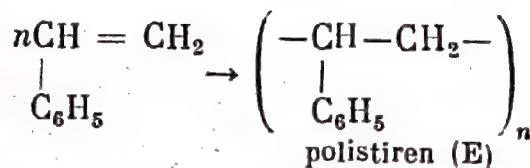
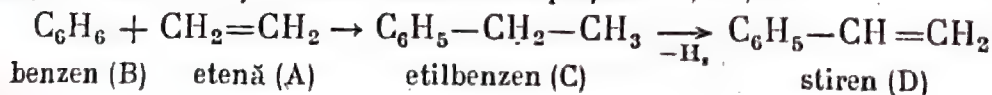
Deci A are formula moleculară  $C_2H_4$  (etena).

Stabilirea formulei moleculare a hidrocarburii B:

$$C : \frac{92,4 \cdot 78}{100 \cdot 12} = 6 \text{ at. de C}; \quad H : \frac{7,6 \cdot 78}{100 \cdot 1} = 6 \text{ at. de H.}$$

Deci formula moleculară a hidrocarburii B este  $C_6H_6$  (benzen).

Ecuatiile chimice și identificarea compușilor C, D, E:



a) 520 kg stiren = 5 kmoli; sînt necesari deci  $5 \times 22,4 \text{ m}^3 = 112 \text{ m}^3$  etenă;

b) 5 kmoli stiren se obțin din  $5 \times 78 \text{ kg benzen} = 390 \text{ kg}$ ;  $V = \frac{390}{0,9} = 433,33 \text{ l}$

benzen;

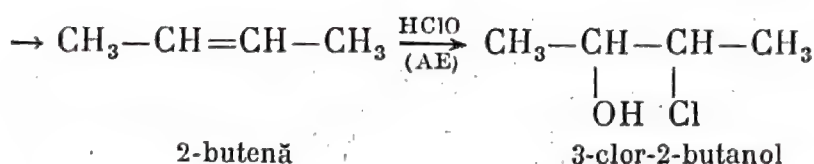
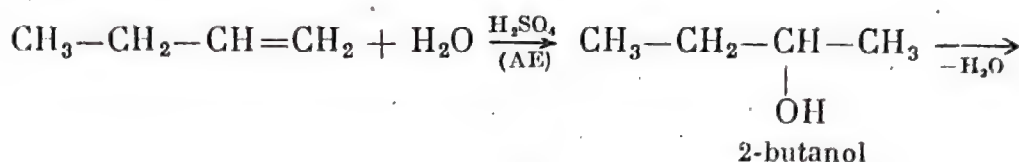
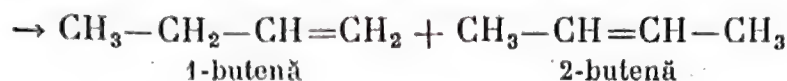
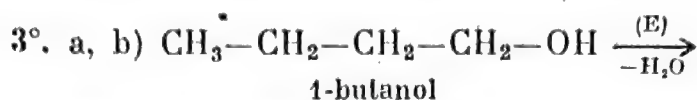
c)  $\bar{M} = (104)_n = 104 \times 10\,000 = 1\,040\,000$ .

XIII. 1°. Subiectul se tratează conform manualelor și programei școlare, după următorul plan orientativ:

- a) definiție. Exemple. Aminoacizi naturali;
- b) proprietăți fizice;
- c) proprietăți chimice. Caracter amfoter. Amfiioni. Soluții tampon. Reacții ale grupei carboxil. Reacții ale grupei amino. Formare de peptide simple și mixte;
- d) izomerie optică.

2°. Planul orientativ de abordare a acestui subiect este următorul:

- reacția alchenelor cu acidul sulfuric. Mecanism. Orientarea aditiei;
- reacția de sulfonare a compușilor aromatici. Sulfonarea benzenului, năftalinei, toluenului, anilinei;
- esterificarea alcoolilor cu acidul sulfuric,
- reacția aminelor cu acidul sulfuric;
- reacția fenoxizilor cu acidul sulfuric,
- reacția acidului sulfuric cu săruri ale acizilor organici.



c) 3-Clor-2-butanolul conține în moleculă doi atomi de carbon asimetrici, deci prezintă două perechi de enantiomeri (patru izomeri optici).

4°. Formula produsului de policondensare:



Masa moleculară a acidului tereftalic = 166.

Masa moleculară a etilenglicolului = 62.

Masa unității structurale = 192.

Gradul de policondensare:

$$\frac{2942 - 62}{192} = 15$$

Cantitatea de paraxilen necesară:

$$\begin{array}{rcl} 192 \text{ kg} & \dots\dots\dots & 106 \text{ kg paraxilen} \\ 1920 \text{ kg} & \dots\dots\dots & X \end{array}$$

$$X = 1060 \text{ kg paraxilen (cu randament de 100\%).}$$

La un randament de 75% sint necesare

$$1060 \cdot \frac{100}{75} = 1413,33 \text{ kg paraxilen.}$$

XIV. 1°. Subiectul se tratează conform manualului de liceu pentru clasa a IX-a avindu-se în vedere următoarele probleme. Justificarea necesității de a se introduce noțiunea de hibridizare pentru a putea explica legăturile covalente date de unele elemente cum ar fi carbonul, borul și beriliul pentru care structura electronică în starea lor fundamentală nu poate explica numărul de covalențe pe care îl formează în realitate (patru, trei și, respectiv, doi).



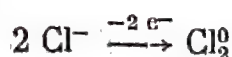
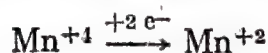
Trecerea acestor atomi în stare excitată și apoi procesul de hibridizare propriu-zisă. Forma și orientarea spațială a orbitalilor hibridi  $sp^3$ . Întrepătrunderea mai accentuată a orbitalilor hibridi cu formare de legături de tip sigma cu alți atomi. Forma geometrică a moleculelor ce conțin atomi hibridizați  $sp^3$ . Exemplificare în cazul metanului, amoniacului, apei, ionului amoniu, ionului hidroniu etc. Noțiunea de hibridizare parțială a atomului de oxigen în molecula de apă și a celui de azot în molecula de amoniac.

2°. Se va trata pe scurt noțiunea de entropie, conform manualului de clasa a XI-a, precum și structura rețelelor cristaline ale diamantului și grafitului, conform manualului de liceu pentru clasa a IX-a. Din structura acestor rețele cristaline rezultă că în cazul diamantului toți atomii de carbon hibridizați  $sp^3$  sînt legați între ei prin legături covalente puternice, ei ocupînd poziții fixe în rețeaua cristalină, poziții de la care se pot abate numai foarte puțin efectuînd doar mișcări de vibrație în jurul pozițiilor de echilibru. Din această cauză sistemul format dintr-un cristal de diamant este aproape perfect ordonat și ca atare are entropia foarte mică. În cazul grafitului, care prezintă o rețea atomică stratificată (vezi manualul de clasa a IX-a), atomii de carbon sînt hibridizați  $sp^2$  și fiecare atom de carbon este legat prin legături de tip sigma de alți trei atomi de carbon situați în același plan, alcătuiind astfel plane în care atomii de carbon ocupă virfurile unor hexagoane regulate. La fiecare atom de carbon rămîne însă cîte un orbital  $p$  nehibridizat conținînd un singur electron. Acești electroni din orbitalii de tip  $p$  nehibridizați sînt mobili și comuni atomilor dintr-un plan. Între atomii din același plan se manifestă legături covalente puternice, însă între atomii situați în plane paralele, suprapuse, legăturile sînt mult mai slabe, ceea ce se reflectă în proprietățile specifice ale grafitului (vezi manualul). Rezultă deci că în rețeaua cristalină a grafitului, atomii ce alcătuiesc straturi diferite au libertate mult mai mare de mișcare, existînd în același timp electroni delocalizați, mobili, care asigură printre alte proprietăți, conductibilitatea electrică a grafitului, și din această cauză gradul de ordonare a particulelor ce alcătuiesc rețeaua atomică în grafit este mai mic ca în diamant. Aceasta se traduce prin valoarea mai mare a entropiei grafitului în comparație cu cea a diamantului ( $1,36 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$  la grafit față de  $0,58 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$  la diamant).

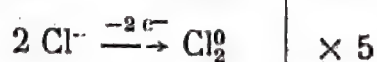
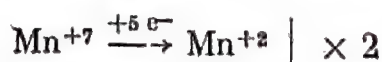
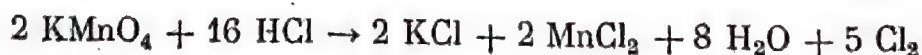
3°. La tratarea acestui subiect se vor prezenta mai întîi noțiunile de oxidare și reducere, agent oxidant și agent reducător, conform manualelor de liceu pentru clasele a IX-a și a XI-a. De asemenea, se vor prezenta și principiile pe baza cărora se stabilesc coeficienții în reacțiile de oxido-reducere (vezi manualul pentru clasa a XI-a).

Ca exemple, din reacțiile cerute, se pot da:

1. oxidarea acidului clorhidric cu  $\text{MnO}_2$ :

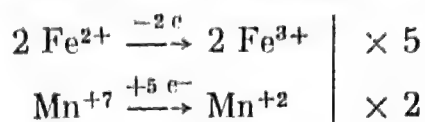


2. oxidarea acidului clorhidric cu permanganat de potasiu:

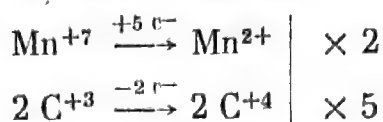
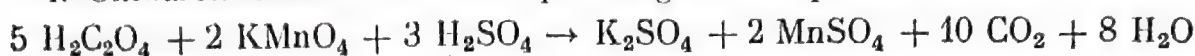




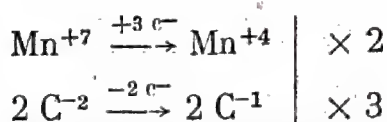
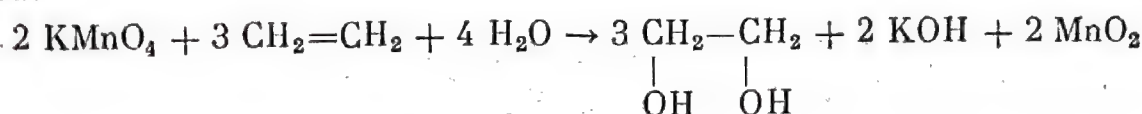
3. Oxidarea fierului divalent la fier trivalent cu  $\text{KMnO}_4$  în soluție de  $\text{H}_2\text{SO}_4$ :

$$2 \text{KMnO}_4 + 10 \text{FeSO}_4 + 8 \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow 5 \text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{K}_2\text{SO}_4 + 2 \text{MnSO}_4 + 8 \text{H}_2\text{O}$$


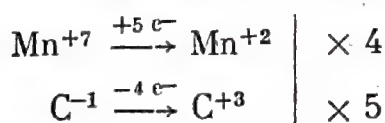
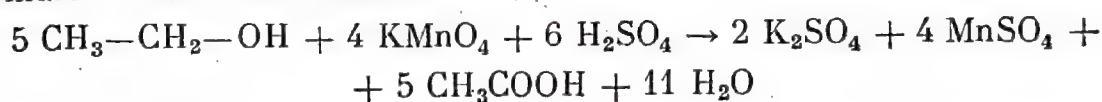
4. Oxidarea acidului oxalic cu permanganat de potasiu în mediu acid:



5. Oxidarea etenei cu permanganat de potasiu în soluție neutră sau slab bazică:



6. Oxidarea alcoolilor primari cu permanganat de potasiu în soluție acidă, cu formare de acizi carboxilici:



Se pot da numeroase asemenea exemple atât din chimia anorganică, cât și din chimia organică, permanganatul de potasiu fiind unul din cei mai utilizați agenți oxidanți. Menționăm că sarcinile electrice atribuite atomilor de mangan și celorlalți atomi care se oxidează nu sînt sarcini electrice reale, ci reprezintă numerele de oxidare respective!

4°. Avînd în vedere că acizii considerați sînt acizi tari, adică total ionizați în soluțiile diluate respective, concentrația ionilor de hidrogen va fi mai mare în soluția în care concentrația normală a acidului este mai mare. Dacă se consideră cîte un litru din fiecare din cele două soluții, avînd în vedere că densitatea ambelor soluții este  $1 \text{ g/cm}^3$ , masa soluțiilor considerate va fi:

$$m = 1 \text{ g/cm}^3 \cdot 1000 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ g soluție.}$$

Concentrația procentuală fiind 1% înseamnă că în fiecare din cele două soluții vor exista cîte 10 g din acidul respectiv. Avem deci 10 g HCl la litru de soluție și 10 g HBr la litru de soluție.

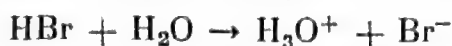
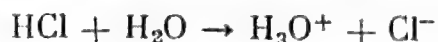
Numărul de moli de HCl este:

$$v_{\text{HCl}} = \frac{10}{36,5}$$

iar cel de HBr:

$$v_{\text{HBr}} = \frac{10}{81}$$

Avind în vedere reacțiile de ionizare, care sînt totale:



rezultă că în fiecare soluție concentrația ionilor de hidroniu este egală cu concentrația acidului respectiv introdus în soluție. Deci în soluția de HCl vom avea  $[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{10}{36,5} \text{ mol/l}$ , iar în cea de HBr  $[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{10}{81} \text{ mol/l}$ .

Rezultă că în soluția de HCl concentrația ionilor hidroniu este mai mare raportul concentrațiilor acestor ioni în cele două soluții fiind:

$$[\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{HCl}} / [\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{HBr}} = \frac{81}{36,5}.$$

XV. 1°. 1.1. Din studiul diferitelor procese de electroliză s-a dedus experimental că la trecerea unui curent electric continuu printr-un electrolit, cantitatea de substanță  $m$  separată din acesta este proporțională cu sarcina electrică transportată:

$$m = KQ.$$

Factorul de proporționalitate  $K$  se numește echivalent electrochimic al substanței separate și reprezintă acea cantitate de substanță care se separă la trecerea prin electrolit a unității de sarcină electrică, adică 1 C.

Tot experimental se constată că pentru separarea unui echivalent-gram de orice substanță este necesară aceeași cantitate de sarcină electrică egală cu 96 487 C (1 Faraday) sau cu o oarecare aproximație, 96 500 C.

În cazul în care substanța separată este o substanță simplă,

$$K = \frac{E_g}{F} \quad \text{și} \quad E_g = \frac{A}{n}$$

unde  $A$  este masa atomică a elementului separat, iar  $n$  numărul de electroni implicați la formarea unui atom din elementul respectiv. Deci:

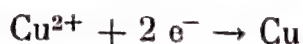
$$K = \frac{A}{nF}.$$

Introducînd această expresie a echivalentului electrochimic în expresia masei de substanță separată și avind în vedere că sarcina transportată este produsul dintre intensitatea  $I$  a curentului (în amperi) și timpul  $t$  cit trece acest curent (în secunde) se obține:

$$m = \frac{A}{nF} It.$$

Electroliza cu anod solubil se aplică industrial la purificarea electrolitică a unor metale cum ar fi Cu, Ag, Au, Pb, Al etc. De exemplu, în cazul purificării cuprului, reacțiile ce au loc la electrozi sînt:

— la catod (format din metalul respectiv pur):



— la anod (format din metalul brut, impur):



Electrolitul folosit este soluția unei sări solubile a metalului ce se purifică, de obicei  $\text{CuSO}_4$ .

În cazul purificării argintului:

— la catod:  $\text{Ag}^+ + \text{e}^- \rightarrow \text{Ag}$

— la anod:  $\text{Ag} - \text{e}^- \rightarrow \text{Ag}^+$ .

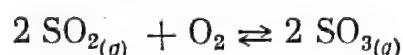
Electrolitul folosit este  $\text{AgNO}_3$  în soluție apoasă. De asemenea, această electroliză cu anod solubil se mai aplică la depunerea unor straturi metalice (nichelare, argintare, cuprare etc.), fie în scopuri decorative, fie în scopul protecției anticorozive a unor obiecte.

1.2. Ecuațiile principalelor reacții chimice care stau la baza obținerii acidului sulfuric din pirită, sînt:

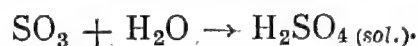
a) arderea sau prăjirea piritei, cu aer:



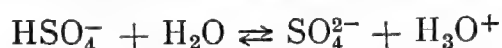
b) oxidarea catalitică a dioxidului de sulf la trioxid, în prezența platinei sau a  $\text{V}_2\text{O}_5$  (proces de echilibru):



c) absorbția trioxidului de sulf în apă (în practică în soluție de acid sulfuric):



În treapta a doua de ionizare, acidul sulfuric nu este complet ionizat, deci se poate scrie o constantă de echilibru (exprimată prin concentrații molare):



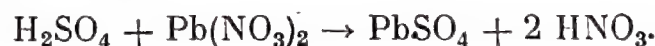
$$K_c = \frac{[\text{SO}_4^{2-}][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HSO}_4^-][\text{H}_2\text{O}]}$$

Făcînd aproximația că apa are o concentrație practic constantă se poate scrie:

$$K_a = K_c[\text{H}_2\text{O}] = \frac{[\text{SO}_4^{2-}][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HSO}_4^-]}$$

Acidul sulfuric reacționează cu azotatul de plumb, deoarece sulfatul de plumb care se formează este o substanță practic insolubilă (valoarea produsului de solubilitate  $2 \cdot 10^{-8} \text{ mol}^2/\text{l}^2$ ).

Ecuația reacției este:



2°. a) Se alcătuieste tabelul:

Substanța	$\text{CO}_2$	$\text{H}_2$	$\text{CO}$	$\text{H}_2\text{O}$	Total
Timp					
$t = 0$ (inițial)	0,2	0,8	0	0	1
$t = t_{\text{ech.}}$ (la echilibru)	$0,2 - x$	$0,8 - x$	$x$	$x$	1

Reacția are loc fără variația numărului de moli, iar volumul fiind 1 l, cantitatea (cantitățile) în moli, trecute în tabel, sînt chiar concentrațiile respective, deci:

$$K_c = \frac{[\text{CO}][\text{H}_2\text{O}]}{[\text{CO}_2][\text{H}_2]}, \quad \text{adică: } 1 = \frac{x^2}{(0,2 - x)(0,8 - x)}.$$

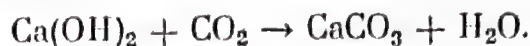


Rezolvind ecuația se obține:  $x = 0,16$ ; deci la echilibru:

$$[\text{CO}_2] = 0,04 \text{ mol/l}; [\text{H}_2] = 0,64 \text{ mol/l}$$

$$[\text{CO}] = 0,16 \text{ mol/l}; [\text{H}_2\text{O}] = 0,16 \text{ mol/l}.$$

b) Ecuația reacției este:



Numărul de moli de  $\text{Ca(OH)}_2$  necesar este identic cu numărul de moli de  $\text{CO}_2$  aflat în sistem la echilibru, adică 0,04 moli.

Concentrația molară a hidroxidului de calciu este jumătate din concentrația sa normală, deci 0,005 moli/l. Rezultă că:

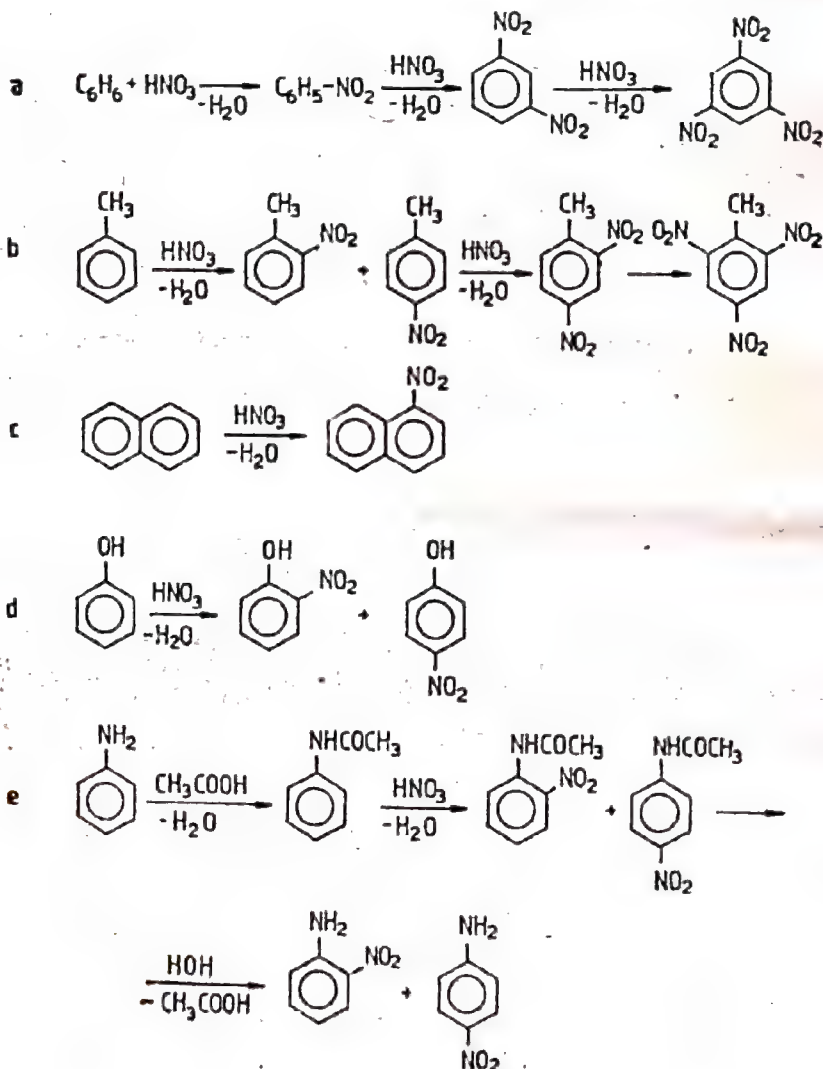
1 000 cm <sup>3</sup> sol. $\text{Ca(OH)}_2$ .....	0,005 moli $\text{Ca(OH)}_2$
X cm <sup>3</sup> sol. $\text{Ca(OH)}_2$ .....	0,04 moli $\text{Ca(OH)}_2$

---


$$X = \frac{0,04 \times 1\,000}{0,005} = 8000 \text{ cm}^3 = 8 \text{ l. } \text{Ca(OH)}_2 \text{ de concentrație } 0,01 \text{ N}.$$

3°. Definiția reacției de nitrare — nitrarea compuşilor aromatici. Condiții.

Exemple:

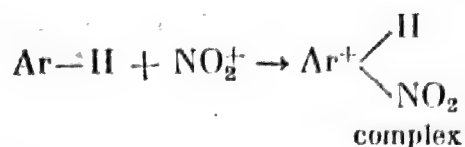


Mecanism (reacție de substituție electrofilă):

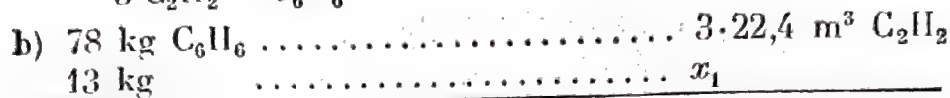
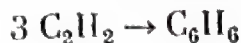
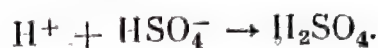
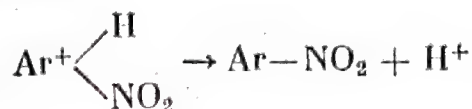
— Formarea reactantului electrofil:



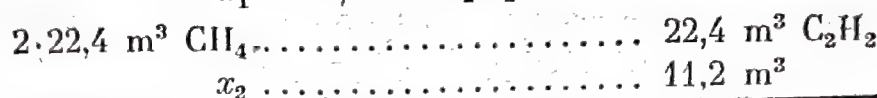
Atacul reactantului electrolit asupra moleculei compusului aromatic supus nitrării cu formarea compusului:



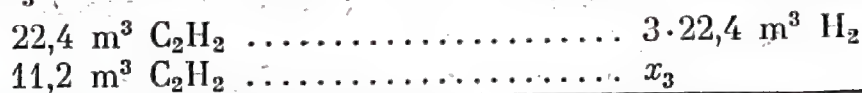
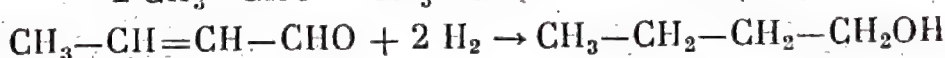
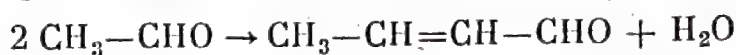
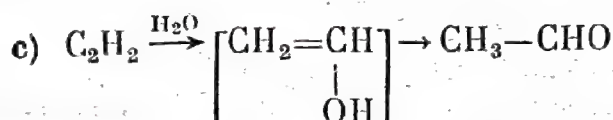
— Eliminarea protonului:



$$x_1 = 11,2 \text{ m}^3 \text{C}_2\text{H}_2$$



$$x_2 = 22,4 \text{ m}^3 \text{CH}_4; \quad \eta = \frac{22,4}{67,2} \cdot 100 = 33,33\%$$



$$x_3 = 33,6 \text{ m}^3 \text{H}_2 \text{ (obținut alături de } \text{C}_2\text{H}_2\text{)}$$

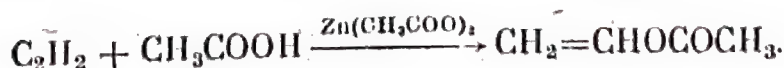
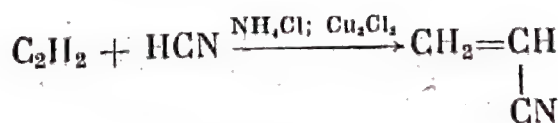
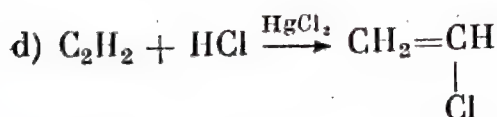


$$x_4 = 89,6 \text{ m}^3 \text{H}_2$$

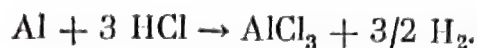
$$\text{Total } \text{H}_2: 89,6 + 33,6 = 123,2 \text{ m}^3 \text{H}_2$$



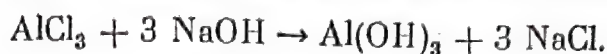
$$x_5 = 192,5 \text{ kg}$$



5°. 5.1. Clorura de aluminiu se poate obține din aluminiu metalic prin tratare cu acid clorhidric, deoarece aluminiul este situat înaintea hidrogenului în seria activității metalelor a lui Beketov-Volta și ca atare poate înlocui hidrogenul din acizi:

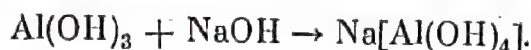


Clorura de aluminiu prin reacția cu o bază tare, de exemplu cu NaOH, formează hidroxidul de aluminiu, care este o bază slabă și este insolubil în apă:

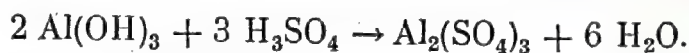


Deci, substanța A este hidroxidul de aluminiu  $\text{Al(OH)}_3$ .

Acesta are un caracter amfoter putînd reacționa cu un exces de NaOH formînd combinația complexă, tetrahidroxoaluminatul de sodiu:

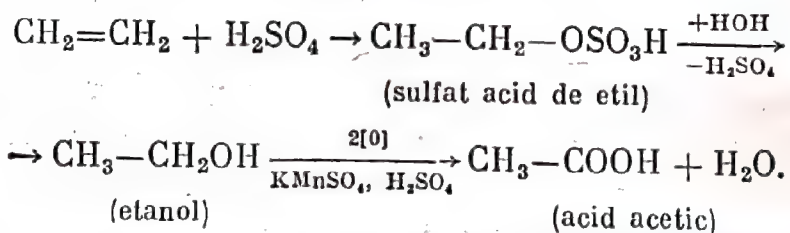


În această reacție hidroxidul de aluminiu se comportă ca un acid reacționînd cu o bază tare. Dar, în reacțiile cu acizii tari, se comportă ca o bază, formînd sărurile respective de aluminiu. De exemplu cu acidul sulfuric poate forma sulfatul de aluminiu:

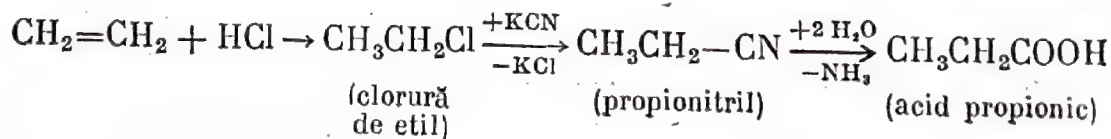


Aceste proprietăți demonstrează caracterul amfoter al hidroxidului de aluminiu.

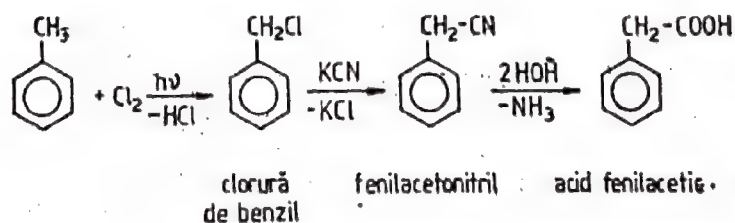
5.2. Acidul acetic poate fi obținut din etenă pe mai multe căi, dintre care menționăm, spre exemplu, transformarea etenei în etanol prin adiția apei în prezența acidului sulfuric și apoi oxidarea etanolului:



Pentru obținerea acidului propionic din etenă, trebuie introdus în moleculă un nou atom de carbon, ceea ce se poate face de exemplu prin transformarea etenei în derivat halogenat și apoi acesta, prin reacția cu KCN, în nitrilul respectiv, care, prin hidroliză conduce la acidul propionic:



Toluenul poate fi transformat în acid fenilacetic prin clorurare fotochimică și transformare în clorură de benzil, aceasta prin reacția cu KCN, în nitrilul corespunzător și apoi hidroliza nitrilului:



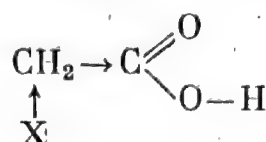


Constanta de aciditate a unui acid slab HA, a cărui ionizare în soluție apoasă este numai parțială, va avea expresia:

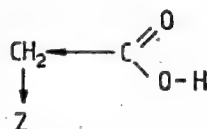


$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{A}^-]}{[\text{HA}]}$$

Deci, aceasta va fi cu atât mai mare cu cât acidul respectiv este mai tare, adică cedează mai ușor protoni moleculelor de apă. Ușurința cu care acidul cedează protoni, va depinde de efectele electronice ale substituenților existenți în molecula acidului. Substituenții ce au efect respingător de electroni vor determina amplificarea densității electronice pe legătura O—H a grupării carboxil:



și implicit micșorarea posibilității de cedare a hidrogenului sub formă de proton, adică vor determina micșorarea constantei de aciditate. Dimpotrivă, substituenții ce au efect atrăgător de electroni vor determina scăderea densității electronice pe legătura O—H din gruparea carboxil și deci creșterea caracterului acid, adică a constantei de aciditate:



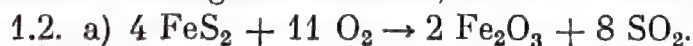
Având în vedere faptul că un radical metil manifestă efect electronic inductiv  $+I_s$ , adică respingător de electroni pe cînd radicalul fenil acționează în sens opus, rezultă că acidul propionic va fi un acid mai slab decît cel acetic, în timp ce acidul fenilacetic va fi mai tare decît acidul acetic.

Deci ordinea cerută este:



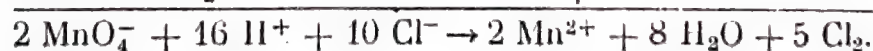
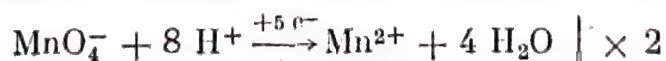
**XVI. 1°. 1.1.** Prin oxidare se înțelege procesul de cedare de electroni și ca urmare creșterea stării de oxidare a unui atom din specia chimică care s-a oxidat. Agentul oxidant este o specie chimică, moleculă, atom sau ion, care acceptă electronii cedați de particula ce se oxidează, și prin aceasta el însuși se reduce, adică unul din atomii componenți își micșorează starea de oxidare.

Prin proces redox (sau de oxido-reducere) se înțelege un proces ce constă dintr-o reacție de oxidare și una de reducere, reacții care au loc simultan. Substanța care se oxidează este agent reducător, iar cea care se reduce este agentul oxidant.



În această reacție se oxidează disulfura de fier, atomul de fier trecînd de la starea de oxidare  $+2$  la  $+3$  (în  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ), iar atomii de sulf de la starea de oxidare  $-1$  la  $+4$  (în  $\text{SO}_2$ ).

Agentul oxidant este oxigenul molecular care se reduce de la starea de oxidare zero (în  $\text{O}_2$ ) la  $-2$  (în  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  și  $\text{SO}_2$ )



În această reacție se oxidează ionul  $\text{Cl}^-$  la  $\text{Cl}_2$ , clorul trecînd de la starea de oxidare  $-1$  la zero. Agentul oxidant este ionul permanganat,  $\text{MnO}_4^-$ , în prezența protonilor (mediu acid) manganul reducîndu-se de la starea de oxidare  $+7$  (în  $\text{KMnO}_4$ ) la  $+2$  (în  $\text{MnCl}_2$ ).

Coefficienții din ecuația reacției se obțin din condiția ca numărul electronilor cedați de substanța care se oxidează să fie egal cu cel al electronilor acceptați de substanța care se reduce. Trebuie observat însă că există un număr de 6 ioni  $\text{Cl}^-$  care nu se oxidează, ei regăsindu-se în produșii de reacție sub forma sărurilor  $\text{KCl}$  și  $\text{MnCl}_2$ . Deci ei trebuie adăugați la cei 10 ioni  $\text{Cl}^-$  care rezultă din condiția menționată și deci sînt necesare 16 molecule de  $\text{HCl}$ .

2°. Cea mai simplă cale de rezolvare este calculul numărului de echivalenți-gram de  $\text{Ca(OH)}_2$  existenți în cei  $30 \text{ cm}^3$  de soluție ce se neutralizează și aplicarea condiției ca acest număr de echivalenți-gram de hidroxid trebuie să fie egal cu numărul de echivalenți-gram de acid azotic necesar pentru neutralizare. Această condiție conduce la relația:

$$n_{\text{acid}} \cdot V_{\text{acid}} = n_{\text{bază}} \cdot V_{\text{bază}}$$

în care  $n_{\text{acid}}$  și  $n_{\text{bază}}$  sînt respectiv concentrațiile normale ale soluției de acid și de bază, iar  $V_{\text{acid}}$  și  $V_{\text{bază}}$ , volumele corespunzătoare.

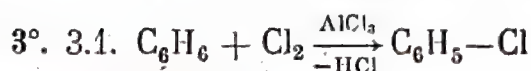
Soluția de  $\text{Ca(OH)}_2$  avînd concentrația molară  $0,1 \text{ m}$  va avea normalitatea  $0,2 \text{ n}$  deoarece această substanță poate accepta 2 protoni.

Rezultă că:

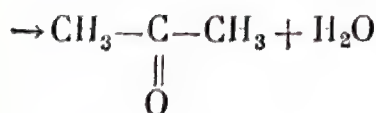
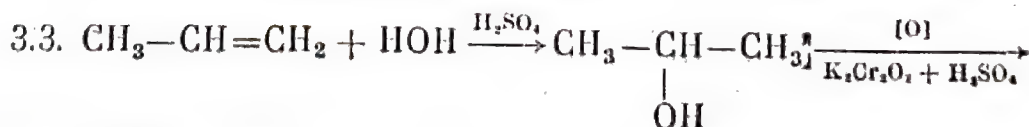
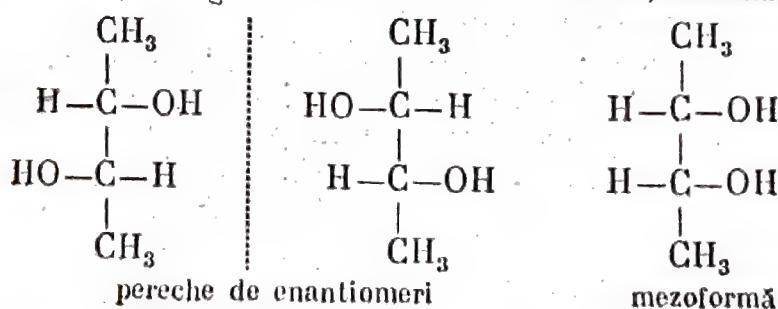
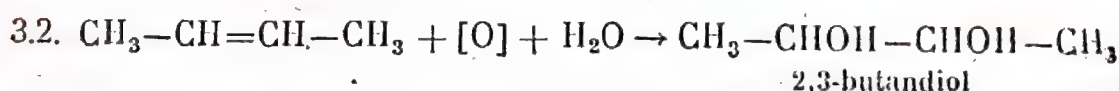
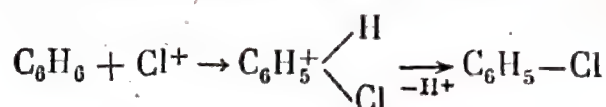
$$0,3 \cdot V_{\text{acid}} = 0,2 \cdot 30 \text{ cm}^3$$

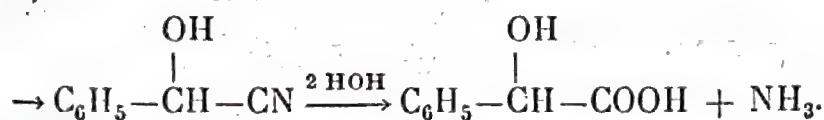
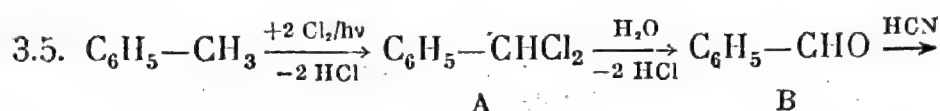
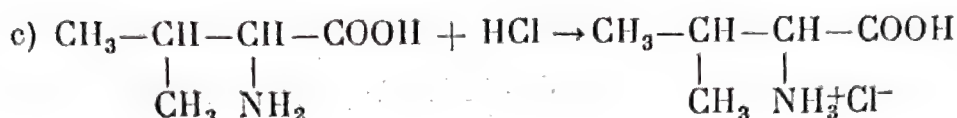
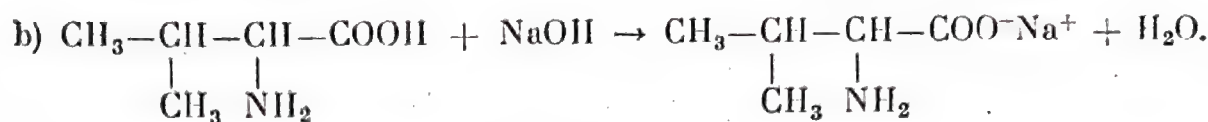
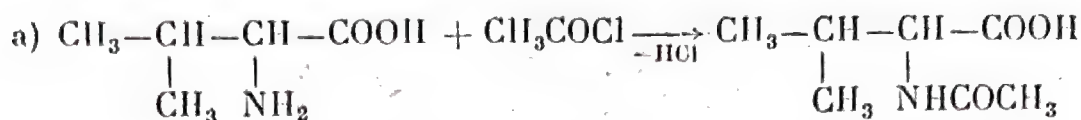
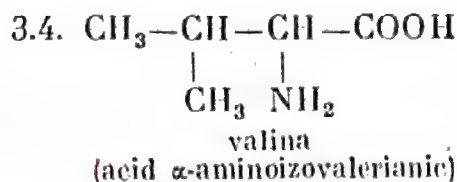
și

$$V_{\text{acid}} = \frac{0,2 \cdot 30}{0,3} = 20 \text{ cm}^3 \text{ soluție } \text{HNO}_3 \text{ } 0,3 \text{ n.}$$

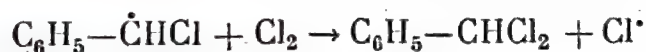
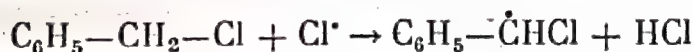
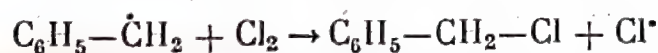
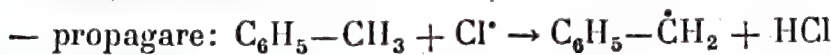
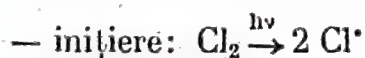


Mecanism de reacție:

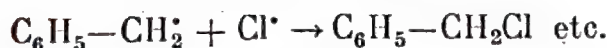




**Mecanismul formării compusului A (S.R.):**



**intrerupere:**



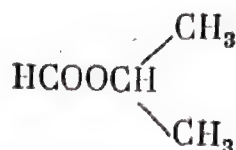
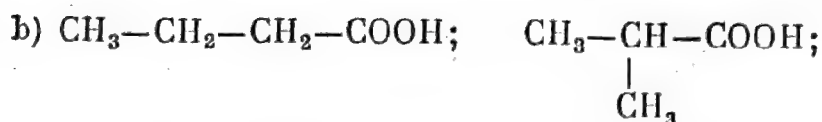
4°. a) În molecula esterului  $R-COOC_2H_5$  se găsesc doi atomi de oxigen, deci:

$\frac{1}{1}$ at. gr. de H	.....	$\frac{4}{16}$ at. gr. de O
$x_1$	.....	2 at. gr. de O
$x_1 = 8$ at. gr. de H se găsesc într-un mol de ester.		

Din cei 8 atomi de hidrogen, cinci se găsesc în radicalul etil și deci trei în radicalul R, care nu poate fi decît  $\text{—CH}_3$ .

Deci esterul are formula  $\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5$  (acetat de etil).





88 g ester ..... 60 g acid acetic ..... 46 g etanol

61,6 g .....  $x_1$  .....  $x_2$

$x_1 = 42 \text{ g}$ ;  $x_2 = 32,2 \text{ g}$  (la un randament cantitativ).

Pentru un randament de 70%:

$$42 \cdot \frac{100}{70} = 60 \text{ g acid acetic}; \quad 32,2 \cdot \frac{100}{70} = 46 \text{ etanol}.$$

XVII. 1°. Subiectul se tratează conform manualelor școlare, urmînd următorul plan orientativ:

Definiția sărurilor. Rolul catalitic al acestora. Exemple de reacții catalizate de săruri.

a) Reacția de izomerizare alcani-izoalcani.

b) Reacții de oxidare catalizate de săruri (oxidarea parafinei, oxidarea xilenilor).

c) Halogenarea alchenelor și arenelor în prezență de  $\text{FeX}_3$  sau  $\text{AlX}_3$ . Rolul catalizatorilor în formarea reactantului electofil.

d) Reacții de adiție (adiția parțială a hidrogenului la alchine, adiția acidului clorhidric la alchine, adiția  $\text{HCN}$  la acetilenă, adiția acidului acetic la acetilenă, adiția apei la alchine, dimerizarea acetilenei).

e) Alchilarea și acilarea arenelor. Rolul catalizatorului în formarea reactantului electofil.

f) Reacția de transesterificare.

g) Polimerizarea stereospecifică.

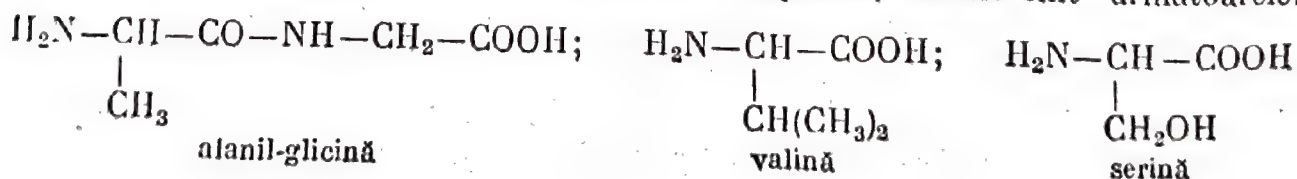
2°. Subiectul se tratează în conformitate cu manualele școlare, după următorul plan orientativ:

a) definiția compușilor halogenați nesaturați. Exemple;

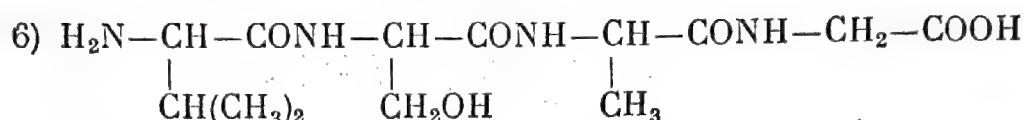
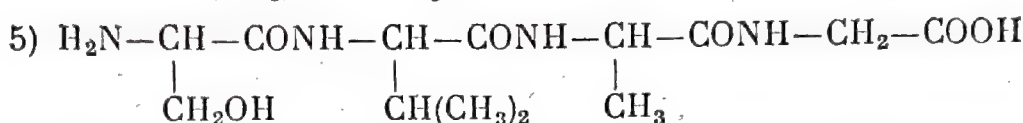
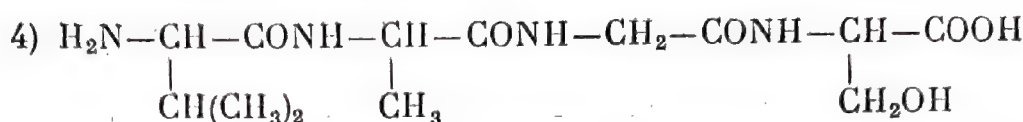
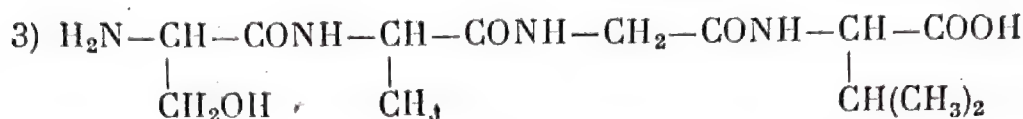
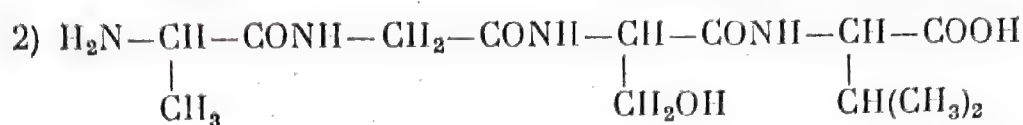
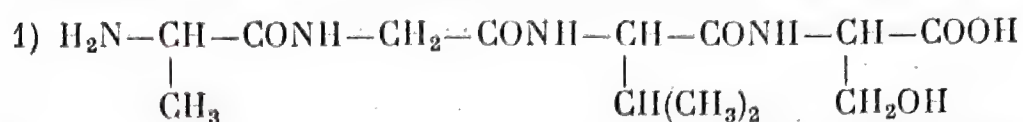
b) metode de obținere a derivaților halogenați nesaturați (clorură de vinil, clorură de alil, cloropren, 1, 2-diclor- și, respectiv, 1, 2-dibrometenă). Mecanismul adiției electofile;

c) proprietățile compușilor halogenați nesaturați.

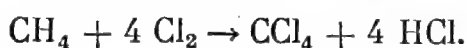
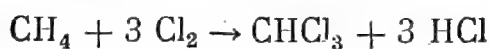
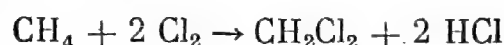
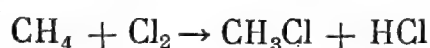
3°. Formulele alanil-glicinei, valinei și, respectiv, serinei sînt următoarele:



Formulele tetrapeptidelor izomere cerute în enunțul problemei sînt:



4°. a) Ecuațiile reacțiilor:



Calculul numărului de moli de metan supus clorurării:  $\frac{168}{22,4} = 7,5$  moli.

Ținînd seama de rapoartele molare date se calculează numărul de moli transformat în produși clorurați și de metan netransformat:

$$5x + 3x + 2x + 1,5x + x = 7,5$$

$$x = 0,6 \text{ moli (CH}_4 \text{ netransformat).}$$

$$C_u = \frac{3}{7,5} \cdot 100 = 40\%; \quad C_t = \frac{6,9}{7,5} \cdot 100 = 92\%; \quad \eta = \frac{C_u}{C_t} \cdot 100 = 43,4\%.$$

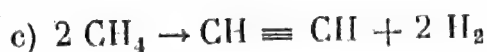
Conversia utilă, conversia totală și randamentul se pot calcula și din rapoartele molare date:

$$C_u = \frac{5}{12,5} \cdot 100 = 40\%; \quad C_t = \frac{11,5}{12,5} \cdot 100 = 92\%; \quad \eta = \frac{40}{92} \cdot 100 = 43,4\%.$$

b) Se calculează numărul de moli de  $\text{Cl}_2$  utilizați în reacția de clorurare:

$$5 \cdot 0,6 + 2 \cdot 3 \cdot 0,6 + 3 \cdot 2 \cdot 0,6 + 4 \cdot 1,5 \cdot 0,6 = 13,8 \text{ moli Cl}_2.$$

volumul de clor:  $13,8 \cdot 22,4 = 309,12 \text{ l Cl}_2$  utilizat.



2 moli $\text{CH}_4$ .....	1 mol $\text{C}_2\text{H}_2$
0,6 moli $\text{CH}_4$ .....	X
$X = 0,3 \text{ moli } \text{C}_2\text{H}_2 \text{ (teoretic).}$	

Volumul practic de acetilenă se calculează astfel:

$$0,3 \cdot 22,4 \cdot \frac{60}{100} = 4,032 \text{ l.}$$

**XVIII. 1°.** Subiectul se tratează conform programei și manualelor școlare, după următorul plan orientativ:

- a) alchilarea izobutanului cu izobutenă;
- b) alchilarea arenelor cu derivați halogenați;
- c) alchilarea arenelor cu alchene;
- d) acilarea arenelor cu cloruri acide;
- e) reacția derivaților halogenați cu cianuri alcaline;
- f) adiția acidului cianhidric la acetilenă;
- g) adiția acidului cianhidric la aldehide și cetone;
- h) condensarea aldolică (cetolică);
- i) condensarea formaldehidei cu fenol (în mediu bazic și acid);
- j) reacții de polimerizare și copolimerizare.

**2°.** Subiectul se poate trata după următorul plan:

- a) Adiția electrofilă: definiție, schemă generală. Heteroliza reactantului; definiție reactant electrofil.  
Atacul substratului de către electrofil; formare carbocationi versus carbanioni. Reacția carbocationului cu fragmentul nucleofil.
- b) Enumerarea reacțiilor AE: adiție de  $\text{HX}$ ,  $\text{H}_2\text{SO}_4$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{HCN}$ ,  $\text{R}-\text{COOH}$ ,  $\text{X}_2$ ,  $\text{XOH}$ ,  $\text{NaHSO}_3$ , polimerizarea acidă.  
 $\text{RX}$ ,  $\text{O}_3$ , adiția conjugată la diene.
- c) Adiția de halogeni la alchene și alchine.  
Heteroliza  $\text{X}_2$ .  
Atacul substratului (alchenă simetrică).  
Stabilizarea carbocationului.  
Atacul substratului la alchenă nesimetrică.
- d) Adiția de hidracizi la alchene și alchine.  
Heteroliza  $\text{HX}$ .  
Atacul substratului la alchena simetrică.  
Atacul substratului la alchena nesimetrică.  
Formularea generală a regulii lui Markovnikov.
- e) Adiția de  $\text{H}_2\text{SO}_4$ :  
— la alchenă simetrică;  
— la alchenă nesimetrică;  
(Se va preciza reactantul electrofil.)
- f) Adiția de  $\text{HOCl}$ :  
— la alchenă simetrică;  
— la alchenă nesimetrică;  
(Se va preciza reactantul electrofil.)
- g) Adiția de apă.  
Adiția de apă la etenă.  
Adiția de apă la acetilenă.  
Adiția de apă la propină.
- h) Adiția de acid acetic la alchine.



i) Adiția de  $\text{HCN}$  la alchine.

j) Adiția de  $\text{NaHSO}_3$  la alchenă.

k) Polimerizarea acidă a alchenelor.

Structura alchenei.

Transferul protonului la alchenă și formarea carbocationului.

Atacul unei noi molecule de alchenă de către carbocation.

3°. a) Stabilirea formulei brute și moleculare:

$$\text{C: } \frac{85,71}{12} = 7,14; \quad \text{H: } \frac{14,29}{1} = 14,29$$

$$\text{C: } \frac{7,14}{7,14} = 1; \quad \text{H: } \frac{14,29}{7,14} = 2.$$

Formula brută:  $\text{CH}_2$ .

Formula moleculară:  $(\text{CH}_2)_n = 84; n = 6; \text{C}_6\text{H}_{12}$ .

b)  $\text{CH}_2=\text{CH}-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_3$

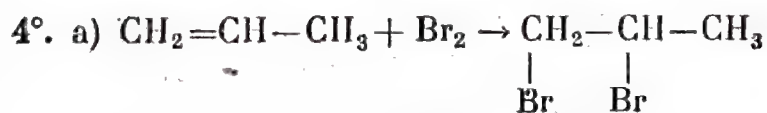
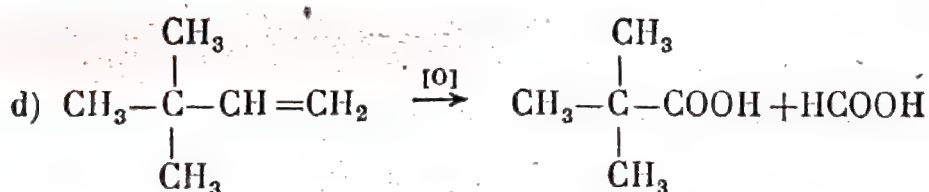
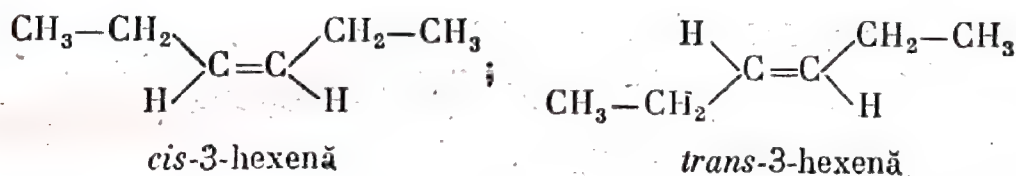
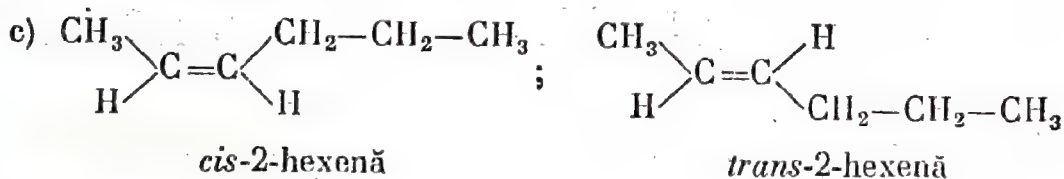
1-hexenă

$\text{CH}_3-\text{CH}=\text{CH}-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_3$

2-hexenă

$\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}=\text{CH}-\text{CH}_2-\text{CH}_3$

3-hexenă



$$22,4 \cdot 10^3 \text{ ml propenă} \dots\dots\dots 160 \cdot 10^3 \text{ mg Br}_2$$

$$X \dots\dots\dots 800 \text{ mg}$$

$$X = 112 \text{ ml propenă,}$$

$$560 \text{ ml amestec} \dots\dots\dots 112 \text{ ml propenă}$$

$$100 \text{ ml} \dots\dots\dots Y$$

$$Y = 20\% \text{ propenă}$$

$$100 - 20 = 80\% \text{ propan.}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{b) } \text{C}_3\text{H}_8 + 5 \text{O}_2 \rightarrow 3 \text{CO}_2 + 4 \text{H}_2\text{O} \\
 560 - 112 = 448 \text{ ml propan} \\
 22,4 \cdot 10^3 \text{ ml propan} \dots\dots\dots 3 \cdot 22,4 \cdot 10^3 \text{ ml CO}_2 \\
 448 \text{ ml} \dots\dots\dots X \\
 \hline
 X = 3 \cdot 448 = 1344 \text{ ml CO}_2.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{C}_3\text{H}_6 + 9/2 \text{O}_2 \rightarrow 3 \text{CO}_2 + 3 \text{H}_2\text{O} \\
 22,4 \cdot 10^3 \text{ ml propenă} \dots\dots\dots 3 \cdot 22,4 \text{ ml CO}_2 \\
 112 \text{ ml} \dots\dots\dots Y \\
 \hline
 Y = 336 \text{ ml CO}_2.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Total volum CO}_2 = 1344 + 336 = 1680 \text{ ml} \\
 \text{sau} \\
 560 \text{ ml} \times 3 = 1680 \text{ ml CO}_2.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Cantitatea de apă} \\
 22,4 \cdot 10^3 \text{ ml C}_3\text{H}_8 \dots\dots\dots 4 \cdot 18 \text{ g H}_2\text{O} \\
 448 \text{ ml} \dots\dots\dots X \\
 \hline
 X = 1,44 \text{ g H}_2\text{O}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 22,4 \cdot 10^3 \text{ ml C}_3\text{H}_6 \dots\dots\dots 3 \cdot 18 \text{ g H}_2\text{O} \\
 112 \text{ ml} \dots\dots\dots Y \\
 \hline
 Y = 0,27 \text{ g}
 \end{array}$$

$$\text{Total } 1,44 + 0,27 = 1,71 \text{ g H}_2\text{O}.$$

XIX. 1°. 1. Subiectul se tratează conform manualului de liceu pentru clasa a XI-a.

2. Prin definiție:

$$K_p = \frac{p_{\text{NO}_2}^2}{p_{\text{N}_2\text{O}_4}}; \quad K_n = \frac{n_{\text{NO}_2}^2}{n_{\text{N}_2\text{O}_4}}; \quad K_x = \frac{X_{\text{NO}_2}^2}{X_{\text{N}_2\text{O}_4}}$$

unde

$K_p$  se exprimă prin presiunile parțiale ale celor două componente,  $p_{\text{NO}_2}$ , și, respectiv,  $p_{\text{N}_2\text{O}_4}$ ;

$K_x$  se exprimă prin fracțiile molare ale componentelor  $X_{\text{NO}_2}$ , și, respectiv,  $X_{\text{N}_2\text{O}_4}$ ;

$K_n$  se exprimă prin numărul de moli al componentelor,  $n_{\text{NO}_2}$ , și, respectiv,  $n_{\text{N}_2\text{O}_4}$ .

Se pot ușor stabili relațiile dintre aceste constante. De exemplu, avînd în vedere că  $X_i = p_i/p$ , unde  $p$  este presiunea totală, se obține:

$$K_p = \frac{X_{\text{NO}_2}^2 \cdot P^2}{X_{\text{N}_2\text{O}_4} \cdot P} = K_x \cdot P.$$

Analog, avînd în vedere că  $X_i = n_i/n$  unde  $n$  este numărul total de moli din sistem, se obține:

$$K_n = \frac{X_{\text{NO}_2}^2 \cdot n^2}{X_{\text{N}_2\text{O}_4} \cdot n} = K_x \cdot n.$$

Deci:

$$K_p = K_x \cdot P = \frac{K_n}{n} \cdot P.$$

Presupunind că reacția de disociere a  $N_2O_4$  este o reacție simplă expresia legii de viteză va fi:

$$v = k[N_2O_4]$$

în care  $v$  este viteza reacției exprimată în mol/l.s;

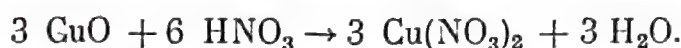
- ordinul de reacție este 1 (egal cu molecularitatea);
- constanta de viteză  $k$  are ca dimensiuni inversul unui timp ( $s^{-1}$ );
- $[N_2O_4]$  reprezintă concentrația reactantului exprimată în mol/l.



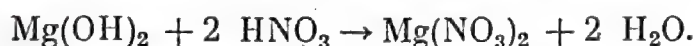
În această reacție acidul azotic este oxidant, el oxidînd în primă etapă cuprul la oxid de cupru, azotul reducîndu-se la NO:



Ulterior oxidul de cupru se va dizolva în excesul de acid azotic:



Prin însumarea acestor două reacții se obține ecuația reacției globale de dizolvare a cuprului în acid azotic. Este deci un proces redox:



În această reacție acidul azotic se manifestă numai ca un acid, reacția fiind o simplă reacție de neutralizare, între un acid ( $HNO_3$ ) și o bază ( $Mg(OH)_2$ ).

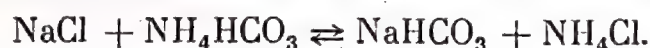
2. În procedeul amoniacal de obținere a carbonatului de sodiu (sodei calcinate) se folosesc ca materii prime:  $CaCO_3$ ,  $NaCl$ ,  $H_2O$  și se mai folosește amoniac,  $NH_3$ , dar acesta nu se consumă, ci se regenerează și reutilizează. Principalele reacții sînt:



Reacția este reversibilă, dar prin îndepărtarea  $CO_2$  din sistem ea poate fi deplasată complet spre dreapta. Dioxidul de carbon se barbotează în soluția de amoniac:



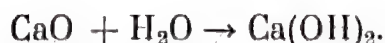
și soluția de carbonat acid de amoniu se tratează cu soluție de  $NaCl$  (saramură):



Echilibrul este deplasat spre dreapta deoarece  $NaHCO_3$  este mai puțin solubil în apă. Precipitatul de  $NaHCO_3$  se calcinează:



Dioxidul de carbon obținut în această etapă se reintroduce în procesul de fabricație. Pentru recuperarea amoniacului, oxidul de calciu, obținut la calcinarea calcarului, se tratează cu apă:



Clorura de amoniu se tratează cu hidroxidul de calciu:

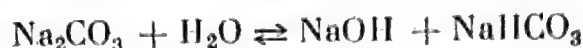


regenerîndu-se astfel soluția de amoniac.  $CaCl_2$  constituie un produs secundar al procesului de fabricație a sodei calcinate.

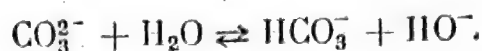


La dizolvarea în apă a carbonatului de sodiu are loc hidroliza acestei sări, care provine de la un acid slab ( $\text{H}_2\text{CO}_3$ ) și o bază tare ( $\text{NaOH}$ ), astfel încât soluția obținută va avea un caracter bazic, având  $\text{pH} > 7$ .

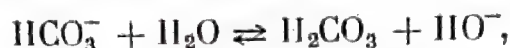
Reacția de hidroliză are loc în trepte



sau ionic:



A doua treaptă a reacției de hidroliză este:



dar în mod obișnuit ea nu are loc (cu pondere importantă) în soluții apoase de  $\text{Na}_2\text{CO}_3$ . Ea se poate produce la încălzire sau prin adăugarea unui reactant care să consume ionii  $\text{HO}^-$  (de exemplu un acid mai tare) deplasând astfel echilibrul de hidroliză spre dreapta.

3°.1. a) Deoarece zincul are un potențial de reducere mai negativ decât cuprul, va avea loc reacția:



sau



Fie  $x$  numărul de moli (atomi-gram) de zinc trecut în soluție și deci de cupru depus. Variația masei plăcuței o reprezintă diferența dintre masa zincului dizolvat și cea a cuprului depus:

$$65x - 63,5x = 0,045$$

de unde  $x = 0,03$  moli.

Deci masa cuprului depus pe plăcuță:

$$m_{\text{Cu}} = 0,03 \text{ moli} \cdot 63,5 \text{ g/mol} = 1,905 \text{ g Cu}$$

Cei 0,03 moli de Cu depus reprezintă 0,06 echivalenți-gram de ioni  $\text{Cu}^{2+}$  și deci în soluție au mai rămas:

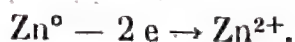
$$0,1 - 0,06 = 0,04 \text{ echivalenți-gram } \text{Cu}^{2+}$$

Presupunind că volumul soluției nu s-a modificat, rămânând tot 1 l, înseamnă că normalitatea acestei soluții a devenit 0,04 N în  $\text{CuSO}_4$ .

b) Celula galvanică se scrie convențional:



Prin dizolvarea sa, zincul metalic constituie anodul celulei și se încarcă negativ. Reacția anodică este:



Procesul catodic este reducerea ionilor de cupru:



care conduce la depunerea cuprului metalic pe plăcuța de zinc.

4°. Se va defini noțiunea de acid după Brönsted, precum și tăria unui acid, conform manualului pentru clasa a IX-a. Se va preciza că tăria acizilor oxigenați superiori crește în perioadă odată cu creșterea caracterului nemetalic al atomului central.

Cum în perioadă caracterul nemetalic crește de la stînga la dreapta, rezultă că tăria acizilor menționați crește în ordinea:



Siliciul, avînd patru electroni pe ultimul strat (este situat în grupa a IV-a), va avea caracterul nemetalic cel mai slab. Caracterul nemetalic se exprimă cantitativ prin afinitatea pentru electron, care reprezintă energia degajată în procesul de acceptare a unui electron de către un atom și transformarea acestuia în ion negativ. Deci siliciul avînd cea mai mică afinitate pentru electron va forma acidul cel mai slab,  $\text{H}_4\text{SiO}_4$  fiind acid foarte slab.

Fosforul, avînd 5 electroni pe ultimul strat va avea un caracter nemetalic mai pronunțat, deci o afinitate pentru electron mai mare decît siliciul și va forma un acid mai tare decît cel silicic,  $\text{H}_3\text{PO}_4$  fiind un acid de tărie medie.

Sulfur, situat în grupa a VI-a principală are 6 electroni pe ultimul strat deci caracter nemetalic și mai pronunțat decît fosforul, va forma un acid și mai tare decît cel fosforic,  $\text{H}_2\text{SO}_4$  fiind deja un acid tare (cel puțin în prima sa treaptă de ionizare).

Clorul avînd 7 electroni pe ultimul strat va avea cea mai mare afinitate pentru electron, el avînd nevoie de un singur electron pentru a-și completa octetul electronic, deci și cel mai pronunțat caracter nemetalic și, ca urmare, acidul percloric  $\text{HClO}_4$  va fi cel mai tare dintre acizii menționați, el fiind de fapt cel mai tare dintre acizii oxigenați anorganici.

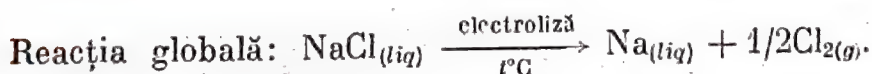
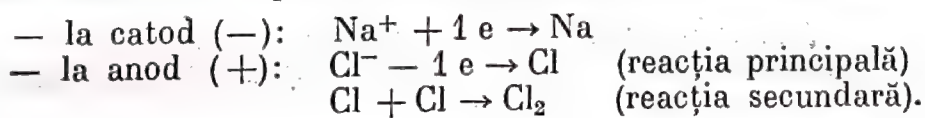
XX. 1°. 1. Se va defini caracterul metalic și energia de ionizare, apoi se va analiza și explica variația acestor proprietăți în tabelul periodic conform manualului pentru clasa a IX-a. În concluzie, caracterul metalic crește în ordinea:



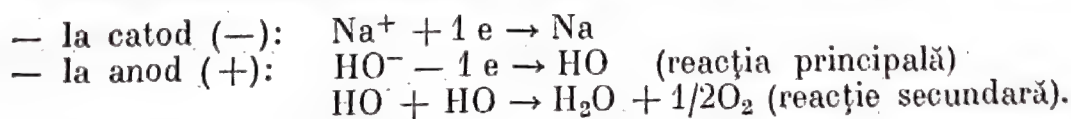
Energia de ionizare variază în sens invers decît caracterul metalic adică crește în ordinea:



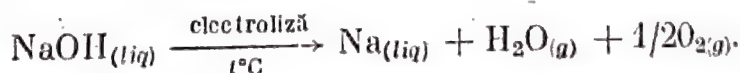
2. Sodiul se poate obține industrial numai prin electroliză în topitură, fie a clorurii de sodiu, fie a hidroxidului de sodiu (vezi manualul pentru clasa a XI-a). În cazul electrolizei topiturii de  $\text{NaCl}$  reacțiile la electrozi sînt:



În cazul electrolizei topiturii de hidroxid de sodiu reacțiile la electrozi sînt:



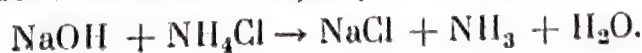
Reacția globală:



Electroliza topiturii hidroxidului de sodiu prezintă avantajul că se realizează la temperaturi mai joase decît în cazul  $\text{NaCl}$ .

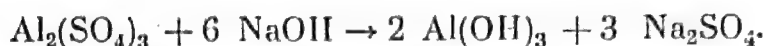


Rezultă un amestec de clorură de sodiu și hipoclorit de sodiu:





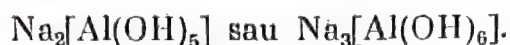
Hidroxidul de sodiu fiind o bază mai tare decât amoniacul, îl scoate pe acesta din sărurile lui.



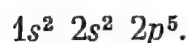
În prima etapă, când NaOH nu este în exces, precipită hidroxidul de aluminiu deoarece acesta este scos din sarea sa de către hidroxidul de sodiu care este o bază mult mai tare decât  $\text{Al}(\text{OH})_3$ . În exces de NaOH, hidroxidul de aluminiu se redizolvă manifestând caracterul său amfoter, adică reacționând ca un acid:



Rezultă tetrahidroxoaluminatul de sodiu care este solubil în apă. În exces mai mare de NaOH se pot forma și alți hidroxoalumiinați, cum ar fi



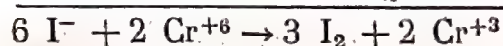
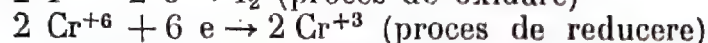
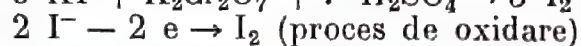
4. Elementul cu numărul atomic  $Z = 9$  este fluorul și are configurația electronică:



Fiind cel mai electronegativ element în reacția lui cu potasiul va avea loc un transfer de electron de la potasiu (avind caracter metalic pronunțat) la fluor cu puternic caracter nemetalic, rezultind astfel ionii  $\text{K}^+$  și  $\text{F}^-$ . Deci în compusul format, KF, legătura va fi ionică sau electrovalentă.

Compusul va avea proprietățile generale ale substanțelor ionice (vezi manualul pentru clasa a IX-a).

2°.1. Ecuația se echilibrează prin metoda redox:



2. În această reacție echivalentul-gram al dicromatului de potasiu este  $\frac{1}{6}$  moli deoarece o moleculă de dicromat transferă 6 electroni.

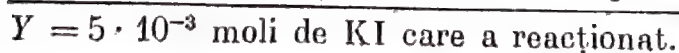
Se calculează numărul de echivalenți-gram ( $E_q$ ) de  $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$  din soluția utilizată:

1000 ml sol. ....	0,1 $E_q$
50 ml sol. ....	$x$

---


$$x = 5 \cdot 10^{-3} E_q \text{ de } \text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 = \frac{5}{6} \cdot 10^{-3} \text{ moli } \text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7.$$

Numărul de moli de KI ce reacționează se obține din ecuația reacției:



Numărul de moli de iod molecular format este evident jumătate din numărul de moli de KI reacționat, adică rezultă

$$2,5 \cdot 10^{-3} \text{ moli } \text{I}_2 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ moli} \cdot 254 \text{ g/mol} = 0,635 \text{ g } \text{I}_2.$$

Masa de KI reacționat este  $5 \cdot 10^{-3} \text{ moli} \cdot 166 \text{ g/mol} = 0,83 \text{ g KI}$ .

Deci masa KI în exces este  $1 - 0,83 = 0,17 \text{ g KI exces}$ .

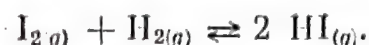


3. Masa de acid sulfuric consumată în reacție se obține tot din ecuația reacției:



$$Z = \frac{35}{6} \cdot 10^{-3} \text{ moli } H_2SO_4 = \frac{35}{6} \cdot 10^{-3} \text{ moli} \cdot 98 \text{ g/mol} = 0,572 \text{ g } H_2SO_4 \text{ consumat}$$

4. Iodul format în reacția de oxidare a iodurii de potasiu este  $2,5 \cdot 10^{-3}$  moli  $I_2$  și este încălzit deci tot cu  $2,5 \cdot 10^{-3}$  moli de  $H_2$  până la stabilirea echilibrului:



Fie  $x$  numărul de moli de  $I_2$  (sau de  $H_2$ ) care reacționează și deci se formează, la echilibru  $2x$  moli de  $HI$ .

Avem următorul tabel:

Component \ Timp	$I_2$	$H_2$	$HI$	Total
$t = 0$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	0	$5 \cdot 10^{-3}$
$t = t_{ech}$	$2,5 \cdot 10^{-3} - x$	$2,5 \cdot 10^{-3} - x$	$2x$	$5 \cdot 10^{-3}$

Expresia constantei de echilibru exprimată prin concentrații molare va fi:

$$K_c = \frac{[HI]^2}{[H_2] \cdot [I_2]}$$

Dacă volumul sistemului este  $V$ , avem:

$$K_c = \frac{\frac{4x^2}{V^2}}{\frac{(2,5 \cdot 10^{-3} - x)^2}{V^2}} = \frac{4x^2}{(2,5 \cdot 10^{-3} - x)^2}$$

sau:

$$\frac{2x}{2,5 \cdot 10^{-3} - x} = \pm 8, \text{ de unde rezultă: } x = 2 \cdot 10^{-3}$$

Cealaltă soluție a ecuației nu are sens fizic.

Deci se formează la echilibru:

$$2x = 4 \cdot 10^{-3} \text{ moli } HI = 4 \cdot 10^{-3} \text{ moli} \cdot 128 \text{ g/mol} = 0,512 \text{ g } HI.$$

3°. Subiectul va fi tratat conform manualului de liceu pentru clasa a X-a avându-se în vedere următoarele probleme: Definiția monomerilor vinilici. Principali monomeri vinilici. Obținerea lor prin reacții de adiție la acetilenă, reacții de cracare și reacții de dehidrogenare.

Mecanismul general al polimerizării vinilice se va trata conform manualelor pentru clasele a X-a și a XII-a, punându-se în evidență mecanismul de adiție radicalică al polimerizării, fie pe un exemplu general, fie pe un caz concret.

4°. 1. Glicerida poate fi numai o distearooleină sau o dioleostearină. În primul caz, masa moleculară va fi 888 g/mol, iar în cel de al doilea 886 g/mol.

Un mol de distearooleină va adăuna 1 mol de  $I_2$ . Cifra de iod fiind numărul de grame de iod ce se adăunează la 100 g gliceridă rezultă că, în primul caz, s-ar obține o cifră de iod (C.I.):

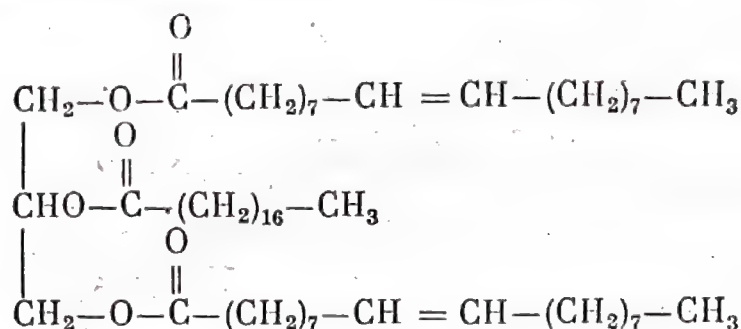
888 g gliceridă	.....	254 g $I_2$
100 g gliceridă	.....	C.I. = 28,60 g $I_2$ .

Deci glicerida nu este distearooleină.

În al doilea caz, un mol de dioleostearină va adăuna doi moli de  $I_2$  și va avea o cifră de iod:

886 g gliceridă	.....	$2 \times 254$ g $I_2$
100 g gliceridă	.....	C.I. = 57,33 g $I_2$

cea ce corespunde enunțului, deci glicerida considerată este o dioleostearină. Formula de structură a gliceridei cu molecula simetrică va fi:



2. Săpunul obținut va fi format din oleat de sodiu și din stearat de sodiu în raport molar 2:1

886 kg gliceridă	.....	$(2 \cdot 304 + 306)$ kg săpun
1772 kg gliceridă	.....	$x$ kg săpun

$$x = \frac{1772 \cdot 914}{886} = 1828 \text{ kg săpun anhidru.}$$

Dacă săpunul mai conține 10% apă înseamnă că el conține 90% săpun anhidru. Deci:

100 kg săpun umed	.....	90 kg săpun anhidru
$x$ kg săpun umed	.....	1828 kg săpun anhidru

$$x = 2031,11 \text{ kg săpun cu } 10\% \text{ apă.}$$

3. 1 kmol gliceridă = 886 kg	.....	2 kmoli $H_2$ = 44,8 m <sup>3</sup>
443 kg	.....	$Y$ m <sup>3</sup> $H_2$

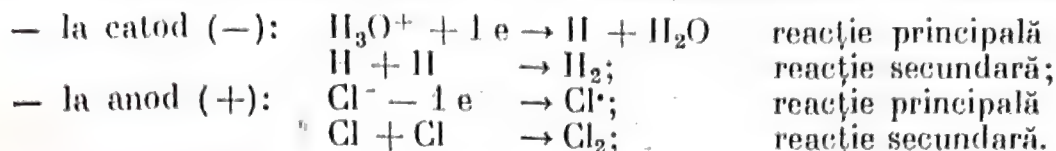
$$Y = 22,4 \text{ m}^3 H_2 \text{ (în condiții normale).}$$

În condițiile problemei:

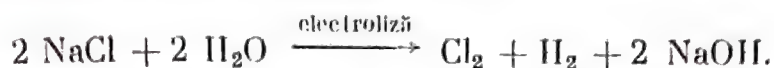
$$\frac{P_0 V_0}{T_p} = \frac{PV}{T}; \text{ de unde } V = \frac{P_0 V_0 T}{PT_0} = \frac{22,4 \cdot 1 \cdot 300}{10 \cdot 273} = 2,46 \text{ m}^3 H_2$$

**XXI. 1°. 1.** Subiectul se va trata conform manualului de liceu pentru clasa a IX-a. Se va discuta variația în tabelul periodic a razelor ionice și afinității pentru electroni. În concluzie, se va preciza pentru grupa halogenilor: razele ionice cresc în ordinea:  $F^- < Cl^- < Br^- < I^-$ ; afinitatea pentru electroni crește în ordinea:  $I < Br < Cl < F$ . Se vor preciza apoi factorii care influențează entropia substanțelor, conform manualului pentru clasa a XI-a și, în concluzie, ordinea în care crește entropia halogenilor în stare gazoasă va fi:  $F_2 < Cl_2 < Br_2 < I_2$ .

2. Metoda industrială de obținere a clorului este electroliza soluției apoase de NaCl (vezi manualul pentru clasa a XI-a). Reacțiile care au loc la electrozi vor fi:



În soluție rămân ionii de  $\text{Na}^+$  și  $\text{HO}^-$  care formează hidroxidul de sodiu. Reacția globală a procesului de electroliză este:



Prin același proces se obține deci industrial și hidroxidul de sodiu (de exemplu, la combinatele chimice de la Rimnicu Vilcea, Giurgiu și Borzești).

În laborator clorul se obține de obicei prin oxidarea acidului clorhidric. De exemplu:



sau:



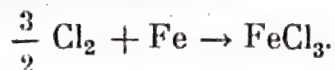
3. Expresiile cerute sînt:

$$\begin{array}{l} \text{H}_{2(g)} + \text{I}_{2(g)} \rightleftharpoons 2\text{HI}_{(g)} \\ K_c = \frac{[\text{HI}]^2}{[\text{H}_2] \cdot [\text{I}_2]}; \quad K_p = \frac{P_{\text{HI}}^2}{P_{\text{H}_2} \cdot P_{\text{I}_2}} \end{array}$$

unde  $K_c$  se exprimă prin concentrațiile molare ale celor trei componente, iar  $K_p$  prin presiunile parțiale respective. Reacția avînd loc fără variația numărului de moli, adică  $\Delta n = 0$ , rezultă că cele două constante sînt egale între ele și ambele adimensionale, deci  $K_c = K_p$ . În caz general,  $K_p = K_c(RT)^{\Delta n}$ , presupunînd o comportare ideală a tuturor componentelor sistemului gazos.



Rezultă deci un amestec de clorură de sodiu și hipoclorit de sodiu:



Se va forma clorura de Fe(III), deoarece clorul are un puternic caracter oxidant și deci va oxida fierul pînă la treapta superioară de oxidare.



sau



Cea mai mare parte a clorului se va dizolva în apă, dar o anumită cantitate va reacționa cu apa formînd un amestec de acid clorhidric și acid hipocloros.



Clorul, avînd un caracter nemetalic mai pronunțat decît bromul, va oxida ionii  $\text{Br}^-$  la brom molecular, adică va pune în libertate bromul din sărurile acestuia (din bromuri).

2°. 1. Conform enunțului, dolomita va fi un amestec de  $\text{CaCO}_3$ ,  $\text{MgCO}_3$  și impurități.

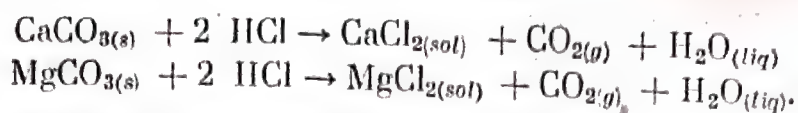
Reacțiile de descompunere termică sînt:





Deci reziduul rămas este format din  $\text{CaO}$ ,  $\text{MgO}$  și impurități, deoarece descompunerea carbonaților este totală ( $\eta = 100\%$ ), iar impuritățile nu se volatilizează.

La tratarea dolomitei cu  $\text{HCl}$  au loc reacțiile:



Deci reziduul care rămâne îl reprezintă numai impuritățile (care nu reacționează cu  $\text{HCl}$ ). Diferența dintre masele reziduurilor rămase în cele două cazuri este deci masa celor doi oxizi  $\text{CaO}$  și  $\text{MgO}$ .

Fie  $x$  numărul de moli de  $\text{CaCO}_3$  din probă;  
 $y$  numărul de moli de  $\text{MgCO}_3$  din probă.

Evident că rezultă  $x$  moli  $\text{CaO}$  și  $y$  moli  $\text{MgO}$  la calcinare.  
 Se obține deci sistemul:

$$\begin{cases} 100x + 84y = 1,84 & (\text{masa probei calcinate minus } 0,16 \text{ g impurități}); \\ 56x + 40y = 0,96 & (\text{masa reziduului de la calcinare minus } 0,16 \text{ g impurități}). \end{cases}$$

Rezolvând sistemul se obține:

$$\begin{aligned}x &= 0,01 \text{ moli } \text{CaCO}_3 = 1 \text{ g } \text{CaCO}_3 \\ y &= 0,01 \text{ moli } \text{MgCO}_3 = 0,84 \text{ g } \text{MgCO}_3.\end{aligned}$$

Deci proba supusă descompunerii conține:

1 g  $\text{CaCO}_3$ ; 0,84 g  $\text{MgCO}_3$  și 0,16 g impurități

adică: 50%  $\text{CaCO}_3$ ; 42%  $\text{MgCO}_3$  și 8% impurități în procente de masă.

2. Volumul de  $\text{CO}_2$  rezultat la descompunerea termică va fi evident egal cu cel rezultat la tratarea cu  $\text{HCl}$  (neglijându-se solubilitatea  $\text{CO}_2$  în apă) și va fi  $0,02 \text{ moli} \cdot 22,4 \text{ l/mol} = 0,448 \text{ l} = 448 \text{ cm}^3$  (c.n.)

3. În urma reacției cu  $\text{HCl}$  vor rezulta 0,01 moli de  $\text{CaCl}_2$  și tot 0,01 moli  $\text{MgCl}_2$  deci:

$$\begin{aligned}0,01 \text{ moli} \cdot 111 \text{ g/mol} &= 1,11 \text{ g } \text{CaCl}_2 \\ 0,01 \text{ moli} \cdot 95 \text{ g/mol} &= 0,95 \text{ g } \text{MgCl}_2.\end{aligned}$$

4. Soluția de  $\text{HCl}$  utilizată conține:

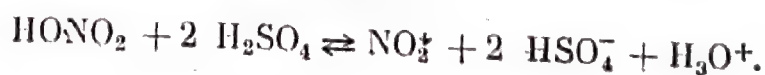
$$0,1 \text{ l} \cdot 2 \text{ mol/l} = 0,2 \text{ moli } \text{HCl}$$

(pentru  $\text{HCl}$  concentrația normală este egală cu cea molară căci  $1 \text{ Eq}_{\text{HCl}} = 1 \text{ mol } \text{HCl}$ ).

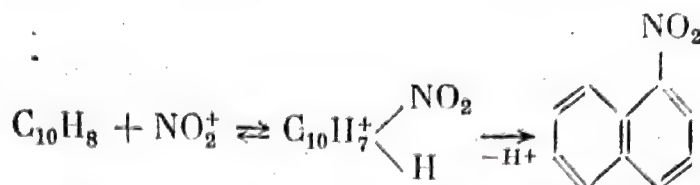
În reacție se consumă 0,04 moli  $\text{HCl}$  (cite 0,02 moli cu fiecare component), deci mai rămân 0,16 moli  $\text{HCl}$  neconsumat, în 0,1 l soluție. Concentrația molară (și cea normală) a  $\text{HCl}$  în această soluție va fi 1,6 mol/l, adică 1,6 N.

3°. Reacțiile compuşilor organici cu acidul azotic, studiate conform programei de liceu, pot fi prezentate după următorul plan:

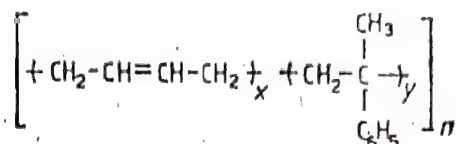
- reacțiile acidului azotic cu hidrocarburile (alcani și arene);
  - reacția glicerinei cu acidul azotic;
  - reacțiile fenolului, clorbenzenului și nitrobenzenului cu acidul azotic (orientarea substituției);
  - reacțiile celulozei cu acidul azotic;
  - reacția xantoproteică pentru identificarea proteinelor.
- Mecanismul reacției de nitrare a naftalinei:  
 — formarea reactantului electrolit:



— atacul reactantului electrophil, formarea complexului  $\sigma$  și expulzarea protonului



4°. 1) Formula generală a unui copolimer butadien —  $\alpha$ -metilstirenic este:



Se calculează procentul de carbon pe baza acestei formule

$$\frac{n(54x + 118y)}{100} \dots\dots\dots \frac{n(4 \cdot 12 \cdot x + 9 \cdot 12 \cdot y)}{90}$$

$$90(54x + 118y) = 100(48x + 108y).$$

Se notează  $\frac{x}{y} = a$ .

$$4860a + 10620 = 4800a + 10800$$

$$a = 3; \text{ (raportul molar } = 3:1).$$

$$2) \bar{M} = (54 \cdot 3 + 118) \cdot 100 = 28000.$$

$$3) \begin{array}{l} 280 \text{ kg copolimer} \dots\dots\dots 1 \text{ kmol cumen} \\ 560 \dots\dots\dots z \end{array}$$

$$z = 2 \text{ kmoli} = 2 \cdot 120 = 240 \text{ kg cumen (randament } 100\%)$$

$$240 \cdot \frac{100}{75} = 320 \text{ kg cumen (randament } 75\%).$$

XXII. 1°. 1. Se va defini caracterul metalic și caracterul nemetalic, conform manualului pentru clasa a IX-a.

Elemente cu caracter metalic sînt: Na, Mg și Al.

Caracter nemetalic au: Si, P, S și Cl, dar Si este considerat și ca un semimetal avînd proprietăți semiconductoare.

Hidroxizii elementelor cu caracter metalic sînt:

NaOH — hidroxid de sodiu;

Mg(OH)<sub>2</sub> — hidroxid de magneziu;

Al(OH)<sub>3</sub> — hidroxid de aluminiu.

Acizii superiori ai elementelor cu caracter nemetalic sînt:

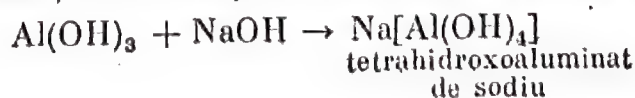
H<sub>4</sub>SiO<sub>4</sub> — acid ortosilicic;

H<sub>3</sub>PO<sub>4</sub> — acid ortofosforic;

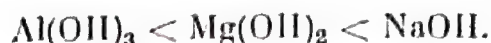
H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> — acid sulfuric;

HClO<sub>4</sub> — acid percloric.

2. Tăria hidroxizilor elementelor cu caracter metalic variază în același sens cu caracterul metalic; adică scade în perioadă de la stînga la dreapta. Caracterul metalic cel mai slab îl are aluminiul deci hidroxidul de aluminiu este cel mai slab, el avînd și caracter amfoter, adică reacționează cu bazele tari ca un acid:



Urmează hidroxidul de magneziu care este de tărie medie și apoi cel de sodiu care este cel mai tare. Deci ordinea cerută este:



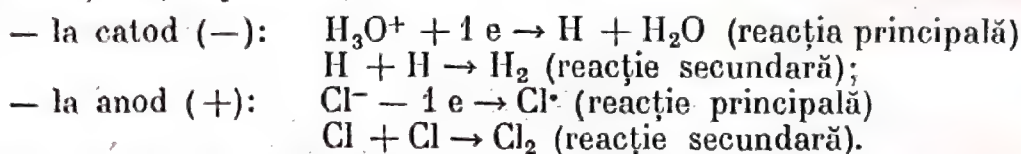
Analog, tăria acizilor oxigenați superiori ai elementelor cu caracter nemetalic crește odată cu creșterea caracterului nemetalic, adică de la stînga la dreapta în sistemul periodic al elementelor.

$\text{H}_4\text{SiO}_4$  este un acid foarte slab,  $\text{H}_3\text{PO}_4$  este un acid de tărie medie,  $\text{H}_2\text{SO}_4$  este un acid tare, iar  $\text{HClO}_4$  este cel mai tare dintre acizii menționați. Deci ordinea cerută este:



3. Hidroxidul de sodiu se obține industrial prin electroliza soluției apoase de clorură de sodiu.

Reacțiile (simplificate) care au loc la electrozi sînt:

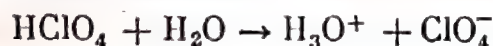


În soluție rămîn ionii  $\text{Na}^+$  și  $\text{HO}^-$  deci se acumulează hidroxid de sodiu.

Reacția globală se poate scrie:



4. Acidul percloric fiind total ionizat conform ecuației:



rezultă că ionii  $\text{H}_3\text{O}^+$  vor avea aceeași concentrație molară ca și  $\text{HClO}_4$  în soluția dată. Masa molară a  $\text{HClO}_4$  este 100,5 g/mol, deci în cei 100 ml soluție se găsesc  $\frac{1,005\text{ g}}{100,5\text{ g/mol}} = 0,01\text{ mol}$ .

La 1000 ml soluție există 0,1 mol  $\text{HClO}_4$  deci

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 0,1\text{ mol/l}.$$

$$\text{pH} = -\lg[\text{H}_3\text{O}^+] = -\lg 10^{-1} = 1.$$

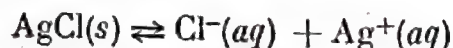
Soluția respectivă de acid percloric are deci  $\text{pH} = 1$ .

$$2^\circ. 1. \quad P_{s(\text{AgCl})} = [\text{Ag}^+] \cdot [\text{Cl}^-].$$

2. Solubilitatea clorurii de argint în mol/l va fi:

$$S = \sqrt{P_s} = \sqrt{10^{-10}} = 10^{-5}\text{ mol/l}.$$

3. Avînd în vedere faptul că clorura de argint care trece în soluție este complet ionizată avînd loc echilibrul eterogen:



rezultă că cele două concentrații,  $[\text{Cl}^-]$  și  $[\text{Ag}^+]$ , în soluție vor fi egale fiecare cu solubilitatea clorurii de argint, dacă se exprimă în mol/l.

Așa dar:

$$[\text{Ag}^+] = 10^{-5}\text{ mol/l} = 108\text{ g/mol} \cdot 10^{-5}\text{ mol/l} = 1,08 \cdot 10^{-3}\text{ g/l}$$

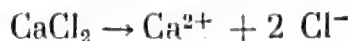
$$[\text{Cl}^-] = 10^{-5}\text{ mol/l} = 35,5\text{ g/mol} \cdot 10^{-5}\text{ mol/l} = 3,55 \cdot 10^{-4}\text{ g/l}.$$

4. Numărul de moli de  $\text{CaCl}_2$  adăugat va fi:

$$\frac{2,775 \cdot 10^{-2}}{111} = 2,5 \cdot 10^{-4}\text{ moli în } 500\text{ ml soluție, deci } 5 \cdot 10^{-4}\text{ mol/l}.$$



Clorura de calciu fiind total ionizată în soluție:



rezultă că ionii  $\text{Cl}^-$  introduși cu  $\text{CaCl}_2$  vor avea o concentrație dublă, adică  $10^{-3}$  mol/l. Dacă notăm cu  $x$  solubilitatea  $\text{AgCl}$  în prezența clorurii de calciu, atunci ionii din soluție vor avea concentrațiile:

$$[\text{Ag}^+] = x \text{ mol/l}$$

$$[\text{Cl}^-] = (x + 10^{-3}) \text{ mol/l.}$$

Produsul acestor concentrații în soluție nu poate depăși produsul de solubilitate. Rezultă:

$$x(x + 10^{-3}) = 10^{-10}.$$

Ținând cont de faptul că solubilitatea clorurii de argint în prezența  $\text{CaCl}_2$  va fi cu siguranță mai mică decât în apă pură (influența ionului comun) rezultă că  $x < 10^{-5}$  și deci  $x \ll 10^{-3}$ ; și neglijând pe  $x$  din paranteză rezultă

$$x = 10^{-7} \text{ mol/l,}$$

Așadar prin adăugarea clorurii de calciu solubilitatea clorurii de argint se reduce la  $10^{-7}$  mol/l (față de  $10^{-5}$  mol/l, în apă pură).

$$5. [\text{Ag}^+] = 10^{-7} \text{ mol/l} \cdot 108 \text{ g/mol} = 1,08 \cdot 10^{-5} \text{ g/l}$$

$$[\text{Cl}^-] = 10^{-3} \text{ mol/l} \cdot 35,5 \text{ g/mol} = 3,55 \cdot 10^{-2} \text{ g/l.}$$

3°. Planul de tratare a subiectului este următorul:

A. Proprietățile chimice ale alcoolilor. Definiția alcoolilor.

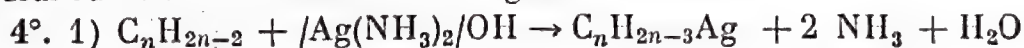
Reacția alcoolilor cu metale alcaline. Eliminarea apei intra- și intermolecular. Esterificarea alcoolilor cu acizi minerali și cu acizi carboxilici. Oxidarea alcoolilor. Reacțiile alcoolilor cu hidracizii și cu pentaclorura de fosfor. Esterificarea alcoolilor cu cloruri acide și cu anhidride acide.

B. Proprietățile chimice ale fenolului.

Formula și structurile limită ale fenolului. Aciditatea fenolului (reacția cu hidroxidul de sodiu). Eterificarea și esterificarea fenolului. Alchilarea cu oxid de etenă.

Substituiția electofilă aromatică în pozițiile *orto* și *para* (halogenarea, nitrare, sulfonare).

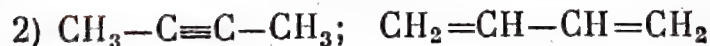
Condensarea fenolului cu formaldehidă (în mediu acid și în mediu bazic). Cuplarea fenolului cu săruri de diazoniu. Hidrogenarea fenolului.



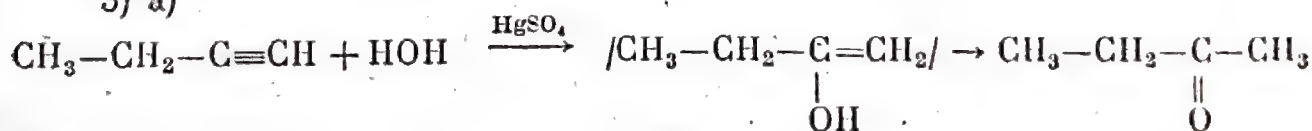
$$14n-2 \text{ g} \dots\dots\dots 14n-3 + 108 \text{ g.}$$

$$10,8 \text{ g} \dots\dots\dots 32,2 \text{ g.}$$

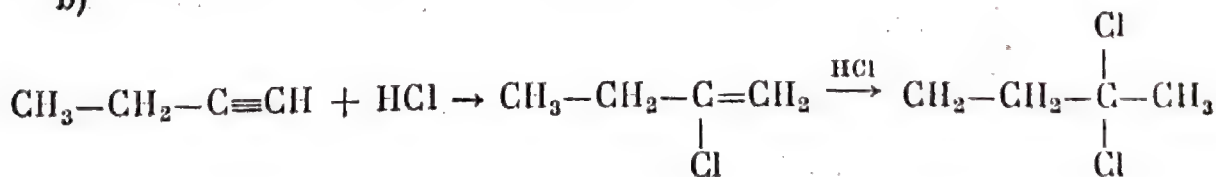
$$n = 4; \text{A: } \text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{C}\equiv\text{CH}$$

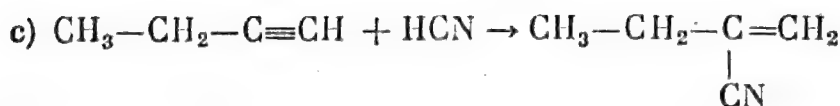


3) a)

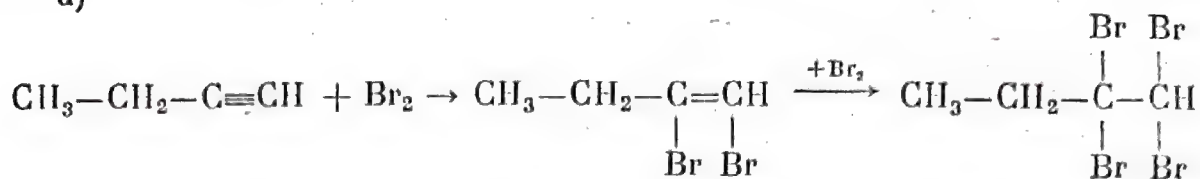


b)

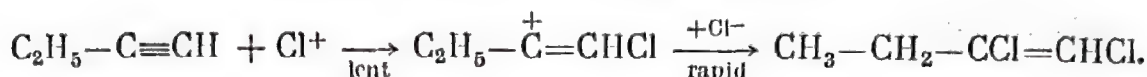




d)



4) Adiția clorului la 1-butenă decurge ca o adiție electrofilă:



**XXIII. 1°. 1.** Se va discuta variația caracterului nemetalic în sistemul periodic al elementelor, conform manualului de liceu pentru clasa a IX-a, și în concluzie ordinea cerută va fi:  $\text{C} < \text{N} < \text{O} < \text{F}$ .

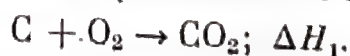
2. Se va defini fenomenul de alotropie (manualul pentru clasa a IX-a). Dintre elementele menționate prezintă alotropie carbonul și oxigenul. În cazul carbonului cele două forme alotropice, diamantul și grafitul, se deosebesc prin tipul de rețele cristaline pe care le formează. Diamantul, în care atomii de carbon sînt hibridizați  $sp^3$ , formează o rețea atomică cu legături covalente între atomi, iar grafitul, în care atomii de carbon sînt hibridizați  $sp^2$ , formează o rețea atomică stratificată, în care atomii de carbon din același strat al rețelei sînt legați covalent, dar distanțele dintre straturile rețelei sînt mult mai mari și deci și legăturile dintre aceste straturi sînt mult mai slabe, ceea ce conferă grafitului o duritate mult mai mică decît cea a diamantului (1 în scara Mohs, față de 10 a diamantului). În cazul oxigenului cele două forme alotropice, oxigenul obișnuit și ozonul, se deosebesc între ele prin numărul de atomi din moleculă, oxigenul obișnuit avînd molecula diatomică ( $\text{O}_2$ ), iar ozonul triatomică ( $\text{O}_3$ ). Aceasta conferă ozonului o reactivitate mai mare decît a oxigenului obișnuit.

3. Legea lui Hess derivă din proprietățile energiei interne și entalpiei care sînt funcții de stare și deci valorile lor nu depind decît de starea sistemului, iar variațiile lor depind de starea inițială și cea finală a sistemului și sînt independente de calea pe care se realizează trecerea sistemului din starea inițială în cea finală. Cum căldura de reacție (efectul termic) la volum constant  $Q_v = \Delta U$ , iar la presiune constantă  $Q_p = \Delta H$ , rezultă că și această căldură de reacție va depinde numai de starea inițială și cea finală a sistemului. Tocmai în aceasta constă legea lui Hess, care se poate deci enunța astfel: „Efectul termic al unei reacții chimice care se desfășoară în anumite condiții bine determinate, depinde numai de starea inițială a reactanților și de starea finală a produșilor de reacție, fiind independent de stările intermediare prin care sistemul trece de la starea inițială la cea finală”.

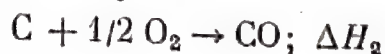
Această formulare este echivalentă cu următoarea:

„Dacă o reacție chimică se poate desfășura în mai multe etape, atunci efectul termic global este suma algebrică a efectelor termice ale etapelor intermediare”.

De exemplu, arderea carbonului poate avea loc cu formare de  $\text{CO}_2$ :



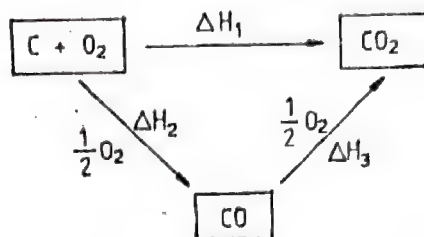
Dar arderea poate avea loc și în etape:



și apoi:



Conform legii lui Hess:  $\Delta H_1 = \Delta H_2 + \Delta H_3$   
sau sub forma unui ciclu:



2°.1. Ambele metale din aliaj reacționează cu  $\text{H}_2\text{SO}_4$  degajând hidrogen:



Fie  $x$  — numărul de moli (atomi gram) de Zn;  
 $y$  — numărul de moli (atomi gram) de Mg.

Din prima reacție vor rezulta tot  $x$  moli de  $\text{H}_2$ , iar din a doua  $y$  moli de  $\text{H}_2$ .  
Se poate alcătui sistemul:

$$\begin{cases} 65x + 24y = 17,8 \\ 22,4x + 22,4y = 8,96 \end{cases}$$

sau împărțind ecuația a doua prin 22,4:

$$\begin{cases} 65x + 24y = 17,8 \\ x + y = 0,4 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul se obține:

$$x = 0,2 \text{ moli Zn} = 13 \text{ g Zn}$$

$$y = 0,2 \text{ moli Mg} = 4,8 \text{ g Mg}.$$

Deci compoziția aliajului este:

$$\% \text{Zn} = \frac{13}{17,8} \cdot 100 = 73,03\% \text{ Zn (masă)}$$

$$\% \text{Mg} = \frac{4,8}{17,8} \cdot 100 = 26,97\% \text{ Mg (masă)}.$$

2. Cei  $x$  moli de Zn consumă tot  $x$  moli  $\text{H}_2\text{SO}_4$ , iar cei  $y$  moli de Mg consumă tot  $y$  moli  $\text{H}_2\text{SO}_4$ .

Se vor consuma deci în total

$$x + y = 0,4 \text{ moli } \text{H}_2\text{SO}_4$$

sau

$$0,4 \text{ moli} \cdot 98 \text{ g/mol} = 39,2 \text{ g } \text{H}_2\text{SO}_4.$$

3. Din cele două reacții vor rezulta  $x$  moli de sulfat de zinc și respectiv  $y$  moli sulfat de magneziu. Se vor obține deci:

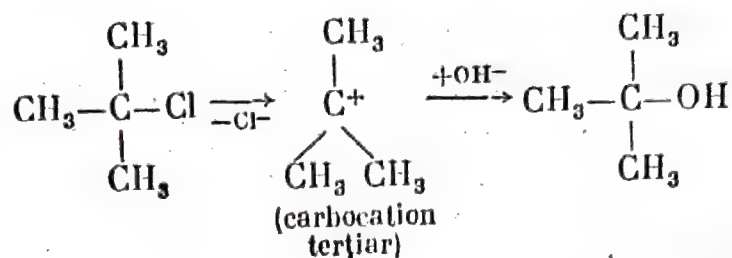
$$0,2 \text{ moli} \cdot 161 \text{ g/mol} = 32,2 \text{ g ZnSO}_4$$

$$0,2 \text{ moli} \cdot 120 \text{ g/mol} = 24,0 \text{ g MgSO}_4.$$

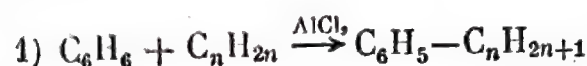


3°. Hidroliza derivaților halogenați este catalizată de baze și decurge ca o reacție de substituție nucleofilă. Exemple: Hidroliza derivaților mono-, di- și trihalogenați. Hidroliza clorurii de alil și a diclorhidrinei glicerinei. Hidroliza clorurii de benziliden și a feniltriclorometanului.

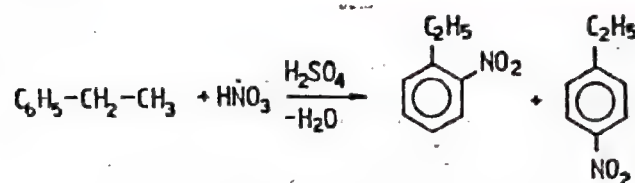
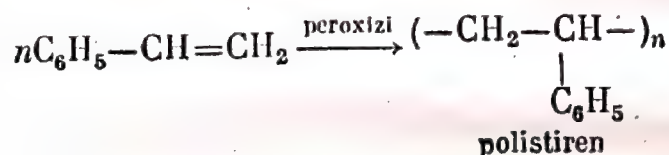
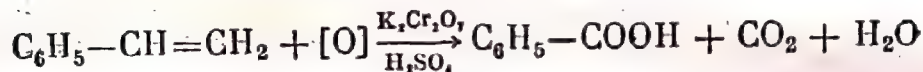
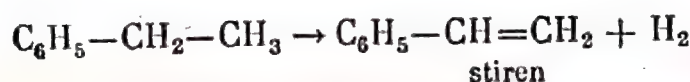
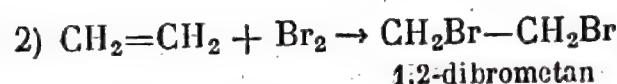
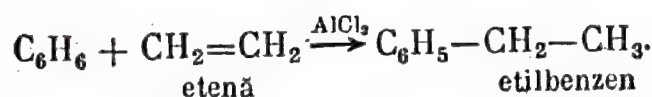
Mecanismul reacției de hidroliză a clorurii de tert-butil ( $SN_1$ ):



4°. Ecuația reacției:



$$14n + 78 = 106; n = 2$$



$$X = 44,8 \text{ m}^3 \text{ etenă (randament 100\%)}$$

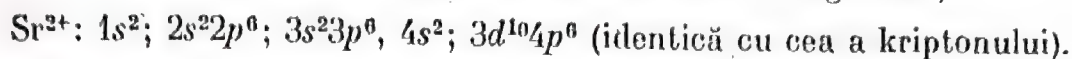
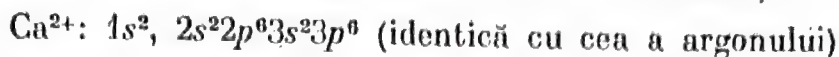
$$44,8 \cdot \frac{100}{75} = 59,73 \text{ m}^3$$

XXIV. 1°. 1.  $\text{Mg}(Z = 12); 1s^2; 2s^2 2p^6; 3s^2$

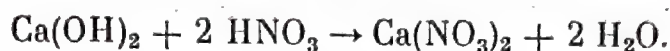
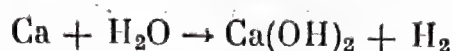
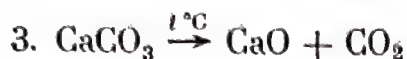
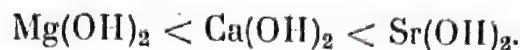
$\text{Ca}(Z = 20); 1s^2; 2s^2 2p^6; 3s^2 3p^6; 4s^2$

$\text{Sr}(Z = 38); 1s^2; 2s^2 2p^6; 3s^2 3p^6; 4s^2; 3d^{10}; 4p^6; 5s^2$

Toate aceste elemente formează ioni stabili divalenți, prin cedarea celor doi electroni de pe ultimul strat. Configurațiile electronice ale acestor ioni sînt:



2. Caracterul bazic al hidroxizilor formați de aceste elemente variază în același sens cu caracterul metalic, adică va crește în grupă de sus în jos. Cel mai puțin tare va fi hidroxidul de magneziu, cel mai tare, hidroxidul de stronțiu. Deci ordinea creșterii tăriei hidroxizilor este:



2°. Fie  $x$  numărul de grame de apă ce trebuie adăugată,

Masa soluției inițiale:  $M_s = 400 \text{ ml} \cdot 1,11 \text{ g/ml} = 444 \text{ g}.$

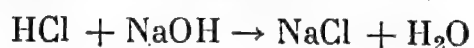
Ea conține:  $444 \cdot \frac{22}{100} = 97,68 \text{ g/HCl}.$

Prin adăugarea celor  $x$  grame de apă masa soluției devine  $(444 + x)$  grame și conține tot 97,68 g HCl. Se pune condiția ca această soluție să aibă concentrația 10%:

$$\begin{array}{ll} 100 \text{ g soluție} & \dots\dots\dots 10 \text{ g HCl} \\ (444 + x) \text{ g soluție} & \dots\dots\dots 97,68 \text{ g HCl} \end{array}$$

Rezultă:  $x = 532,8 \text{ g apă}.$

Cantitatea de acid clorhidric din soluția 10% obținută este evident identică cu cea din soluția inițială, adică 97,68 g HCl. Ecuația reacției de neutralizare este:



$$\begin{array}{ll} 36,5 \text{ g HCl (1 mol)} & \dots\dots\dots 1 \text{ mol NaOH} \\ 97,68 \text{ g HCl} & \dots\dots\dots x \text{ moli NaOH} \end{array}$$

$$x = 2,676 \text{ moli NaOH}$$

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ l soluție NaOH} & \dots\dots\dots 5 \text{ moli NaOH} \\ y \text{ l soluție NaOH} & \dots\dots\dots 2,676 \text{ moli NaOH} \end{array}$$

$$y = 0,535 \text{ l soluție de NaOH } 5 \text{ m.}$$

3°. Reacțiile comune aldehydelor și cetonelor, studiate conform programei de liceu, sînt următoarele:

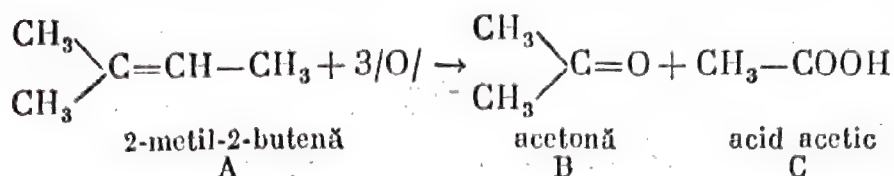
A. Reacții de adiție (adiția hidrogenului, a acidului cianhidric, sulfitului acid de sodiu, amoniacului, hidroxilaminei, hidrazinei, aminelor primare și secundare. (În cazul adiției hidrogenului și acidului cianhidric se vor scrie și ecuațiile reacțiilor).

B. Reacții de condensare (condensarea aldolică și crotonică; condensarea fenolului cu formaldehida).

4°. 1. Formula generală a unei alchene este  $\text{C}_n\text{H}_{2n}$ . Formula alchenei A se determină astfel:  $12n + 2n = 70; n = 5.$

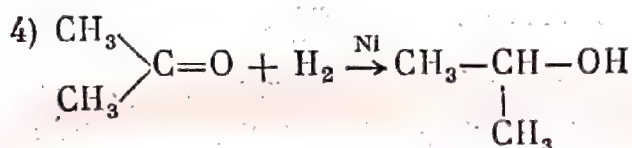
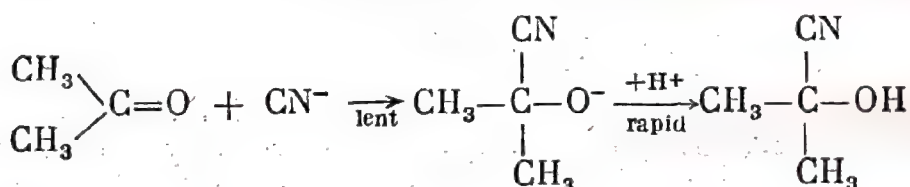
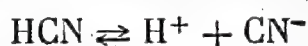
Deci formula moleculară a lui A este  $C_5H_{10}$ .

$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\ \diagup \\ \text{C}=\text{CH}-\text{CH}_3 \\ \diagdown \\ \text{CH}_3 \end{array}$  este formula de structură a alchenei A.



- 2) a)  $\text{CH}_3-\text{COOH} + \text{Zn} \rightarrow (\text{CH}_3-\text{COO})_2\text{Zn} + \text{H}_2$   
 b)  $\text{CH}_3-\text{COOH} + \text{NaOH} \rightarrow \text{CH}_3-\text{COONa} + \text{H}_2\text{O}$   
 c)  $\text{CH}_3-\text{COOH} + \text{NaHCO}_3 \rightarrow \text{CH}_3-\text{COONa} + \text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}$   
 d)  $\text{CH}_3-\text{COOH} + \text{C}_2\text{H}_5\text{OH} \rightleftharpoons \text{CH}_3-\text{COOC}_2\text{H}_5 + \text{H}_2\text{O}$   
 e)  $\text{CH}_3-\text{COOH} + \text{PCl}_5 \rightarrow \text{CH}_3-\text{COCl} + \text{POCl}_3 + \text{HCl}$

3) Adiția acidului cianhidric la acetonă decurge după un mecanism AN:



1 kmol acetonă.....	22,4 m <sup>3</sup> H <sub>2</sub>
5 kmoli .....	X

$$X = 112 \text{ m}^3\text{H}_2$$

XXV. 1°. Subiectul poate fi tratat după următorul plan :

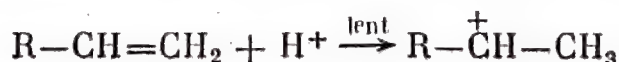
Definiția alchenelor. Adiția hidrogenului (cataliză eterogenă), halogenilor, hidracizilor (regula lui Marcovnicov), acidului sulfuric (apei); polimerizarea (reacție de poliadiție).

Mecanismul reacției de adiție a hidracizilor la alchene (adiție electrofilă):

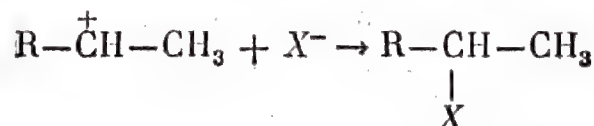
— formarea reactantului electrofil:



— atacul reactantului electrofil asupra moleculei de alchenă, cu formarea celui mai stabil carbocation:

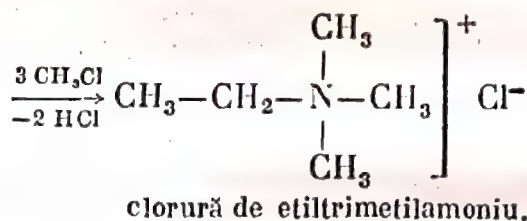
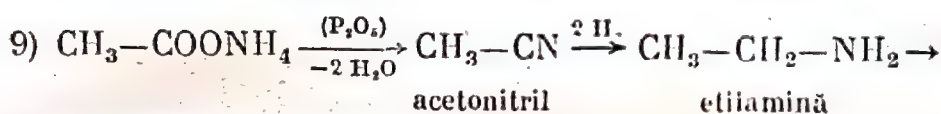
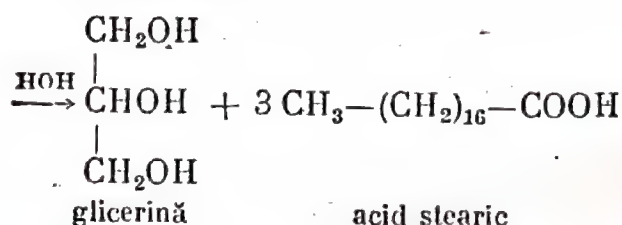
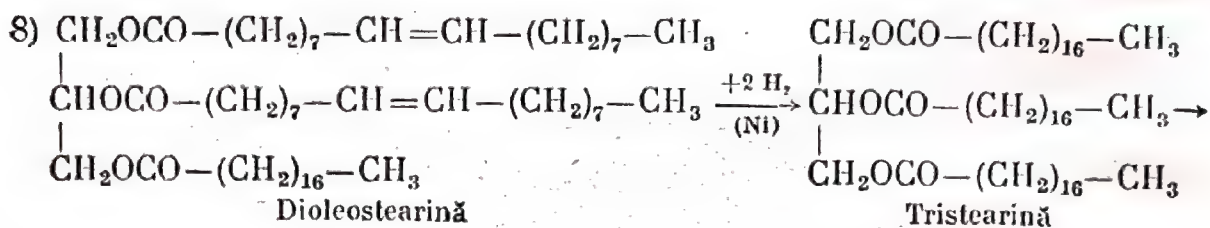
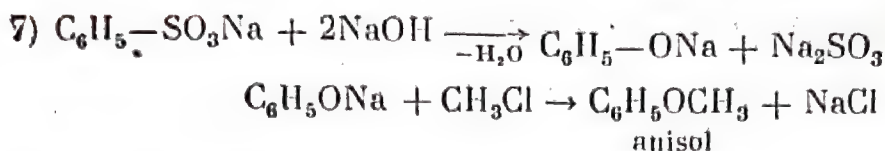
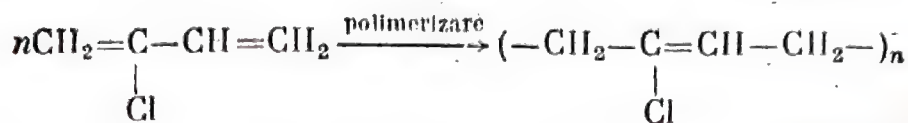
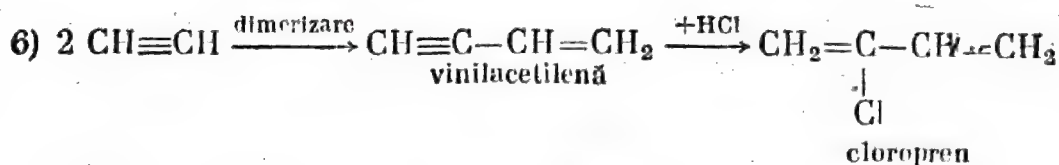


— stabilizarea carbocationului:









**XXVI. 1°.** Subiectul se poate trata după următorul plan:

a) Definiția alchinelor și respectiv arenelor.

Hibridizarea orbitalilor electronici ai atomilor de carbon din alchine și arene; tipuri de legături; caracterul nesaturat al alchinelor și aromatic al arenelor. Particularitățile reacțiilor de adiție în cazul celor două clase de hidrocarburi;

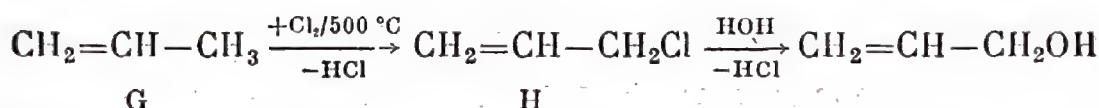
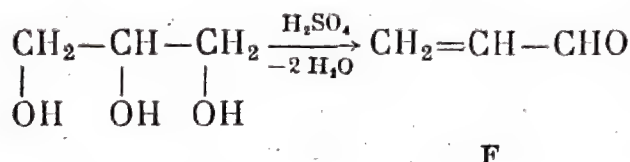
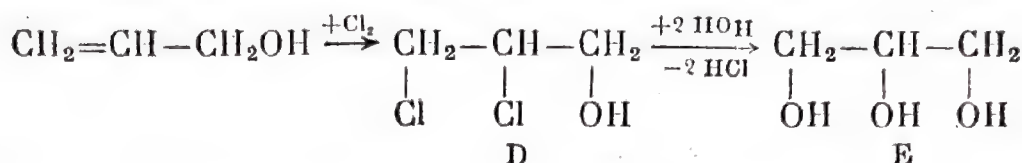
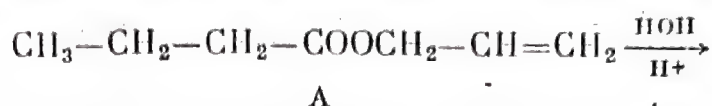
b) Reacții de adiție la alchine: adiția hidrogenului și halogenilor (în două trepte separabile sau nu); adiția hidracizilor; adiția acidului acetic; adiția acidului cianhidric; adiția apei; reacția de dimerizare și trimerizare a acetilenei; adiția HCl la vinilacetilenă;

c) Reacții de adiție la arene: adiția hidrogenului la benzen și naftalină; adiția clorului la benzen.

(Se vor preciza condițiile de reacție și se vor denumi substanțele.)

d) Mecanismul formării reactantului electrofil; atacul reactantului electrofil cu formarea cationului cel mai stabil; formarea produsului de reacție (dieloralchena cu atomii de clor vicinali).

2°. a) Ecuațiile reacțiilor din schemă, stabilite pe baza datelor problemei:



b) Denumirea compuşilor de la A la H:

A: butirat de alil

B: alcool alilic

C: acid butiric (butanoic)

D: 2,3-diclor-propanol

E: 1,2,3-propantriol (glicerină)

F: acroleină (aldehidă acrilică)

G: propenă

H: clorură de alil.

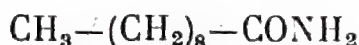
c) Prezintă izomerie optică compusul D (are un atom de carbon asimetric).

d) Formula (compoziția) procentuală a lui G:

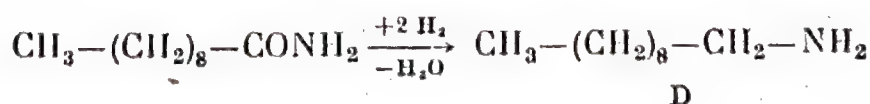
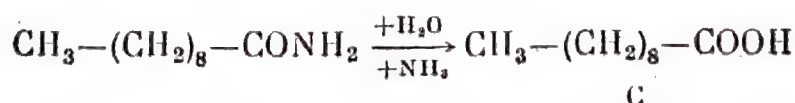
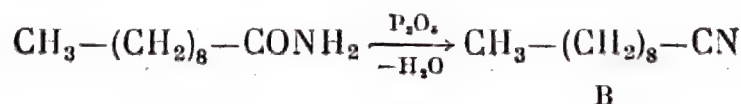
$$\% \text{C} : \frac{36}{42} \cdot 100 = 85,71; \quad \% \text{H} : \frac{6}{42} \cdot 100 = 14,29.$$

3°. 1) Determinarea formulei moleculare a substanței A:  $\text{C}_{10}\text{H}_{21}\text{NO}$ .

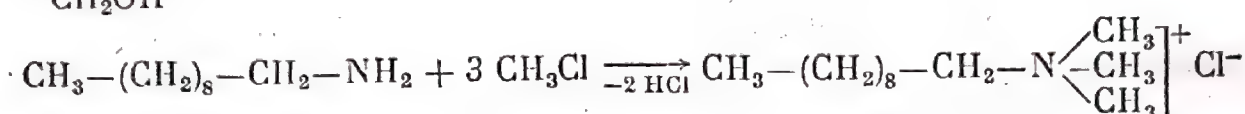
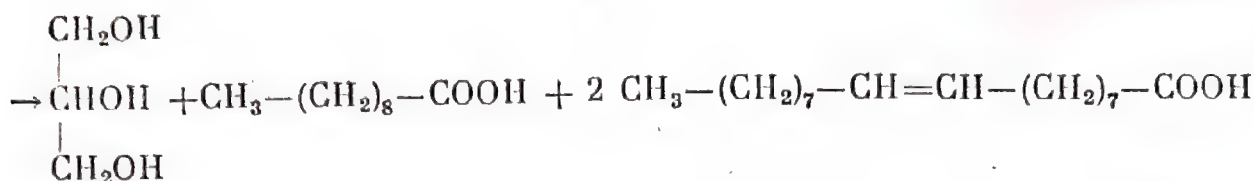
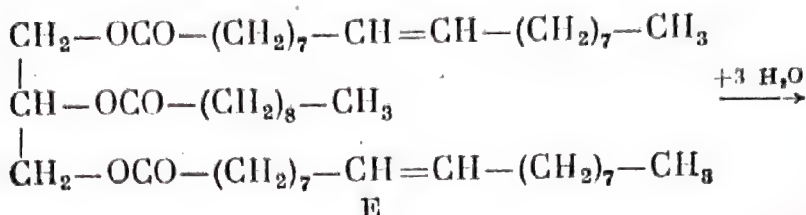
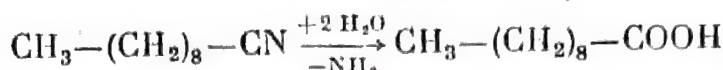
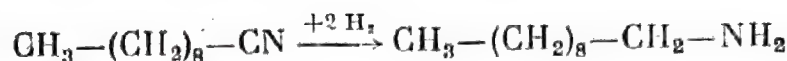
— Determinarea formulei de structură a substanței A:



— Ecuațiile reacțiilor conform datelor problemei:





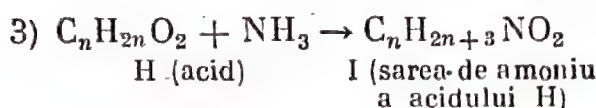


D

G

$$\begin{array}{lcl} 2) & 1 \text{ kmol D} & \dots\dots\dots 235,5 \text{ kg G} \\ & x \text{ kmoli} & \dots\dots\dots 21,666 \cdot \frac{100}{92} \text{ kg G} \end{array}$$

$$x = 0,1 \text{ kmoli D} = 100 \text{ moli D.}$$



Determinarea formulei moleculare și structurale ale lui H:

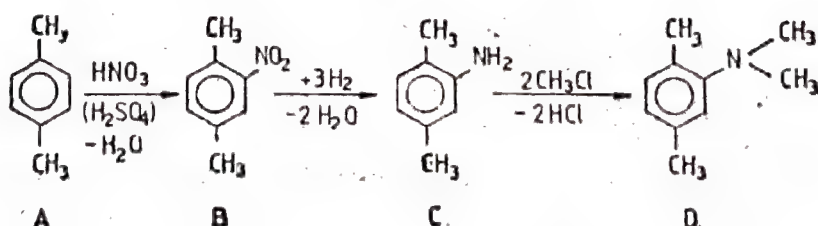
$$\text{C} : \frac{42,74}{12} = 3,97; \text{ H} : 10,48; \text{ N} : \frac{13,33}{14} = 0,95; \text{ O} : \frac{30,45}{16} = 1,90$$

C : H : N : O = 4 : 11 : 1 : 2; deci  $\text{C}_4\text{H}_{11}\text{NO}_2$  este formula moleculară și  $\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{COONH}_4$  este formula structurală a lui I; pentru H:  $\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_2$  și, respectiv,  $\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{COOH}$  sint formulele cerute.  $M_H = 88$ .

XXVII. 1°. Subiectul poate fi tratat după următorul plan:

Definiția compuşilor carbonilici. Structura grupei funcționale  $-\text{CHO}$ . Reacții de adiție la dubla legătură  $>\text{C}=\text{O}$  (adiția hidrogenului și a acidului cianhidric, la aldehide alifaticе și aromatice și la glucoză). Ciclizarea glucozei. Reacții de oxidare a aldehydelor. Oxidarea glucozei. Condensarea aldolică și crotonică. Condensarea aldehidei formice cu fenolul. Condensarea aldehidelor cu amoniac, amine, hidroxilamină, hidrazină, fenilhidrazină (AN). Mecanismul reacției de condensare aldolică.

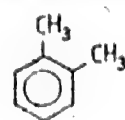
2°. Din datele problemei se deduce că A este p-xilen. Ecuațiile reacțiilor din schemă sint:



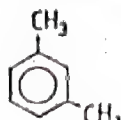
1) Formula procentuală a compusului A:

$$\%C = \frac{96}{106} \cdot 100 = 90,54; \quad \%H = \frac{10}{106} \cdot 100 = 9,44.$$

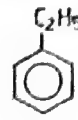
Formulele de structură ale izomerilor aromatici ai substanței A:



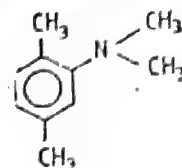
ortoxilen



metaxilen

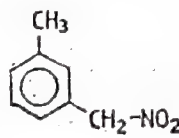
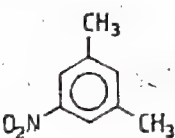
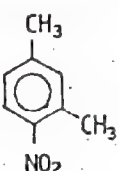
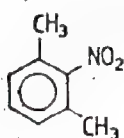
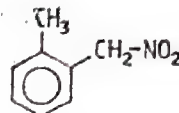
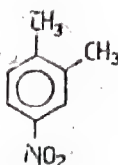
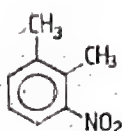
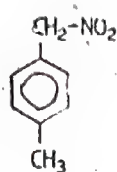


etilbenzen



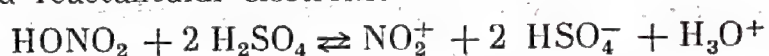
D

2) Formulele de structură ale izomerilor de poziție ai substanței B:

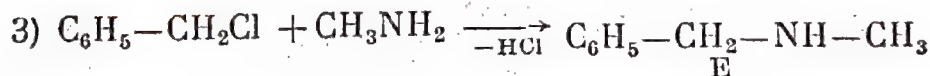
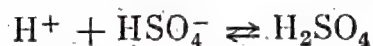
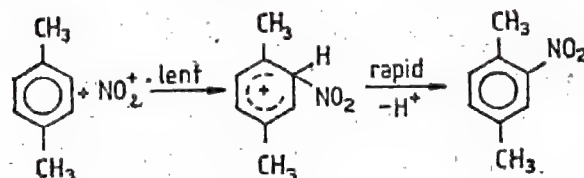


2) Mecanismul reacției de nitrare a *p*-xilenului.

— Formarea reactantului electofil:



— Atacul reactantului electofil, formarea complexului și expulzarea protonului:



121 g E .....	126,5 g clorură de benzil
200 .....	$x_1$

$$x_1 = 209,09 \text{ g.}$$

$$209,09 \cdot \frac{100}{90} \cdot \frac{100}{92} = 252,52 \text{ g (90\%).}$$

3°. 1) Determinarea formulei moleculare a compușilor A, B și C:

$$\text{C: } \frac{85,72}{12} = 7,14; \quad \text{H: } \frac{14,28}{1} = 14,28$$

$$\text{C: } 7,14:7,14 = 1; \quad \text{H: } 14,28:7,14 = 2; \quad (\text{CH}_2)_n = 70.$$





Alchilarea arenelor cu derivați halogenați și cu alchene. Acilarea arenelor. Halogenarea arenelor în nucleu.

Mecanismul alchilării benzenului cu halogenură de etil sau cu etenă (formarea reactantului electofil; atacul reactantului electofil asupra nucleului benzenic cu formarea complexului  $\sigma$ ; expulzarea protonului cu formarea etilbenzenului; refacerea catalizatorului).

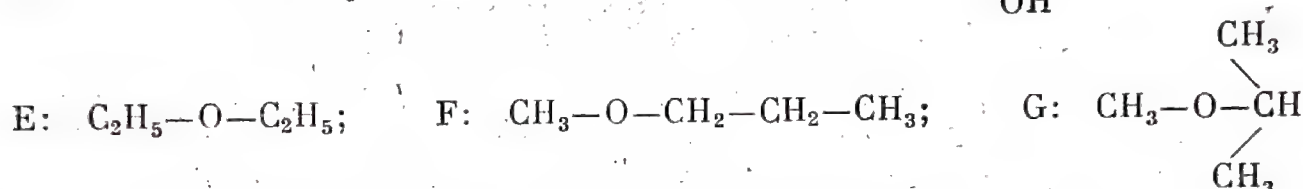
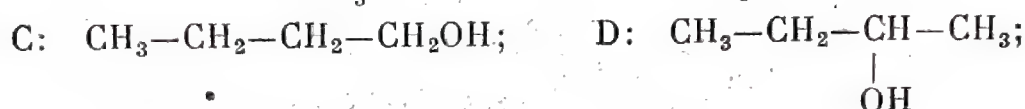
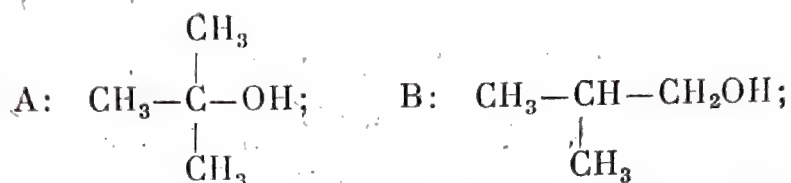
2°. 1) Determinarea formulei moleculare a substanței A:

$$C: \frac{64,87}{12} = 5,40; \quad H: \frac{13,51}{1} = 13,51; \quad O: \frac{21,62}{16} = 1,35$$

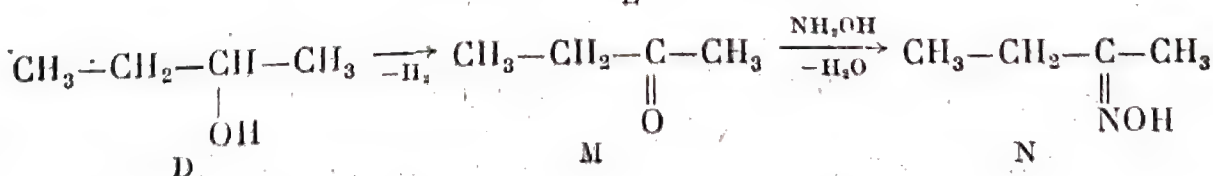
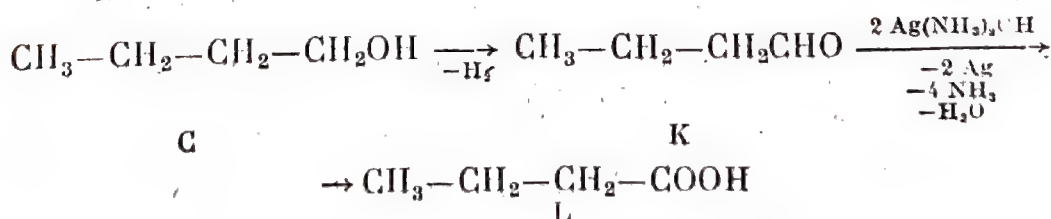
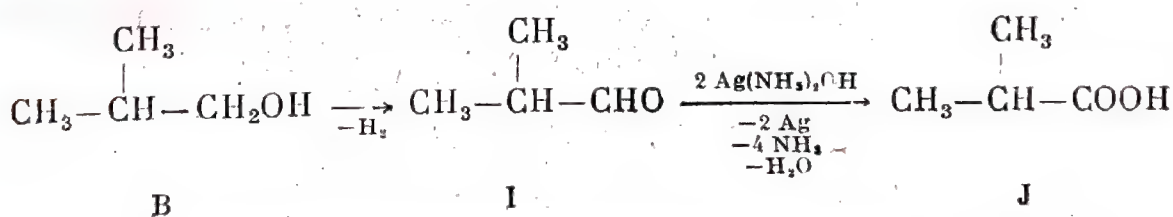
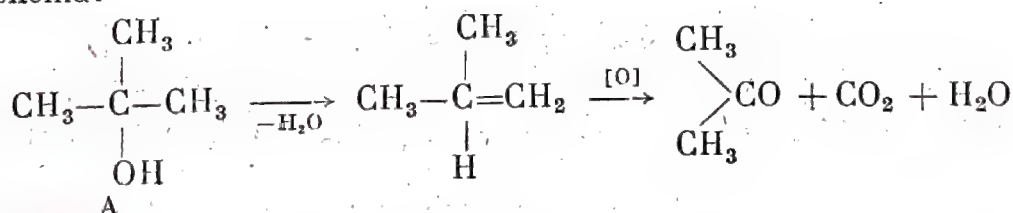
$$C : H : O = 4 : 10 : 1$$

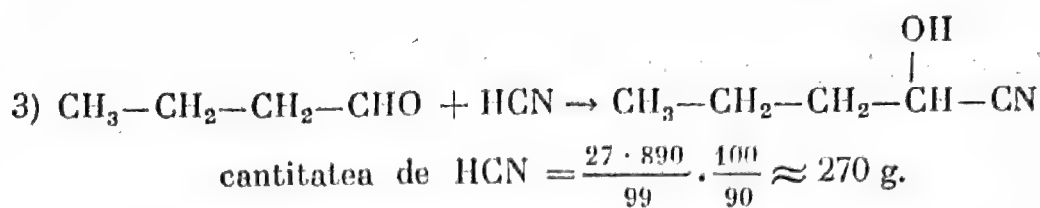
$$(C_4H_{10}O)_n = 74 \quad n = 1.$$

Formulele de structură ale izomerilor A  $\rightarrow$  G (stabilite pe baza indicațiilor cuprinse în schemă):

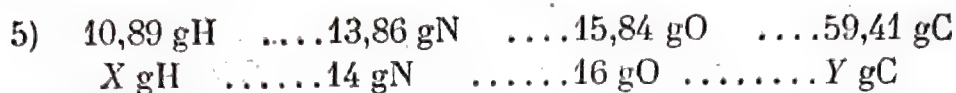
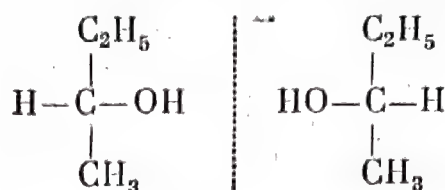


2) Formulele de structură ale compuşilor H  $\rightarrow$  N și ecuațiile reacțiilor indicate în schemă:



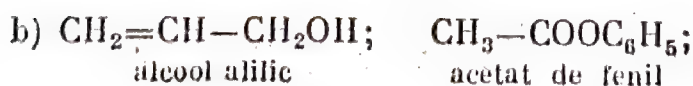
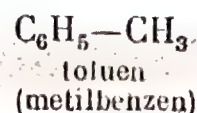
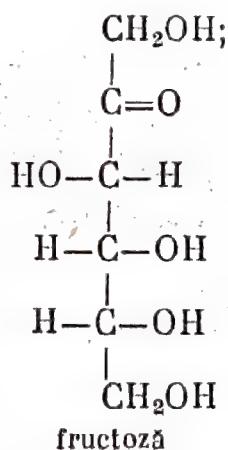
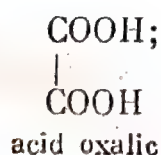
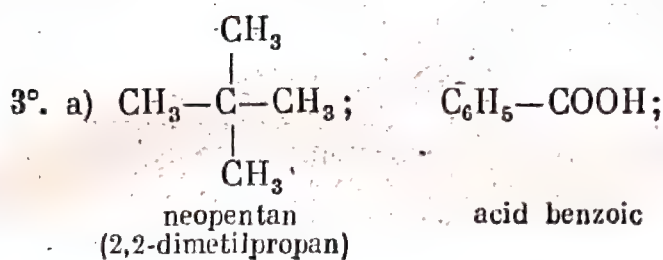
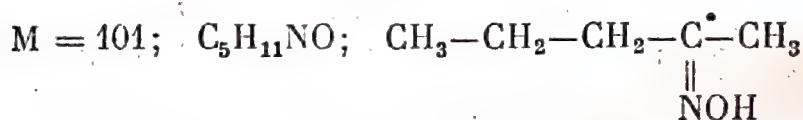


4) Compusul D (2-butanol) prezintă izomerie optică:



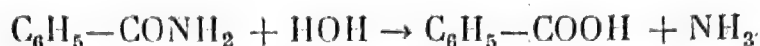
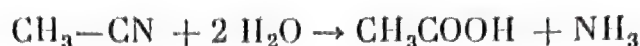
$$X = 11 \text{ g}; \quad \text{H: } \frac{11}{1} = 11; \quad \text{N: } \frac{14}{14} = 1$$

$$Y = 60 \text{ g}; \quad \text{C: } \frac{60}{12} = 5; \quad \text{O: } \frac{16}{16} = 1$$

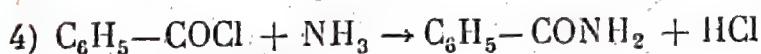
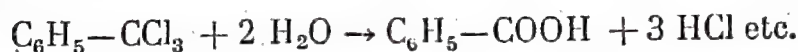
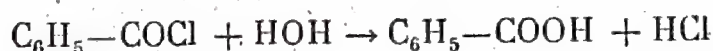
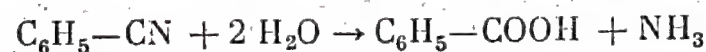
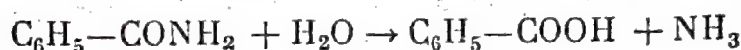
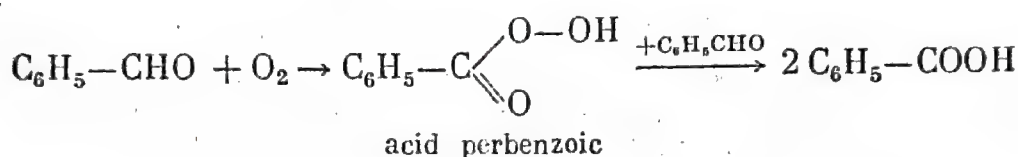
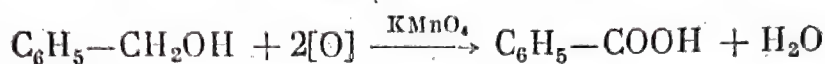
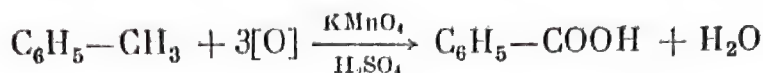


1) Acidul benzoic, acidul oxalic, benzamida și fructoza sînt solide.

2) Pot da reacții de hidroliză acetatul de fenil(ester), acetonitrilul și benza-  
mida:

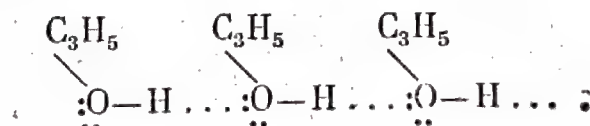


3) Acidul benzoic se poate purifica prin sublimare. Se poate obține aplicând metodele următoare:



$$10 \cdot 140,5 \cdot \frac{100}{92} = 1527 \text{ kg clorură de benzoil.}$$

5) Acidul benzoic, acidul oxalic, fructoza și alcoolul alilic pot forma asociații moleculare prin legături de hidrogen. De exemplu, alcoolul alilic poate da naștere la asociații moleculare de tipul:



**XXIX. 1°.** 1) Se va defini solubilitatea substanțelor și factorii de care aceasta depinde, conform manualului de liceu pentru clasa a IX-a.

2) Se vor da și explica expresiile concentrațiilor procentuale molare și normale conform manualului pentru clasa a IX-a.

3) Se va explica efectul termic la dizolvare ca o rezultantă a două procese, unul endoterm și celălalt exoterm, conform manualului pentru clasa a IX-a. În concluzie, dizolvarea azotatului de amoniu are loc cu absorbție de căldură, cantitatea de căldură absorbită la scindarea legăturilor ionice din cristal fiind mai mare decât căldura degajată la hidratarea ionilor ce compun această substanță. Dimpotrivă...



trivă, la dizolvarea acidului sulfuric în apă, cantitatea de căldură rezultată la hidratarea ionilor, depășește cu mult căldura consumată la scindarea moleculelor de acid în ioni (ionizarea acidului în soluție) și de aceea dizolvarea  $H_2SO_4$  în apă degajă o cantitate mare de căldură, care poate încălzi soluția chiar până la fierbere. Din această cauză la prepararea soluțiilor de acid sulfuric se toarnă întotdeauna acid în apă (și nu invers!), încet, prin amestecare continuă pentru a evita ajungerea soluției la temperatura de fierbere.

4) Exemple de cristalohidrați :  $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ ;  $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$ ;  
 $Al_2(SO_4)_3 \cdot 18H_2O$ ;  $CaSO_4 \cdot 2H_2O$ ,  $FeSO_4 \cdot 7H_2O$ ;  $CaCl_2 \cdot 6H_2O$ ,  
 $BaCl_2 \cdot 2H_2O$  etc.

2°. 1) Se va defini noțiunea de legătură covalentă polară și factorii de care depinde polaritatea unei legături, conform manualului de liceu pentru clasa a IX-a. În concluzie polaritatea hidracizilor halogenilor crește în ordinea:



Se vor defini noțiunea de acid după Brönsted și noțiunile de acid tare și acid slab, conform manualului pentru clasa a IX-a. Ținând cont de variația tăriei hidracizilor în grupă (aceasta crește odată cu scăderea caracterului nemetalic), tăria hidracizilor halogenilor crește în ordinea:

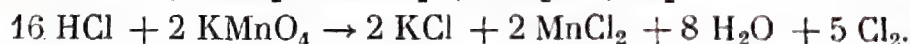


Acidul fluorhidric este un acid de tărie medie, ceilalți sint acizi tari, cel mai tare fiind acidul iodhidric.

Se vor arăta factorii de care depinde entropia unei substanțe, conform manualului pentru clasa a XI-a.

Ordinea indicată este determinată de creșterea masei moleculare și de scăderea tăriei legăturilor dintre atomi.

2. Vezi manualul de liceu pentru clasa a XI-a.



3°. 1) Se alcătuiește tabelul.

Component \ Timp	A	B	C	Total
$t = 0$	$0,5 + 2,5 = 3$	$1 + 2,5 = 3,5$	0	6,5
$t = t_{ech.}$	0,5	1	2,5	4

În reacție intră la 1 mol de A, 1 mol B și se formează un mol de C deci concentrațiile inițiale ale componentilor A și B se obțin din însumarea concentrațiilor lor de echilibru cu concentrația lui C.

Rezultă:  $[A]_0 = 0,5 + 2,5 = 3 \text{ mol/l}$ ;

$[B]_0 = 1 + 2,5 = 3,5 \text{ mol/l}$ .

2) Expresia constantei de echilibru exprimate prin concentrații molare este:

$$K_c = \frac{[C]}{[A] \cdot [B]} = \frac{2,5 \text{ mol/l}}{0,5 \text{ mol/l} \cdot 1 \text{ mol/l}} = 5 \frac{1}{\text{mol}}.$$

3) Pentru a obține valoarea constantei de echilibru exprimată prin presiuni parțiale se ține cont de ecuația de stare a gazelor perfecte.

$$pV = nRT$$

de unde  $p = \frac{n}{v} RT$  și ținând cont că  $n/v$  reprezintă tocmai concentrația, se obține

$$p_A = [A]RT; p_B = [B]RT; p_C = [C]RT.$$

Deci

$$K_p = \frac{p_C}{p_A \cdot p_B} = \frac{[C](RT)}{[A] \cdot [B](RT)^2} = K_c \cdot \frac{1}{RT}$$

Rezultă:

$$K_p = 5 \frac{1}{\text{mol}} \cdot \frac{1}{0,082 \frac{1 \cdot \text{atm}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 400 \text{ K}} = 0,152 \text{ atm}^{-1}.$$

## C. PROBLEME PROPUSE

### ENUNȚURI

1°. Un cilindru de oțel avînd volumul 30 l conține un gaz la presiunea de 806 kPa și temperatura de 18°C. a) Dacă se scot 6 moli de gaz din cilindru și se răcește apoi cilindrul la 12°C, care va fi presiunea gazului rămas în cilindru?

b) Să se identifice acest gaz din cilindru știind că este un monoxid și are densitatea în condiții normale  $\rho^0 = 1,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

2°. La sinteza acidului clorhidric s-au folosit 89,6 m<sup>3</sup> de clor, măsurați la 0°C și  $2,026 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .

Se cere:

a) cantitatea de hidrogen necesară, exprimată în kmoli, în kg și m<sup>3</sup> la 27 °C și 300 kPa;

b) compoziția în procente de masă și de volum a amestecului gazos care ar rezulta dacă volumul de clor utilizat ar fi pus să reacționeze cu 266 m<sup>3</sup> de hidrogen măsurați la 27°C și 150 kPa;

c) masa moleculară medie, densitatea și densitatea în raport cu oxigenul, a amestecului de la punctul precedent.

3°. O soluție apoasă de apă oxigenată de concentrație 34% (procente de masă) se încălzește pînă ce se descompune jumătate din cantitatea de apă oxigenată.

Se cere:

a) concentrația procentuală a soluției finale (procente de masă);

b) care este raportul dintre numărul moleculelor de apă și numărul moleculelor de apă oxigenată în soluția inițială și în cea finală;

c) dacă se pleacă de la 500 g soluție inițială, să se calculeze cantitatea de iod formată la tratarea soluției finale cu un exces de iodură de potasiu în mediu de acid sulfuric.

4°. Se amestecă 100 g soluție acid sulfuric de concentrație 5% (procente de masă) cu apă de barită (soluție de  $\text{Ba}(\text{OH})_2$ ). După separarea precipitatului, soluția rămasă are o concentrație în acid sulfuric de 1,56% (procente de masă). Știind că în soluția de apă de barită inițială s-au găsit 96 g apă, să se calculeze cantitatea de  $\text{Ba}(\text{OH})_2$  pur care s-a consumat.

Mase atomice: H—1; O—16; S—32; Ba—137,3.

5°. O probă de sodă cristalizată avînd masa  $m_1 = 1,287 \text{ g}$  a fost tratată cu un exces de acid clorhidric și s-au degajat 100,8 cm<sup>3</sup> de gaz (c.n.). O altă probă de sodă cristalizată cu masa  $m_2 = 0,715 \text{ g}$  a fost tratată cu 50 cm<sup>3</sup> de soluție de acid sulfuric de concentrație 0,2 N (normal). După descompunerea sodei, excesul de acid sulfuric a fost neutralizat cu o soluție de hidroxid de sodiu de concentrație 0,1 N (normal) consumîndu-se pentru neutralizare un volum de 50 cm<sup>3</sup>.

Se cere:

a) cite molecule de apă, raportat la o moleculă de  $\text{Na}_2\text{CO}_3$ , conține prima probă de sodă cristalizată analizată?

b) să se stabilească dacă cele două probe de sodă cristalizată au aceeași compoziție, sau au compoziții diferite.





Se neglijează solubilitatea dioxidului de carbon în condițiile problemei.

Mase atomice: H—1; O—16; C—12; Na—23.

6°. Un aliaj este format din rubidiu și un alt metal alcalin. O probă din acest aliaj avind masa  $m = 4,6$  g se tratează cu apă, degajându-se  $2,24$  dm<sup>3</sup> de gaz (c.n.).

Se cere:

a) să se identifice metalul alcalin prezent alături de rubidiu în aliaj;

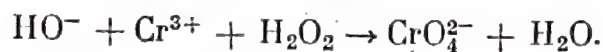
b) compoziția aliajului în procente de masă.

Mase atomice: Li—7; Na—23; K—39; Rb—85,5; Cs—133.

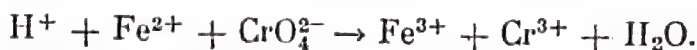
7°. Un aliaj conține aluminiu, zinc, siliciu și cupru. Dacă  $1,000$  g din acest aliaj este tratat cu acid clorhidric în exces, se degajă  $843$  cm<sup>3</sup> hidrogen (c.n.) și rămâne un reziduu nedizolvat ce cântărește  $0,170$  g. O probă de  $0,500$  g din același aliaj tratată cu soluție de NaOH în exces, reacționează degajând  $517$  cm<sup>3</sup> hidrogen (c.n.), rămânind de asemenea un reziduu nedizolvat. Să se calculeze compoziția aliajului în procente de masă.

Mase atomice: Al—27; Zn—65; Si—28; Cu—64.

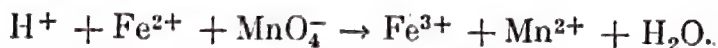
8°. O probă de aliaj ce conține argint, cupru și crom, avind masa  $m = 1,500$  g, se dizolvă, astfel încât soluția obținută conține ionii  $\text{Ag}^+$ ,  $\text{Cu}^{2+}$  și  $\text{Cr}^{3+}$ . Această soluție este diluată pînă la un volum de  $500$  cm<sup>3</sup>. O zecime din soluția astfel diluată se prelucerează astfel: după eliminarea argintului și cuprului, cromul este oxidat conform ecuației următoare (neechilibrată):



După aceasta se adaugă  $25,00$  cm<sup>3</sup> de soluție ce conține ionii  $\text{Fe}^{2+}$  de concentrație  $0,100$  molar. Are loc următoarea reacție (neechilibrată):



Excesul de  $\text{Fe}^{2+}$  se oxidează apoi cu o soluție de  $\text{KMnO}_4$  de concentrație  $0,020$  molar, consumîndu-se pentru aceasta  $17,20$  cm<sup>3</sup> din această soluție de permanganat. Reacția care are loc este următoarea:



Într-o altă experiență, un volum de  $200$  cm<sup>3</sup> din soluția inițială se supune electrolizei, procesul de electroliză avind loc cu un randament de curent de  $90\%$ . Toate cele trei metale sînt depuse electrolitic cantitativ (integral) dacă se trece prin sistem un curent de  $2$  A timp de  $14,5$  min.

Se cere:

a) să se stabilească coeficienții din ecuațiile reacțiilor chimice care au loc;

b) să se determine compoziția aliajului în procente de masă.

Mase atomice relative: Cu—63,55; Ag—107,87; Cr—52,00.

9°. La tratarea unei alame (aliaj de Zn cu Cu) cu soluție de hidroxid de sodiu în exces se degajă  $11,2$  l  $\text{H}_2$  (c.n.) Partea nedizolvată, după filtrare, se dizolvă total în  $40$  g soluție acid sulfurică de concentrație  $49\%$  (procente de masă) în prezența oxigenului.

Se cere:

a) scrierea ecuațiilor reacțiilor chimice;

b) compoziția aliajului în procente de masă;

c) cantitatea de  $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$  care se poate obține teoretic.

Mase atomice: H—1; O—16; S—32; Cu—64; Zn—65.

10°. Cite g de alaun,  $\text{KAl}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$  se depun sub formă de cristalohidrat din  $320$  g soluție de  $\text{KAl}(\text{SO}_4)_2$  saturată la  $20^\circ\text{C}$  dacă  $160$  g de apă s-au evaporat din soluție la  $20^\circ\text{C}$ . Soluția saturată la  $20^\circ\text{C}$  conține  $5,5\%$   $\text{KAl}(\text{SO}_4)_2$  în procente de masă.

Mase atomice: K—39; Al—27; S—32; O—16; H—1.

11°. 100 cm<sup>3</sup> dintr-o soluție care conține un amestec de acid clorhidric și acid sulfuric se neutralizează cu 160 cm<sup>3</sup> soluție de hidroxid de sodiu de concentrație 0,5 mol/l. Prin neutralizare se formează săruri neutre. După evaporarea soluției obținute în urma neutralizării rezultă 5,00 g amestec de săruri. Să se calculeze compoziția inițială a amestecului de acizi exprimată în mol/l.

Mase atomice: H—1; O—16; Na—23; S—32; Cl—35,5.

12°. La amestecarea unei soluții de azotat de argint cu o cantitate (masă) egală de soluție de clorură de sodiu, substanțele reacționează în întregime.

Se cere:

- concentrația procentuală (în procente de masă) a soluției de clorură de sodiu, dacă soluția de azotat de argint, avea concentrația 3,4% (procente de masă).
- concentrația procentuală (procente de masă) a soluției de azotat de sodiu rezultată.

Mase atomice: N—14; O—16; Na—23; Cl—35,5; Ag—108.

13°. Se tratează cu H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> diluat 17,8 g dintr-un aliaj de Zn și Mg (ambele reacționează total), obținându-se 8,96 l H<sub>2</sub> măsurat în condiții normale.

Se cere:

- compoziția aliajului în procente de masă
- masa (în g) de acid sulfuric consumată în reacție;
- cantitățile de ZnSO<sub>4</sub> și MgSO<sub>4</sub> (în g) obținute (se consideră sărurile anhidre).

Mase atomice: Zn—65; S—32; Mg—24; O—16; H—1.

14°. O anumită cantitate de calcar (CaCO<sub>3</sub> impur) este supusă calcinării complete. Produsul solid rezultat la calcinare, incluzând și impuritățile nevolatile cîntărește 16 g, iar gazul degajat ocupă în condiții normale un volum de 5,6 l.

Se cere:

- ecuația reacției chimice de descompunere termică a CaCO<sub>3</sub>;
- cantitatea de calcar supusă calcinării știind că impuritățile nu sînt descompuse termic;
- compoziția procentuală în CaCO<sub>3</sub> și impurități a probei de calcar, supusă calcinării.

Mase atomice: C—12; O—16; Ca—40.

15°. Folosind un curent de 500 A se supune electrolizei 1 000 kg soluție de clorură de sodiu pură, concentrația soluției fiind 58,5% (proc. masă). Electroliza se intrerupe cînd concentrația soluției de sare pură ajunge la 46,8%.

Se cere:

- ecuațiile reacțiilor care au loc;
- cantitatea de hidroxid de sodiu (în kg) rezultată;
- volumele gazelor care se formează la electroliză în condiții normale;
- timpul necesar electrolizei dacă randamentul de curent este 80%.

Se cunosc: constanta lui FARADAY :  $F = 96\,500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

Mase atomice: H—1; O—16; Na—23; Cl—35,5.

Se neglijează variația masei soluției în cursul electrolizei.

16°. Se supune electrolizei o soluție de clorură de sodiu, iar clorul rezultat este utilizat în sinteza acidului clorhidric. Se presupune că electroliza decurge cu randament de 80%, iar sinteza acidului clorhidric cu randament 100%.

Știind că în urma electrolizei s-au obținut 56 l clor gazos (măsurat în condiții normale), se cere:

- să se scrie reacțiile chimice care au loc la electroliză și sinteza acidului clorhidric, precum și mecanismul celor două reacții;
- cantitatea de clorură de sodiu consumată;
- volumul de acid clorhidric gazos care se obține dacă este măsurat la 27°C și 4 053 kPa.

Mase atomice: Na—23; Cl—35,5.



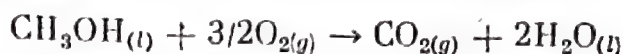
17°. Să se determine variația de entalpie  $\Delta H^\circ$  în condiții standard, care însoțesc următoarele reacții chimice:

1.  $\text{CH}_2=\text{CH}_2 + \text{HCl} \rightarrow \text{CH}_3-\text{CH}_2\text{Cl}$
2.  $\text{CH}_3-\text{CH}_2\text{OH} \rightarrow \text{CH}_2=\text{CH}_2 + \text{H}_2\text{O}$
3.  $\text{CH}_4 + \text{Cl}_2 \rightarrow \text{CH}_3\text{Cl} + \text{HCl}$

Se cunosc valorile energiilor de legătură din tabelul următor:

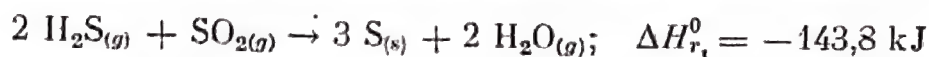
Legătura	O—H	C—C	C=C	C—H	Cl—Cl	H—Cl	C—O	C—Cl
Energia, kJ/mol	462,3	347,4	606,1	410,5	238,5	431,4	351,1	328,1

18°. În reacția de ardere a metanolului în oxigen:



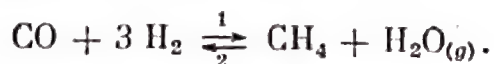
se degajă o cantitate de căldură egală cu 725,6 kJ pentru fiecare mol de metanol, valoare calculată pentru condiții standard ( $p = 101,325 \text{ kPa}$  și  $T = 298 \text{ K}$ ). Cunoscând entalpiile standard de formare  $\Delta H_{298,1}^\circ$  pentru apa lichidă — 285,9 kJ/mol și pentru dioxidul de carbon gazos — 392,9 kJ/mol, să se calculeze entalpia standard de formare a metanolului lichid.

19°. Să se calculeze entalpia standard de formare a dioxidului de sulf gazos, cunoscând variațiile de entalpie standard pentru următoarele reacții:



Se cunoaște de asemenea căldura molară de vaporizare a apei  $\lambda_v = 44,3 \text{ kJ/mol}$ .

20°. Se consideră reacția de echilibru:



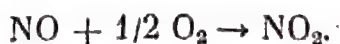
Se cunosc entalpiile standard de formare  $\Delta H_{298,1}^\circ$  pentru CO: — 110,5 kJ/mol; pentru  $\text{CH}_4$ : — 74,8 kJ/mol; pentru  $\text{H}_2\text{O}_{(g)}$ : — 241,6 kJ/mol. Se cunosc de asemenea entropiile standard  $S_{298}^\circ$  pentru CO: 197,7 J/mol · K; pentru  $\text{H}_2$ : 130,5 J/mol · K; pentru  $\text{CH}_4$ : 186,0 J/mol · K și pentru  $\text{H}_2\text{O}_{(g)}$ : 188,5 J/mol · K.

Se cere:

- a) să se arate care reacție, 1 sau 2, este spontană la temperatura de 300°C;
- b) care este temperatura maximă până la care reacția 1 este spontană;
- c) să se calculeze valoarea constantei de echilibru  $K_p$  la 600°C.

Se consideră, că într-o primă aproximație variațiile de entalpie  $\Delta H$  și de entropie  $\Delta S$  nu depind de temperatură (prima aproximație a lui ULICH).

21°. Se studiază reacția de oxidare a oxidului de azot la dioxid, în fază gazoasă:



În acest scop, într-un vas cu volumul de 2 dm<sup>3</sup> se introduce 0,6 g NO și 0,64 g O<sub>2</sub>, temperatura vasului fiind 25°C. Se măsoară viteza inițială a reacției și se găsește o valoare  $v$ . Repetind experiența cu 1,2 g NO și tot cu 0,64 g O<sub>2</sub> viteza inițială măsurată este 4 $v$ . Dacă se lucrează cu 0,6 g NO și 1,28 g O<sub>2</sub> viteza inițială a reacției este 2 $v$ .

Se cere:

- a) ordinele parțiale de reacție în raport cu NO și cu NO<sub>2</sub> și ordinul total de reacție;

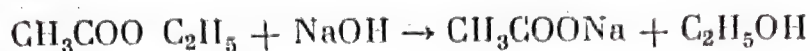


b) să se scrie expresia vitezei de reacție și să se precizeze dacă reacția este simplă sau complexă;

c) să se calculeze viteza inițială  $v$  a reacției la 25°C dacă la această temperatură constanta de viteză este  $5 \cdot 10^{-4} \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

Mase atomice: N—14; O—16.

22°. Determinându-se constanta de viteză a reacției de hidroliză alcalină a acetatului de etil:



la diferite temperaturi s-a găsit că la

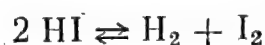
$$10^\circ\text{C} \quad k_1 = 2,5 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

iar la 20°C  $k_2 = 5,5 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

Să se calculeze energia de activare a acestei reacții.

Se cunoaște valoarea constantei gazelor perfecte  $R = 8,31 \text{ Jmol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

23°. Gradul de disociere a acidului iodhidric conform reacției de echilibru, în fază gazoasă:



este  $\alpha = 0,245$  la temperatura de 520°C.

Se cere:

a) să se calculeze constanta de echilibru  $K_p$  la 520°C;

b) să se determine valoarea constantei de echilibru  $K_c$  la aceeași temperatură.

24°. Un vas cu volumul  $5 \text{ dm}^3$  este umplut cu etan la temperatura de 300 K și presiune normală și apoi este închis ermetic. Se încălzește vasul cu etan, măsurându-se presiunea la diferite temperaturi; se obțin următoarele valori:

Nr. crt.	$T(\text{K})$	Presiunea măsurată $p(\text{kPa})$	Presiunea calculată $p'(\text{kPa})$
1	300	101,325	
2	500	169,820	
3	800	276,111	
4	1 000	500,748	

Se cere:

a) să se calculeze presiunile din vas  $p'$  la temperaturile respective, presupunând că se aplică legile gazelor perfecte, și să se completeze coloana respectivă a tabelului;

b) să se explice diferențele dintre valorile  $p'$  calculate teoretic și valorile  $p$  măsurate experimental.

c) să se scrie ecuația reacției chimice care are probabil loc la temperaturi mai ridicate.

d) să se calculeze valoarea gradului de conversie  $\alpha$  a etanului și valoarea constantei de echilibru  $K_p$  a reacției la 800 K.

Se cunoaște valoarea constantei gazelor perfecte  $R = 8\,314 \text{ J/kmolK}$ .

25°. Constanta de echilibru a reacției  $\text{H}_{2(g)} + \text{I}_{2(g)} \rightleftharpoons 2 \text{ HI}_{(g)}$  la 600°C este egală cu 70.

Se cere:

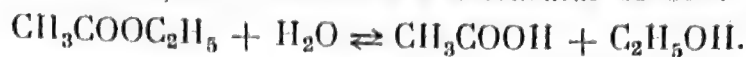
a) Cât iod (în %) este transformat în acid iodhidric (care este conversia) la atingerea echilibrului, dacă reactanții sînt amestecați:

1. în raport molar 1 : 1 la 600°C;

2. în raport molar 2 : 1 la 600°C (cantitatea de hidrogen este dublă față de cea de iod);

b) câți moli de hidrogen trebuie amestecați cu un mol de iod pentru ca 99% din iod să fie transformat în acid iodhidric la atingerea echilibrului la 600°C.

26°. Se studiază reacția de hidroliză a acetatului de etil:



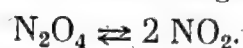
a) Dacă inițial se pleacă de la un amestec echimolecular de ester și apă se constată că la stabilirea echilibrului o treime din ester a fost hidrolizat. Să se calculeze constanta de echilibru a reacției de hidroliză.

b) Dacă inițial se pleacă de la un amestec ce conține  $n$  moli de apă la un mol de ester se cere:

a) fracțiunea de ester care va fi hidrolizată la stabilirea echilibrului;

b) care trebuie să fie valoarea lui  $n$  pentru ca la echilibru, 99% din ester să fie hidrolizat.

27°. În fază gazoasă dioxidul de azot se găsește în echilibru cu dimerul său:



La o presiune de 101,325 kPa și la temperatura de 45°C, densitatea amestecului de echilibru în raport cu aerul este  $d = 2,34$ .

Se cere:

a) să se calculeze presiunile parțiale ale celor două specii moleculare;

b) valoarea constantei de echilibru  $K_p$ ;

c) care va fi compoziția de echilibru, la aceeași temperatură? dar la o presiune de 1 013,25 kPa?

Mase atomice: N—14; O—16.

28°. Se consideră echilibrul de disociere a bromului, în fază gazoasă la 1 000°C:



Constanta de echilibru  $K_p$ , în aceste condiții are valoarea  $K_p = 5,67 \cdot 10^2$  Pa.

Se cere:

a) să se arate pe baza principiului Le Châtelier în ce sens va evolua sistemul la micșorarea presiunii;

b) să se regăsească prin calcul, pe baza aplicării legii acțiunii maselor, ce influență are presiunea asupra acestui echilibru.

c) care este valoarea gradului de disociere al bromului la presiunea de 101,325 kPa și temperatura de 1 000°C.

29°. Un volum  $v = 11,42 \text{ cm}^3$  de acid acetic pur se dizolvă în apă. Aducând volumul soluției la  $2 \text{ dm}^3$ , prin completare cu apă distilată, pH-ul soluției astfel obținute este egal cu 2,87.

Se cere:

a) constanta de aciditate a acidului acetic;

b) gradul de ionizare a acidului acetic în soluția preparată, ce are  $\text{pH} = 2,87$ ;

c) volumul soluției de NaOH 0,1 N (normal) necesar pentru a neutraliza complet cei  $2 \text{ dm}^3$  de soluție inițială de acid acetic;

d) care va fi pH-ul soluției obținute în urma neutralizării de la punctul c).

Se cunoaște densitatea acidului acetic pur  $\rho = 1 052 \text{ kg m}^{-3}$ .

Mase atomice: H—1; C—12; O—16; Na—23.

30°. În  $4 \text{ dm}^3$  de apă pură se dizolvă  $493 \text{ cm}^3$  amoniac gazos, măsurați la 27°C și presiunea 202,65 kPa, volumul soluției obținute rămânând practic tot  $4 \text{ dm}^3$ . Se măsoară pH-ul soluției obținându-se valoarea  $\text{pH} = 10,63$ .

Se cere:

a) concentrația ionilor  $\text{HO}^-$  în soluția obținută;

b) constanta de bazicitate a amoniacului;

c) pH-ul soluției care se obține dacă la cei  $4 \text{ dm}^3$  soluție de amoniac se adaugă  $2 \text{ dm}^3$  soluție de acid clorhidric cu concentrația 0,01 N (normal).



31°. O soluție de acid formic de concentrație 3% (procente de masă) are  $pH = 1,97$  și densitatea  $\rho = 1,0049 \text{ g/cm}^3$ .

Se cere:

- concentrația molară a soluției de acid formic;
- constanta de aciditate a acidului formic;
- de câte ori trebuie diluată soluția inițială pentru ca gradul de ionizare să crească de 10 ori.

Mase atomice:  $H=1$ ;  $C=12$ ;  $O=16$ .

32°. O soluție de amoniac cu volumul de  $2 \text{ dm}^3$ , are  $pH = 11$ . Constanta de bazicitate a amoniacului fiind  $1,8 \cdot 10^{-5}$ , se cere:

- ecuația reacției de ionizare a amoniacului în soluție apoasă;
- concentrația ionilor  $HO^-$  din această soluție;
- concentrația soluției de amoniac;
- ce volum de amoniac gazos măsurat la  $27^\circ C$  și  $200 \text{ kPa}$  a fost dizolvat în  $2 \text{ dm}^3$  apă distilată pentru prepararea soluției respective. Se neglijează variația de volum a lichidului în procesul de dizolvare a amoniacului gazos.

33°. Gradul de ionizare al acidului cianhidric într-o soluție apoasă de concentrație  $0,2 \text{ M}$ , la  $25^\circ C$ , este  $1,4 \cdot 10^{-2}\%$ .

Se cere:

- constanta de ionizare a acidului cianhidric la această temperatură;
- concentrația ionilor  $H_3O^+$  din această soluție și  $pH$ -ul soluției;
- ce volum de apă trebuie să se adauge unui  $\text{dm}^3$  de soluție de  $HCN$   $0,2 \text{ M}$  pentru ca gradul de ionizare să se dubleze.

34°. La un volum de  $500 \text{ cm}^3$  soluție saturată la  $25^\circ C$  de clorură de argint se adaugă  $4,44 \cdot 10^{-2} \text{ g}$  clorură de calciu. Considerind că volumul și temperatura soluției nu se modifică, se cere:

- solubilitatea clorurii de argint la  $25^\circ C$  ( $\text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ ) în apă pură;
- concentrația ionilor  $Ag^+$  și  $Cl^-$  în soluția saturată de  $AgCl$  ( $\text{in g} \cdot \text{dm}^{-3}$ ).
- solubilitatea  $AgCl$  ( $\text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ ) în soluție, obținută după adăugarea clorurii de calciu;
- concentrația ionilor  $Ag^+$  și  $Cl^-$  în soluție, obținută după adăugarea clorurii de calciu.

Mase atomice:  $Cl=35,5$ ;  $Ca=40$ ;  $Ag=108$ ;

Produsul de solubilitate al  $AgCl$  (la  $25^\circ C$ ):  $P_s = 1 \cdot 10^{-10} \text{ mol}^2 \cdot \text{dm}^{-6}$ .

35°. O soluție de  $Pb(NO_3)_2$  avind volumul  $10 \text{ cm}^3$  și concentrația  $2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$  se diluează pînă la  $100 \text{ cm}^3$  cu apă distilată și apoi se amestecă cu  $100 \text{ cm}^3$  soluție de acid sulfuric de concentrație  $2 \cdot 10^{-2} \text{ N}$  (normal).

Se cere:

- să se arate dacă va avea loc formarea de precipitat  $PbSO_4$  sau nu;
- să se calculeze concentrația (în  $\text{g pe dm}^3$ ) ionilor  $Pb^{2+}$  și a ionilor  $SO_4^{2-}$  în soluția nou formată.

Mase atomice:  $H=1$ ;  $O=16$ ;  $N=14$ ;  $S=32$ ;  $Na=23$  și  $Pb=207$ .

Produsul de solubilitate al sulfatului de plumb:  $P_s = 2 \cdot 10^{-8} \text{ mol}^2 \cdot \text{dm}^{-6}$ .

36°. Se dizolvă  $1/2 \text{ l}$   $HCl$  gazos (condiții normale) în apă astfel ca volumul soluției să fie  $10 \text{ l}$ .

Se cere:

- normalitatea și molaritatea soluției de  $HCl$ ;
- concentrația ionilor  $H^+$  la litru de soluție, știind că  $HCl$  este total ionizat;
- volumul soluției  $0,1 \text{ N NaOH}$  ce neutralizează soluția de  $HCl$ .

Mase atomice:  $H=1,0$ ;  $Cl=35,5$ .

37°. Ce cantitate de zinc și acid clorhidric  $10\%$  sînt necesare pentru a obține  $15 \text{ l}$  hidrogen (condiții normale), dacă pierderile reprezintă  $8\%$ .

Mase atomice:  $H=1,0$ ;  $Cl=35,5$ ;  $Zn=65,4$ .



38°. Într-o soluție 1 M de azotat de argint se introduce o lamă de aluminiu de masă 27 g. După ce tot argintul a fost depus lama cîntărește 29,97 g.

Se cere:

- masa aluminiului dizolvat;
- masa argintului depus;
- volumul soluției 1 M de azotat de argint folosit;
- concentrația molară a soluției finale.

Mase atomice: Al=27; Ag=108

39°. O cantitate de 5 kg calcar, cu un conținut de 80% carbonat de calciu este tratată cu o soluție 10% HCl (se consideră  $\rho_{\text{HCl}} = 1 \text{ g/cm}^3$ ). Gazul rezultat din reacție este barbotat într-o soluție 0,5 M de NaOH.

Se cere:

- ecuațiile reacțiilor;
- volumul gazului (condiții normale) rezultat din reacție;
- volumul soluției 10% HCl (în l) necesar;
- volumul soluției 0,5 molară de NaOH care absoarbe complet gazul rezultat din reacție

Mase atomice: H—1,0; C—12,0; O—16,0; Cl—35,5; Na—23; Ca—40,1.

40°. Se tratează 100 cm<sup>3</sup> soluție de HCl cu exces de soluție de KMnO<sub>4</sub> la cald. Din reacție se degajă 1,12 l (condiții normale) de clor.

Se cere:

- să se scrie ecuația reacției care a avut loc;
- să se calculeze concentrația în mol/l a soluției inițiale de HCl;
- să se calculeze cîți cm<sup>3</sup> de soluție HCl de concentrație 36% ( $\rho = 1,18 \text{ g/cm}^3$ ) au fost necesari pentru a obține cei 100 cm<sup>3</sup> de soluție de HCl (care au intrat în reacție cu KMnO<sub>4</sub>);
- să se calculeze echivalentul gram al KMnO<sub>4</sub> pentru reacția care a avut loc cu HCl.

Mase atomice: Cl—35,5; K—39; Mn—55; O—16; H—1.

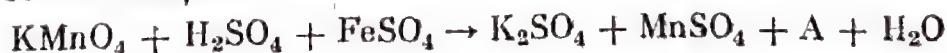
41°. Acidul HA are în soluții apoase  $K_a = 1 \cdot 10^{-5}$ .

Se cere:

- dimensiunile lui  $K_a$ ;
- gradul de ionizare  $\alpha$  în soluțiile avînd concentrațiile analitice  $1 \cdot 10^{-1} \text{ M}$ , respectiv  $1 \cdot 10^{-3} \text{ M}$ ;
- concentrația ionilor  $\text{H}_3\text{O}^+$  în soluțiile avînd concentrațiile analitice  $1 \cdot 10^{-1} \text{ M}$ , respectiv  $1 \cdot 10^{-3} \text{ M}$ ;
- pH-ul soluției în care concentrația analitică a acidului HA este  $C = 1 \cdot 10^{-3} \text{ M}$ ;
- caracterul acido-bazic al soluției obținută prin adăugarea cantității stoechiometrice de NaOH la soluția rezultată la punctul d).

42°. La neutralizarea a 250 ml soluție NaOH 2M cu o soluție de HCl se degajă 28,63 kJ. La neutralizarea a 250 ml soluție HCl, preparată prin introducerea a 42 ml soluție 37% HCl ( $\rho = 1,19 \text{ g/cm}^3$ ) într-un balon de 500 ml, degajîndu-se 14,51 kJ, să se determine căldura de neutralizare și să se interpreteze rezultatele obținute.

43°. Se dă reacția:



Se cere:

- să se determine substanța A;
- să se stabilească coeficienții ecuației chimice;
- volumul soluției de KMnO<sub>4</sub> 0,2 N necesar pentru oxidarea sulfatului de fier (II) conținut în 100 ml soluție 0,1 N;
- concentrația molară a soluției de KMnO<sub>4</sub>.



44°. Prin bromurarea unei hidrocarburi A, cu formula moleculară  $C_5H_{10}$ , rezultă un singur derivat monobromurat. Scrieți formulele de structură a hidrocarburi A și cele ale izomerilor săi.

45°. În urma analizei elementare se stabilește că două substanțe A și B au aceeași compoziție procentuală ( $C\% = 40,67$ ;  $H\% = 8,47$  și  $N\% = 23,73$ ,  $O\% = 27,19$ ) și aceeași masă moleculară ( $M = 59$ ).

a) Știind că prin hidroliză substanța A conduce la un acid C, iar substanța B la o aldehidă D și că prin oxidare D trece în C, stabiliți formulele substanțelor A, B, C și D;

b) scrieți formulele de constituție pentru cel puțin patru substanțe izomere cu A și B.

46°. Analiza complexă a cinci substanțe izomere A, B, C, D și E furnizează următoarele informații:

a) au aceeași formulă moleculară,  $C_7H_8O$ ;

b) conțin un nucleu aromatic în moleculă;

c) sînt insolubile în apă;

d) numai substanțele C, D și E sînt solubile în soluție de hidroxid de sodiu și dau reacții de culoare cu o soluție de clorură ferică;

e) substanța A reacționează cu sodiu metalic, spre deosebire de substanța B care nu dă această reacție.

Pe baza acestor date stabiliți formulele de constituție ale compuşilor A, B, C, D și E.

Indicați reacțiile comune ale celor cinci substanțe.

47°. Raportul dintre masa carbonului și cea a hidrogenului dintr-o hidrocarbură A cu masa moleculară 130 este 12 : 1.

Știind că prin oxidare cu dicromat de potasiu și acid sulfuric hidrocarbura A se transformă în acid tereftalic, determinați formula de structură; scrieți formulele structurale ale tuturor izomerilor lui A care prin oxidare energetică conduc la acid benzoic.

Determinați nesaturarea echivalentă a compusului A, a acidului tereftalic și a acidului benzoic.

48°. Știind că prin oxidarea unei hidrocarburi nesaturate A cu dicromat de potasiu și acid sulfuric se obține acid acetic și acid piruvic, în raport molar 2 : 1, se cere:

a) formula și denumirea hidrocarburi A;

b) formulele și denumirile izomerilor geometrici ai hidrocarburi A;

c) formulele izomerilor optici obținuți prin hidrogenarea totală a hidrocarburi A;

d) volumul soluției de dicromat de potasiu 0,23 M, necesar oxidării a 9,6 g hidrocarbură A.

49°. Prin nitrarea a 25,6 g hidrocarbură aromatică polinucleară se obțin 34,6 g mononitroderivat.

Se cere:

a) masa moleculară și formula structurală a hidrocarburi;

b) cantitățile de acid sulfuric de concentrație 90% și acid azotic 63% necesare preparării amestecului nitrant, știind că în reacția de nitrare se consumă numai 50% și că raportul molar acid sulfuric : acid azotic din amestec este de 2 : 1.

50°. Într-un reactor de hidrogenare cu volumul de 72,2 dm<sup>3</sup> se introduc benzen și hidrogen într-un raport molar de 1 : 10. Presiunea la începutul procesului este de 10 atm, iar la sfîrșitul hidrogenării este de 8,64 atm, temperatura menținându-se constantă la 127°C.

Să se calculeze compoziția procentuală a amestecului la sfîrșitul reacției și randamentul reacției de hidrogenare. (Se neglijează volumul catalizatorului și se presupune că benzenul și ciclohexanul se găsesc în stare de vapori.)



51°. O alchenă A, obținută prin deshidratarea unui alcool monohidroxilic aciclic saturat B, conține cu 25,71 procente de carbon mai mult decât alcoolul B.

Să se determine:

- formula moleculară a alchenei A;
- formulele izomerilor alcoolului B;
- cantitatea de soluție de  $\text{Br}_2$  de concentrație 1,6% (în  $\text{CCl}_4$ ) ce poate fi decolorată de 3,36 dm<sup>3</sup> alchenă A.

52°. Un amestec echimolecular format dintr-un alcan și o alchenă cu același număr de atomi de carbon în moleculă este supus unei reacții de descompunere în elemente, într-un vas închis.

Știind că la sfârșitul reacției presiunea crește de 3,5 ori (temperatura se presupune constantă), să se determine formulele celor două hidrocarburi. (Volumul carbonului rezultat la descompunere se neglijează.)

53°. Raportul maselor elementelor constitutive ale unui alcool monohidroxilic primar este  $\text{C} : \text{H} : \text{O} = 6 : 1 : 2$ .

Știind că molecula alcoolului A are o catenă de atom de carbon ramificată, se cere:

- formula moleculară și formula structurală ale alcoolului A;
- izomerii geometrici ce corespund formulei moleculare determinate;
- izomerii de funcțiune ai alcoolului A;
- ecuațiile reacțiilor de transformare a *n*-butanolului în alcoolul A;
- cantitatea de ester ce se obține la tratarea a 10 moli de alcool A cu anhidridă acetică în exces, la un randament de 90%.

54°. În urma unui proces de nitrare a anilinei se obține în final un amestec de *p*-nitroanilină, *o*-nitroanilină și 2,4-dinitroanilină în raport molar de 4 : 2 : 0,5. Știind că s-au obținut 276 kg *p*-nitroanilină și că numai 75% din anilină a fost transformată în nitroderivați, se cere:

- ecuațiile reacțiilor;
- cantitatea de anilină supusă nitrării;
- cantitățile de *o*-nitroanilină și 2,4-dinitroanilină obținute;
- conversia utilă (raportată la *p*-nitroanilină);
- cantitatea de acid acetic 98% necesară protejării anilinei în cursul reacției de nitrare;
- să se compare bazicitățile anilinei, *p*-nitroanilinei și 2,4-dinitroanilinei.

55°. Trei hidrocarburi A, B și C conțin în moleculă același număr de atomi de carbon. Știind că procente de hidrogen din molecula fiecăreia sint 18,18; 14,28 și respectiv 10,00, și că numărul atomilor de hidrogen din molecula hidrocarburi A este cu patru mai mare decât cel din molecula hidrocarburi C, să se determine:

- formulele moleculare ale celor trei hidrocarburi;
- căile de transformare una în alta.

56°. Într-un cilindru de oțel cu volumul de 22,4 dm<sup>3</sup> se introduc 2 moli de etan și 21 g alchenă necunoscută. Știind că amestecul de hidrocarburi exercită o presiune de 2,75 atm, măsurată la 27°C, se cere:

- formula moleculară a alchenei necunoscute;



b) presiunea în cilindru dacă se introduce cantitatea stoechiometrică de hidrogen necesară hidrogenării alchenei (temperatura rămânând constantă);

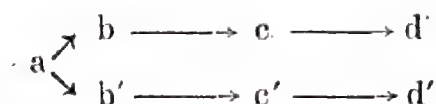
c) presiunea în cilindru, după hidrogenarea a 50% din alchenă, măsurată la temperatura de 77°C;

d) masa moleculară medie a amestecului gazos inițial din cilindru.

57°. Într-un reactor de dehidrogenare-cracare cu volumul de 56 m<sup>3</sup> se introduc 116 kg butan. În urma procesului de transformare termică se obține un amestec gazos care conține (în procente de volum) 20% butene, 15% propenă, 10% etenă și 10% butan neformat.

Să se determine presiunea în reactor la începutul și la sfârșitul procesului, cunoscând că acesta are loc la temperatura de 546°C.

58°. Se dă următoarea schemă:



Substanța a este o hidrocarbură, iar substanța b are masa moleculară 137 și raportul maselor elementelor componente C : H : N : O = 12 : 1 : 2 : 4,57.

Știind că substanțele b cu b', c cu c', d cu d' sunt izomeri de poziție, iar b cu d și b' cu d' sunt izomeri de funcțiune, se cere:

a) determinarea formulelor moleculare și structurale ale substanțelor indicate în schemă;

b) ecuațiile reacțiilor ce au loc;

c) o altă cale de transformare a lui b în d (respectiv b' în d').

59°. Prin condensarea crotonică a 0,4 kmoli aldehydă A se obțin 0,15 kmoli compus B care conține 16,32% O.

Se cere:

a) formulele substanțelor A și B și ecuația reacției;

b) randamentul reacției de condensare;

c) volumul de hidrogen (măsurat în condiții normale) necesar transformării substanței B într-un compus saturat C;

d) formula unui alt compus carbonilic izomer cu A și ecuația reacției de condensare aldolică a acestuia cu aldehyda A.

60°. Un mol de substanță A se condensează cu 3 moli de substanță B, în soluție apoasă, în prezența unui catalizator bazic, rezultând substanța C. Prin hidrogenarea substanței C se obține compusul D, cu compoziția C% = 44,12, H% = 8,82 și O% = 47,05 și cu masă moleculară 136.

Știind că 6,8 g substanță D reacționează cantitativ cu 20,4 g anhidridă acetică, se cere:

a) determinarea formulelor de structură ale compuşilor A, B, C și D și scrierea ecuațiilor reacțiilor ce au loc;

b) volumul de gaz degajat în reacția dintre 6,8 g substanță D cu cantitatea de sodiu necesară;

c) formula structurală a compusului E rezultat în urma reacției dintre sarea de sodiu obținută la punctul b) și diclormetan, știind că E conține 40% oxigen.

61°. O cantitate de 26,8 g amestec echimolecular a doi acizi monocarboxilici saturați este neutralizată cu 0,5 dm<sup>3</sup> soluție de hidroxid de sodiu 0,8 molar.

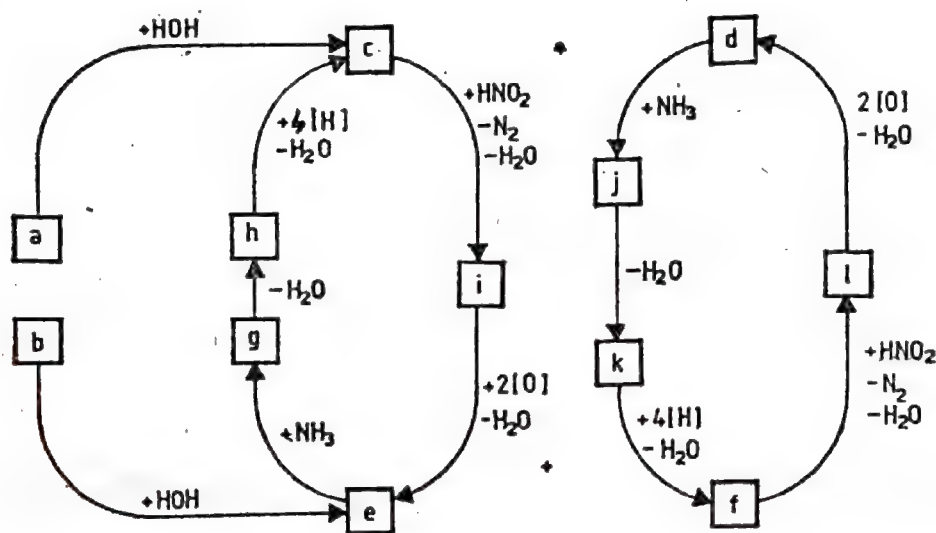
Știind că unul dintre acizi a format la neutralizare o cantitate de sare mai mare cu 2,8 g decât celălalt acid, să se identifice cei doi acizi și să se calculeze compoziția procentuală a amestecului de săruri rezultat la neutralizare (după evaporarea apei).

62°. Raportul dintre procentul de oxigen al unui acid dicarboxilic saturat (A) și procentul de oxigen al diclorurii sale acide (B) este 2,71.

Se cere:

- formulele moleculare și structurale ale compușilor A și B;
- formulele structurale ale tuturor izomerilor posibili ai compușilor A și, respectiv, B;
- volumul de soluție de hidroxid de sodiu 2 m necesară absorbției totale a acidului clorhidric degajat la transformarea a 52 kg acid în diclorura sa acidă.

63°. Se dă următoarea schemă:



Știind că a și b sînt izomeri cu formula moleculară C<sub>5</sub>H<sub>11</sub>NO, se cere:

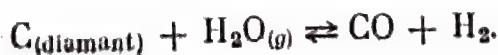
- identificarea substanțelor de la a la l.
- ecuațiile reacțiilor.

64°. Să se scrie formulele tuturor izomerilor posibili cu formulă moleculară C<sub>8</sub>H<sub>10</sub>O și să se precizeze tipul de izomerie știind că toți izomerii conțin în moleculă un nucleu aromatic.

65°. Determinați formula moleculară a unui ester al unui acid monocarboxilic saturat cu un alcool monohidroxilic saturat cu același număr de atomi de carbon în moleculă, știind că procentul de hidrogen din ester este de 10,35%.

Scrieți formulele esterilor izomeri optic activi ce corespund formulei moleculare determinate.

66°. Se dă reacția



Cunoscind datele termodinamice de mai jos, să se calculeze pentru această reacție:

1)  $\Delta^r H_{298}^0$ ; 2)  $\Delta^r S_{298}^0$ ; 3)  $\Delta^r G_{1000}^0$ ; 4) Știind că  $\Delta^r G_T^0 = -RT \ln K_p$ , să se afle  $K_p$  și  $K_x$  la  $p = 2$  atm.

$$\epsilon_{\text{H-H}} = 431,5 \text{ kJ/mol}; \quad \Delta H_{\text{ardere CO}}^0 = -282,8 \text{ kJ/mol};$$

$$\epsilon_{\text{O-O}} = 493,2 \text{ kJ/mol}; \quad \Delta H_{\text{ardere grafit}}^0 = -393 \text{ kJ/mol};$$

$$\epsilon_{\text{O-H}} = 459,6 \text{ kJ/mol}; \quad \Delta H_{f(\text{diamant})}^0 = 2,1 \text{ kJ/mol};$$

$$S_{\text{diamant}}^0 = 2,5 \text{ J/mol} \cdot \text{K};$$

$$S_{\text{H}_2\text{O}(g)}^0 = 188,5 \text{ J/mol} \cdot \text{K};$$

$$S_{\text{H}_2}^0 = 130,5 \text{ J/mol} \cdot \text{K};$$

$$S_{\text{CO}}^0 = 197,7 \text{ J/mol} \cdot \text{K}.$$

(Concursul republican 1981, clasa a XI-a)

67°. La saponificarea acetatului de etil cu NaOH, la 27°C, concentrațiile inițiale ale reactanților fiind egale, se obțin experimental următoarele date:

$t$ (min)	0	2	5	9	14	20	27	35	45
$[\text{HO}^-] \cdot 10^3$ (mol/l)	10	9,1	8,0	6,9	5,9	5,0	4,26	3,64	3,08

Se cere:

- să se traseze graficul  $C = f(t)$ ;
- să se afle ordinul de reacție prin calcul;
- să se afle constanta de viteză la 27°C și la 57°C dacă energia de activare este 70 kJ/mol.

(Concursul republican 1981, clasa a XI-a)

68°. Prin reacția a 810 kg metal trivalent cu  $\text{H}_2\text{SO}_4$  se obține o sare neutră cu  $M = 342$ .

Se cere:

- cantitatea de sare rezultată;
- volumul, densitatea și densitatea față de aer a gazului format în reacție;
- cantitatea de acid inițială, cu concentrația de 50%, fiind de 9 t, să se determine cantitatea rămasă după reacție;
- volumul soluției de NaOH 2 M care neutralizează acidul sulfuric rămas (în  $\text{m}^3$ ).

(Concursul republican 1981, clasa a IX-a)

69°. La amestecarea unei soluții de azotat de argint cu o cantitate egală dintr-o soluție de clorură de sodiu, substanțele reacționează total.

Se cere:

- concentrația procentuală a soluției de clorură de sodiu dacă soluția de azotat de argint are concentrația 3,4%;
- concentrația procentuală a soluției de azotat de sodiu ce rezultă din reacție.

(Concursul republican 1982, clasa a IX-a)



70°. În 100 g soluție de hidroxid de sodiu cu concentrația 20% (procente de masă) se introduce o cantitate  $X$  g sodiu metalic astfel încât se obține  $Y$  g soluție de hidroxid de sodiu cu concentrația 40% (procente de masă).

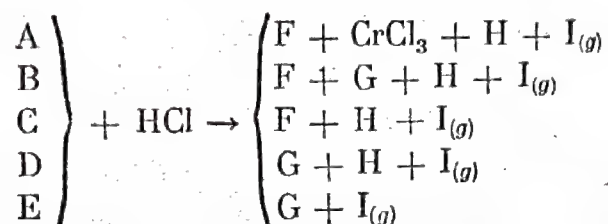
Se cere:

a) să se determine cantitatea  $X$  (în g) de sodiu metalic adăugată, precum și valoarea lui  $Y$ ;

b) cunoscând că cele  $Y$  g de soluție de hidroxid de sodiu 40% ocupă un volum de 7 ori mai mic decât volumul soluției 2 N de acid sulfuric necesar pentru neutralizarea hidroxidului de sodiu din cele  $Y$  g de soluție, să se determine concentrația molară și cea normală a acestei soluții de hidroxid de sodiu.

(Concursul republican 1982, clasa a IX-a)

71°. Se consideră următorul șir de transformări:



Să se identifice substanțele notate prin litere de la A la I, dacă se știe că substanța D este un oxid care conține 63,22% metal tetravalent.

(Concursul republican 1983, clasa a XI-a)

72°. La electroliza unei soluții în care se află dizolvată sarea de sodiu a unui acid monocarboxilic saturat, se obține la anod un amestec de gaze cu masa molară medie  $\bar{M} = 39,33$  g/mol. Când acest amestec gazos este barbotat în apă de var, masa acesteia crește cu 440 g.

Să se determine:

- masa sării electrolizate;
- volumul gazului degajat la catod în condiții normale;
- care este randamentul de curent, dacă s-a lucrat cu un curent de 40 A timp de 500 min.

(Concursul republican 1983, clasa a XI-a)

73°. Un amestec gazos format din  $\text{CO}$ ,  $\text{CH}_4$  și  $\text{H}_2\text{S}$  având masa egală cu 167,4 g, se supune arderii complete în aer. Gazele de ardere se absorb într-o soluție apoasă de  $\text{NaOH}$ , având loc consumarea întregii cantități de hidroxid și formarea de săruri în raportul molar  $\text{Na}_2\text{CO}_3 : \text{Na}_2\text{SO}_3 = 80 : 1$  iar azotul rămas măsoară 1043,84 l (condiții normale).

Se cere:

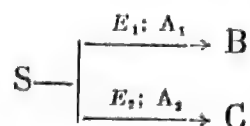
- compoziția în moli a amestecului gazos dat;
- cu câte procente a crescut masa soluției apoase după absorbția gazelor de ardere, dacă inițial soluția a avut concentrația 32,4% în  $\text{NaOH}$ .

Se dau masele atomice:  $\text{Na} - 23$ ;  $\text{S} - 32$ ;  $\text{C} - 12$ ;  $\text{O} - 16$ .

Compoziția aerului în % vol.: 20%  $\text{O}_2$ ; 80%  $\text{N}_2$ .

(Concursul republican 1983, clasa a IX-a)

74°. O substanță S se izomerizează complet în compușii B și C care se obțin împreună, fiecare rezultând în urma unei reacții simple de ordinul I.



Energiile de activare și factorii preexponențiali din ecuația lui Arrhenius au respectiv pentru cele două reacții valorile:

$$E_1 = 20 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}; A_1 = 2,5 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}$$

$$E_2 = 30 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}; A_2 = 1 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}.$$

Se cere:

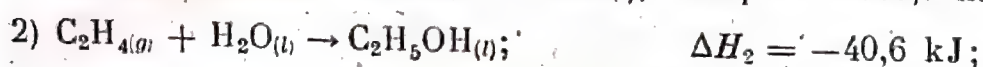
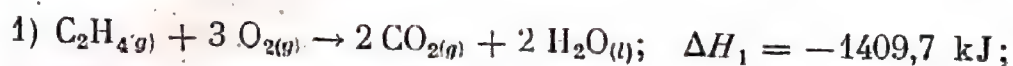
- să se stabilească la ce temperatură trebuie să aibă loc reacția pentru ca masele produșilor obținuți să fie în raportul  $m_B : m_C = 1$ ;
- temperatura la care masele respective rezultă în raportul  $m_B : m_C = 8$ .

Se dau:

- constanta gazelor perfecte  $R = 8,31 \cdot 10^3 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$ ;
- valoarea logaritmului natural (în bază e):  $\ln 2 = 0,693$ .

(Concursul republican 1985, clasa a XI-a)

75°. Se dau următoarele reacții termochimice cu variațiile respective de entalpie standard:



Se cunosc de asemenea următoarele valori ale entropiilor standard:

$$S_{\text{C}_2\text{H}_{4(g)}}^0 = 219,5 \text{ J/mol} \cdot \text{K}; S_{\text{H}_2\text{O}_{(l)}}^0 = 69,8 \text{ J/mol} \cdot \text{K};$$

$$S_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}_{(l)}}^0 = 160,5 \text{ J/mol} \cdot \text{K}.$$

Se cere:

- entalpia standard de formare a etenei,  $H_{f\text{C}_2\text{H}_{4(g)}}^0$ ;
- să se arate dacă reacția (2) este spontană la  $50^\circ\text{C}$ ;
- care este temperatura maximă pînă la care această reacție (2) este spontană;
- să se calculeze cantitatea de căldură care se degajă la arderea a  $28,75 \text{ cm}^3$  de etanol lichid.

Se dau:

- densitatea etanolului lichid  $\rho = 0,8 \text{ g/cm}^3$ ;
- mase atomice: H—1; C—12; O—16.

(Concursul republican 1985, clasa a XI-a)



76°. La încălzirea puternică a unui gram de probă solidă ce conține  $\text{CaCO}_3$ , se constată că masa probei a scăzut cu 0,352 g obținându-se un reziduu solid format dintr-o singură substanță. La tratarea unei probe identice cu prima, cu cantitatea stoechiometrică necesară de acid clorhidric, se obține după eliminarea  $\text{CO}_2$  format, o soluție apoasă ce conține dizolvată o singură sare.

Se cere:

- volumul de  $\text{CO}_2$  (condiții normale) degajat la încălzirea 1 g de probă;
- compoziția, în procente de masă, a elementelor din proba solidă inițială.

(Concursul republican 1985, clasa a IX-a)

77°. Un amestec gazos format din azot și o altă substanță elementară necunoscută, conține 80% azot (în procente de volum) și are densitatea  $1,405 \text{ kg/m}^3$  măsurată la  $27^\circ\text{C}$  și 1,2 atm.

Se cere:

- să se identifice substanța gazoasă necunoscută;
- să se calculeze compoziția amestecului gazos exprimată în procente de masă.

(Concursul republican 1985, clasa a IX-a)

78°. Prin descompunerea termică a 12,00 g dintr-o substanță albă, cristalină, se formează  $\text{H}_2\text{O}$  (lichid) și  $\text{N}_2\text{O}$  (gaz). Volumul de  $\text{N}_2\text{O}$  măsurat în condiții normale a fost 3,36 l. Să se stabilească formula substanței.

Mase atomice: H—1; O—16; N—14.

(Concursul național 1987, clasa a IX-a)

79°. Un inginer chimist este interesat să determine compoziția unui amestec gazos de oxigen și heliu prin măsurarea densității acestuia.

a) Deduceți expresia dependenței densității amestecului ( $\rho$ ) de compoziția acestuia redată prin procentul molar ( $X$ ) la presiunea totală  $p$  și temperatura  $T$ .

b) Calculați compoziția amestecului de densitate  $\rho = 0,72 \text{ g/l}$ , la  $25^\circ\text{C}$  și 1 atm.

c) Care este precizia metodei dacă densitatea  $\rho$  este măsurată cu o eroare de  $\pm 0,005 \text{ g/l}$ ?

Mase atomice: He—4, O—16.

Constanta gazelor perfecte:  $R = 0,082 \frac{\text{l} \cdot \text{atm}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ .

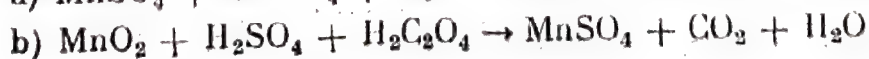
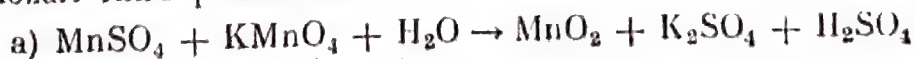
(Concursul național 1987, clasa a IX-a)

80°. Scrieți structura electronică a elementelor A, cu  $Z=16$ , și B, cu  $Z=56$ , și stabiliți care din următoarele substanțe pot reacționa cu fiecare din elementele A și B:  $\text{O}_2$ , Na, HCl,  $\text{Cl}_2$  și  $\text{H}_2\text{O}$ . Pentru compuşii care se pot forma indicați formulele moleculare și tipurile de legături.

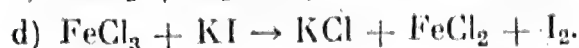
Notă: Se vor folosi simbolurile A și B pentru elementele date.

(Concursul național 1987, clasa a IX-a)

81°. Pentru dozarea unor compuşii de  $\text{Mn}^{2+}$ ,  $\text{Mn}^{4+}$ ,  $\text{Fe}^{2+}$  și  $\text{Fe}^{3+}$  sint folosite reacțiile indicate în schemele de mai jos, rezultatele determinărilor pentru două din dozări fiind prezentate în tabel.







Compus dozat	Mărimea probei (g)	Reactiv utilizat	Volumul soluției consumat în determinări (ml)	Conținut de ion metalic % (masă)
$\text{MnSO}_4$	0,2747	$\text{KMnO}_4$ 1 N	2,5	
$\text{FeCl}_2$	0,1117	$\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ 0,1 N	5,0	

Se cere:

a) să se calculeze coeficienții ecuațiilor reacțiilor de dozare;

b) să se calculeze conținutul procentual al ionilor metalici în probele analizate.

(Concursul național 1987, clasa a XI-a)

82°. Pentru izomerii *cis* și *trans* ai 2-butenei au fost determinate mărimile termodinamice (standard) indicate în tabel:

Mărimi termodinamice	<i>cis</i> -2-butena	<i>trans</i> -2-butenă
Căldura de ardere (kJ/mol)	2709,1	2704,7
Entropia (J/mol · K)	300,5	296,2

Se cere:

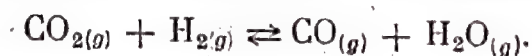
a) să se calculeze variația de entalpie liberă la izomerizare și să se arate în ce sens va evolua spontan sistemul, în condiții standard;

b) dacă izomerizarea are loc sub acțiunea unui catalizator, care are efectul unei scăderi a energiei de activare cu 17,173 kJ/mol, de câte ori este mai mare viteza reacției catalizate decât a celei necatalizate la temperatura de 298 K?

Se dă:  $R = 8,314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ ;  $\ln 2 = 0,6931$ .

(Concursul național 1987, clasa a XI-a)

83°. Se consideră următorul echilibru în fază gazoasă:



a) Cunoscând valoarea entalpiei de reacție la temperatura de 1000 K,  $\Delta^r H_{1000}^0 = 35\,040 \text{ J}$ , precum și cea a entropiei de reacție la aceeași temperatură,  $\Delta^r S_{1000}^0 = 32,11 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ , calculați variația de entalpie liberă  $\Delta G_{1000}^0$  la temperatura de 1000 K.

b) Care este valoarea constantei de echilibru  $K_p$  pentru această reacție la 1000 K?

c) Care sînt valorile constantelor de echilibru  $K_x$  și  $K_c$  ( $X$  — fracția molară;  $C$  — concentrația în mol/l) la aceeași temperatură (1000 K). Se va presupune comportarea ideală a gazelor din sistem.

d) Un amestec gazos ce conține în procente de volum: 35%  $\text{H}_2$ ; 45%  $\text{CO}$  și 20% vapori de apă este încălzit la 1000 K. Stabiliți compoziția amestecului gazos la stabilirea echilibrului (în procente de volum).



e) Calculați entalpia de reacție  $\Delta^r H_{1000}^0$ , la temperatura de 1400 K, folosind valoarea  $\Delta^r H_{1000}^0$  și capacitățile calorice molare la presiune constantă,  $C_p^0$  (valori aplicabile în intervalul de temperatură 1000–1400 K):

$$\Delta^r H_{1000}^0 = 35040 \text{ J};$$

$$C_{p(\text{CO}_2)}^0 = 42,31 + 10,09 \cdot 10^{-3} T \text{ J/mol} \cdot \text{K};$$

$$C_{p(\text{H}_2)}^0 = 27,40 + 3,20 \cdot 10^{-3} T \text{ J/mol} \cdot \text{K};$$

$$C_{p(\text{CO})}^0 = 28,34 + 4,14 \cdot 10^{-3} T \text{ J/mol} \cdot \text{K};$$

$$C_{p(\text{H}_2\text{O})}^0 = 30,09 + 10,67 \cdot 10^{-3} T \text{ J/mol} \cdot \text{K}.$$

f) Având în vedere semnul lui  $\Delta^r H^0$  precizați în ce sens se va deplasa echilibrul considerat la creșterea temperaturii.

(Olimpiada Internațională de Chimie 1980 – AUSTRIA)

84°. O substanță solidă, cristalizată, de culoare albă, dă următoarele reacții:

- 1) colorează în galben intens flacăra unui bec de gaz;
- 2) soluția sa apoasă este neutră; prin adăugarea, picătură cu picătură, a unei soluții de acid sulfuros (soluție apoasă de  $\text{SO}_2$ ) se obține o soluție colorată intens în brun, care se decolorează la adăugarea unui exces de acid sulfuros;
- 3) soluția decolorată, în condițiile de la punctul 2), și acidulată cu  $\text{HNO}_3$ , la adăugarea de  $\text{AgNO}_3$  formează un precipitat galben ce nu poate fi dizolvat în amoniac, dar se dizolvă totuși, ușor în prezența de ioni  $\text{CN}^-$  sau  $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ .
- 4) Dacă se adaugă  $\text{KI}$  și  $\text{H}_2\text{SO}_4$  diluat la soluția apoasă a substanței solide, se obține tot o colorație brună intensă a soluției care poate fi decolorată prin adăugarea de acid sulfuros sau de soluție de  $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ ;
- 5) 0,1000 g de substanță solidă se dizolvă în apă și se adaugă 0,5 g  $\text{KI}$  și citiva mililitri de soluție diluată de  $\text{H}_2\text{SO}_4$ . Soluția brună obținută se titrează cu o soluție de  $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$  0,1000 M până la decolorarea completă, consumându-se 37,40 ml soluție de tiosulfat de sodiu.

Se cere:

- a) ce elemente trebuie să conțină substanța solidă? De ce?
- b) care sînt compușii implicați în reacțiile de la punctele 1) – 4)? Scrieți formulele lor moleculare;
- c) scrieți în formă ionică ecuațiile reacțiilor ce au loc la puncte 1) – 4);
- d) pe baza datelor de la punctul 5) precizați care este substanța solidă studiată.

(Olimpiada Internațională de Chimie 1980 – Austria)

85°. Oxalatul de calciu monohidrat,  $\text{CaC}_2\text{O}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$  este o sare puțin solubilă avînd o importanță analitică și fiziologică. Produsul său de solubilitate la 25°C este  $2,1 \cdot 10^{-9} \text{ (mol/dm}^3\text{)}^2$ .

Ionul oxalat poate fi protonat la ion hidrogenoxalat ( $\text{HC}_2\text{O}_4^-$ ) sau la acid oxalic. Valorile  $pK_a$  la 25°C sînt 1,23 ( $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$ ) și 4,28 ( $\text{HC}_2\text{O}_4^-$ ). La 25°C produsul ionic al apei este  $1,0 \cdot 10^{-14} \text{ (mol/dm}^3\text{)}^2$ .

a) Scrieți expresiile acelor condiții de echilibru care prezintă interes pentru calculul solubilității oxalatului de calciu în apă.

b) Scrieți condițiile de concentrații care sînt necesare pentru calculul solubilității s (mol/dm<sup>3</sup>) a oxalatului de calciu în prezența unui acid tare de concentrație C.



c) calculați solubilitatea (în  $\text{g/dm}^3$ ) a oxalatului de calciu monohidratat în celulele plantelor în care un sistem tampon reglează  $\text{pH}$ -ul la valoarea 6,5.

d) Calculați solubilitatea ( $\text{g/dm}^3$ ) oxalatului de calciu monohidratat într-o soluție de acid clorhidric de concentrație  $0,010 \text{ mol/dm}^3$ . Calculați, de asemenea, concentrația ionilor de hidroniu în această soluție.

e) Calculați concentrațiile de echilibru ale tuturor celorlalte specii existente în soluția de la punctul d).

(Olimpiada Internațională de Chimie 1982 — Suedia)

86°. Studiul cinetic al hidrolizei alcaline a unor compuși organici clorurați au condus la următoarele rezultate:

a) Un anumit volum de soluție a sării neutre de potasiu a acidului monoclor-succinic a fost tratat cu un volum egal de soluție de hidroxid de potasiu, ambele soluții având concentrația inițială  $0,2 \text{ mol/dm}^3$ . S-a determinat concentrația  $\text{KOH}$  în amestecul de reacție, la  $25^\circ\text{C}$ , la diferite intervale de timp, obținându-se următoarele rezultate:

$t \text{ (min)}$	10	20	30	45	60	80	100
$\text{CKOH (mol/dm}^3\text{)}$	0,085	0,074	0,065	0,056	0,049	0,042	0,036

Repetind experiența, cu aceleași concentrații inițiale ale soluțiilor, dar la  $35^\circ\text{C}$ , concentrația hidroxidului de potasiu s-a redus la jumătate din valoarea sa inițială după 21 min.

b) La hidroliza 3-metil-3-clorhexanului, de asemenea, cu o soluție de  $\text{KOH}$  s-a găsit că, independent de concentrațiile inițiale ale reactanților (egale între ele), concentrația hidroxidului de potasiu se reduce la jumătate din valoarea inițială, după 32 min, dacă reacția are loc la  $25^\circ\text{C}$  și după 11 min dacă reacția are loc la  $35^\circ\text{C}$ .

c) În cadrul hidrolizei 2,4-dimetil-3-izopropil-3-clorpentanului s-a găsit același mecanism ca în cazul reacției de la punctul b), dar viteza de reacție, în aceleași condiții, este de 100 de ori mai mare.

Pe baza acestor date experimentale răspundeți la următoarele întrebări:

1) care este ordinul de reacție în cele trei cazuri, a), b), c)?

2) care este valoarea constantei de viteză a reacției de la punctul a) la  $25^\circ\text{C}$ ?

3) care sînt valorile energiei de activare pentru reacțiile de la punctele a) și b)?

4) dacă în reacția de la punctul a) se introduce sarea neutră de potasiu a acidului L-clorosuccinic (care este levogiră) ce configurație va avea sarea respectivă a acidului malic ce rezultă în urma hidrolizei?

5) dacă în reacția de la punctul b) se introduce izomerul levogir, ce activitate optică va avea 3-metil-3-hexanolul rezultat în urma hidrolizei?

6) cum se poate explica faptul că viteza reacției de la punctul c) este mult mai mare decît cea a reacției de la punctul b), cu toate că ambele reacții sînt de același tip și au loc în condiții identice de concentrații și temperatură?

Toate răspunsurile trebuie explicate.

(Olimpiada Internațională de Chimie 1983 — R.S. România)



87°. În secolul al XIX-lea industria chimică s-a dezvoltat pentru prima dată la un nivel important, prin producția de coloranți. Nu se cunoștea cauza pentru care compușii formați aveau o culoare atât de intensă. Unii coloranți pot fi considerați ca fiind formați din molecule rectilinii (1-dimensionale) în lungul cărora sînt distribuiți electronii. Conform mecanicii cuantice acești electroni pot fi considerați ca unde cu o lungime  $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}$  unde  $h$  reprezintă constanta lui Plank,  $p$  — cantitatea de mișcare și  $v$  — viteza electronului. Lungimea de undă a electronului are acces în spațiul disponibil (*should fit to the available space*). Acest model se numește „teoria particulei într-o cutie”. Fiecărei lungimi de undă îi corespunde o stare energetică, adică are un anumit nivel energetic. Dacă o moleculă absoarbe lumină, un electron trece de la un nivel de energie mai scăzut la un nivel mai ridicat. Pentru diferența de energie  $\Delta E$  a acestui transfer electronic se poate scrie  $\Delta E = \frac{hc}{\lambda}$ , în care  $c$  este viteza luminii, iar  $\lambda$  — lungimea de undă a luminii absorbite. Dacă un corp este colorat, lungimea de undă a luminii absorbite se găsește în domeniul vizibil al spectrului (400–650 nm).

1) În răspuns se va reprezenta prin desen undele electronilor cu nivel energetic scăzut și cu nivel electronic ridicat, corespunzător unei molecule unidimensionale de lungime  $l$ .

2) Indicați o expresie generală pentru lungimea de undă posibilă a electronului în funcție de lungimea  $l$ . În modelul „particulei într-o cutie” considerăm numai variațiile de energie cinetică a electronului.

3) Deduceți o expresie pentru nivelele de energie posibile pe care le pot poseda electronii dintr-o moleculă. Această expresie este funcție de lungimea  $l$ .

4) Arătați că pentru un lanț de lungimea  $l$  care posedă  $k$  electroni absorbția care are o lungime de undă maximă este dată de  $\lambda = \frac{8 m c l^2}{h(k + \frac{1}{2})}$  pentru valori pare ale lui  $k$ .

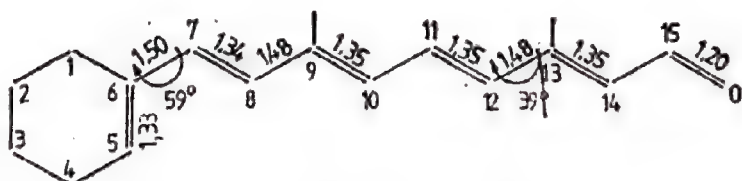
Imaginați o moleculă lineară care posedă un sistem de duble legături conjugate. Culoarea observată se datorește electronilor  $\pi$  ai sistemului. Fiecare atom C care lungeste lanțul aduce un electron sistemului de electroni  $\pi$  și lungimea moleculei crește cu o valoare  $a$ . Valoarea  $a$  este lungimea legăturii C—C în sistemul conjugat.

Notăm cu  $N$  numărul atomilor de carbon C.

5) Deduceți o expresie pentru lungimea de undă corespunzătoare primului transfer de electroni în funcție de  $N$ , pentru valori pare ale lui  $N$ .

6) Arătați, utilizînd calcule, cîți atomi de carbon ar trebui să fie luați în considerație pentru ca molecula să prezinte culoare dacă  $a = 0,142$  nm.

Retina ochiului uman conține substanță sensibilă la lumină, rodopsina. Aceasta este compusă dintr-o proteină (apsina) legată de o substanță numită retinal. În 1971, Gilardi, Karle și Sperling au determinat structura cristalină a retinalului și forma acestuia în cristal. În formulă, se indică structura moleculei precum și lungimea legăturilor.



Se dau lungimile legăturilor în angstromi (1 angstrom = 0,1 nm). Atomii C de la 7 la 12 se găsesc într-un plan. Săgețile curbe indică unghiurile dintre legăturile C<sub>5</sub>—C<sub>6</sub> și C<sub>7</sub>—C<sub>8</sub> de 59° și cel dintre C<sub>11</sub>—C<sub>12</sub> și C<sub>13</sub>—C<sub>14</sub> de 39°.

Aplicind teoria „particulei în cutie” la fragmentul C<sub>7</sub>—C<sub>12</sub> se găsește lungimea de undă corespunzătoare absorpției ca având nivelul de energie cel mai scăzut, 213 nm.

În realitate retinalul absoarbe la lungimea de aproximativ 380 nm.

7) În concordanță cu teoria „particulei în cutie” indicați cauza pentru care absorpția are loc la o lungime de undă mai mare (380 nm). Dacă retinalul este legat de proteină pentru a forma rodopsină se constată că absorpția se poate deplasa până la aproximativ 600 nm.

8) dacă dorim să explicăm aceasta prin teoria mai sus amintită, care atomi ar fi blocați de proteină și se situează astfel într-un plan? Indicați cu ajutorul calculului răspunsul corect.

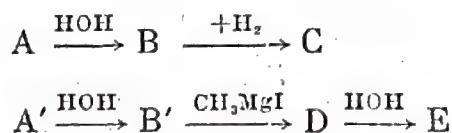
Constante: viteza luminii  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ ;

constantă Planck  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ;

masa electronului  $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

(Olimpiada Internațională de Chimie 1986 — Olanda)

88°. Se consideră următoarea schemă de reacții:



Se știe că substanța A este derivat dihalogenat care conține 31,86% C; 5,31% H și 62,83% Cl, iar A' un izomer al său. Să se stabilească structura compuşilor A, A', B, B', C, D și E și să se scrie ecuațiile chimice corespunzătoare.

(Concursul republican 1979)

89°. Doi compuși A și B admit drept formule brute  $(\text{CH})_n$  și  $(\text{CH})_{n'}$ . Un mol din substanța A poate adăuga 2 moli de hidrogen pentru a forma un compus cu formula brută  $(\text{CH}_3)_n$ ; un mol din substanța B poate adăuga 3 moli de hidrogen pentru a forma un compus cu formula brută  $(\text{CH}_2)_{n'}$ . Substanța B se poate obține din compusul A care la rândul său se poate obține din metan.

Se cere:

- să se indice substanțele A și B;
- să se scrie ecuațiile chimice ale tuturor transformărilor ce au loc;
- să se calculeze volumul de metan (c.n.) necesar obținerii a 5 kmoli din compușii A și, respectiv, B.

(Concursul republican 1980)

90°. O hidrocarbură A reacționează cu acidul bromhidric formînd un compus B care cu pulbere de Mg (în mediu de eter anhidru absolut) formează compusul C. Din reacția substanței B cu C rezultă pe lângă sarea D și 3,4-dimetil hexanul. Știind că substanța A supusă oxidării cu  $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$  în mediu acid formează numai acid acetic, să se determine formulele substanțelor participante la fiecare din reacții și să se scrie ecuațiile corespunzătoare.

(Concursul județean 1982)



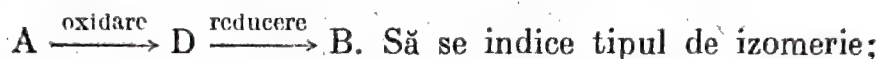
91°. O substanță organică  $C_xH_yO_z$  cu masa moleculară 60 conține 60% C, iar raportul maselor  $O : H = 2 : 1$ . Știind că substanța poate prezenta trei izomeri A, B, C, se cere:

- să se stabilească formulele moleculare ale substanțelor date;
- să se atribuie izomerilor formulele de structură corespunzătoare, știind că izomerul A nu se deshidratează și nu se oxidează cu agenți obișnuiți.
  - Izomerul B prin oxidare formează un compus D care nu polimerizează;
  - Izomerul C prin oxidare formează un compus E care prin trimerizare formează un compus F;
- să se scrie ecuațiile transformărilor indicate;
- să se calculeze volumele de aer necesar arderii complete a 24 g compus A; cantitatea (în g și moli) de compus F obținut din 12 g compus C.

(Concursul republican 1982)

92°. Două substanțe A și B ( $C_7H_7O_2N$ ) din clasa compușilor aromatici pot exista sub forma a trei perechi de izomeri. Să se scrie:

- formulele celor trei perechi de izomeri știind că:



- ecuațiile reacțiilor de la punctul a) și denumirea substanțelor A, B și D.

(Concursul republican 1983)

93°. Un amestec de alcan și alchenă cu același număr de atomi de carbon are densitatea față de hidrogen 28,8, iar presiunile parțiale în raportul 4 : 1. Să se identifice hidrocarburile și să se scrie formulele tuturor izomerilor precizând tipul de izomerie.

(Concursul județean 1984)

94°. Se nitrează benzenul cu 635 kg amestec nitrant ce conține 20%  $HNO_3$ . Să se calculeze cantitatea de nitrobenzen obținut dacă acidul rezidual conține 2%  $HNO_3$ .

(Concursul republican 1984)

95°. O hidrocarbură A cu formula moleculară  $C_9H_8$  decolorează o soluție de  $Br_2$  în  $CCl_4$ . Hidrogenarea catalitică la presiune normală conduce la compusul B cu formula moleculară  $C_9H_{10}$ . Hidrogenarea compusului A în condiții energice conduce la compusul C cu formula moleculară  $C_9H_{16}$ . Oxidarea compusului A în fază de vapori cu  $O_2$  pe un catalizator de  $V_2O_5$  la  $250^\circ C$  conduce la compusul D cu formula moleculară  $C_8H_4O_3$ .

Se cere:

- să se atribuie formulele de structură pentru compușii A, B, C, D;
- ce izomer al substanței A se oxidează cu  $KMnO_4$  în mediu acid la acid tereftalic?

(Concursul republican 1985)

96°. O alchenă A adăunează acid bromhidric conducând la un compus B care conține 48,5% Br.

Se cere:

- formula moleculară a hidrocarburii A;
- formulele de structură posibile pentru A, știind că prin oxidarea unui mol A cu dicromat de potasiu în mediu acid se obțin 2 moli de aceeași substanță;

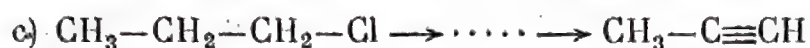
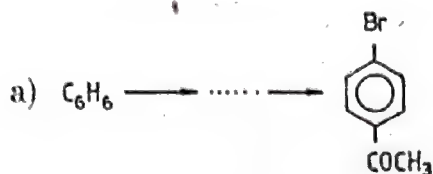


c) care dintre izomerii substanței A, în condițiile reacției de oxidare, degajă  $\text{CO}_2$ ; să se scrie pentru unul din izomeri ecuația reacției pe care o dă cu apa;

d) formulele de structură ale izomerilor substanței A care prezintă izomerie geometrică.

(Concursul județean 1986)

97°. Să se sugereze metode de realizare a următoarelor transformări:



(Concursul județean 1986)

98°. Pentru nitrarea benzenului se folosește un amestec sulfonitric care se prepară din  $\text{HNO}_3$  80% și  $\text{H}_2\text{SO}_4$  100%. Știind că raportul molar benzen: acid azotic este 1 : 1 și raportul dintre masa de  $\text{H}_2\text{SO}_4$ : apă este de 6 : 1 la începutul reacției și 3 : 1 la sfârșitul reacției, să se calculeze:

- compoziția procentuală a amestecului sulfonitric inițial;
- masa de amestec sulfonitric necesar nitrării unei tone de benzen;
- masele de acid sulfuric și acid azotic necesar preparării amestecului sulfonitric de la punctul b).

(Concursul județean 1976)

99°. Un acid monocarboxilic saturat care conține 40% carbon este transformat într-un ester care conține cu 14,54% mai mult carbon în comparație cu acidul. Știind că alcoolul folosit pentru esterificare este aciclic, saturat, monohidroxilic să se stabilească formula de structură a esterului.

(Concursul republican 1976)

100°. Un amestec de două hidrocarburi aromatice izomere, care conțin 90,57% C, iar în fază gazoasă are densitatea față de aer  $d = 3,66$ , este oxidat cu permanganat de potasiu în mediu de acid sulfuric. Prin separarea compușilor organici solizi rezultați prin oxidare se obține un amestec format din 59,51% acid benzoic și 40,49% acid ftalic.

Se cere:

- să se stabilească formulele de structură ale celor două hidrocarburi;
- să se calculeze raportul molar al amestecului de hidrocarburi;
- să se calculeze numărul de moli de permanganat de potasiu necesar oxidării unei mase de 318 g amestec de hidrocarburi.

(Concursul republican 1978)

101°. Se consideră următorii compuși carbonilici:



care participă la reacția de condensare alcolică.

Să se indice:

- a) care dintre acești compuși pot funcționa drept componentă carbonilică;
- b) care dintre acești compuși pot funcționa drept componentă metilenică;
- c) cîți aldoli pot fi obținuți din acești trei compuși.

(Concursul republican 1978)

102°. O substanță A conține 69,8% C, 11,6% H și restul oxigen și are masa moleculară 86. Prin tratare cu  $\text{CH}_3\text{MgI}$  conduce la un compus B care prin hidroliză formează substanța C. Prin deshidratarea intramoleculară a compusului C se obține substanța D, care supusă oxidării conduce la un amestec echimolecular de acid propionic și acetonă. Să se stabilească structura compuşilor A, B, C, D.

(Concursul republican 1978)

103°. Într-o instalație de alchilare catalitică a benzenului cu etenă în vederea obținerii etilbenzenului, se lucrează cu un raport molar benzen: etenă = 2 : 1. Amestecul lichid rezultat din reacție are următoarea compoziție în procente de masă: 53,8% benzen, 35,1% etilbenzen și 11,1% dietilbenzen.

Se cere:

- a) să se calculeze conversia utilă, conversia totală și randamentul de transformare a benzenului;
- b) să se calculeze conversia utilă, conversia totală și randamentul de transformare a etenei.

(Concursul județean 1979)

104°. O substanță A cu compoziția următoare: 42,85% C, 2,38% H; 38,06% O; 16,71% N are masa moleculară 168. Ea poate exista în trei forme izomere. Să se stabilească formula sa moleculară; să se precizeze care din cei trei izomeri posibili este substanța A știind că prin clorurare conduce la un singur derivat monoclorurat. Să se precizeze care din cele trei forme izomere se poate sintetiza cel mai ușor, și anume pe ce cale.

(Concursul republican 1979)

105°. Dintr-un amestec care conține toate monoalchenele aciclice cu un același număr de atomi de carbon în moleculă, se separă izomerul cu o structură simetrică la care se adăunează acid hipocloros. Știind că produsul obținut conține cu 5,99% mai puțin hidrogen, față de izomerul inițial, se cere:

- a) să se stabilească formula brută moleculară a monoalchenelor din amestec;
- b) să se stabilească formula de structură și denumirile științifice ale monoalchenelor din amestec;
- c) să se indice mecanismul polimerizării izomerului cu catena principală cea mai scurtă;
- d) să se indice formulele de structură și o proprietate fizică foarte importantă, pentru fiecare din substanțele obținute prin adiția acidului hipocloros la monoalchena simetrică.

(Concursul republican 1979)

106°. Se consideră produsul carbonilic cu formula  $C_3H_6O$  și se cere.

- să se indice izomerii posibili și denumirea lor;
- să se indice schemele de reacții și condițiile prin care pornind de la un anumit compus să se obțină simultan ambii izomeri carbonilici A și B;
- să se indice o schemă de reacție prin care compuşii A și B se pot transforma unul în celălalt.

(Concursul județean 1981)

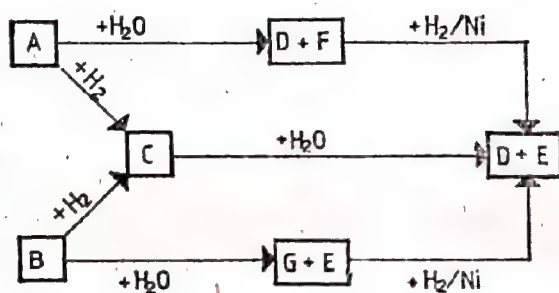
107°. O alchenă A supusă oxidării cu permanganat de potasiu în mediu acid formează două cetone B și C. Cetona B se poate obține în urma reacției dintre bromura de izopropil și acetilură monosodică, când rezultă un produs intermediar care adăunează apă în prezență de  $HgSO_4$ . Cetona C se obține prin adăunează apei la 3-fenil-propină-1.

Să se indice:

- formulele de structură A, B, C și denumirea compuşilor;
- conținutul procentual pentru alchena A;
- izomerii geometrici corespunzători alchenei A.

(Concursul republican 1981)

108°. Se dă următoarea schemă:



Știind că A și B sînt izomeri cu formula  $C_7H_{10}O_3$ , să se stabilească formulele de structură ale compuşilor din schemă.

(Concursul republican 1982)

109°. Se tratează o cantitate de benzen cu acid sulfuric oleum cu 20%  $SO_3$ ; în urma reacției rezultă un amestec de acizi benzen-mono- și disulfonici în raportul molar 3:1:

Se cere:

1) să se determine cantitatea de  $H_2SO_4$  cu 20%  $SO_3$  și de benzen consumată pentru obținerea a 1424 kg amestec de acizi (considerind că întreaga cantitate de benzen a reacționat și că masa de reacție obținută conține numai acizii sulfonici menționați și  $H_2SO_4$ );

2) să se indice ecuațiile reacțiilor prin care pornind de la cei doi acizi sulfonici utilizați ca materie primă, se obține:

- o*, *m*, *p*-dihidroxibenzen;
- trinitrofenol;
- difenileter;
- acid adipic.

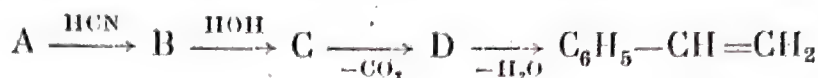


3) să se indice ordinea descrescătoare a tăriei acide a compușilor menționați, la punctele a), b), c), d);

4) mecanismul reacției de obținere a acidului benzendisulfonic și a trinitrofenolului.

(Concursul republican 1982)

110°. Se consideră următoarea schemă de reacții:



Indicați:

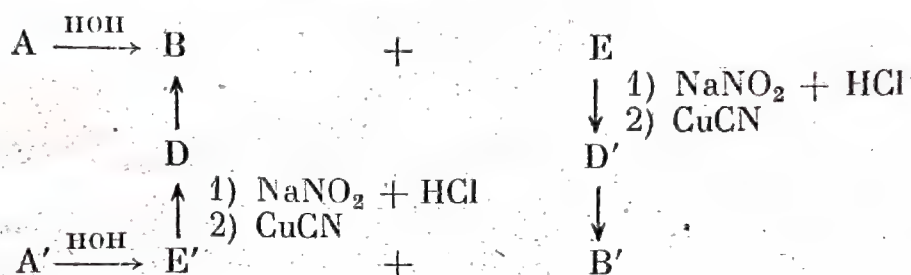
a) structurile A, B, C, D știind că A conține un atom de oxigen în moleculă, are  $M = 120$  și același grad de nesaturare ca hidrocarbura final obținută;

b) succesiunea și titlul reacțiilor;

c) cantitatea de stiren ce se obține din 100 kg A dacă conversia este de 50%, iar randamentul în stiren 70%.

(Concursul județean 1983)

111°. Se dă următoarea schemă:



Știind că A și A' sînt substanțe izomere cu formula moleculară  $\text{C}_{13}\text{H}_{10}\text{O}_3\text{N}_2$  și că la rîndul lor cei doi izomeri pot exista fiecare sub forma a trei izomeri de poziție, să se scrie:

a) formulele și denumirile substanțelor A, B, D, E, A', B', D', E';

b) ecuațiile reacțiilor indicate în schemă;

c) succesiunea de reacții prin care substanța E se transformă în E' și, respectiv, B' se transformă în B.

(Concursul republican 1983)

112°. O hidrocarbură A cu  $M = 186$  prin oxidare cu dicromat de potasiu și acid sulfuric formează compușii B, C, și D în raportul molar 1:1:1. Știind că: prin încălzire B elimină apă și formează compusul E cu formula  $\text{C}_8\text{H}_4\text{O}_3$ ; substanța C este un acid monocarboxilic saturat care conține 40% C; compusul D reacționează cu HCN dar nu dă reacția Tollens, se cere:

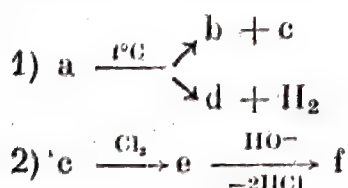
a) să se determine structurile compușilor A, B, C, D, E;

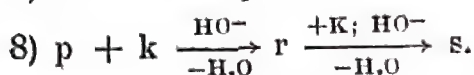
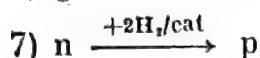
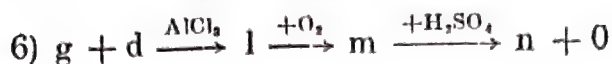
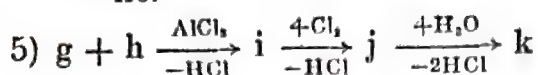
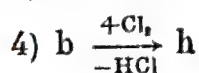
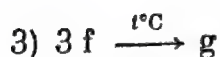
b) formulele de structură ale tuturor izomerilor de poziție a hidrocarburii A;

c) care dintre izomerii de la b) prezintă izomerie geometrică și optică. Să se scrie formulele acestora.

(Concursul județean 1984)

113°. Se dă schema:





Substanța s cu  $M = 274$ , conține în moleculă un singur atom de oxigen, iar numărul atomilor de hidrogen este cu două unități mai mic decât cel al atomilor de carbon.

1. Să se identifice substanțele notate cu litere (de la a...s) și să se scrie ecuațiile reacțiilor.

2. Să se precizeze dacă substanța s prezintă izomeri sterici și în caz afirmativ, să se scrie formulele structurale ale acestora.

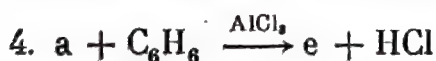
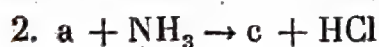
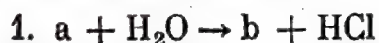
(Concursul republican 1984)

114°. Prin clorurarea fotochimică a toluenului se obține o masă de reacție care, după îndepărtarea acidului clorhidric, conține în procente de masă 64,4% clorură de benziliden; 12,65% clorură de benzil; 19,55% feniltriclormetan și 3,5% toluen. Considerind că întreaga cantitate de clor introdusă în proces a reacționat, se cere:

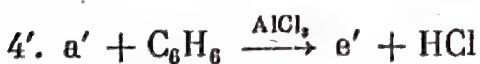
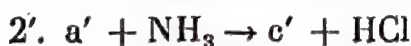
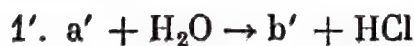
- a) raportul molar toluen: clor la începutul reacției;
- b) procentul molar de toluen nereacționat;
- c) conversia utilă, conversia totală și randamentul;
- d) volumele de clor (c.n.) și, respectiv, toluen ( $d = 0,86 \text{ g/cm}^3$ ) necesare fabricării a 322 kg clorură de benziliden.

(Concursul republican 1984)

115°. Două substanțe a și a' cu același procent de clor în moleculă (45,22%) dau următoarele reacții:



și, respectiv:



Știind că numărul de atomi de carbon din substanța a este cu o unitate mai mare decât numărul de atomi de carbon din substanța a' se cere:

- formulele substanțelor a și a';
- ecuațiile reacțiilor;
- mecanismul reacțiilor 4 și, respectiv, 5;
- să se compare bazicitatea substanțelor c, d, c' și d' și să se argumenteze ordinea creșterii bazicității acestora.

(Concursul republican 1985)

116°. Un derivat al benzenului (A) are formula empirică  $C_9H_{12}$ .

Prin bromurarea acestuia în prezența luminii se obțin doi monobromderivați cu randamente aproximativ egale. Bromurarea la întuneric în prezență de fier conduce, de asemenea, la doi monobromderivați; dacă reacția are loc în condiții energice se formează patru dibromderivați.

Determinați structura compusului A și a produșilor de bromurare.

Scrieți schema reacțiilor.

(Olimpiada Internațională de Chimie 1979 — Leningrad)

117°. Benzaldehida și acidul malonic reacționează în mediu de piridină, la 60°C, conducând după decarboxilare, la un compus A cu un randament de aproximativ 80%.

Prin hidrogenarea catalitică a 1,48 g A în prezență de Pt la temperatura camerei și la presiune normală se obține compusul B, consumându-se 0,25 l hidrogen. În urma reacției compusului B cu acid polifosforic (reacție de tip Friedel-Crafts) se obține compusul C, care poate fi izolat, însoțit de doi acizi carboxilici izomeri ca produși secundari.

Acești produși secundari Da și Db se formează în cantități apreciabile când B se găsește în concentrație mare în mediu de reacție și proporția lor scade cu scăderea concentrației lui B în mediu de reacție.

Analiza elementară conduce la următoarele rezultate: 81,8%C și 6,1%H pentru C, iar pentru Da și Db — 76,6%C și 6,4%H (în limitele erorilor experimentale).

O cantitate de 2,82 g Da (ca și de Db) necesită 100 ml soluție de hidroxid de potasiu 0,1 N pentru a fi neutralizată. Substanța C poate fi purificată prin distilare (p.f. 243...245°C) și are punctul de topire 40°C; densitatea sa este 1,09 g/cm<sup>3</sup>.

Masa moleculară determinată prin spectroscopie de masă este 132.

Utilizând aceste informații, determinați următoarele:

- 1) formula structurală a lui A;
- 2) formula structurală a lui B;
- 3) formula structurală a lui C;
- 4) formulele structurale ale lui Da și Db;
- 5) o altă cale de sinteză a lui A folosind substanțe inițiale cât mai simple posibil, cu formarea ușoară a unei legături C—C;
- 6) o altă cale de sinteză a lui B, utilizând materii prime inițiale cât mai simple, cu formarea ușoară a unei legături C—C;
- 7) formulele structurale ale substanțelor rezultate în urma reacțiilor:
  - a) C + hidroxilamină (în cataliză acidă);
  - b) C + bromură de fenilmagneziu ( $C_6H_5MgBr$ ); urmată de hidroliză în prezență de acizi;
  - c) C + benzaldehidă +  $C_2H_5O^-Na^+$ .

(Olimpiada Internațională de Chimie 1980 — Linz)



118°. Un acid carboxilic A, cu formula moleculară  $C_5H_8O_2$  se prezintă sub forma a doi izomeri, *cis* — A' și *trans* — A". Prin hidrogenare cu  $H_2/Pt$  se obține un acid carboxilic racemic B din care se pot separa enantiomerii (+)B și (–)B. A' și A" reacționează rapid cu  $Br_2$  în tetraclorură de carbon, la întuneric și la temperatura 20°C, conducând la compusul C.

- Care este constituția compuşilor A și B?
- Scrieți formulele de proiecție Fischer pentru enantiomerii lui B /nu se ia în considerare semnul (–) sau (+)/.
- Ciți stereoisomeri se formează simultan la tratarea compusului A' sau A" cu brom?
- Explicați mersul reacțiilor de la punctul c).
- Reprezentați prin formule de proiecție Fischer și printr-o formulă de proiecție Newman (conformație) stereoisomerii obținuți la punctul c). Arătați care dintre ei se găsesc în relația de enantiomerie și, respectiv, diastereoizomerie.

(Olimpiada Internațională de Chimie 1980 — Linz)

119°. Un acid organic solid A, de culoare albă, conține numai carbon, hidrogen și oxigen. Pentru a-i determina masa molară aproximativă, se dizolvă 10 g acid în apă. Soluția obținută are punctul de înghețare de  $-2,5^\circ C$ . Masa soluției este 76,1 g, iar valoarea pH-ului 1,4. În tabele se găsește valoarea constantei molare a depresiunii punctului de congelare a apei ca fiind egală cu 1,86 kcal/mol. Pentru o determinare mai precisă a masei molare a acidului A, se titrează 0,120 g acid cu o soluție de hidroxid de sodiu 0,1 M. Utilizând ca indicator fenolftaleina, se consumă 23,4 cm<sup>3</sup> de hidroxid de sodiu pentru neutralizare.

- Determinați masa molară și structura acidului A.

O substanță lichidă B se dizolvă în apă pentru a forma o soluție de 10%. pH-ul acestei soluții este în jur de 4. Substanța B nu se oxidează ușor, dar dă reacția iodoformului, în urma căreia, după acidulare și oxidare se obține acidul A. Se consumă 1,5 g iod pentru a transforma 0,10 g B.

La tratarea substanței B cu sodiu se degajă hidrogen și se formează un compus organometalic. B are masa molară de aproximativ 100 g/mol.

- Scrieți ecuația reacției iodoformului și pe cea a reacției cu sodiu. Pentru moleculele organice utilizați formulele structurale.

Compusul C în soluție apoasă are o conductivitate care diferă foarte puțin de apa pură.

În urma hidrolizei alcaline a lui C se formează amoniac; 0,120 g din substanța C se tratează la cald cu o soluție diluată de hidroxid de sodiu și gazul format se culege în 50 cm<sup>3</sup> acid clorhidric cu concentrația de 0,1 mol/dm<sup>3</sup>. Excesul de acid se titrează cu 10 cm<sup>3</sup> soluție de hidroxid de sodiu cu concentrația de 0,1 mol/dm<sup>3</sup>.

Hidroliza acidă a substanței C are loc cu degajare de dioxid de carbon. Din depresiunea punctului de înghețare, masa molară a substanței C este estimată între 40 g/mol și 70 g/mol.

- Determinați structura lui C. Scrieți ecuația reacției de hidroliză alcalină și, respectiv, acidă.

Dacă substanța C reacționează cu esterul etilic al acidului A în prezența unei baze puternice drept catalizator, se formează etanol și compusul D.

Compoziția substanței D este 37,5% C; 3,1% H; 21,9% N și restul oxigen; compusul este un acid.

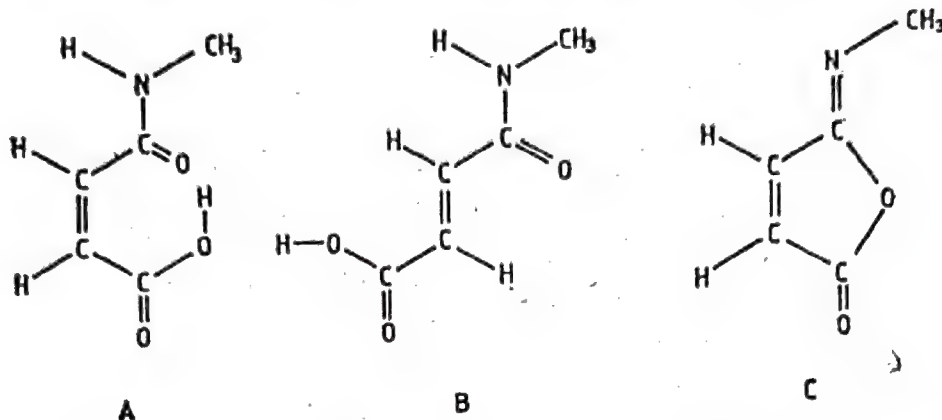
- Determinați structura lui D. Care este atomul de hidrogen cu caracter acid? Marcați-l cu asterix în structură.

(Olimpiada Internațională de Chimie 1982 — Stockholm)



În urma studiului efectuat s-au desprins următoarele observații:

a) Adăosul de apă la izoamida C determină o reacție rapidă în urma căreia se formează mai întâi A; apoi, printr-un proces mai lent, are loc hidroliza lui A.



b) Carbonul grupei amidă din compusul A este marcat cu izotopul  $^{13}\text{C}$ , iar hidroliza acestei amide s-a efectuat în apă ce conține izotopul  $\text{O}^{18}$ , la  $\text{pH} = 2$  și la temperatura de  $39^\circ\text{C}$ .

Diacidul format la hidroliză este izolat, transformat în sarea dublă de argint și decarboxilat complet cu brom în mediu anhidru de reacție. Dioxidul de carbon format este un amestec de molecule cu masă 44, 45, 46 și 47. Aceste molecule se formează în cantități egale.

Răspundeți la următoarele întrebări:

1) de ce viteza reacției de hidroliză a lui A este mult mai mare decât în cazul lui B?

2) explicați de ce viteza de hidroliză a lui A este independentă de  $\text{pH}$ , în intervalul  $\text{pH} = 0$  și  $\text{pH} = 2$  (vezi figura);

3) de ce constanta de hidroliză a lui A scade rapid la  $\text{pH} > 3$ ?

4) redați un mecanism detaliat al hidrolizei lui A. Indicați care etapă a reacției este determinată de viteză;

5) arătați că observațiile a) și b) sunt în concordanță cu mecanismul redat la 4.

(Olimpiada Internațională de Chimie — Olanda)



1°. a) Se calculează numărul de kmoli existenți inițial în cilindru:

$$\nu_1 = \frac{P_1 V}{RT_1} = \frac{806 \cdot 10^3 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}{8\,310 \cdot 291} = 10^{-2} \text{ kmoli} = 10 \text{ moli.}$$

Scoțind 6 moli din cilindru mai rămân 4 moli de gaz, și presiunea din cilindru devine:

$$p_2 = \frac{\nu_2 RT_2}{V} = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 8\,310 \cdot 285}{30 \cdot 10^{-3}} = 3,158 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

b) Densitatea în condiții normale este:

$$\rho^\circ = \frac{M}{V_{\text{mol}}}, \text{ deci masa molară a gazului va fi}$$

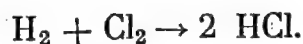
$$M = \rho^\circ \cdot V_{\text{mol}} = 1,25 \cdot 22,4 = 28 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}.$$

Gazul fiind un monoxid înseamnă că elementul combinat cu oxigenul are masa atomică  $28 - 16 = 12$ . Deci acesta este carbonul și gazul respectiv este monoxidul de carbon, CO.

2°. a) Se calculează numărul de kmoli de clor folosit:

$$\nu_1 = \frac{PV}{RT} = \frac{2,026 \cdot 10^5 \cdot 89,6}{8\,310 \cdot 273} = 8 \text{ kmoli clor.}$$

Ecuatia reacției este:



Deci numărul de kmoli de hidrogen necesar este tot 8 kmoli. Masa acestui hidrogen va fi  $m = 16 \text{ kg}$ , iar volumul în condițiile cerute, va fi:

$$V = \frac{\nu RT}{P} = \frac{8 \cdot 8\,310 \cdot 300}{300 \cdot 10^3} = 66,48 \text{ m}^3 \text{ H}_2.$$

b) Se calculează numărul de kmoli de hidrogen:

$$\nu_2 = \frac{pV}{RT} = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 266}{8\,310 \cdot 300} = 16 \text{ kmoli H}_2.$$

Deci 8 kmoli de clor sînt puși în contact cu 16 kmoli de  $\text{H}_2$ , din care vor reacționa evident numai 8 kmoli formînd 16 kmoli HCl.

Deci amestecul rezultat va fi format din 16 kmoli de HCl rezultat și 8 kmoli de  $\text{H}_2$  nereacționat.

Masa amestecului gazos va fi:

$$m = 16 \cdot 36,5 + 8 \cdot 2 = 600 \text{ kg amestec.}$$

Compoziția în procente de masă:

$$\begin{array}{lcl} 600 \text{ kg amestec} & \dots\dots\dots & 16 \times 36,5 \text{ kg HCl} \\ 100 \text{ kg amestec} & \dots\dots\dots & x \\ \hline & & x = 97,33\% \text{ HCl} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} 600 \text{ kg amestec} & \dots\dots\dots & 16 \text{ kg H}_2 \\ 100 \text{ kg amestec} & \dots\dots\dots & y \\ \hline & & y = 2,67\% \text{ H}_2. \end{array}$$

Compoziția în procente volum este aceeași ca în procente de moli:

$$\text{HCl} : \frac{16}{24} \cdot 100 = 66,67\%;$$

$$\text{H}_2 : \frac{8}{24} \cdot 100 = 33,33\%.$$

c) Masa moleculară medie:

$$\bar{M} = X_{\text{HCl}} \cdot M_{\text{HCl}} + X_{\text{H}_2} \cdot M_{\text{H}_2} = \frac{16}{24} 36,5 + \frac{8}{24} \cdot 2 = 25 \text{ kg/kmol.}$$

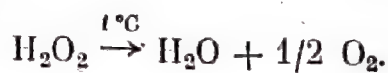
Densitatea medie (în condiții normale):

$$\bar{\rho}^o = \frac{\bar{M}}{V_{\text{mol}}} = 1,416 \text{ kg/m}^3 = 1,416 \text{ g/dm}^3.$$

Densitatea în raport cu oxigenul:

$$d = \frac{\bar{M}}{32} = 0,781.$$

3°. a) Fie  $m$  masa soluției inițiale, exprimată în g. Ea conține  $\frac{34}{100} m$  g de  $\text{H}_2\text{O}_2$  și  $\frac{66}{100} m$  g de apă. Prin încălzire se descompune  $\frac{1}{2} \cdot \frac{34}{100} m = \frac{17m}{100}$  g  $\text{H}_2\text{O}_2$  conform ecuației:



Se calculează cantitatea de apă formată:

$$\begin{array}{lcl} 34 \text{ g H}_2\text{O}_2 & \dots\dots\dots & 18 \text{ g H}_2\text{O} \\ \frac{17m}{100} \text{ g H}_2\text{O}_2 & \dots\dots\dots & x \\ \hline & & x = \frac{9m}{100} \text{ g H}_2\text{O rezultată din descompunere.} \end{array}$$

Soluția finală va conține:

$$\frac{66m}{100} + \frac{9m}{100} = \frac{75m}{100} \text{ g apă și } \frac{17m}{100} \text{ g H}_2\text{O}_2 \text{ nedescompusă}$$

Masa soluției finale va fi:  $\frac{75}{100} m + \frac{17m}{100} = \frac{92m}{100} \text{ g.}$

Deci concentrația procentuală a acesteia este:

$$\begin{array}{rcl} \frac{92m}{100} \text{ m g soluție} & \dots\dots\dots & \frac{17m}{100} \text{ g H}_2\text{O}_2 \\ 100 \text{ g soluție} & \dots\dots\dots & Y \\ \hline & & Y = 18,48\% \end{array}$$

b) În soluția inițială avem:

$$\frac{34m}{100} \text{ g H}_2\text{O}_2 = \frac{34}{100} m \cdot \frac{1}{34} = \frac{m}{100} \text{ moli de H}_2\text{O}_2 \text{ și, respectiv,}$$

$$\frac{66m}{100} \cdot \frac{1}{18} = \frac{11m}{300} \text{ moli de apă.}$$

Raportul numerelor de molecule este de fapt raportul numerelor respective de moli. Deci, în soluția inițială acest raport este:

$$r_1 = \frac{11m}{300} \cdot \frac{100}{m} = \frac{11}{3}.$$

În soluția finală, a cărei masă o considerăm egală cu  $m_1$  vom avea:

$$\frac{18,48 m_1}{100} \text{ g H}_2\text{O}_2 = \frac{18,48}{100} m_1 \cdot \frac{1}{34} = 5,435 \cdot 10^{-3} m_1$$

moli de  $\text{H}_2\text{O}_2$  și, respectiv,  $\frac{81,52}{100} m_1$ ,  $\text{g H}_2\text{O} = \frac{81,52}{100} m_1 \cdot \frac{1}{18} = 4,529 \cdot 10^{-2} m_1$  moli de  $\text{H}_2\text{O}$ .

Raportul respectiv va fi:

$$r_2 = 8,33.$$

c) Ecuația reacției este



Se calculează cantitatea de  $\text{I}_2$  rezultată:

$$\begin{array}{rcl} 34 \text{ g H}_2\text{O}_2 & \dots\dots\dots & 254 \text{ g I}_2 \\ \frac{500 \times 34}{100} \text{ g H}_2\text{O}_2 & \dots\dots\dots & X \text{ g I}_2 \quad X = 1\,270 \text{ g I}_2. \end{array}$$

4°. Fie  $X$  numărul de moli de  $\text{H}_2\text{SO}_4$  consumat. Atunci  $2X$  este numărul de moli de apă formată. Masa apei în soluția finală va fi:

$$m_1 = 95 \text{ g (din soluția de acid)} + 96 \text{ g (din apă de barită)} + 36X \text{ g (rezultată din reacție)} = (191 + 36X) \text{ g apă.}$$



Acidul neconsumat  $m_2 = 5 - 98X$  g  $H_2SO_4$ .

Masa soluției finale  $m_3 = 191 + 36X + 5 - 98X = 196 - 62X$ .

Punind condiția că soluția are concentrația 1,56% (procente de masă) avem:

$$\frac{(196-62X) \text{ g soluție} \dots\dots\dots (5-98X) \text{ g } H_2SO_4}{100 \text{ g soluție} \dots\dots\dots 1,56 \text{ g } H_2SO_4} = 1,56$$

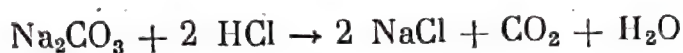
$$100 (5-98X) = 1,56 (196-62X).$$

Rezolvând ecuația se obține:  $X = 0,02$  moli  $H_2SO_4$  consumat.

Deci s-au consumat tot 0,02 moli de  $Ba(OH)_2$ .

Masa de hidroxid de bariu pur consumat este:  $m = 0,02 \times 171,3 = 3,426$  g.

5°. a) Se calculează numărul de moli de  $CO_2$  degajat la tratarea sodei cu  $HCl$ :



$$pV = \nu RT; \nu = \frac{pV}{RT} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 100,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3}{8,310 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \cdot 273 \text{ K}} = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ kmol};$$

$$= 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol.}$$

Se calculează masa molară a cristalohidratului  $Na_2CO_3 \cdot nH_2O$

$$\nu = \frac{m_1}{M_1}; M_1 = \frac{m_1}{\nu} = \frac{1,287}{4,5 \cdot 10^{-3}} = 286 \text{ g mol}^{-1},$$

$$106 + n_1 \cdot 18 = 286.$$

Rezolvând se obține:  $n_1 = 10$ .

Deci proba respectivă este un cristalohidrat cu formula  $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$ .

b) Se calculează numărul de echivalenți de  $NaOH$  cu care se neutralizează excesul de acid sulfuric:

$$\frac{1000 \text{ cm}^3 \text{ soluție} \dots\dots\dots 0,1 \text{ echivalenți}}{50 \text{ cm}^3 \text{ soluție} \dots\dots\dots X}$$

$$X = 5 \cdot 10^{-3} \text{ echivalenți } NaOH = 5 \cdot 10^{-3} \text{ moli } NaOH.$$

Ecuația reacției de neutralizare este:



Deci numărul de moli de acid sulfuric în exces este jumătate din numărul de moli de  $NaOH$  adică  $2,5 \cdot 10^{-3}$  moli.

Se calculează numărul de moli de  $H_2SO_4$  în soluția cu care s-a tratat proba de sodă:

$$\frac{1000 \text{ cm}^3 \text{ sol.} \dots\dots\dots 0,2 \text{ echivalenți} = 0,1 \text{ moli } H_2SO_4}{50 \text{ cm}^3 \text{ sol.} \dots\dots\dots Y}$$

$$Y = 5 \cdot 10^{-3} \text{ moli } H_2SO_4.$$

Deci în reacția sodei cu acidul sulfuric:



s-au consumat  $5 \cdot 10^{-3} - 2,5 \cdot 10^{-3} = 2,5 \cdot 10^{-3}$  moli  $\text{H}_2\text{SO}_4$ .  
Conform ecuației, proba de sodă a conținut tot  $2,5 \cdot 10^{-3}$  moli  $\text{Na}_2\text{CO}_3 \cdot n_2\text{H}_2\text{O}$ . Masa molară a cristalohidratului este:

$$M_2 = \frac{0,715}{2,5 \cdot 10^{-3}} = 286 \text{ g/mol.}$$

Rezultă ca și la punctul a) că formula cristalohidratului este  $\text{Na}_2\text{CO}_3 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ , adică cele două probe au aceeași compoziție.

6°. a) Fie  $A$  masa atomică a metalului  $\text{Me}$ .

Reacțiile cu apa:



Numărul de moli de hidrogen degajat este 0,1 moli.

Notînd cu  $X$  și  $Y$  numărul de moli de rubidiu și, respectiv, de metal  $\text{Me}$  avem:

$$85,5 X + AY = 4,6$$

$$X + Y = 0,2.$$

Rezolvînd sistemul se obține:

$$Y = \frac{12,5}{85,5 - A}$$

$Y$  fiind numărul de moli de metal  $\text{Me}$  trebuie să îndeplinească două condiții: prima — să fie pozitiv adică  $A < 85,5$  și a doua să fie strict mai mic decît 0,2 (care este numărul total de moli de metale alcaline din aliaj).

$$\text{Deci: } Y < 0,2 \text{ sau } \frac{12,5}{85,5 - A} < 0,2.$$

Rezolvînd această inegalitate se obține condiția  $A < 23$ .

Această condiție este satisfăcută numai de litiu care are masa atomică 7. Dacă s-ar lua  $A = 23$  (pentru sodiu), atunci  $Y = 0,2$  și deci „aliajul“ ar fi format numai din metalul  $\text{Me}$  și nu ar putea conține și rubidiu, deoarece numărul total de moli de metale alcaline din aliaj este chiar 0,2. Deci celălalt metal alcalin este litiul.

b) Revenind la sistemul de ecuații de la punctul a) avem:

$$85,5X + 7Y = 4,6$$

$$X + Y = 0,2$$

Rezolvînd sistemul se obține:  $X = 0,0408$  moli  $\text{Rb}$ .

$$Y = 0,1592 \text{ moli Li.}$$

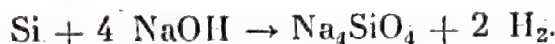
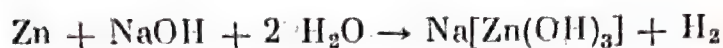
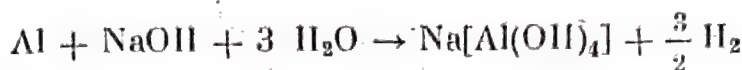
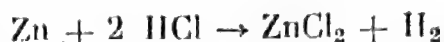
Compoziția aliajului în procente de masă este:

$$\text{Rb} : \frac{0,0408 \times 85,5}{4,6} \cdot 100 = 75,83\%$$

$$\text{Li} : \frac{0,1592 \times 7}{4,6} \cdot 100 = 24,23\%.$$

7°. Dintre elementele componente ale aliajului cu acidul clorhidric reacţionează numai Al şi Zn, iar cu soluţia de NaOH reacţionează Al, Zn şi Si. Cuprul nu reacţionează nici cu soluţia de HCl nici cu cea de NaOH.

Ecuatiile reacţiilor chimice:



Numărul de moli de hidrogen degajaţi în reacţia cu HCl este

$$n_1 = \frac{843 \cdot 10^{-3}}{22,4} = 37,62 \cdot 10^{-3} \text{ moli.}$$

În reacţia cu NaOH se degajă  $n_2 = \frac{0,517}{22,41} = 23,07 \cdot 10^{-3} \text{ moli H}_2$ . Deoarece proba de aliaj care a fost tratată cu NaOH are masa 0,500 g, adică numai jumătate din cea a probei tratate cu HCl, numărul de moli de  $\text{H}_2$  care s-ar fi degajat din aceeaşi cantitate de aliaj, de 1,000 g este  $n_3 = 2 \cdot 23,07 \cdot 10^{-3} = 46,14 \cdot 10^{-3} \text{ mol H}_2$ .

Diferenţa  $\Delta n = n_3 - n_1 = 8,52 \cdot 10^{-3} \text{ moli}$  este evident hidrogenul degajat în reacţia siliciului cu NaOH (acesta nereacţionind cu HCl). Deci numărul de moli de Si în 1,000 g aliaj este  $\frac{1}{2} \cdot 8,52 \cdot 10^{-3} = 4,26 \cdot 10^{-3} \text{ moli Si}$  (conform ecuaţiei reacţiei chimice).

Masa de Si este  $m_{\text{Si}} = 4,26 \cdot 10^{-3} \cdot 28 = 0,119 \text{ g}$ . Reziduul rămas după tratarea probei cu HCl este format din Cu şi Si. Deci masa cuprului din probă este:

$$m_{\text{Cu}} = 0,170 - 0,119 = 0,051 \text{ g.}$$

Fie X masa în g a aluminiului şi, respectiv, Y cea a Zn din probă. Rezultă

$$X + Y = 1,000 - (0,170) = 0,830.$$

Se exprimă conform ecuaţiilor reacţiilor chimice volumele de  $\text{H}_2$  rezultate din reacţia Al şi, respectiv, Zn cu HCl:

$$\begin{array}{lcl} 27 \text{ g Al} & \dots\dots\dots & 1,5 \cdot 22,4 \text{ l H}_2 \\ X \text{ g Al} & \dots\dots\dots & V_1 \end{array} \quad V_1 = \frac{33,6 X}{27,0}$$


---


$$\begin{array}{lcl} 65 \text{ g Zn} & \dots\dots\dots & 22,4 \text{ l H}_2 \\ Y \text{ g Zn} & \dots\dots\dots & V_2 \end{array} \quad V_2 = \frac{22,4 Y}{65}$$

Deci:  $\begin{cases} X + Y = 0,830 & \text{Rezolvînd sistemul se obţine:} \\ \frac{33,6 X}{27,0} + \frac{22,4 Y}{65} = 0,843 \end{cases}$

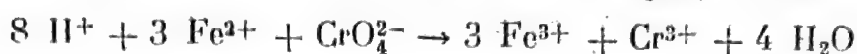
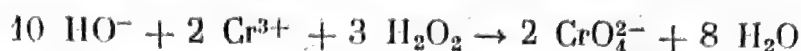
$$\begin{array}{l} m_{\text{Al}} = 0,619 \text{ g Al} \\ m_{\text{Zn}} = 0,211 \text{ g Zn.} \end{array}$$



Compoziția aliajului în procente de masă:

% Al = 61,9%; % Zn = 21,1%; % Cu = 5,1% și % Si = 11,9%.

8°. a) Coeficienții se stabilesc prin metoda redox



b) Numărul de moli de  $\text{MnO}_4^-$  utilizați pentru titrare:

1000 cm <sup>3</sup> soluție .....	0,020 moli $\text{MnO}_4^-$
17,20 cm <sup>3</sup> soluție .....	X

$$X = \frac{17,20 \cdot 0,02}{1000} = 3,44 \cdot 10^{-4} \text{ moli } \text{MnO}_4^-.$$

Excesul de ioni  $\text{Fe}^{2+}$  este de 5 ori mai mare (conform ecuației reacției), adică  $5 \cdot 3,44 \cdot 10^{-4} = 1,72 \cdot 10^{-3}$  moli  $\text{Fe}^{2+}$ .

Numărul de moli de  $\text{Fe}^{2+}$  în soluția adăugată va fi:

1000 cm <sup>3</sup> soluție .....	0,1 moli $\text{Fe}^{2+}$
25 cm <sup>3</sup> soluție .....	Y

$$Y = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ moli } \text{Fe}^{2+}.$$

Deci cu ionii  $\text{CrO}_4^{2-}$  au reacționat:

$$2,5 \cdot 10^{-3} - 1,72 \cdot 10^{-3} = 7,8 \cdot 10^{-4} \text{ moli } \text{Fe}^{2+}.$$

Din ecuația reacției respective rezultă că numărul de moli de  $\text{CrO}_4^{2-}$  este  $\frac{1}{3} \cdot 7,8 \cdot 10^{-4} = 2,6 \cdot 10^{-4}$ . Deoarece pentru această analiză s-a luat numai o zecime din soluția obținută la dizolvarea aliajului înseamnă că în întreaga cantitate de aliaj se găsesc  $10 \cdot 2,6 \cdot 10^{-4} = 2,6 \cdot 10^{-3}$  moli Cr =  $2,6 \cdot 10^{-3} \cdot 52 = 0,1352$  g Cr. Rezultă că proba conține  $m_{\text{Cr}} = 0,1352$  g Cr.

Se calculează acum cantitatea de crom existentă în cei 200 cm<sup>3</sup> soluție supusă electrolizei:

500 cm <sup>3</sup> soluție .....	0,1352 g Cr
200 cm <sup>3</sup> soluție .....	X

$$X = 5,408 \cdot 10^{-2} \text{ g Cr.}$$

Echivalentul cromului  $\text{Cr}^{+3}$  este  $\frac{52}{3}$  g și pentru depunerea acestuia prin electroliză sint necesari 96 500 C. Deci se poate calcula numărul de coulombi consumați pentru depunerea cromului:

$\frac{52}{3} \text{ g Cr}$ .....	96 500 C
$5,408 \cdot 10^{-2} \text{ g Cr}$ .....	$Q_1$

$$Q_1 = 301,08 \text{ C.}$$

Numărul total de coulombi consumați în electroliză

$$Q_t = It = 2 \times 14,5 \times 60 = 1740 \text{ C,}$$

din care consumați util:

$$Q_u = \frac{90}{100} \cdot 1740 = 1566 \text{ G.}$$

Deci pentru depunerea argintului și cuprului s-au consumat:

$$Q_2 = Q_u - Q_1 = 1566 - 301,08 = 1264,92 \text{ C.}$$

Masa totală a cuprului și argintului din proba analizată este:

$$m_{\text{Cu+Ag}} = 1,500 - m_{\text{Cr}} = 1,3648 \text{ g}$$

din care în soluția supusă electrolizei se găsesc:

$$m'_{\text{Cu+Ag}} = \frac{2}{5} m_{\text{Cu+Ag}} = 0,5459 \text{ g.}$$

Fie  $X$  masa în g a Ag și, respectiv,  $Y$  cea a cuprului din soluția supusă electrolizei;

$$X + Y = 0,5459.$$

Echivalentul argintului  $\text{Ag}^+$  este 107,87 și deci pentru depunerea argintului s-au consumat

$$\begin{array}{rcl} 107,87 \text{ g Ag} & \dots\dots\dots & 96\,500 \text{ C} \\ X \text{ g Ag} & \dots\dots\dots & Q_3 \\ \hline Q_3 = \frac{96\,500}{107,87} XC. \end{array}$$

Echivalentul cuprului  $\text{Cu}^{2+}$  este  $\frac{63,55}{2}$  și pentru depunerea celor  $Y$  g Cu s-au consumat:

$$\begin{array}{rcl} \frac{63,55}{2} \text{ g Cu} & \dots\dots\dots & 96\,500 \text{ C} \\ Y \text{ g Cu} & \dots\dots\dots & Q_4 \\ \hline Q_4 = \frac{2 \cdot 96\,500 \cdot Y}{63,55}. \end{array}$$

Dar  $Q_3 + Q_4 = Q_2$ . Deci:

$$\begin{cases} X + Y = 0,5459 \\ \frac{96\,500 X}{107,87} + \frac{2 \cdot 96\,500 Y}{63,55} = 1264,92. \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul se obține:

$$X = 0,1834 \text{ g Ag; } Y = 0,3625 \text{ g Cu.}$$

Deci în probă se găsesc:

$$m_{\text{Ag}} = \frac{5}{2} \cdot 0,1834 = 0,4585 \text{ g Ag;}$$

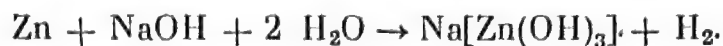
$$m_{\text{Cu}} = \frac{5}{2} \cdot 0,3625 = 0,90630 \text{ g Cu;}$$

$$m_{\text{Cr}} = 0,1352 \text{ g Cr.}$$

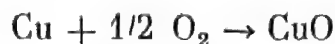
Compoziția aliajului în procente de masă este:

$$\% \text{ Ag} = 30,57\%; \quad \% \text{ Cu} = 60,42\%; \quad \% \text{ Cr} = 9,01\%.$$

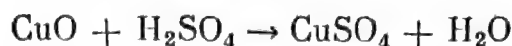
9°. a) Cu hidroxidul de sodiu reacționează numai zincul: -



Partea nedizolvată este cuprul care se dizolvă în acid sulfuric în prezență de oxigen. Reacția poate fi considerată ca avînd loc în două etape:



și



sau reacția globală



b) Numărul de moli de Zn din alamă este egal cu numărul de moli de  $\text{H}_2$  degajați (conform ecuației reacției), adică 0,5 moli = 32,5 g Zn.

Se calculează cantitatea de  $\text{H}_2\text{SO}_4$  existentă în cele 40 g soluție 49%:

100 g soluție .....	49 g $\text{H}_2\text{SO}_4$
40 g soluție .....	X g $\text{H}_2\text{SO}_4$
X = 19,6 g $\text{H}_2\text{SO}_4$ .	

Deci:

64 g Cu .....	98 g $\text{H}_2\text{SO}_4$
X g Cu .....	19,6 g $\text{H}_2\text{SO}_4$
Y = 12,8 g Cu.	

Total alamă:  $32,5 + 12,8 = 45,3$ . Deci compoziția este:

$$\% \text{ Zn} = \frac{32,5}{45,3} \cdot 100 = 71,74\%;$$

$$\% \text{ Cu} = \frac{12,8}{45,3} \cdot 100 = 28,26\%.$$

c) Cantitatea teoretică de  $\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$  ce se poate obține este aceea cantitate care conține cele 12,8 g Cu din alamă.

Masa molară a cristalohidratului este 250. Rezultă:

250 g $\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$ .....	64 g Cu
X g $\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$ .....	12,8 g Cu
X = 50 g $\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$	

10°. Se calculează cantitatea de  $\text{KAl}(\text{SO}_4)_2$  existent în soluția inițială, de concentrație 5,5%:

$$m_1 = \frac{5,5}{100} \cdot 320 = 17,6 \text{ g}.$$



Deci soluția inițială conține 17,6 g  $\text{KAl}(\text{SO}_4)_2$  și  $320 - 17,6 = 302,4$  g apă. După evaporarea celor 160 g apă mai rămân  $m_2 = 142,4$  g apă.

Masa molară a  $\text{KAl}(\text{SO}_4)_2$ :  $M_1 = 258$

Masa molară a cristalohidratului  $\text{KAl}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$ :  $M_2 = 474$ .

Fie  $X$  numărul de grame de cristalohidrat care se depune. Se calculează cantitatea  $m_3$  de  $\text{KAl}(\text{SO}_4)_2$  depusă și, respectiv,  $m_4$  de apă depusă în cristalohidrat:

$$\begin{array}{rcl} 474 \text{ g } \text{KAl}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O} & \dots\dots\dots & 258 \text{ g } \text{KAl}(\text{SO}_4)_2 \\ X \text{ g } \text{KAl}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O} & \dots\dots\dots & m_3 \end{array}$$

$$m_3 = \frac{258}{474} X \text{ g } \text{KAl}(\text{SO}_4)_2 \text{ depus.}$$

$$\begin{array}{rcl} 474 \text{ g } \text{KAl}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O} & \dots\dots\dots & 216 \text{ g } \text{H}_2\text{O} \\ X \text{ g } \text{KAl}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O} & \dots\dots\dots & m_4 \text{ g } \text{H}_2\text{O} \end{array}$$

$$m_4 = \frac{216}{474} X \text{ g } \text{H}_2\text{O} \text{ depusă.}$$

Deci după depunerea cristalohidratului în soluție mai rămân:

$$m_5 = \left(17,6 - \frac{258}{474} X\right) \text{ g } \text{KAl}(\text{SO}_4)_2$$

și

$$m_6 = \left(142,4 - \frac{216}{474} X\right) \text{ g } \text{H}_2\text{O.}$$

Masa totală a soluției rămase după depunerea cristalohidratului:

$$m_7 = 17,6 - \frac{258}{474} X + 142,4 - \frac{216}{474} X = (160 - X) \text{ g soluție.}$$

Se pune condiția că soluția conține 5,5%  $\text{KAl}(\text{SO}_4)_2$ :

$$(160 - X) \text{ g soluție} \dots\dots\dots \left(17,6 - \frac{258}{474} X\right) \text{ g } \text{KAl}(\text{SO}_4)_2$$

$$100 \text{ g soluție} \dots\dots\dots 5,5 \text{ g } \text{KAl}(\text{SO}_4)_2$$

$$5,5(160 - X) = 100 \left(17,6 - \frac{258}{474} X\right).$$

Rezolvând ecuația se obține:  $X = 17,98$  g de cristalohidrat  $\text{KAl}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$ .

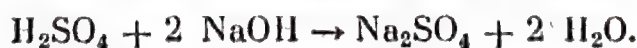
11°. Se calculează numărul de moli de NaOH utilizați la neutralizare:

$$1000 \text{ cm}^3 \text{ soluție} \dots\dots\dots 0,5 \text{ moli NaOH}$$

$$160 \text{ cm}^3 \text{ soluție} \dots\dots\dots n \text{ moli NaOH}$$

$$n = 0,08 \text{ moli NaOH.}$$

Fie  $X$  și  $Y$  numărul de moli de HCl și, respectiv, de  $\text{H}_2\text{SO}_4$  din soluția inițială supusă neutralizării. Ecuațiile reacțiilor sint:



Conform acestor ecuații numărul de moli de NaOH consumați în prima reacție este tot  $X$ , iar în cea de a doua este  $2 Y$ .

Deci:

$$X + 2 Y = 0,08.$$

Rezultă din reacție  $X$  moli NaCl =  $58,5 X$  g NaCl și  $Y$  moli  $\text{Na}_2\text{SO}_4 = 142 Y$  g  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ .

Se alcătuieste sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} X + 2 Y = 0,08 \\ 58,5 X + 142 Y = 5. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem se obține:

$$X = 0,0544 \text{ moli HCl};$$

$$Y = 0,0128 \text{ moli H}_2\text{SO}_4.$$

Cum aceste cantități se găsesc în  $100 \text{ cm}^3$  soluție înseamnă că la un litru soluție inițială avem:

$$\text{HCl} : 0,544 \text{ mol/l};$$

$$\text{H}_2\text{SO}_4 : 0,128 \text{ mol/l}.$$

12°. a) Fie  $m$  masa celor două soluții care se amestecă. Cantitatea de  $\text{AgNO}_3$  pur va fi:

$$m_1 = \frac{3,4 \cdot m}{100}.$$

Ecuația reacției chimice:



Se calculează masa de NaCl care a reacționat:

$$\begin{array}{rcl} 58,5 \text{ g NaCl} & \dots\dots\dots & 170 \text{ g AgNO}_3 \\ X \text{ g NaCl} & \dots\dots\dots & \frac{3,4 m}{100} \\ \hline X = \frac{58,5 \cdot 3,4 m}{100 \cdot 170} \text{ g NaCl în cele } m \text{ g soluție de NaCl.} \end{array}$$

Deci concentrația acestei soluții de NaCl este:

$$\begin{array}{rcl} m \text{ g soluție} & \dots\dots\dots & \frac{58,5 \cdot 3,4 m}{100 \cdot 170} \text{ g NaCl} \\ 100 \text{ g soluție} & \dots\dots\dots & Y \text{ g NaCl} \\ \hline Y = \frac{58,5 \cdot 3,4}{170} \% = 1,17 \% \text{ NaCl.} \end{array}$$

b) Se calculează cantitatea de  $\text{NaNO}_3$  rezultată:

$$\begin{array}{rcl} 170 \text{ g AgNO}_3 & \dots\dots\dots & 85 \text{ g NaNO}_3 \\ \frac{3,4 \text{ m}}{100} \text{ g AgNO}_3 & \dots\dots\dots & X \text{ g NaNO}_3 \\ \hline X = \frac{3,4 \cdot 85 \cdot m}{100 \cdot 170} \text{ g NaNO}_3. \end{array}$$

Se calculează, de asemenea cantitatea, de  $\text{AgCl}$  care precipită:

$$\begin{array}{rcl} 170 \text{ g AgNO}_3 & \dots\dots\dots & 143,5 \text{ g AgCl} \\ \frac{3,4 \text{ m}}{100} \text{ g AgNO}_3 & \dots\dots\dots & Y \text{ g AgCl} \\ \hline Y = \frac{143,5 \cdot 3,4 \text{ m}}{100 \cdot 170}. \end{array}$$

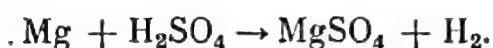
Masa soluției obținute este:

$$m_2 = 2 \text{ m} - \frac{143,5 \cdot 3,4 \text{ m}}{100 \cdot 170} = 1,9713 \text{ m g soluție NaNO}_3.$$

Concentrația procentuală a acesteia este:

$$\begin{array}{rcl} 1,9713 \text{ m g soluție} & \dots\dots\dots & \frac{3,4 \cdot 85 \text{ m}}{100 \cdot 170} \\ 100 \text{ g soluție} & \dots\dots\dots & Z \text{ g NaNO}_3 \\ \hline Z = \frac{3,4 \cdot 85 \cdot m}{1,9713 \cdot 170 \text{ m}} = 0,862\% \text{ NaNO}_3. \end{array}$$

13°. a) Fie  $X$  numărul de moli de  $\text{Zn}$  și  $Y$  numărul de moli de  $\text{Mg}$  din aliaj.  
Ecuatiile reacțiilor chimice:



Deci numărul de moli de hidrogen rezultați din prima reacție este  $X$ , iar din cea de a doua  $Y$ .

Rezultă sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 65 X + 24 Y = 17,8 \\ X + Y = \frac{8,96}{22,4}. \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul se obține:

$$X = 0,2 \text{ moli Zn} = 13 \text{ g}$$

$$Y = 0,2 \text{ moli Mg} = 4,8 \text{ g Mg}.$$

Deci aliajul este echimolecular.



Compoziția în procente de masă:

$$\% \text{Zn} = \frac{13}{17,8} \cdot 100 = 73,03\%$$

$$\% \text{Mg} = \frac{4,8}{17,8} \cdot 100 = 26,97\%$$

b) Numărul de moli de  $\text{H}_2\text{SO}_4$  consumat în prima reacție este 0,2 iar în cea de a doua tot 0,2 adică în total se consumă 0,4 moli  $\text{H}_2\text{SO}_4 = 39,2 \text{ g H}_2\text{SO}_4$ .

c) Rezultă din prima reacție 0,2 moli  $\text{ZnSO}_4 = 32,2 \text{ g ZnSO}_4$ . Din cea de a doua reacție rezultă 0,2 moli  $\text{MgSO}_4 = 24 \text{ g MgSO}_4$ .

14°. a) La descompunerea termică a carbonatului de calciu se obține oxid de calciu și dioxid de carbon:



Reacția este reversibilă, dar  $\text{CO}_2$  fiind gaz, părăsește sistemul și practic reacția poate fi total deplasată spre dreapta.

b) Se calculează masele molare:

$$M_{\text{CaCO}_3} = 100; \quad M_{\text{CaO}} = 56.$$

Din volumul de  $\text{CO}_2$  rezultat se calculează masa de  $\text{CaCO}_3$  descompus și masa de  $\text{CaO}$  format:

$$\begin{array}{rcl} 100 \text{ g CaCO}_3 & \dots\dots\dots & 22,4 \text{ l CO}_2 \\ X \text{ g CaCO}_3 & \dots\dots\dots & 5,6 \text{ l CO}_2 \\ \hline X = 25 \text{ g CaCO}_3 & \text{(pur).} & \end{array}$$
  

$$\begin{array}{rcl} 56 \text{ g CaO} & \dots\dots\dots & 22,4 \text{ CO}_2 \\ Y \text{ g CaO} & \dots\dots\dots & 5,6 \text{ CO}_2 \\ \hline Y = 14 \text{ g CaO.} & & \end{array}$$

Reziduul solid obținut la calcinare este format din  $\text{CaO}$  rezultat și impuritățile care nu se descompun termic. Deci masa impurităților este  $m = 16 - 14 = 2 \text{ g}$  impurități.

Deci proba de calcar supusă calcinării conținea 25 g  $\text{CaCO}_3$  pur și 2 g impurități adică în total 27 g calcar.

c) Compoziția procentuală a calcarului (procente de masă):

$$\% \text{CaCO}_3 = \frac{25}{27} 100 = 92,59\%;$$

$$\% \text{impurități} = \frac{2}{27} \cdot 100 = 7,41\%.$$

15°. a) Mecanismul electrolizei este destul de complex, dar rezultatul final al electrolizei poate fi reprezentat prin următoarele reacții:

La catod (—):  $\text{H}_3\text{O}^+ + 1 \text{ e}^- \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \text{H}$  — reacție primară

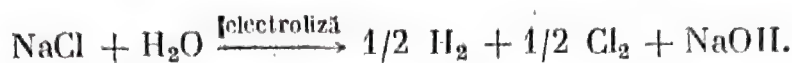
$\text{H} + \text{H} \rightarrow \text{H}_2$  — reacție secundară.

La anod: (+)  $\text{Cl}^- - 1 \text{e}^- \rightarrow \text{Cl}$  — reacție primară

$\text{Cl} + \text{Cl} \rightarrow \text{Cl}_2$  — reacție secundară.

Deci în soluție rămân ioni  $\text{HO}^-$  și  $\text{Na}^+$  adică se acumulează  $\text{NaOH}$ .

Reacția globală a procesului de electroliză este:



b) Se calculează cantitatea de sare pură în soluția inițială:

$$m_1 = \frac{1000 \cdot 58,5}{100} = 585 \text{ kg NaCl}$$

și cea finală:

$$m_2 = \frac{1000 \cdot 46,8}{100} = 468 \text{ kg.}$$

Deci cantitatea de  $\text{NaCl}$  descompusă este:

$$m_3 = m_1 - m_2 = 117 \text{ kg NaCl} = 2 \text{ kmoli NaCl.}$$

Din reacția globală a procesului de electroliză rezultă că se formează tot 2 kmoli  $\text{NaOH} = 80 \text{ kg NaOH}$ .

c) La catod rezultă 1 kmol  $\text{H}_2 = 22,4 \text{ m}^3$  (c.n.).

La anod rezultă 1 kmol  $\text{Cl}_2 = 22,4 \text{ m}^3 \text{Cl}_2$  (c.n.).

d) Conform reacțiilor de la electrozi rezultă că pentru descompunerea unei „molecule” de  $\text{NaCl}$  se transferă un electron, deci echivalentul acestei sări este egal cu molul. Rezultă că:

$$1 \text{ mol NaCl} \dots\dots\dots 96\,500 \text{ C}$$

$$\underline{2000 \text{ moli NaCl} \dots\dots\dots X \text{ C}}$$

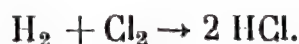
$X = 1,93 \cdot 10^8 \text{C}$  consumați util în procesul de electroliză. Randamentul fiind 80% sint necesari:

$$Q_{\text{total}} = 1,93 \cdot 10^8 \cdot \frac{100}{80} = 2,4125 \cdot 10^8 \text{ C}$$

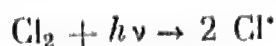
$$Q = It \text{ deci } t = \frac{Q}{I} = \frac{2,4125 \cdot 10^8}{500} = 4,825 \cdot 10^5 \text{ s sau } t = 134 \text{ ore.}$$

16°. a) Pentru mecanismul electrolizei vezi problema 15°.

Sinteza acidului clorhidric:



Este o reacție în lanț care poate fi reprezentată schematic prin următoarele etape:  
— etapa de inițiere are loc sub acțiunea luminii:



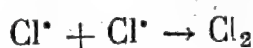
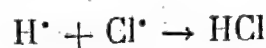
adică are loc prin absorbția energiei luminoase scindarea moleculei de clor în atomi (radicali liberi).

— etapa de propagare:

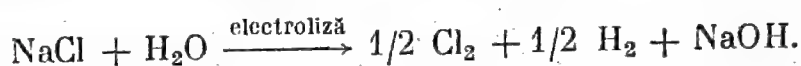


.....

— etapa de întrerupere a lanțului:



b) Ecuația globală a reacției de electroliză este:



Rezultă că:

$$58,5 \text{ g NaCl} \dots\dots\dots \frac{1}{2} \cdot 22,4 \text{ l Cl}_2$$

$$X \text{ g NaCl} \dots\dots\dots 56 \text{ l Cl}_2$$

---

$X = 292,5 \text{ g NaCl}$  cu un randament de descompunere electrolitică de 100%. Dar randamentul fiind doar 80% rezultă că este necesară o cantitate de NaCl:

$$m = 292,5 \cdot \frac{100}{80} = 365,625 \text{ g NaCl necesară cu } \eta = 80\%.$$

c) Conform ecuației reacției de sinteză a HCl volumul de HCl obținut este dublu față de volumul clorului utilizat, deci, în condiții normale de presiune și temperatură, se obține un volum de 112 l HCl gazos.

Considerînd HCl ca un gaz perfect avem:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{pV}{T} \Rightarrow V = \frac{p_0 V_0 T}{T_0 p} = \frac{1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 112 \text{ l} \cdot 300 \text{ K}}{273 \text{ K} \cdot 4,053 \cdot 10^5 \text{ Pa}}$$

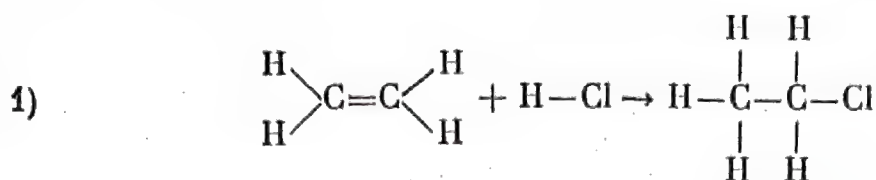
$$V_{\text{HCl}} = 3,077 \text{ l HCl măsurat la } 27^\circ\text{C și } 4,053 \text{ kPa.}$$

17°. Variația de entalpie într-o reacție chimică este egală cu diferența dintre suma energiilor tuturor legăturilor care se desfac și suma energiilor tuturor legăturilor care se formează:

$$\Delta H_r = \sum \varepsilon_{\text{legături desfăcute (reactanți)}} - \sum \varepsilon_{\text{legături formate (produsi de reacție)}}$$



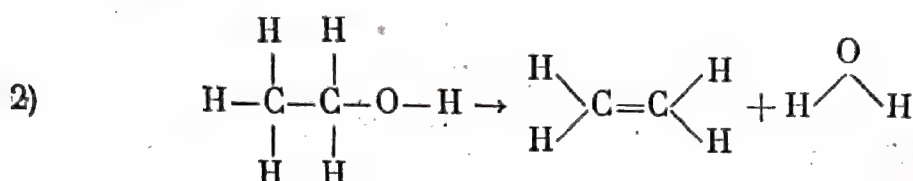
Pentru a pune în evidență mai clar legăturile care se desfac și cele care se formează, se scriu ecuațiile reacțiilor utilizând formule structurale.



$$\Delta H_r^0 = [4\varepsilon_{\text{C-H}} + \varepsilon_{\text{C=C}} + \varepsilon_{\text{H-Cl}}] - [5\varepsilon_{\text{C-H}} + \varepsilon_{\text{C-C}} + \varepsilon_{\text{C-Cl}}].$$

Înlocuind valorile numerice ale energiilor de legătură din tabel se obține:

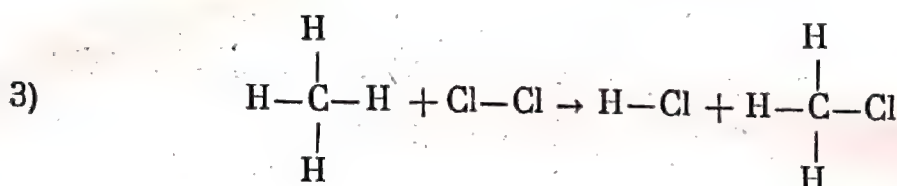
$$\Delta H_r^0 = -48,5 \text{ kJ.} \quad \text{Reacția este slab exotermă.}$$



$$\Delta H_r^0 = [5\varepsilon_{\text{C-H}} + \varepsilon_{\text{C-C}} + \varepsilon_{\text{C-O}} + \varepsilon_{\text{O-H}}] - [4\varepsilon_{\text{C-H}} + \varepsilon_{\text{C=C}} + 2\varepsilon_{\text{O-H}}].$$

Înlocuind valorile numerice rezultă:

$$\Delta H_r^0 = +40,6 \text{ kJ,} \quad \text{Reacția este slab endotermă.}$$



$$\Delta H_r^0 = [4\varepsilon_{\text{C-H}} + \varepsilon_{\text{Cl-Cl}}] - [3\varepsilon_{\text{C-H}} + \varepsilon_{\text{C-Cl}} + \varepsilon_{\text{H-Cl}}].$$

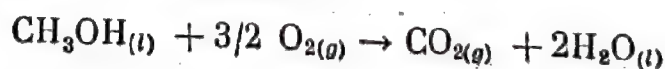
După înlocuiri se obține:

$$\Delta H_r^0 = -110,5 \text{ kJ.} \quad \text{Reacția este exotermă.}$$

18°. Ca o consecință a legii lui Hess, variația de entalpie standard într-o reacție chimică se poate exprima prin entalpiile standard de formare ale produșilor de reacție și ale reactanților. Această variație de entalpie standard este diferența dintre suma tuturor entalpiilor standard de formare ale produșilor de reacție și suma tuturor entalpiilor standard de formare ale reactanților:

$$\Delta H_r^0 = \sum \Delta H_{298, f}^0(\text{produși}) - \sum \Delta H_{298, f}^0(\text{reactanți}).$$

Pentru reacția de ardere a metanolului:



avem:

$$\Delta H_r^0 = \Delta H_{298, f}^0, \text{CO}_2 + 2\Delta H_{298, f}^0, \text{H}_2\text{O} - \Delta H_{298, f}^0, \text{CH}_3\text{OH}.$$

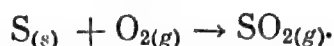
Entalpia standard de formare a oxigenului gazos este prin definiție egală cu zero. Rezultă:

$$\Delta H_{298, f, \text{CH}_3\text{OH}}^0 = \Delta H_{298, f, \text{CO}_2}^0 + 2\Delta H_{298, f, \text{H}_2\text{O}}^0 - \Delta H_r^0$$

Înlocuind valorile numerice date (ținând cont de semnele respective) și  $\Delta H_r^0 = -725,6 \text{ kJ}$ , deoarece reacția este exotermă, se obține:

$$\Delta H_{298, f, \text{CH}_3\text{OH}}^0 = -239,1 \text{ kJ/mol.}$$

19°. Căldura de formare (entalpia standard de formare) este variația de entalpie a sistemului în reacția de sinteză a unui mol de substanță din elementele componente în starea lor cea mai stabilă în condiții standard ( $p = 101,325 \text{ kPa}$  și  $T = 298 \text{ K}$ ). Deci entalpia standard de formare a dioxidului de sulf va fi variația de entalpie în reacția:



Ecuatia acestei reacții se poate obține (pe baza legii lui Hess) din ecuațiile reacțiilor date dacă acestea se înmulțesc cu niște coeficienți și apoi se adună algebric. Pe lângă cele două ecuații date trebuie de asemenea scrisă cea de a treia, trecerea apei lichide în apă sub formă de vapori (gaz):



Pentru a nu greși semnele se recomandă transcrierea ecuațiilor respective cu toți termenii în partea stângă și egalarea lor cu zero. Fie  $a$ ,  $b$  și  $c$  coeficienții cu care se înmulțesc ecuațiile reacțiilor respective:

$$\text{A. } 2a\text{H}_2\text{S}_{(g)} + a\text{SO}_{2(g)} - 3a\text{S}_{(s)} - 2a\text{H}_2\text{O}_{(g)} = 0; \quad \Delta H_{r_1}^0$$

$$\text{B. } b\text{H}_2\text{S}_{(g)} + 3/2 b\text{O}_{2(g)} - b\text{H}_2\text{O}_{(l)} - b\text{SO}_{2(g)} = 0; \quad \Delta H_{r_2}^0$$

$$\text{C. } c\text{H}_2\text{O}_{(l)} - c\text{H}_2\text{O}_{(g)} = 0; \quad \lambda_V$$

Coeficienții  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , trebuie determinați astfel încît după înmulțirea ecuațiilor respective cu acești coeficienți și adunarea lor să rezulte ecuația reacției de formare a dioxidului de sulf:

$$\text{S}_{(s)} + \text{O}_{2(g)} - \text{SO}_{2(g)} = 0; \quad \Delta H_{298, f, \text{SO}_2}^0$$

Pentru găsirea acestor coeficienți se alege un anumit component și se identifică coeficientul său din ecuațiile adunate cu coeficientul aceluiași component din ecuația de formare a dioxidului de sulf (care poate fi și nul dacă componentul ales nu se găsește în reacția de formare a dioxidului de sulf). Se recomandă să se ia în considerare componenți care participă la cel mai puține din reacțiile date, dacă este posibil numai la una singură. Considerînd astfel sulful  $\text{S}_{(s)}$ , acesta se găsește numai în ecuația A cu coeficientul  $-3a$ , iar în ecuația reacției de formare cu coeficientul 1.

Deci  $-3a = 1$ , de unde rezultă imediat  $a = -\frac{1}{3}$ . Luînd acum în considerare  $\text{SO}_2$ , în ecuațiile adunate acesta va avea coeficientul  $(a-b)$ , iar în ecuația reacției

de formare a dioxidului el are coeficientul  $-1$ . Deci:  $a - b = -1$ , adică  $b = a + 1 = 2/3$ . Pentru găsirea coeficientului  $c$  se poate lua spre exemplu  $\text{H}_2\text{O}_{(l)}$  și prin raționament similar se obține  $-b + c = 0$  sau  $b = c$  adică  $c = \frac{2}{3}$ . Rezultă așadar coeficienții:

$$a = -\frac{1}{3}; \quad b = \frac{2}{3}; \quad c = \frac{2}{3}.$$

Entalpia standard de formare a dioxidului de sulf va fi:

$$\Delta H_{298, f, \text{SO}_2}^0 = a\Delta H_{r,1}^0 + b\Delta H_{r,2}^0 + c\lambda_V.$$

Înlocuind valorile numerice se obține:

$$\Delta H_{298, f, \text{SO}_2}^0 = -296,2 \text{ kJ/mol}.$$

20°. a) Se calculează variația de entalpie standard pentru reacția directă (reacția 1):

$$\Delta H_{r,1}^0 = (\Delta H_{298, f, \text{CH}_4}^0 + \Delta H_{298, f, \text{H}_2\text{O}}^0) - (\Delta H_{298, f, \text{CO}}^0 + 3\Delta H_{298, f, \text{H}_2}^0).$$

Hidrogenul fiind un element în starea sa stabilă în condiții standard, rezultă (prin convenție)  $\Delta H_{298, f, \text{H}_2}^0 = 0$ . Înlocuind celelalte valori din problemă se obține

$$\Delta H_{r,1}^0 = -205,9 \text{ kJ}.$$

Se calculează de asemenea variația de entropie  $\Delta S_r^0$ :

$$\Delta S_r^0 = (S_{298, \text{CH}_4}^0 + S_{298, \text{H}_2\text{O}}^0) - (S_{298, \text{CO}}^0 + 3S_{298, \text{H}_2}^0).$$

Înlocuind valorile numerice se obține:

$$\Delta S_r^0 = -214,7 \text{ J/molK}.$$

Variația de entalpie liberă, la temperatura de  $300^\circ\text{C} = 573 \text{ K}$  (în aproximația din enunț) va fi:

$$\Delta G_T^0 = \Delta H_r^0 - T \cdot \Delta S_r^0 = -8,29 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

Deci variația de entalpie liberă fiind negativă înseamnă că reacția 1 este spontană la temperatura de  $573 \text{ K}$  ( $300^\circ\text{C}$ ).

b) Temperatura maximă pînă la care reacția 1 este spontană se poate afla din condiția  $\Delta G_T^0 = 0$  adică:

$$-205,9 \cdot 10^3 - T(-214,7) = 0$$

de unde rezultă  $T_{\max} = 959 \text{ K} = 686^\circ\text{C}$ .

c) Relația dintre constanta de echilibru  $K_p$  și variația de entalpie liberă  $\Delta G_T^0$  este:

$$\Delta G_T^0 = -RT \ln K_p.$$



Se calculează  $\Delta G_T^0$  la 873 K:

$$\Delta G_{873}^0 = -205,9 \cdot 10^3 + 873 \cdot 214,7 = -1,85 \cdot 10^4 \text{ J.}$$

Rezultă:

$$\ln K_p = \frac{-\Delta G_T^0}{RT} = \frac{1,85 \cdot 10^4}{8,31 \cdot 873} = 2,55$$

de unde

$$K_p = \exp(2,55) = 12,8 \text{ atm}^{-2}.$$

21°. a) Se calculează concentrațiile inițiale ale reactanților în prima experiență:

$$[\text{NO}] = \frac{0,6}{30} \cdot \frac{1}{2} = 0,01 \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$$

$$[\text{O}_2] = \frac{0,64}{32} \cdot \frac{1}{2} = 0,01 \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

Fie  $n_{\text{NO}}$  și  $n_{\text{O}_2}$  ordinele parțiale de reacție în raport cu oxidul de azot și, respectiv, cu oxigenul.

Expresia vitezei de reacție este:

$$v = k [\text{NO}]^{n_{\text{NO}}} \cdot [\text{O}_2]^{n_{\text{O}_2}}.$$

În a doua experiență concentrația oxidului de azot este dublă, cea a oxigenului rămânând neschimbată. Deci:

$$v = k [0,01]^{n_{\text{NO}}} \cdot [\text{O}_2]^{n_{\text{O}_2}}.$$

și

$$4v = k [0,02]^{n_{\text{NO}}} \cdot [\text{O}_2]^{n_{\text{O}_2}}.$$

Făcînd raportul celor două viteze se obține:

$$\frac{1}{4} = \left[ \frac{0,01}{0,02} \right]^{n_{\text{NO}}} \quad \text{sau} \quad \frac{1}{4} = \left[ \frac{1}{2} \right]^{n_{\text{NO}}}$$

de unde rezultă  $n_{\text{NO}} = 2$ .

În a treia experiență se dublează concentrația oxigenului, rămînînd neschimbată concentrația oxidului de azot:

$$2v = k [0,01]^{n_{\text{NO}}} \cdot [0,02]^{n_{\text{O}_2}}.$$

Raportînd această ecuație la:

$$v = k [0,01]^{n_{\text{NO}}} \cdot [0,01]^{n_{\text{O}_2}}.$$

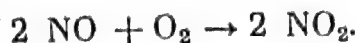
se obține:  $2 = \left[ \frac{0,002}{0,01} \right]^{n_{\text{O}_2}}$  de unde se obține  $n_{\text{O}_2} = 1$ .

Deci ordinul parțial de reacție în raport cu NO este 2, iar în raport cu oxigenul este 1. Ordinul total al reacției este:

$$m = n_{\text{NO}} + n_{\text{O}_2} = 3.$$

$$b) v = k[\text{NO}]^2 \cdot [\text{O}_2].$$

Reacția este simplă căci ordinele parțiale de reacție coincid cu molecularitatea reacția putînd fi scrisă:



$$c) v = k[\text{NO}]^2[\text{O}_2] = 5 \cdot 10^{-4} \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-2} \text{ s}^{-1} [10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}]^2 \cdot [10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}] = 5 \cdot 10^{-10} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}.$$

22°. Dependența vitezei de reacție de temperatură are loc prin intermediul constantei de viteză, conform relației lui ARRHENIUS:

$$k = A \exp \left[ -\frac{E_a}{RT} \right]$$

unde A este factorul preexponențial, practic independent de temperatură, iar  $E_a$  este energia de activare a reacției. Logaritmind această expresie se obține:

$$\ln k = \ln A - \frac{E_a}{RT}.$$

Determinîndu-se constanta de viteză la două temperaturi diferite  $T_1$  și  $T_2$ , avem:

$$\ln k_1 = \ln A - \frac{E_a}{RT_1}$$

$$\ln k_2 = \ln A - \frac{E_a}{RT_2}.$$

Făcînd diferența dintre aceste relații, rezultă:

$$\ln \frac{k_1}{k_2} = \frac{E_a}{R} \left[ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right].$$

De aici se obține expresia energiei de activare:

$$E_a = \frac{R \ln \frac{k_1}{k_2}}{\left[ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right]}.$$

Înlocuind valorile numerice:  $k_1 = 2,5$  și  $k_2 = 5,5 \cdot \text{dm}^3 \cdot \text{mol}^{-1} \text{s}^{-1}$  și  $T_1 = 283 \text{ K}$ ,  $T_2 = 293 \text{ K}$ , iar  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  obținem:

$$E_a = 5,43 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

23°. a) Fie  $n$  numărul de moli de acid iodhidric existenți inițial în sistem și  $\alpha$  gradul de disociere al acestuia la temperatura dată. Se alcătuieste următorul tabel:

Număr de moli	HI	H <sub>2</sub>	I <sub>2</sub>	Total
Inițial	$n$	0	0	$n$
La echilibru	$n - n\alpha = n(1 - \alpha)$	$\frac{n}{2} \alpha$	$\frac{n}{2} \alpha$	$n(1 - \alpha) + \frac{2n\alpha}{2} = n$

Cunoscând numărul de moli din fiecare component la echilibru, precum și numărul total de moli din sistem se calculează fracțiile molare ale celor trei componenți:

$$X_{\text{HI}} = \frac{n(1 - \alpha)}{n} = (1 - \alpha); \quad X_{\text{H}_2} = \frac{n\alpha}{2n} = \frac{\alpha}{2}; \quad X_{\text{I}_2} = \frac{n\alpha}{2n} = \frac{\alpha}{2}.$$

Presiunea parțială a unui component într-un amestec gazos este produsul dintre fracția sa molară și presiunea totală:

$$P_{\text{HI}} = (1 - \alpha) P; \quad P_{\text{H}_2} = \frac{\alpha}{2} P \quad \text{și} \quad P_{\text{I}_2} = \frac{\alpha}{2} P.$$

Expresia constantei de echilibru  $K_p$  este:

$$K_p = \frac{P_{\text{H}_2} \cdot P_{\text{I}_2}}{P_{\text{HI}}^2}.$$

Înlocuind expresiile presiunilor parțiale se obține:

$$K_p = \frac{\frac{\alpha^2}{4} P^2}{(1 - \alpha)^2 P^2} = \frac{\alpha^2}{4(1 - \alpha)^2}.$$

Punind  $\alpha = 0,245$  rezultă:

$$K_p = 2,63 \cdot 10^{-2}.$$

b) Relația dintre constantele de echilibru  $K_p$  și  $K_c$  este:

$$K_p = K_c (RT)^{\Delta v}$$

unde  $\Delta v$  este variația numărului de moli în urma reacției care are loc. În cazul disocierii acidul iodhidric din doi moli de HI se obține un mol de  $\text{H}_2$  și un mol  $\text{I}_2$  deci tot doi moli în total. Reacția are loc fără variația numărului de moli, adică  $\Delta v = 0$ . Rezultă că  $K_p = K_c$  și deci  $K_c = 2,63 \cdot 10^{-2}$ .

*Observație.* Se remarcă faptul că în cazul acestei reacții de disociere a acidului iodhidric ambele constante, atât  $K_p$ , cit și  $K_c$  sînt adimensionale, deci nu au unități de măsură.

24°. a) Considerînd comportare ideală a gazului din vas (cu volum constant) avem:

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p_i}{T_i}$$

de unde

$$p_i = p_0 \frac{T_i}{T_0}.$$

Făcînd calculul pentru cele patru temperaturi se obține:

$$p'_1 = p_1 = 101,325 \text{ kPa} \quad p'_3 = p_1 \frac{T_3}{T_1} = 270,2 \text{ kPa}$$

$$p'_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 168,875 \text{ kPa} \quad p'_4 = p_1 \frac{T_4}{T_1} = 337,75 \text{ kPa}.$$



b) Valorile măsurate ale presiunii  $p$  sînt mai mari decît cele calculate  $p'$ , diferența fiind cu atît mai mare, cu cît temperatura este mai ridicată. Prin urmare numărul de molecule din sistem crește. Rezultă deci că are loc descompunere termică a etanului.

c) Această descompunere nu poate fi decît o reacție de dehidrogenare, rezultînd etenă și hidrogen:



d) Fie  $\alpha$  gradul de conversie (disociere) a etanului la 800 K.

Din fiecare mol de etan se descompun  $\alpha$  moli rezultînd  $\alpha$  moli etenă și tot  $\alpha$  moli  $\text{H}_2$ . Dacă în sistem se găsesc  $n$  moli etan inițial, la o temperatură dată, după stabilirea echilibrului, mai rămîn  $n(1 - \alpha)$  moli etan, formîndu-se  $n\alpha$  moli etenă și  $n\alpha$  moli  $\text{H}_2$ . Numărul total de moli din sistem la temperatura respectivă este  $n(1 + \alpha)$ .

Ținînd cont de ecuația de stare a gazelor perfecte  $pV = \nu RT$  unde  $\nu$  este numărul de moli din sistem vom avea:

$$p'V = nRT$$

$p'$  fiind presiunea calculată în ipoteza că nu are loc nici o modificare a numărului de moli

și

$$pV = n(1 + \alpha)RT$$

$p$  este presiunea reală, măsurată experimental.

Făcînd raportul celor două ecuații avem:

$$\frac{p'}{p} = \frac{1}{1 + \alpha} \text{ de unde rezultă } \alpha = \frac{p - p'}{p'} = \frac{276,111 - 270,2}{270,2} = 0,022 = 2,2\%.$$

Expresia constantei de echilibru  $K_p$  este:

$$K_p = \frac{p_{\text{C}_2\text{H}_4} \cdot p_{\text{H}_2}}{p_{\text{C}_2\text{H}_6}}$$

Presiunile parțiale sînt:

$$p_{\text{C}_2\text{H}_6} = X_{\text{C}_2\text{H}_6} \cdot p = \frac{n(1 - \alpha)}{n(1 + \alpha)} p = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} p = 264,22 \text{ kPa};$$

$$p_{\text{C}_2\text{H}_4} = X_{\text{C}_2\text{H}_4} \cdot p = \frac{n\alpha}{n(1 + \alpha)} p = \frac{\alpha}{1 + \alpha} p = 6,21 \text{ kPa};$$

$$p_{\text{H}_2} = X_{\text{H}_2} \cdot p = \frac{n\alpha}{n(1 + \alpha)} p = 6,21 \text{ kPa}.$$

Înlocuind valorile presiunilor parțiale se obține:

$$K_p = \frac{6,21^2}{264,22} = 0,146 \text{ kPa}.$$

25°. a) 1. Fie  $C$  mol/dm<sup>3</sup> concentrația molară a celor doi reactanți și  $x$  numărul de moli/dm<sup>3</sup> transformați în HI:

$$K = \frac{[HI]^2}{[I_2][I_2]} = \frac{(2x)^2}{(C-x)(C-x)} = \frac{4x^2}{(C-x)^2}.$$

Deci:

$$\sqrt{K} = \frac{2x}{C-x}$$

de unde

$$\sqrt{K}(C-x) = 2x; \quad \sqrt{K} \cdot C - \sqrt{K} \cdot x = 2x$$

$$x(\sqrt{K} + 2) = \sqrt{K} \cdot C$$

și

$$\frac{x}{C} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K} + 2} = \frac{\sqrt{70}}{\sqrt{70} + 2} = 0,807 = 80,7\%.$$

2. Fie  $\alpha$  gradul de conversie a iodului în acid iodhidric, adică fracțiunea din fiecare mol de iod care s-a transformat în HI. Fie de asemenea  $C$  numărul de moli de iod pe dm<sup>3</sup>. Avem la echilibru:

$$[H_2] = 2C - C\alpha = C(2 - \alpha)$$

$$[I_2] = C - C\alpha = C(1 - \alpha)$$

$$[HI] = 2C\alpha$$

$$K = \frac{4C^2\alpha^2}{C^2(2-\alpha)(1-\alpha)} = \frac{4\alpha^2}{(2-\alpha)(1-\alpha)}.$$

Rezolvând această ecuație de gradul doi în  $\alpha$  și considerind numai soluția care are sens fizic, și anume cea cu  $\alpha \leq 1$  se obține

$$\alpha = 0,9508 \quad \text{adică} \quad \alpha = 95,08\%.$$

Deci fracțiunea din fiecare mol de  $I_2$  care se transformă în HI este 95,08%.

b) Fie  $X$  numărul de moli de  $H_2$  necesar și  $V$  volumul sistemului. Atunci:

$$[H_2] = \frac{X - \alpha_1}{V} \quad [I_2] = \frac{1 - \alpha_1}{V} \quad [HI] = \frac{2\alpha_1}{V}$$

$$K = \frac{4\alpha_1^2 \cdot V^2}{(X - \alpha_1)(1 - \alpha_1) \cdot V^2} = \frac{4\alpha_1^2}{(X - \alpha_1)(1 - \alpha_1)}.$$

Rezolvând ecuația în raport cu  $X$  se obține:

$$X = \frac{4\alpha_1^2 + K\alpha_1 - K\alpha_1^2}{K(1 - \alpha_1)}$$

iar înlocuind valorile numerice  $K = 70$  și  $\alpha_1 = 0,99$  se obține  $X = 6,59$  moli  $H_2$ .

26°. a) Expresia constantei de echilibru este:

$$K_c = \frac{[\text{CH}_3\text{COOH}][\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}]}{[\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5][\text{H}_2\text{O}]}$$

Se alcătuiește tabelul:

Concentrația (mol · dm <sup>-3</sup> )	Ester	Apă	Acid	Alcool
Inițial	$C$	$C$	0	0
La echilibru	$\frac{2}{3}C$	$\frac{2}{3}C$	$\frac{1}{3}C$	$\frac{1}{3}C$

Înlocuind datele în expresia constantei de echilibru rezultă:

$$K_c = \frac{C^2 \cdot 9}{9 \cdot 4 \cdot C^2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

b) Se alcătuiește un nou tabel similar cu cel de la punctul precedent, ținând cont de faptul că inițial concentrația esterului este  $C$  mol · dm<sup>-3</sup>, iar cea a apei  $nC$  mol · dm<sup>-3</sup>.

Fie  $x$  fracțiunea din fiecare mol de ester transformată la echilibru, și deci  $Cx$  numărul de moli pe dm<sup>-3</sup> de ester și de apă care s-au transformat și în același timp numărul de moli de alcool și de acid pe dm<sup>3</sup> care au rezultat. Se obțin deci următoarele date:

Concentrația (mol · dm <sup>-3</sup> )	Ester	Apă	Acid	Alcool
Inițial	$C$	$nC$	0	0
La echilibru	$C - Cx = C(1 - x)$	$nC - Cx = C(n - x)$	$Cx$	$Cx$

Deoarece constanta de echilibru  $K_c$  nu depinde de concentrațiile inițiale ale reactanților, ea va avea tot valoarea  $1/4$ . Rezultă:

$$\frac{1}{4} = \frac{C^2 x^2}{C^2(1 - x)(n - x)} \quad \text{sau} \quad \frac{x^2}{(1 - x)(n - x)} = \frac{1}{4}$$

de unde rezultă ecuația de gradul doi în  $x$ :

$$3x^2 + (n + 1)x - n = 0$$

și soluția care convine ca sens fizic ( $x$  trebuie să fie o cantitate pozitivă):

$$x = \frac{-(n + 1) + \sqrt{(n + 1)^2 + 12n}}{6}.$$

Deci  $x$  reprezintă fracțiunea de ester care va fi hidrolizată la echilibru dacă amestecul inițial conține  $n$  moli de apă la un mol ester.



2. Din ecuația de gradul doi în  $x$  obținută anterior se exprimă  $n$  funcție de  $x$ :

$$n = \frac{x(3x + 1)}{1 - x}.$$

Înlocuind pe  $x = 0,99$  se obține  $n = 393$ .

Deci este necesar un exces foarte mare de apă pentru a transforma practic tot esterul.

27°. a) Fie  $n$  numărul inițial de moli de  $N_2O_4$  (se presupune că inițial se introduce în sistem numai  $N_2O_4$ ); și  $\alpha$  gradul de disociere. Se alcătuește tabelul:

Număr de moli	$N_2O_4$	$NO_2$	Total
Inițial	$n$	0	$n$
La echilibru	$n(1 - \alpha)$	$2n\alpha$	$n(1 + \alpha)$

Fracțiile molare la echilibru sînt:

$$X_{N_2O_4} = \frac{n(1 - \alpha)}{n(1 + \alpha)} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}; \quad X_{NO_2} = \frac{2n\alpha}{n(1 + \alpha)} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha}.$$

Deci presiunile parțiale vor fi:

$$P_{N_2O_4} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} P \quad \text{și} \quad P_{NO_2} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha} P.$$

Pentru a calcula valoarea gradului de disociere  $\alpha$ , calculăm masa molară medie a amestecului  $\bar{M} = 28,9 d$ .

Dar masa molară medie se poate scrie și funcție de fracțiile molare ale componentelor:

$$\bar{M} = \sum_i M_i X_i = X_{N_2O_4} \cdot M_{N_2O_4} + X_{NO_2} \cdot M_{NO_2}.$$

Rezultă:

$$28,9 d = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \cdot 92 + \frac{2\alpha}{1 + \alpha} \cdot 46 = \frac{92}{1 + \alpha}.$$

Rezolvînd în raport cu  $\alpha$  se obține:

$$\alpha = \frac{92 - 28,9 d}{28,9 d}$$

și înlocuind  $d = 2,34$ , avem:  $\alpha = 0,36$ .

Introducînd această valoare a lui  $\alpha$  în expresiile presiunilor parțiale se obține:

$$P_{N_2O_4} = 47,682 \text{ kPa} \quad \text{și} \quad P_{NO_2} = 53,643 \text{ kPa}.$$

b) Expresia constantei de echilibru  $K_p$  este:

$$K_p = \frac{P_{NO_2}^2}{P_{N_2O_4}}.$$

Înlocuind valorile presiunilor parțiale rezultă:

$$K_p = 60,35 \text{ kPa.}$$

c) Constanta de echilibru  $K_p$ , nu depinde de presiune la temperatură constantă, deci noile presiuni parțiale trebuie să satisfacă condițiile:

$$p'_{\text{NO}_2} + p'_{\text{N}_2\text{O}_4} = 1013,25 \text{ kPa} \quad \text{și} \quad \frac{(p'_{\text{NO}_2})^2}{p'_{\text{N}_2\text{O}_4}} = 60,35 \text{ kPa.}$$

Rezolvînd acest sistem de două ecuații cu două necunoscute se obține:

$$p_{\text{NO}_2} = 217,14 \text{ kPa} \quad \text{și} \quad p_{\text{N}_2\text{O}_4} = 796,11 \text{ kPa.}$$

Rezultă că odată cu creșterea presiunii crește și presiunea parțială a  $\text{N}_2\text{O}_4$  pe seama micșorării presiunii parțiale a  $\text{NO}_2$ , deci echilibrul se deplasează spre stînga, spre formarea de  $\text{N}_2\text{O}_4$ . Această concluzie este în concordanță cu principiul Le Châtelier, conform căruia creșterea presiunii totale din sistem deplasează echilibrul înspre partea unde rezultă un număr mai mic de moli.

28°. a) Principiul Le Châtelier afirmă că dacă asupra unui sistem în echilibru se exercită o constrîngere, echilibrul se deplasează în sensul diminuării constrîngerii. Pentru un sistem gazos cu volum și temperatură determinate, presiunea este proporțională cu numărul de moli de gaz din sistem. Deci la micșorarea presiunii din sistem, echilibrul se va deplasa în sensul creșterii numărului de moli, care să compenseze micșorarea presiunii. În cazul reacției de disociere a bromului:



micșorarea presiunii va conduce la deplasarea echilibrului spre dreapta deoarece în acest sens, dintr-un mol de brom molecular rezultă doi moli de brom atomic. Rezultă că micșorarea presiunii duce la creșterea gradului de disociere a bromului molecular.

b) Expresia constantei de echilibru  $K_p$  este:

$$K_p = \frac{p_{\text{Br}}^2}{p_{\text{Br}_2}}.$$

Fie  $n$  numărul de moli de brom molecular care se găsesc inițial în sistem și  $\alpha$  gradul său de disociere, iar  $P$  presiunea totală. Se alcătuieste tabelul următor:

Număr de moli	$\text{Br}_2$	$\text{Br}$	Total
Inițial	$n$	0	$n$
La echilibru	$n(1 - \alpha)$	$2n\alpha$	$n(1 + \alpha)$

Fracțiile molare ale componentelor sînt:

$$X_{\text{Br}_2} = \frac{n(1 - \alpha)}{n(1 + \alpha)} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad X_{\text{Br}} = \frac{2n\alpha}{n(1 + \alpha)} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha}$$

iar presiunile parțiale:

$$p_{Br_2} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \cdot P \quad \text{și} \quad p_{Br} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha} P$$

Rezultă:

$$K_p = \frac{\frac{4\alpha^2}{(1 + \alpha)^2} P^2}{\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} P} = \frac{4\alpha^2}{1 - \alpha^2} P.$$

Rezolvînd în raport cu  $\alpha$  se obține:  $\alpha = \sqrt{\frac{K_p}{4P + K_p}}$ . Așadar la diminuarea presiunii gradul de disociere  $\alpha$  crește, regăsindu-se același rezultat ca la punctul a).

c) Înlocuind valorile numerice ale lui  $K_p$  și  $P$  avem:

$$\alpha = \sqrt{\frac{5,67 \cdot 10^2}{4 \cdot 1,013 \cdot 10^5 + 5,67 \cdot 10^2}} = 3,74 \cdot 10^{-2} = 3,74\%.$$

29°. a) Se calculează masa de acid acetic dizolvat:

$$m = \rho \cdot v = 1052 \text{ kgm}^{-3} \cdot 11,42 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ kg} = 12,0 \text{ g}.$$

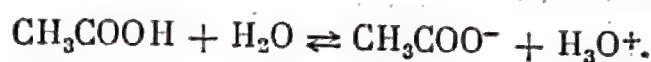
Numărul de moli de acid acetic dizolvat este:

$$n = \frac{12}{60} = 0,2 \text{ moli}$$

iar concentrația molară a soluției obținute va fi:

$$C = \frac{0,2}{2} = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

Ecuatia reacției de ionizare a acidului acetic în soluție apoasă:



Constanta de aciditate va avea expresia:

$$K_a = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]}.$$

Făcînd aproximația că acidul acetic este destul de slab pentru a putea neglija concentrația moleculelor care se ionizează în comparație cu cea a moleculelor neionizate, dar în același timp un acid mult mai tare decît apa ca acid și deci se poate neglija concentrația ionilor  $\text{H}_3\text{O}^+$  proveniți din ionizarea apei, se obține:

$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]^2}{C}$$

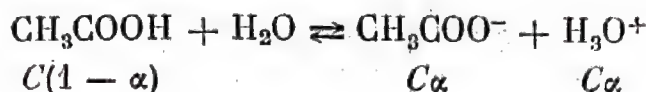
deoarece, conform reacției de ionizare  $[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{CH}_3\text{COO}^-]$ .  $C$  este concentrația inițială a acidului acetic în soluție ( $\text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ ), care în aproximația făcută, este egală și cu concentrația de echilibru a acidului neionizat.



Din  $pH = 2,87$  rezultă  $[H_3O^+] = 10^{-2,87} = 1,35 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ . Înlocuind valorile numerice în expresia constantei de aciditate avem:

$$K_a = \frac{(1,35 \cdot 10^{-3})}{0,1} = 1,82 \cdot 10^{-5}.$$

b) Fie  $\alpha$  gradul de ionizare al acidului acetic în soluția preparată. La echilibru, în sistem vor exista concentrațiile:



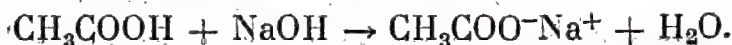
Deci:

$$K_a = \frac{C^2\alpha^2}{C(1 - \alpha)} = \frac{C\alpha^2}{1 - \alpha}.$$

Avind în vedere ca  $\alpha \ll 1$  se poate scrie expresia aproximativă:

$$K_a \simeq C\alpha^2 \quad \text{deci} \quad \alpha \simeq \sqrt{\frac{K_a}{C}} = \sqrt{\frac{1,82 \cdot 10^{-5}}{0,1}} = 1,35 \cdot 10^{-2} \text{ sau } \alpha \simeq 1,35\%.$$

c) Ecuația reacției de neutralizare:



Atit pentru NaOH, cit și pentru acidul acetic concentrațiile molare sînt egale cu cele normale, deci la neutralizarea completă:

$$V_{\text{acid}} \cdot N_{\text{acid}} = V_{\text{bază}} N_{\text{bază}} \quad \text{sau} \quad V_{\text{NaOH}} = \frac{V_{\text{acid}} \cdot N_{\text{acid}}}{N_{\text{NaOH}}}.$$

Înlocuind valorile numerice se obține:

$$V_{\text{NaOH}} = \frac{2 \text{ dm}^3 \cdot 0,1}{0,1} = 2 \text{ dm}^3 \text{ soluție NaOH } 0,1 \text{ N}.$$

d) Avind în vedere că volumul de soluție de NaOH adăugat este cel exact necesar neutralizării, în soluția obținută, al cărei volum total este  $4 \text{ dm}^3$ , există numai acetat de sodiu, de concentrație

$$C_1 = \frac{0,2 \text{ mol}}{4 \text{ dm}^3} = 0,05 \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

Acetatul de sodiu provenind de la un acid slab și bază tare, va hidroliza în soluție apoasă conform reacției de hidroliză:



sau în formă ionică:



Constanta de echilibru:

$$K = \frac{[\text{CH}_3\text{COOH}] \cdot [\text{HO}^-]}{[\text{CH}_3\text{COO}^-] \cdot [\text{H}_2\text{O}]}.$$

Considerind concentrația apei practic constantă, se obține expresia constantei de hidroliză  $K_h$ :

$$K_h = K[H_2O] = \frac{[CH_3COOH][HO^-]}{[CH_3COO^-]}.$$

Amplificind cu  $[H_3O^+]$  se obține:

$$K_h = \frac{[CH_3COOH][HO^-][H_3O^+]}{[CH_3COO^-][H_3O^+]} = K_{H_2O} \cdot \frac{1}{K_a}$$

unde  $K_{H_2O} = [H_3O^+][HO^-]$  este produsul ionic al apei.

Din ecuația reacției de hidroliză rezultă că, dacă se neglijează concentrația ionilor  $HO^-$  proveniți din ionizarea apei se poate scrie  $[CH_3COOH] \simeq [HO^-]$ , deci:

$$\frac{[HO^-]^2}{[CH_3COO^-]} = \frac{K_{H_2O}}{K_a}$$

Dar  $[HO^-] = \frac{K_{H_2O}}{[H_3O^+]}$  și înlocuind avem:

$$\frac{K_{H_2O}^2}{[H_3O^+]^2[CH_3COO^-]} = \frac{K_{H_2O}}{K_a} \text{ de unde se obține:}$$

$$[H_3O^+] = \sqrt{\frac{K_a \cdot K_{H_2O}}{CH_3COO^-}}.$$

Făcind aproximația că numărul ionilor  $CH_3COO^-$  care hidrolizează este mult mai mic decit cel al ionilor nehidrolizați se poate scrie relația aproximativă  $[CH_3COO^-] \simeq C_1$ , unde  $C_1$  este concentrația molară a acetatului de sodiu din soluție. Deci:

$$[H_3O^+] = \sqrt{\frac{K_a \cdot K_{H_2O}}{C_1}} = \sqrt{\frac{1,82 \cdot 10^{-5} \cdot 1 \cdot 10^{-14}}{0,05}} \simeq 1,91 \cdot 10^{-9} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$$

sau:

$$pH = -\lg[H_3O^+] \simeq 8,72.$$

Deci soluția obținută prin neutralizarea acidului acetic cu hidroxid de sodiu va avea un caracter bazic pH-ul său fiind mai mare decit 7, valoare ce corespunde mediului neutru.

30°. a) Produsul ionic al apei, în condiții standard, are valoarea:

$$K_{H_2O} = [H_3O^+][HO^-] = 1 \cdot 10^{-14} \text{ mol}^2 \cdot \text{dm}^{-6}.$$

Logaritmind relația se obține:

$$\lg[H_3O^+] + \lg[HO^-] = -14$$

sau

$$-\lg[H_3O^+] - \lg[HO^-] = 14$$

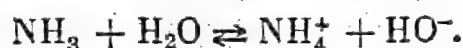
Dar prin definiție  $-\lg[\text{H}_3\text{O}^+] = \text{pH}$  și  $-\lg[\text{HO}^-] = \text{pOH}$ , deci în soluții apoase:

$$\text{pH} + \text{pOH} = 14.$$

Rezultă:  $\text{pOH} = 14 - \text{pH} = 3,37$  și  $[\text{HO}^-] = 10^{-3,37}$ , adică

$$[\text{HO}^-] = 4,27 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

b) Reacția de ionizare a amoniacului în soluție apoasă este



Constanta de echilibru se scrie:

$$K = \frac{[\text{NH}_4^+][\text{HO}^-]}{[\text{NH}_3][\text{H}_2\text{O}]}.$$

Considerind concentrația apei practic constantă se obține expresia constantei de bazicitate:

$$K_b = K[\text{H}_2\text{O}] = \frac{[\text{NH}_4^+][\text{HO}^-]}{[\text{NH}_3]}.$$

Făcând aproximația că amoniacul este o bază destul de slabă pentru a putea neglija concentrația moleculelor care ionizează în comparație cu cea a moleculelor neionizate, se poate considera concentrația moleculelor de amoniac la echilibru aproximativ egală cu concentrația inițială  $C$  a amoniacului în soluție, deci  $[\text{NH}_3] \simeq C \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ . De asemenea, amoniacul fiind o bază mult mai tare decât apa ca bază, se poate neglija într-o destul de bună aproximație, concentrația ionilor  $\text{HO}^-$  proveniți din ionizarea apei în comparație cu cea a ionilor  $\text{HO}^-$  proveniți din reacția amoniacului cu apa.

În acest caz  $[\text{HO}^-] \simeq [\text{NH}_4^+]$ . Cu aceste aproximații expresia constantei de bazicitate devine:

$$K_b = \frac{[\text{HO}^-]^2}{C}.$$

Pentru a obține valoarea lui  $C$  se calculează numărul de moli de amoniac dizolvați:

$$pV = \nu RT \Rightarrow \nu = \frac{pV}{RT} = \frac{202,65 \cdot 10^3 \cdot 493 \cdot 10^{-6}}{8,31 \cdot 300} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ moli } \text{NH}_3.$$

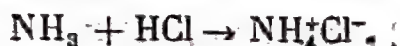
Deci

$$[\text{NH}_3] = \frac{4 \cdot 10^{-2} \text{ moli}}{4 \text{ dm}^3} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

Înlocuind și valoarea  $[\text{HO}^-] = 4,27 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$  obținută la punctul a) se obține:

$$K_b = \frac{[4,27 \cdot 10^{-4}]^2}{1 \cdot 10^{-2}} = 1,82 \cdot 10^{-5}.$$

c) Numărul de moli de  $\text{HCl}$  din cei  $2 \text{ dm}^3$  soluție  $0,01 \text{ N}$  este  $2 \cdot 10^{-2}$  și aceștia vor neutraliza  $2 \cdot 10^{-2} \text{ moli } \text{NH}_3$  formind tot  $2 \cdot 10^{-2} \text{ moli } \text{NH}_4\text{Cl}$ :





Dar cum numărul de moli de amoniac în soluția inițială era  $4 \cdot 10^{-2}$  înseamnă că mai rămân neneutralizați  $2 \cdot 10^{-2}$  moli  $\text{NH}_3$ . Volumul total al soluției este  $6 \text{ dm}^3$  deci concentrațiile clorurii de amoniu și amoniacului în această soluție vor fi:

$$[\text{NH}_4\text{Cl}] = \frac{0,02}{6} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3} \text{ și } [\text{NH}_3] = \frac{0,02}{6} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

Această soluție conține o bază slabă ( $\text{NH}_3$ ) și sarea sa cu un acid tare ( $\text{NH}_4\text{Cl}$ ) fiind deci o soluție tampon. Pentru a-i calcula  $pH$ -ul se pleacă de la expresia constantei de bazicitate:

$$K_b = \frac{[\text{NH}_4^+][\text{HO}^-]}{[\text{NH}_3]}$$

și se înlocuiește  $[\text{HO}^-] = \frac{K_{\text{H}_2\text{O}}}{[\text{H}_3\text{O}^+]}$  obținându-se:

$$K_b = \frac{[\text{NH}_4^+] \cdot K_{\text{H}_2\text{O}}}{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{NH}_3]}$$

de unde rezultă:

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{K_{\text{H}_2\text{O}}}{K_b} \cdot \frac{[\text{NH}_4^+]}{[\text{NH}_3]}.$$

După cum am văzut, în soluția obținută după adăugarea acidului clorhidric  $[\text{NH}_4^+] \simeq [\text{NH}_4\text{Cl}]$ , dacă se neglijează concentrația ionilor  $\text{NH}_4^+$  proveniți din ionizarea amoniacului în reacția sa cu apa. Deci  $[\text{NH}_4^+] = \frac{1}{3} \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ . De asemenea, în aproximația făcută deja la punctul b)  $[\text{NH}_3] = \frac{1}{3} \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ . Rezultă că în această soluție  $[\text{NH}_4^+] \simeq [\text{NH}_3]$  și atunci:

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{K_{\text{H}_2\text{O}}}{K_b} = \frac{1 \cdot 10^{-14}}{1,82 \cdot 10^{-5}} = 5,49 \cdot 10^{-10} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$$

și  $pH = -\lg [\text{H}_3\text{O}^+] = 9,26$ .

**Observație:** Rezultatul obținut are un caracter mai general. Soluția de amoniac a fost neutralizată exact pe jumătate cu  $\text{HCl}$  (punctul de semineutralizare) și de aceea  $[\text{NH}_4^+] = [\text{NH}_3]$ , iar  $pH = 14 - pK_b = pK_a$  unde  $K_a$  este constanta de aciditate a acidului conjugat amoniacului, adică a ionului amoniu  $\text{NH}_4^+$ . În cazul general când soluția conține o bază slabă și sarea sa cu un acid tare, această soluție tampon va avea un  $pH$  ce se poate calcula cu formula:

$$pH = pK_a - \lg \left[ \frac{C_{\text{sare}}}{C_{\text{bază}}} \right]$$

unde  $pK_a = -\lg K_a$ ,  $K_a$  fiind constanta de aciditate a acidului conjugat bazei slabe utilizate;  $C_{\text{sare}}$  este concentrația sării bazei slabe cu un acid tare, iar  $C_{\text{bază}}$  este concentrația bazei slabe existente în soluția tampon.

Dacă soluția tampon este formată dintr-un acid slab și sarea sa cu o bază tare atunci se poate ușor arăta că  $pH$ -ul acestei soluții are expresia

$$pH = pK_a - \lg \left[ \frac{C_{\text{acid}}}{C_{\text{sare}}} \right]$$

unde  $K_a$  este constanta de aciditate a acidului slab respectiv.

În ambele cazuri în punctul de semineutralizare (semiechivalență)  $pH = pK_a$ .

31°. a) Se calculează masa unui decimetru cub de soluție:

$$m = \rho V = 1,0049 \text{ g/cm}^3 \cdot 1000 \text{ cm}^3 = 1004,9 \text{ g.}$$

Se calculează cantitatea de acid formic (în moli) existentă într-un  $\text{dm}^3$  de soluție (concentrația molară). Masa molară a acidului formic este 46 g/mol.

$$\begin{array}{lcl} 100 \text{ g soluție} & \dots\dots\dots & 3 \text{ g HCOOH} \\ 1004,9 \text{ g soluție} & \dots\dots\dots & x \text{ g HCOOH} \\ \hline x = \frac{3 \cdot 1004,9}{100} = 30,147 \text{ g} = \frac{30,147}{46} \text{ moli} = 0,6554 \text{ mol/dm}^3. \end{array}$$

Deci concentrația molară a soluției este 0,6554 M.

b) Ecuația reacției de ionizare este:



Constanta de ionizare (de aciditate):

$$K_a = \frac{[\text{HCOO}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HCOOH}]}.$$

În anumite aproximații (vezi problema 29°) rezultă:

$$K_a = \frac{\alpha^2 C}{1 - \alpha}$$

unde  $\alpha$  este gradul de ionizare, iar  $C$  este concentrația molară a soluției.

$$\text{Gradul de ionizare } \alpha = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C}.$$

Concentrația ionilor de hidroniu se află din valoarea  $pH$ -ului:

$$pH = -\lg [\text{H}_3\text{O}^+] \text{ deci } [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-pH} = 1,0715 \cdot 10^{-2}.$$

Rezultă:

$$\alpha = \frac{1,0715 \cdot 10^{-2}}{0,6554} = 0,01635 = 1,635\%.$$

Înlocuind se obține:

$$K_a = 1,78 \cdot 10^{-4}.$$

c) După diluare se obține un nou grad de disociere  $\alpha_1$  și o nouă concentrație molară  $C_1$ . Constanta de aciditate nu depinde de concentrație. Deci:

$$K_a = \frac{\alpha_1^2 C_1}{1 - \alpha_1} = \frac{\alpha^2 C}{1 - \alpha}.$$

Rezultă:

$$C_1 = \frac{\alpha^2 C^2}{1 - \alpha} \cdot \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1^2} = K_a \frac{1 - 10\alpha}{(10\alpha)^2} = 5,57 \cdot 10^{-3}.$$

$$\frac{C}{C_1} = \frac{0,6554}{5,57 \cdot 10^{-3}} = 117,7.$$

Deci soluția inițială trebuie diluată de 117,7 ori pentru ca gradul de ionizare să crească de 10 ori.

32°. a)



Amoniacul fiind o bază slabă, reacția este reversibilă, echilibrul fiind mult deplasat spre stînga.

b) Într-o soluție apoasă concentrația ionilor de hidroniu și cea a ionilor  $\text{HO}^-$  sint legate prin relația:

$$[\text{H}_3\text{O}^+][\text{HO}^-] = K_{\text{H}_2\text{O}}$$

unde  $K_{\text{H}_2\text{O}}$  este produsul ionic al apei care, în condiții standard (la 298°K și 1 atm) are valoarea:

$$K_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \cdot 10^{-14} \text{ mol}^2 \cdot \text{dm}^{-6}.$$

Avînd în vedere că  $\text{pH} = -\lg[\text{H}_3\text{O}^+]$ , rezultă că  $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-11} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$  și  $[\text{HO}^-] = \frac{K_{\text{H}_2\text{O}}}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ .

c) În anumite aproximații (vezi problema 29):  
Se poate considera valabilă relația:

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{K_{\text{H}_2\text{O}}}{\sqrt{K_b \cdot C}}$$

unde  $C$  reprezintă concentrația bazei slabe în soluția apoasă. Deci:

$$C = \frac{K_{\text{H}_2\text{O}}^2}{K_b [\text{H}_3\text{O}^+]^2} = \frac{(10^{-14})^2}{1,8 \cdot 10^{-5} (10^{-11})^2} = 5,56 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

d) Volumul soluției fiind 2 dm<sup>3</sup>, s-au dizolvat.

$$2 \cdot 5,56 \cdot 10^{-2} = 0,1112 \text{ moli de amoniac.}$$

Considerînd că amoniacul se comportă ca un gaz perfect volumul acestuia în condițiile cerute va fi:

$$pV = \nu RT; V = \frac{\nu RT}{p} = \frac{0,1112 \cdot 10^{-3} \cdot 8310 \cdot 300}{2 \cdot 10^5} = 1,386 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 1,386 \text{ dm}^3.$$

33°. a) Reacția de ionizare a HCN în soluție apoasă este:



Făcînd aproximația că HCN este un acid mult mai tare decît apa, ca acid, se poate neglija concentrația ionilor hidroniu proveniți din ionizarea apei și ca



atere  $[H_3O^+] = [CN^-]$ . În această aproximație dacă  $\alpha$  este gradul de ionizare a acidului cianhidric în soluția de concentrație molară  $C \cdot \text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ , la echilibru avem:

$$[H_3O^+] = [CN^-] = \alpha C \text{ și } [HCN] = C(1 - \alpha)$$

Expresia constantei de ionizare (constantei de aciditate) va fi:

$$K_a = \frac{[H_3O^+] \cdot [CN^-]}{[HCN]}.$$

Înlocuind concentrațiile respective se obține:

$$K_a = \frac{\alpha^2 C^2}{C(1 - \alpha)} = \frac{\alpha^2 C}{1 - \alpha}.$$

Avind în vedere că  $\alpha \ll 1$  se poate scrie relația aproximativă:

$$K_a \simeq \alpha^2 C.$$

și înlocuind  $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-2}\% = 1,4 \cdot 10^{-4}$  și  $C = 0,2 \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$  se obține:

$$K_a = 3,92 \cdot 10^{-9} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

$$\text{b) } [H_3O^+] = [CN^-] = \alpha C = 0,2 \cdot 1,4 \cdot 10^{-4} = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

$$pH = -\lg [H_3O^+] = -\lg [2,8 \cdot 10^{-5}] = 4,55.$$

c) Fie  $V$  volumul de apă ce trebuie adăugat. Soluția astfel obținută va avea concentrația  $C_1 = \frac{1}{1+V} \cdot C$  deoarece cei  $C$  moli de HCN existenți într-un  $\text{dm}^3$  soluție inițială se vor găsi în  $(1+V)$  l soluție diluată.

Constanta de aciditate are aceeași valoare și în soluția diluată ca și în cea inițială, deci dacă  $\alpha_1$  este gradul de disociere (ionizare) în soluția diluată avem:

$$\alpha_1^2 C_1 = \alpha^2 C \text{ și } \frac{C_1}{C} = \frac{\alpha^2}{\alpha_1^2}$$

cum  $\alpha_1 = 2\alpha$  (gradul de ionizare trebuie să se dubleze), rezultă:

$$\frac{C_1}{C} = \frac{\alpha^2}{(2\alpha)^2} = \frac{1}{4}.$$

Dar

$$\frac{C_1}{C} = \frac{1}{1+V} = \frac{1}{4}$$

de unde rezultă imediat  $V = 3 \text{ dm}^3$ .

34°. Fie  $s$  solubilitatea clorurii de argint în  $\text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}$  la  $25^\circ\text{C}$ .

În soluție AgCl este complet ionizată deci concentrațiile ionilor  $\text{Ag}^+$  și  $\text{Cl}^-$  în soluția saturată (exprimate în  $\text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ ) vor fi egale chiar cu concentrația molară a AgCl

în aceeași soluție saturată, deci  $[Ag^+] = [Cl^-] = s \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ . Expresia produsului de solubilitate este:

$$P_s = [Ag^+][Cl^-] = s^2.$$

Rezultă:

$$s = \sqrt{P_s} = \sqrt{1 \cdot 10^{-10} \text{ mol}^2 \cdot \text{dm}^{-6}} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } [Ag^+] &= s = 1 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3} = 1 \cdot 10^{-5} \cdot 108 \text{ g} \cdot \text{dm}^{-3} = 1,08 \cdot 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{dm}^{-3}; \\ [Cl^-] &= s = 1 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3} = 1 \cdot 10^{-5} \cdot 35,5 \text{ g} \cdot \text{dm}^{-3} = 3,55 \cdot 10^{-4} \text{ g} \cdot \text{dm}^{-3}. \end{aligned}$$

c) Se calculează numărul de moli de  $\text{CaCl}_2$  adăugați:

$$n = \frac{4,44 \cdot 10^{-2}}{111} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ moli } \text{CaCl}_2. \text{ Volumul rămânând constant (0,5 dm}^3\text{) con-}$$

$$\text{centrația clorurii de calciu va fi } [CaCl_2] = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{0,5 \text{ dm}^3} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

Dar, dintr-un mol de  $\text{CaCl}_2$  în soluție rezultă doi moli de ioni  $\text{Cl}^-$ , deci concentrația molară a ionilor  $\text{Cl}^-$  proveniți din clorura de calciu este  $[Cl^-]_{\text{CaCl}_2} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ .

Fie  $s_1$  solubilitatea clorurii de argint în soluția care conține  $8 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$  de  $\text{CaCl}_2$ . Concentrația ionilor  $\text{Ag}^+$  va fi tot  $s_1 \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ , ca și cea a ionilor  $\text{Cl}^-$  proveniți din clorura de argint.

Deci în această soluție vom avea:

$$[Ag^+] = s_1 \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3};$$

$$[Cl^-] = [Cl^-]_{\text{CaCl}_2} + [Cl^-]_{\text{AgCl}} = (1,6 \cdot 10^{-3} + s_1) \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

Produsul concentrațiilor acestor ioni în soluția saturată este chiar produsul de solubilitate:

$$s_1 \cdot (1,6 \cdot 10^{-3} + s_1) \simeq 1 \cdot 10^{-10}.$$

Având în vedere faptul că  $s_1$  va fi mai mic decât  $s$  obținut la punctul a), deci  $s_1 \ll 1,6 \cdot 10^{-3}$ , aceasta se poate neglija și se poate scrie relația aproximativă  $1,6 \cdot 10^{-3} s_1 \simeq 1 \cdot 10^{-10}$  de unde se obține

$$s_1 \simeq 6,25 \cdot 10^{-8} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

*Observație:* Calculul exact al lui  $s_1$  prin rezolvarea ecuației de gradul doi, dă practic același rezultat.

$$\text{d) } [Ag^+] = s_1 = 6,25 \cdot 10^{-8} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$$

$$[Cl^-] = 1,6 \cdot 10^{-3} + s_1 \simeq 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$$

$s_1$  fiind neglijabil în comparație cu  $10^{-3}$ .

35°. a) Se calculează concentrațiile inițiale ale celor două soluții, în  $\text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ . Soluția de azotat de plumb se diluează de zece ori față de concentrația ei inițială (înainte de amestecarea cu acidul sulfuric) devine  $C_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ . Acidul sulfuric este un acid dibazic, deci concentrația sa molară va fi jumătate din normalitate, adică  $C_2 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ . După amestecarea celor două soluții, volumul total al soluției obținute se dublează și deci concentrația fiecăreia se reduce la jumătate:

$$C_{\text{Pb}(\text{NO}_3)_2} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3};$$

$$C_{\text{H}_2\text{SO}_4} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

Cum ambele săruri sînt electroliti tari, complet ionizați rezultă:

$$[\text{Pb}^{2+}] = 1 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3};$$

$$[\text{SO}_4^{2-}] = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

Precipitatul de sulfat de plumb se va forma numai dacă produsul concentrațiilor ionilor  $\text{Pb}^{2+}$  și  $\text{SO}_4^{2-}$  va fi mai mare decît produsul de solubilitate al acestei sări:

$$[\text{Pb}^{2+}][\text{SO}_4^{2-}] = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{-6} > P_s = 2 \cdot 10^{-8}.$$

Deci la amestecarea celor două soluții se va forma precipitatul de sulfat de plumb.

b) Fie  $s$  solubilitatea sulfatului de plumb ( $\text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ ) în soluția obținută prin amestecarea celor două soluții inițiale, soluție în care există un exces de ioni  $\text{SO}_4^{2-}$ . De aceea în această soluție  $[\text{Pb}^{2+}] = s$ , iar concentrația ionilor de plumb care au precipitat este  $(10^{-3} - s) \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ , egală evident și cu concentrația ionilor  $\text{SO}_4^{2-}$  care au precipitat. Se obține de aici concentrația ionilor  $\text{SO}_4^{2-}$  care au mai rămas în soluție, și anume:

$$[\text{SO}_4^{2-}] = 5 \cdot 10^{-3} - (10^{-3} - s) = (4 \cdot 10^{-3} + s) \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

Produsul concentrațiilor ionilor  $\text{Pb}^{2+}$  și  $\text{SO}_4^{2-}$  rămași în soluție trebuie să fie egal cu produsul de solubilitate  $P_s$ :

$$s(s + 4 \cdot 10^{-3}) = 2 \cdot 10^{-8}.$$

Rezolvînd ecuația de gradul doi în  $s$  și luînd soluția pozitivă (singura care are sens fizic) se obține  $s = 5 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ .

Rezultă în final:

$$[\text{Pb}^{2+}] = s = 5 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3} = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 207 = 1,035 \cdot 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

$$[\text{SO}_4^{2-}] = 4 \cdot 10^{-3} + s = 4 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-6} = 4,005 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3} = 4,005 \cdot 10^{-3} \cdot 96 = 0,3845 \text{ g} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

$$36^\circ. \text{ a) } \frac{112}{22,4} = 5 \text{ moli HCl} = 5 \cdot 36,5 \text{ g HCl} = 5 \text{ echiv. HCl}$$

$$10 \text{ l sol. HCl} \dots\dots\dots 5 \text{ echiv. HCl}$$

$$1 \text{ l sol. HCl} \dots\dots\dots x = 0,5 \text{ echiv. HCl, respectiv: } 0,5 \text{ N HCl și } 0,5 \text{ M HCl}$$

$$\text{b) } \text{H}_3\text{O}^+ = \text{HCl, respectiv: } y = 0,5 \text{ ioni gram } \text{H}_3\text{O}^+/\text{l}$$

$$\text{c) } \frac{V_{\text{NaOH}}}{V_{\text{HCl}}} = \frac{n_{\text{HCl}}}{n_{\text{NaOH}}} \text{ sau } \text{NaOH} = \frac{10 \cdot 0,5}{0,1} = 50 \text{ l NaOH } 0,1 \text{ N}$$

$$37^\circ. \text{ a) } \text{Zn} + 2 \text{HCl} = \text{ZnCl}_2 + \text{H}_2$$

b) Raportul de echivalență:



$$22,4 \text{ l H}_2 \dots\dots\dots 65,38 \text{ g Zn} \dots\dots\dots 72,93 \text{ g HCl}$$

$$15 \text{ l H}_2 \dots\dots\dots x' \dots\dots\dots y' \frac{10}{100}$$

$$x' = \frac{65,38 \cdot 15}{22,4} = 43,78 \text{ g Zn};$$

$$y' = \frac{72,93 \cdot 15 \cdot 100}{22,4 \cdot 10} = 488 \text{ g HCl } 10\%.$$



c) Cu pierderi 8%:

$$\begin{array}{lcl} (100 - 8) = 92 \text{ g Zn} & \dots\dots\dots & 100 \text{ g Zn} \\ 43,78 \text{ g Zn} & \dots\dots\dots & x = \underline{47,59 \text{ g Zn}} \\ (100 - 8) = 92 \text{ g HCl} & \dots\dots\dots & 100 \text{ g HCl} \\ 488 \text{ g HCl} & \dots\dots\dots & y = \underline{530,8 \text{ g HCl } 10\%}. \end{array}$$

38°. a) Elementele se substituie în cantități echivalente

$$E_{Al} = \frac{27}{3} = 9; E_{Ag} = 108$$

$$\frac{m_{Al}}{m_{Ag}} = \frac{E_{Al}}{E_{Ag}}; 1 \text{ g Al depune: } \frac{108}{9} = 12 \text{ g Ag.}$$

$x = \text{g Al dizolvat}$

$$27 - x + 12x = 29,97$$

$$11x = 2,97; x = 0,27 \text{ g Al dizolvat}$$

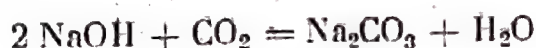
$$\text{b) } \frac{0,27}{y} = \frac{9}{108}; y = \frac{108 \cdot 0,27}{9} = 3,24 \text{ g Ag depus.}$$

$$\text{c) } \frac{3,24}{108} = 0,03 \text{ l} = 30 \text{ ml AgNO}_3 \text{ 1 M}$$

$$\text{d) } \frac{0,27 \cdot 1000}{30} = 9 \text{ g Al}^{3+} \text{ într-un litru soluție}$$

$$\frac{m}{M} = \frac{9}{27} = 0,333 \text{ moli/l Al}^{3+},$$

39°. a)  $\text{CaCO}_3 + 2 \text{ HCl} = \text{CaCl}_2 + \text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}$



b) 5 kg calcar:

$$5\,000 \cdot 0,8 = 4\,000 \text{ g CaCO}_3 \text{ 100\%}$$

$$1 \text{ mol CaCO}_3 = 100 \text{ g} \dots\dots\dots 1 \text{ mol CO}_2 (22,4 \text{ l})$$

$$4\,000 \text{ g} \dots\dots\dots x = 40 \text{ moli CO}_2 = 896 \text{ l CO}_2.$$

$$\text{c) } 100 \text{ kg CaCO}_3 \dots\dots\dots 73 \text{ kg HCl}$$

$$4 \text{ kg CaCO}_3 \dots\dots\dots y = 2,92 \text{ kg HCl } 100\% = 29,2 \text{ kg HCl } 10\%.$$

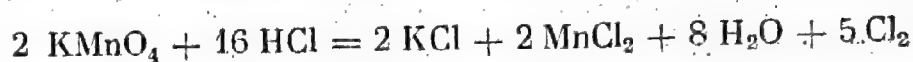
d) 2 moli NaOH absorb 1 mol CO<sub>2</sub>

$$1 \text{ mol CO}_2 \dots\dots\dots 2 \text{ moli NaOH}$$

$$40 \text{ moli CO}_2 \dots\dots\dots x = 80 \text{ moli NaOH}$$

$$\text{NaOH } 0,5 \text{ M: } 80 \text{ moli se află în } \frac{80}{0,5} = 160 \text{ l soluție NaOH}$$

40°. a) Ecuația reacției chimice care are loc:



b) 16 moli HCl ..... 5 · 22,4 l Cl<sub>2</sub>

$x_1$  moli HCl ..... 1,12 l Cl<sub>2</sub>

$x = 0,16$  moli HCl/100 cm<sup>3</sup> soluție, ceea ce înseamnă că 1 000 cm<sup>3</sup> soluție conțin 1,6 moli HCl.

c) Masa de HCl din soluție:  $0,16 \times 36,5 = 5,84$  g HCl în 100 cm<sup>3</sup>

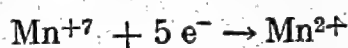
100 g soluție	.....	36 g HCl
$x_2$ g soluție	.....	5,84 g HCl

---

$x_2 = 16,2$  g soluție HCl 36%

$$v = \frac{16,2 \text{ g}}{1,18 \text{ g/cm}^3} = 13,74 \text{ cm}^3 \text{ soluție HCl } 36\%$$

d) Ținând seama de procesul redox:



se calculează echivalentul-gram al permanganatului de potasiu:

$$E = \frac{M_{\text{KMnO}_4}}{5} = 31,6.$$

41°. a) Ținând seama de ecuația reacției chimice:



se scrie expresia constantei de aciditate:

$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{A}^-]}{[\text{HA}]} = \left\langle \frac{\frac{\text{mol}}{1} \cdot \frac{\text{mol}}{1}}{\frac{\text{mol}}{1}} \right\rangle = \left\langle \frac{\text{mol}}{1} \right\rangle$$

$$\text{b) } K_a = \frac{\alpha^2 c}{1 - \alpha} \approx \frac{\alpha^2 c}{1} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{K_a}{c}}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{1 \cdot 10^{-5}}{10^{-1}}} = 10^{-2}; \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{1 \cdot 10^{-5}}{10^{-3}}} = 10^{-1}.$$

c) Din ecuația reacției chimice se calculează concentrația ionilor H<sub>3</sub>O<sup>+</sup> la echilibru:

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \alpha c \Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+]_1 = 10^{-3}$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+]_2 = 10^{-4}$$

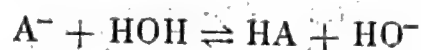
sau:

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \sqrt{c \cdot K_a} \Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+]_1 = 10^{-3}$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+]_2 = 10^{-4}.$$

d)  $pH = -\log [H_3O^+]_2 = -\log 10^{-4} = 4.$

e) Procesul fiind stoechiometric, se formează sarea NaA care, provenind de la un acid slab, HA, va hidroliza:



și soluția va avea caracter bazic.

42°. a) În 250 ml soluție NaOH 2 M se află:

$$\frac{250 \cdot 2}{1000} = 0,5 \text{ moli NaOH.}$$

Prin neutralizarea celor 0,5 moli NaOH se degajă 28,63 kJ, iar efectul termic al reacției de neutralizare se calculează imediat:

$$\Delta H_1 = \frac{28,63}{0,5} = 57,26 \text{ kJ/mol.}$$

În cei 500 ml soluție se găsește întreaga cantitate de HCl cuprinsă în 42 ml soluție 37%.

$$\rho = \frac{m}{v} \Rightarrow m = 42 \cdot 1,19 = 50 \text{ g soluție 37\%;}$$

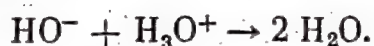
$$m_{HCl} = 50 \cdot \frac{37}{100} = 18,5 \text{ g adică } 0,506 \text{ moli.}$$

La reacția de neutralizare participă numai 250 ml soluție, adică jumătate din cantitatea de HCl (0,253 moli).

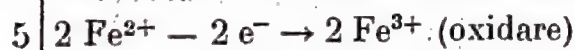
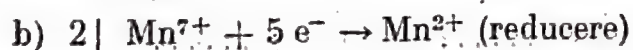
Efectul termic al reacției de neutralizare se calculează ca și în cazul NaOH:

$$\Delta H_2 = \frac{14,51}{0,253} = 57,35 \text{ kJ/mol.}$$

Efectul termic al reacțiilor de neutralizare este același în cazul acizilor și bazelor tari, fiind vorba de același proces care are loc:



43°. a) În reacția respectivă are loc oxidarea Fe(II) la Fe(III) prin urmare  $A = Fe_2(SO_4)_3$



$KMnO_4$  — agent oxidant;  $FeSO_4$  — agent reducător.

c)  $v_{KMnO_4} \cdot n_{KMnO_4} = v_{FeSO_4} \cdot n_{FeSO_4}.$

$$v_{KMnO_4} = \frac{100 \cdot 0,1}{0,2} = 50 \text{ ml soluție } KMnO_4 \text{ } 0,2 \text{ N.}$$



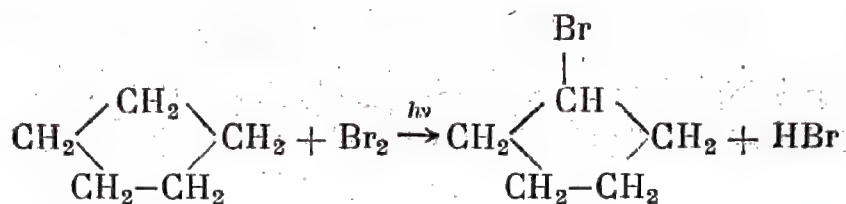
d) Se ține seama de faptul că echivalentul chimic al  $\text{KMnO}_4$  în procesele redox este:

$$E_{\text{KMnO}_4} = \frac{M_{\text{KMnO}_4}}{5}$$

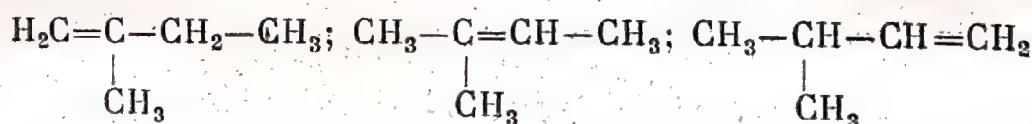
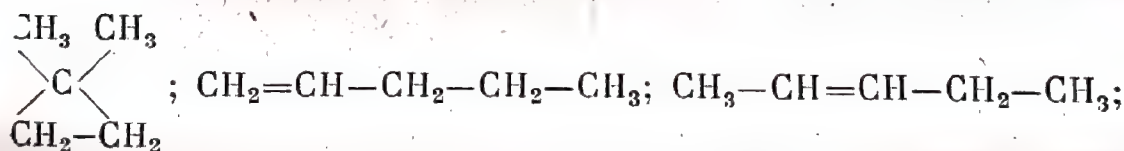
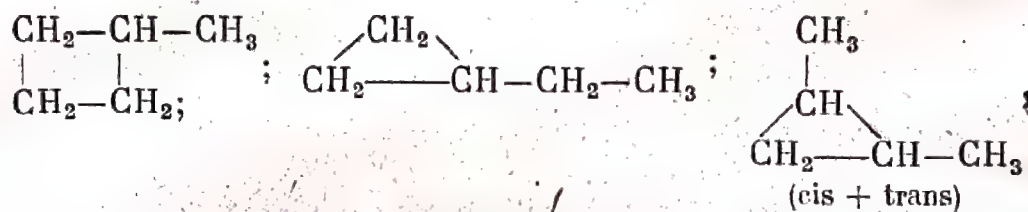
și ținând seama de relația  $n = pM(p = 5)$  rezultă:

$$M = \frac{0,2}{5} = 0,04 \text{ moli/l KMnO}_4.$$

44°. Hidrocarbura A poate fi — după formula moleculară — o alchenă sau un cicloalcan. Deoarece la bromurare rezultă un singur derivat monobromurat, înseamnă că toți cei 10 atomi de hidrogen sînt echivalenți; deci A nu poate fi decît ciclopentan:



Formulele de structură ale izomerilor săi sînt:



45°. a) Stabilirea formulei moleculare:

100 g ..... 40,67 g C ..... 8,47 g H ..... 23,73 g N ..... 27,40 g O  
50 g .....  $x_1$  .....  $x_2$  .....  $x_3$  .....  $x_4$

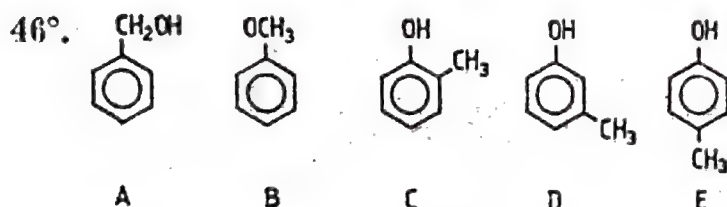
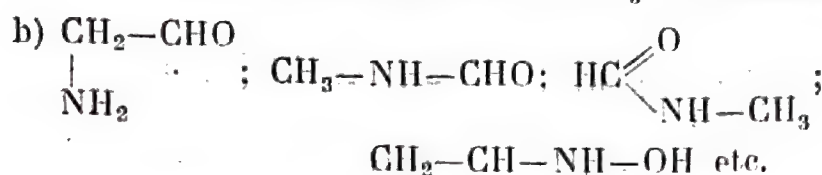
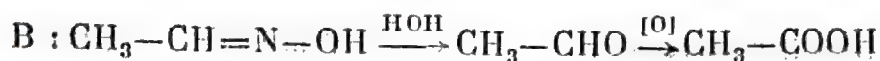
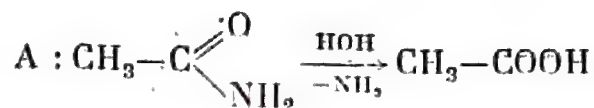
$$x_1 = 24; \quad \text{C} : \frac{24}{12} = 2 \text{ at. de C}$$

$$x_2 = 5; \quad \text{H} : \frac{5}{1} = 5 \text{ at. de H}$$

$$x_3 = 14; \quad \text{N} : \frac{14}{14} = 1 \text{ at. de N}$$

$$x_4 = 16; \quad \text{O} : \frac{16}{16} = 1 \text{ at. de O}$$

Formula moleculară:  $C_2H_5NO$



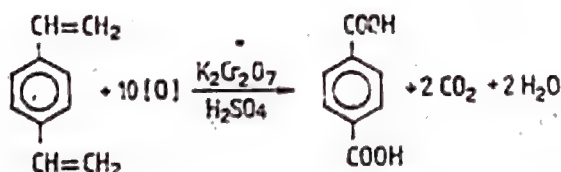
Reacțiile comune ale celor cinci substanțe izomere sînt reacțiile de substituție electrofilă la nucleul aromatic (halogenare, nitrare, sulfonare, alchilare etc.).

47.° Formula moleculară a hidrocarburii A:

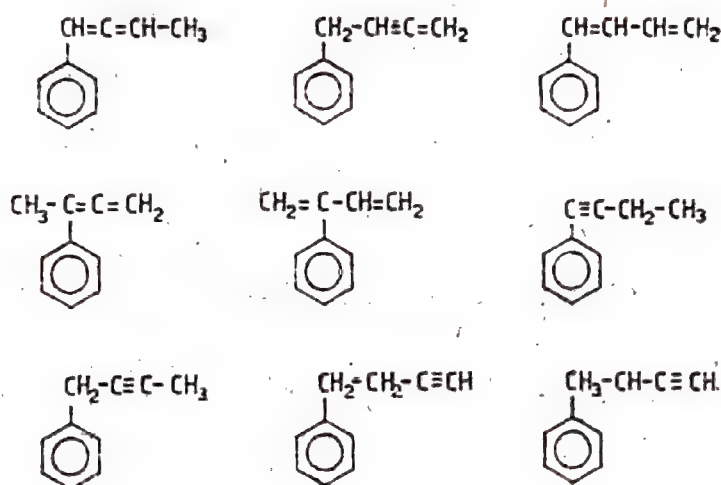
$$C : \frac{12}{12} = 1; \quad H : \frac{1}{1} = 1$$

$$(CH)_n = 130; \quad n = 10.$$

Formula structurală a hidrocarburii A:



Formulele structurale ale izomerilor lui A care prin oxidare conduc la acid benzoic:

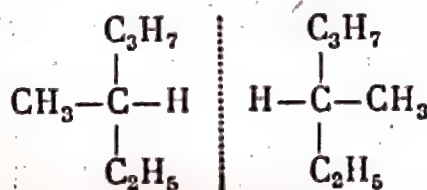
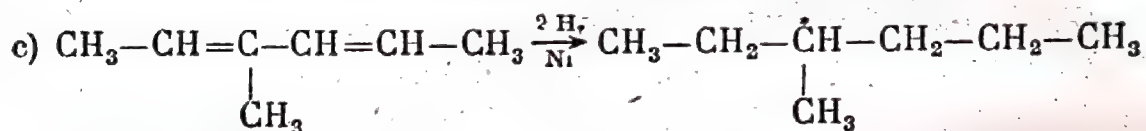
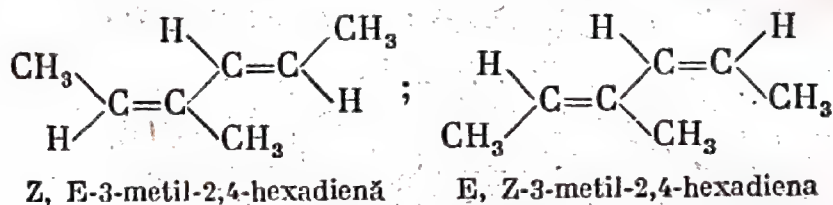
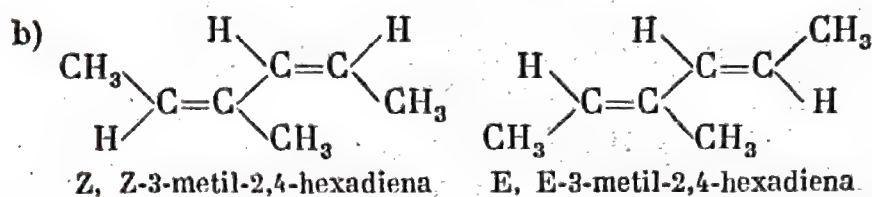
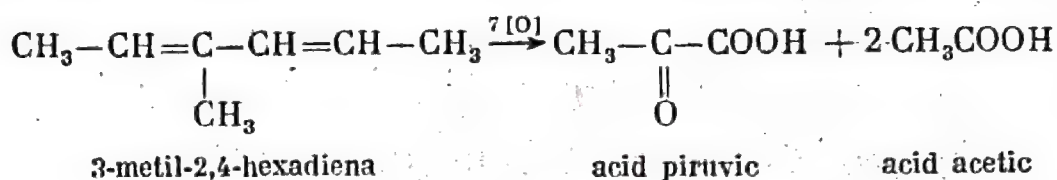


NE a *p*-divinilbenzenului = 6

NE a acidului benzoic = 5

NE a acidului tereftalic = 6

48°. a) Formula structurală a hidrocarburii A:



$M_A = 96;$	96 g y	.....	$7 \cdot 16 \text{ g} [\text{O}]$
	9,6	.....	x
$x = 0,7 \cdot 16 \text{ g} [\text{O}]$			

$3 \cdot 16 \text{ g} [\text{O}]$	.....	1 mol $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$
$0,7 \cdot 16$	.....	y
$y = 0,23 \text{ moli}$ vol. sol. = 1 dm <sup>3</sup>		



Ar + 1	.....	Ar + 46
25,6	.....	34,6
$\text{Ar} = 127$		

$M_{\text{Ar}-\text{H}} = 128 (\text{C}_{10}\text{H}_8)$

$\text{Ar}-\text{H} = \text{naftalină}$



$$\begin{array}{rcl} \text{b) } 128 \text{ g} & \dots\dots\dots & 63 \text{ g HNO}_3 \\ 25,6 & \dots\dots\dots & x_1 \end{array}$$

---


$$x_1 = 12,6 \text{ g HNO}_3$$

$$\begin{array}{rcl} 2 \cdot 98 \text{ g H}_2\text{SO}_4 & \dots\dots : \dots\dots & 63 \text{ g HNO}_3 \\ x_2 & \dots\dots\dots & 12,6 \end{array}$$

---


$$x_2 = 30,2 \text{ g H}_2\text{SO}_4$$

$$\begin{array}{rcl} 100 \text{ g soluție HNO}_3 & \dots\dots\dots & 63 \text{ g HNO}_3 \\ x_3 & \dots\dots\dots & 12,6 \end{array}$$

---


$$x_3 = 20 \text{ g soluție HNO}_3 \text{ } 63\%$$

$$\begin{array}{rcl} 100 \text{ g soluție H}_2\text{SO}_4 & \dots\dots\dots & 90 \text{ g H}_2\text{SO}_4 \\ x_4 & \dots\dots\dots & 30,2 \end{array}$$

---


$$x_4 = 43,5 \text{ g soluție H}_2\text{SO}_4 \text{ } 90\%$$

Amestec nitrant necesar reacției:  $43,5 + 20 = 63,5 \text{ g}$

Amestec nitrant utilizat:  $63,5 \cdot \frac{100}{50} = 127 \text{ g}$ .

50°. Se calculează numărul de moli de benzen și hidrogen la începutul reacției:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{PV}{T}; V_0 = 492,7 \text{ l; nr. moli} = \frac{492,7}{22,4} = 22 \text{ moli}$$

$$(2 \text{ moli C}_6\text{H}_6 \text{ și } 20 \text{ moli H}_2)$$

Numărul de moli la sfârșitul reacției:

$$\frac{P_0 V'_0}{T_0} = \frac{PV'}{T}; V'_0 = 425,7 \text{ l; nr. moli} = 425,7/22,4 = 19 \text{ moli}$$

Se notează cu  $x$  nr. de moli de benzen hidrogenat:



$$2 - x + 20 - 3x + x = 19; x = 1.$$

Randamentul reacției de hidrogenare (raportat la benzen):

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50\%.$$

Amestecul final va conține 1 mol  $\text{C}_6\text{H}_6$ , 17 moli  $\text{H}_2$ , 1 mol  $\text{C}_6\text{H}_{12}$ .

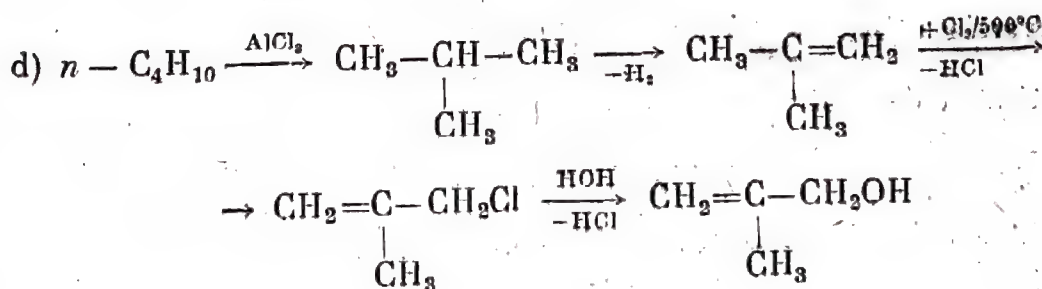
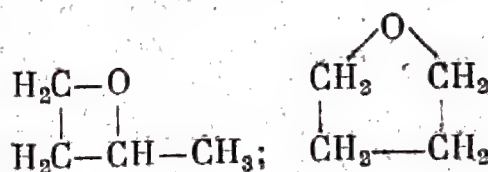
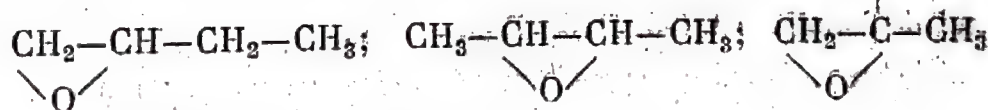
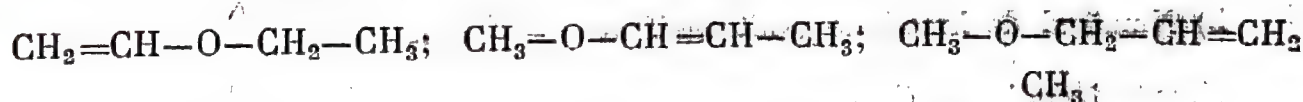
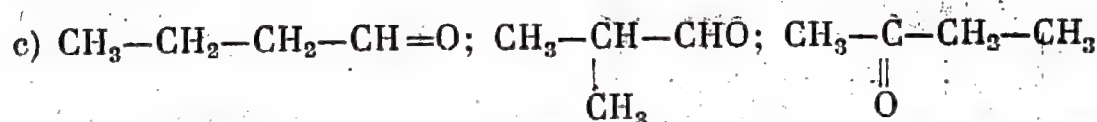
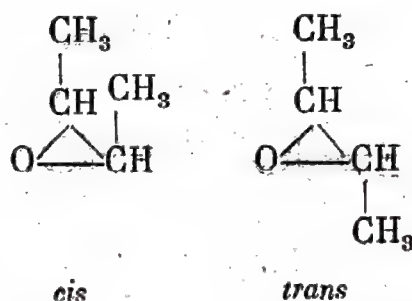
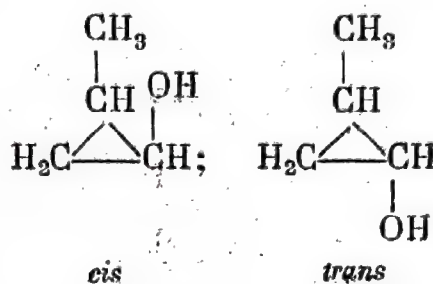
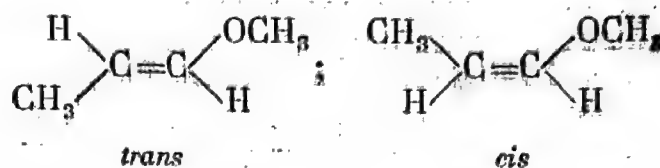
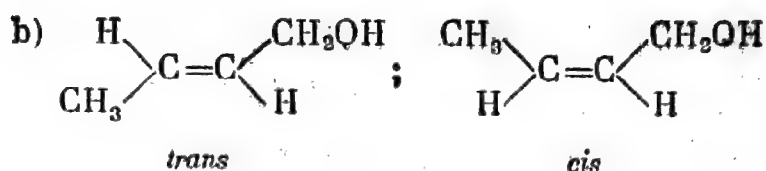
Compoziția procentuală va fi:

$$\begin{array}{rcl} (1 \cdot 78 + 17 \cdot 2 + 1 \cdot 84) \text{ g amestec} & \dots\dots\dots & 78 \text{ g C}_6\text{H}_6 \dots\dots\dots 34 \text{ g H}_2 \dots\dots\dots 84 \text{ g C}_6\text{H}_{12} \\ 100 \text{ g} & \dots\dots\dots & x_1 \dots\dots\dots x_2 \dots\dots\dots x_3 \end{array}$$

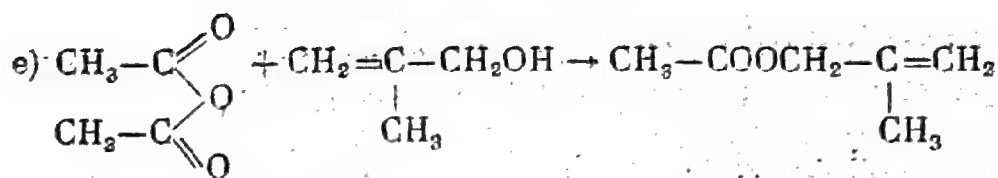
---


$$x_1 = 39,80\% \text{ C}_6\text{H}_6; x_2 = 17,34\% \text{ H}_2; x_3 = 42,86\% \text{ C}_6\text{H}_{12}.$$







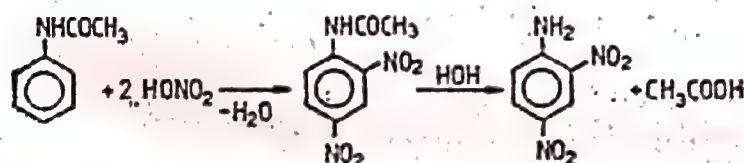
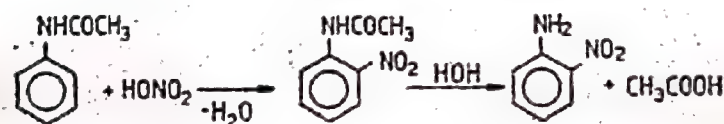
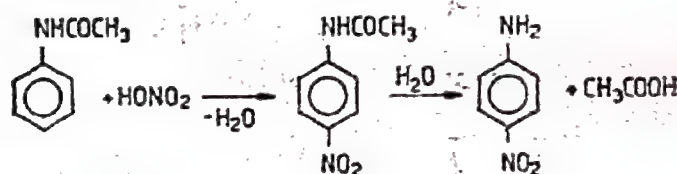
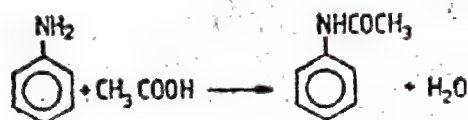


$$\begin{array}{l} 1 \text{ mol alcool} \dots\dots\dots 114 \text{ g eter} \\ 10 \text{ moli} \dots\dots\dots x \end{array}$$

$$x = 1140 \text{ g ester (randament 100\%)}$$

$$1140 \cdot \frac{90}{100} = 1026 \text{ g ester (randament 90\%)}$$

54.° a) Ecuatiile reactiilor:



b) Numărul de kmoli de *p*-nitroanilină =  $\frac{276}{138} = 2$

Numărul de kmoli de *o*-nitroanilină = 1.

Numărul de kmoli de 2,4-dinitroanilină = 0,25.

Numărul de kmoli de anilină transformată în nitroderivați =  $2 + 1 + 0,25 = 3,25$ .

Cantitatea de anilină transformată =  $3,25 \times 93 = 302,25 \text{ kg}$

Cantitatea de anilină inițială =  $302,25 \times \frac{100}{75} = 403 \text{ kg} = 4,3 \text{ kmoli}$ .

c) Cantitatea de *o*-nitroanilină =  $1 \times 138 = 138 \text{ kg}$ .

Cantitatea de 2,4-dinitroanilină =  $0,25 \times 183 = 45,75 \text{ kg}$ .

d) Conversia utilă =  $\frac{186}{403} \cdot 100 = 46,15\%$ .

e) Cantitatea de acid acetic =  $4,33 \text{ kmoli} \times 60 = 260 \text{ kg acid acetic } 100\%$   
 $260 \cdot \frac{100}{98} = 265,3 \text{ kg}$ .

Bazicitatea anilinei > *p*-nitroanilinei > 2,4-dinitroanilinei.

55°.a) Știind că cele trei hidrocarburi au în moleculă același număr de atomi de carbon, se pot scrie următoarele formule moleculare:

A :  $C_xH_y$  unde  $x$  = număr de atomi de carbon;

B :  $C_xH_z$   $z, y, u$  = număr de atomi de hidrogen.

C :  $C_xH_u$

Se calculează procentele de hidrogen:

$$\begin{array}{r} (12x + y) \text{ hidrocarbură A} \dots\dots\dots y \text{ g H} \\ 100 \dots\dots\dots 18,18 \\ \hline 100y = 18,18(12x + y) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (12x + z) \text{ g hidrocarbură B} \dots\dots\dots z \text{ g H} \\ 100 \dots\dots\dots 14,28 \\ \hline 100z = 14,28(12x + z) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (12x + u) \text{ hidrocarbură C} \dots\dots\dots u \text{ g H} \\ 100 \dots\dots\dots 10,00 \\ \hline 100u = 10(12x + u) \end{array}$$

Din enunț se știe că  $y = u + 4$  și înlocuind valoarea lui  $y$  din prima ecuație, obținem:

$$100u = 10(12x + u)$$

$$100(u + 4) = 18,18(12x + u + 4)$$

$$100u = 120x + 10u$$

$$90u = 120x$$

$$u = \frac{120x}{90}; u = \frac{4x}{3}$$

$$100\left(\frac{4x}{3} + 4\right) = 18,18\left(12x + \frac{4x}{3} + 4\right).$$

Rezolvând această ecuație, se găsește  $x = 3$ ; apoi se calculează  $u = 4$ ;  $y = 8, z = 6$ .

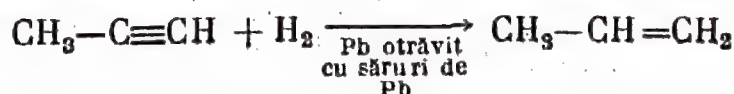
Deci formulele celor trei hidrocarburi sînt:

A :  $CH_3-CH_2-CH_3$  propan;

B :  $CH_2=CH-CH_3$  propenă;

C :  $CH\equiv C-CH_3$  propină.

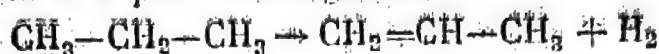
b) C se poate transforma în B prin hidrogenare parțială:



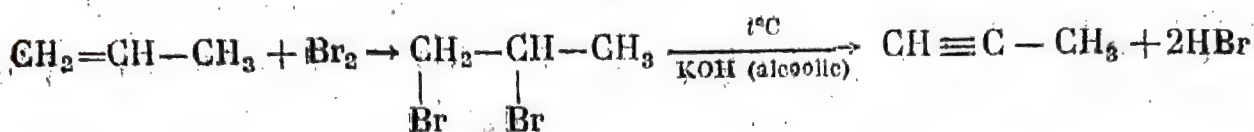
C se poate transforma în A prin hidrogenare completă:



A se transformă în B prin dehidrogenare:



B se transformă în C astfel:



56°. a) Se calculează volumul amestecului gazos măsurat în condiții normale

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{PV}{T} \Rightarrow V_0 = 56 \text{ dm}^3.$$

Se scade volumul ocupat de 2 moli etan ( $44,8 \text{ dm}^3$ ) în condiții normale și se află volumul ocupat de 21 g alchenă:

$$56 - 44,8 = 11,2 \text{ dm}^3.$$

Se calculează masa moleculară a alchenei:

11,2 dm <sup>3</sup> .....	21 g
22,4 dm <sup>3</sup> .....	M g (1 mol.)
M = 42	

$$\text{C}_n\text{H}_{2n} = 42 \Rightarrow n = 3 \text{ (propenă)}.$$



22,4 dm <sup>3</sup> propenă .....	22,4 dm <sup>3</sup> H <sub>2</sub>
11,2 dm <sup>3</sup> .....	x
x = 11,2 dm <sup>3</sup> H <sub>2</sub> .	

Volumul total de gaze (măsurat în condiții normale) va fi:

$$56 + 11,2 = 67,2 \text{ dm}^3.$$

Presiunea în cilindru va fi:

$$P_1 = \frac{67,2 \cdot 300}{22,4 \cdot 273} = 3,3 \text{ atm.}$$

c) La hidrogenarea a 5,6 dm<sup>3</sup> propenă (50%) se consumă 5,6 dm<sup>3</sup> din volumul de hidrogen (rezultând 5,6 dm<sup>3</sup> propan).

Volumul gazelor după hidrogenare (măsurat în condiții normale) va fi:

$$67,2 - 5,6 = 61,6 \text{ dm}^3$$

Presiunea în cilindru va fi în acest caz:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_2 V}{T_2} \Rightarrow P_2 = \frac{61,6 \cdot 350}{22,4 \cdot 273} = 3,52 \text{ atm.}$$



$$\begin{array}{lcl} \text{d)} & 42 \text{ g propenă} & \dots\dots\dots 1 \text{ mol} \\ & 21 \text{ g} & \dots\dots\dots x \\ \hline & & x = 0,5 \text{ moli propenă} \end{array}$$

In cilindru vor fi 2 moli etan și 0,5 moli propenă deci în total 2,5 moli.

$$\begin{array}{l} 2 \times 30 = 60 \text{ g (etan)} \\ 0,5 \times 42 = 21 \text{ g (propenă)} \end{array}$$

$$\bar{M} = \frac{60 + 21}{2,5} = 32,4.$$

57°. Se determină volumul ocupat de butan în condiții normale:

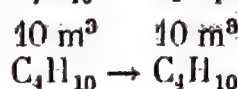
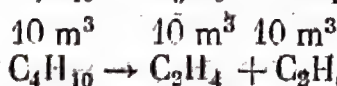
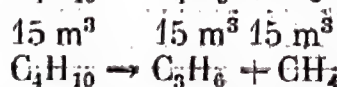
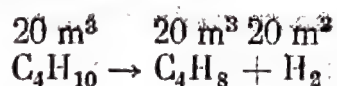
$$\begin{array}{lcl} 58 \text{ kg C}_4\text{H}_{10} & \dots\dots\dots & 22,4 \text{ m}^3 \\ 116 \text{ kg} & \dots\dots\dots & x \\ \hline & & x = 44,8 \text{ m}^3. \end{array}$$

Se determină presiunea în reaktor la începutul procesului ( $t = 546^\circ \text{C}$ )

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_1 V}{T} \rightarrow P = \frac{P_0 V_0 T}{V T_0} = \frac{44,8(546 + 273)}{56 \cdot 273}$$

$$P = 2,4 \text{ atm.}$$

Pentru a calcula presiunea la sfârșitul procesului ( $t = 546^\circ \text{C}$ ) se calculează mai întâi volumul total al gazelor rezultate:



$$\begin{array}{lcl} 55 \text{ m}^3 \text{ C}_4\text{H}_{10} & \dots\dots\dots & 100 \text{ m}^3 \text{ amestec gazos} \\ 44,8 \text{ m}^3 & \dots\dots\dots & x \\ \hline & & x = 81,45 \text{ m}^3 \text{ amestec gazos (în condiții normale)} \end{array}$$

$$P_f = \frac{81,45(546 + 273)}{56 \cdot 273} = 4,36 \text{ atm.}$$

58°. a, b) Se calculează formula moleculară a substanței b:

$$\text{C} : \frac{12}{12} = 1$$

$$\text{H} : \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{N} : \frac{2}{14} = 0,142$$

$$\text{O} : \frac{4,57}{16} = 0,282$$

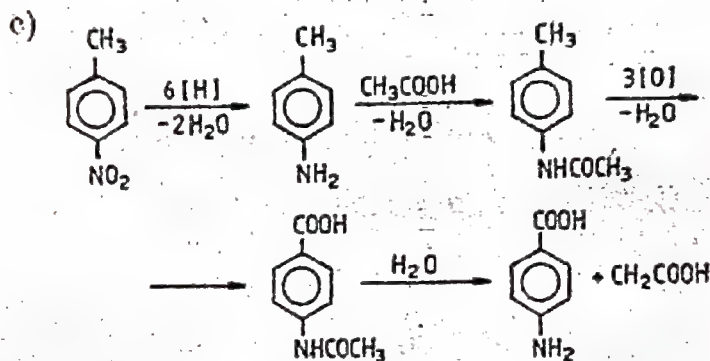
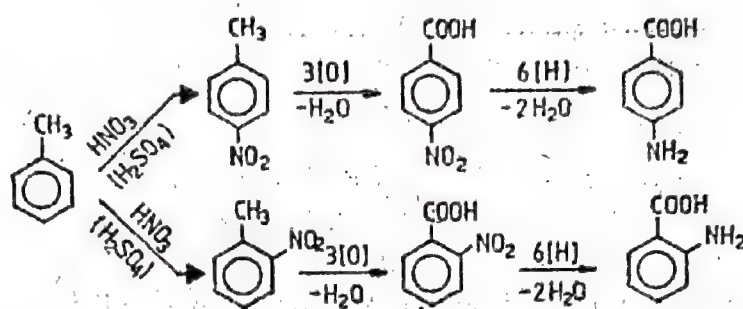
$\rightarrow \text{C}_7\text{H}_7\text{NO}_3$  (formula brută)

$$(\text{C}_7\text{H}_7\text{NO}_2)_n = 147 \Rightarrow n = 1$$

Deci formula moleculară este:



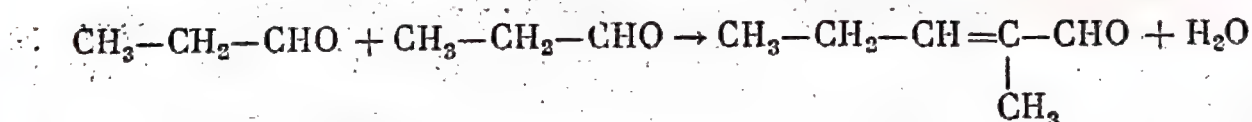
Având în vedere datele problemei și formula moleculară a substanței b, schema poate fi redată astfel:



59°. a) 16°. Se determină masa moleculară a substanței B:

100 g B .....	16,32 g O
M (4 moli) .....	16 g O
M = 98.	

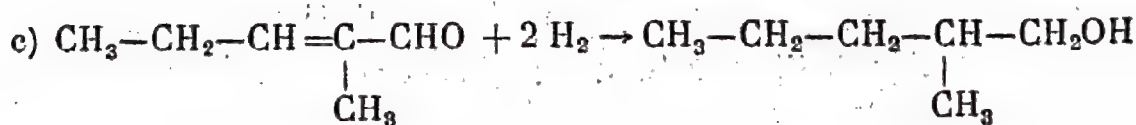
Formula generală a unei aldehide nesaturate (cum este B):  $C_nH_{2n-2}O$  rezultând pentru B,  $n = 6$ . (După valoarea masei moleculare a lui B este exclus ca aldehida A să fie aromatică.)



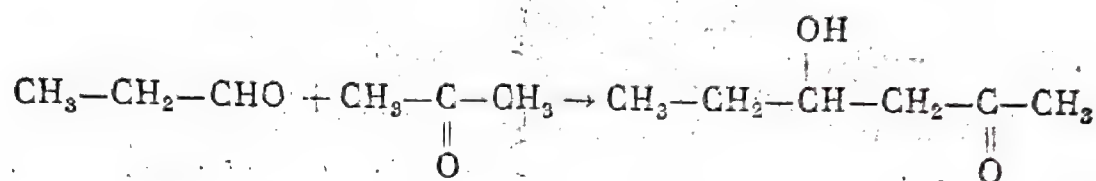
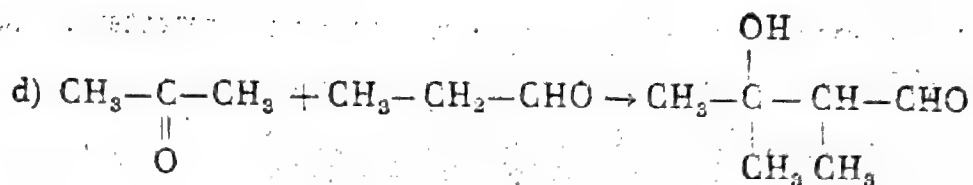
b)

2 kmoli A .....	1 kmol B
4 kmoli A .....	x
x = 2 kmoli B (randament 100%)	

$$\eta = \frac{1,5}{2} \cdot 100 = 75\%$$



1 kmol .....	2 · 22,4 m <sup>3</sup>
1,5 kmoli .....	x
x = 2 · 1,5 · 22,4 = 67,2 m <sup>3</sup> .	



60°. a) Se determină formula moleculară a substanței D:

$$\text{C} : \frac{136 \cdot 44,12}{12 \cdot 100} = 5;$$

$$\text{H} : \frac{136 \cdot 8,82}{1 \cdot 100} = 12;$$

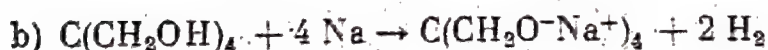
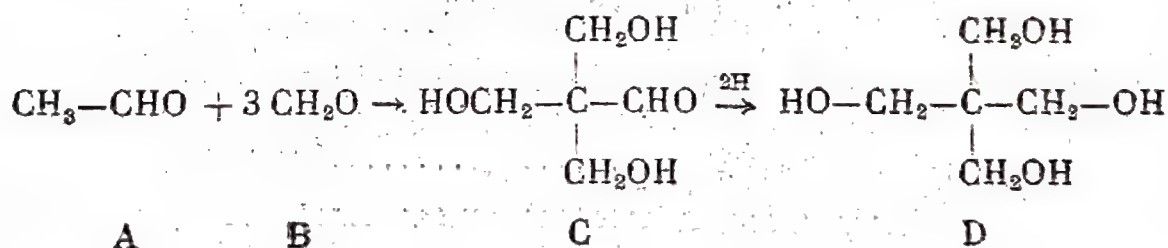
$$\text{O} : \frac{136 \cdot 47,05}{16 \cdot 100} = 4.$$

Formula moleculară:  $\text{C}_5\text{H}_{12}\text{O}_4$ .

Determinarea numărului de grupe hidroxil

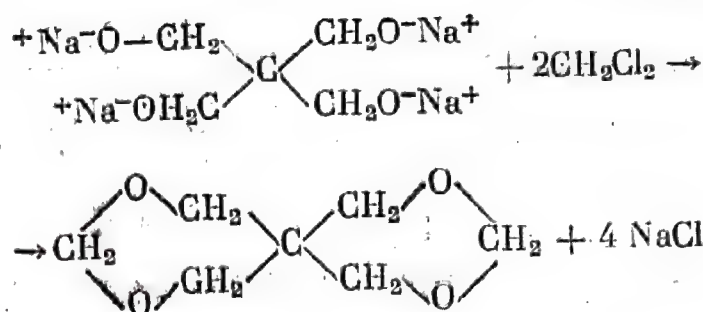
6,8 g D .....	20,4 g anhidridă acetică
136 g .....	$x_1$
$x_1 = 408 \text{ g anhidridă acetică} = 4 \text{ moli.}$	

Deci substanța D are patru grupe hidroxil. Ținând cont de modul de obținere a substanței D, formulele de structură ale substanțelor A, B, C și D și ecuațiile reacțiilor sint următoarele:



136 g .....	2,22,41 $\text{H}_2$
6,8 .....	$x_2$
$x_2 = 2,24 \text{ l } \text{H}_2$	





61°.  $\begin{array}{l} 1 \text{ dm}^3 \text{ soluție} \dots\dots\dots 0,8 \text{ moli NaOH} \\ 0,5 \text{ dm}^3 \dots\dots\dots x \end{array}$

---

$x = 0,4 \text{ moli NaOH.}$

Fiind vorba de un amestec echimolecular de acizi monocarboxilici, înseamnă că sînt cîte 0,2 moli din fiecare acid în amestec.

Formula generală a unui acid monocarboxilic saturat este  $\text{C}_n\text{H}_{2n}\text{O}_2$ . Se notează cu  $n$ , respectiv  $n'$ , numărul de atomi de carbon din molecula fiecărui acid și va rezulta:

$$0,2 (14n + 32) + 0,2 (14n' + 32) = 26,8$$

$$0,2 (14n + 31 + 23) - 0,2 (14n' + 31 + 23) = 2,8,$$

Rezolvînd sistemul se află  $n = 3$  și  $n' = 2$ .

Deci acizii sînt:  $\text{CH}_2\text{—CH}_2\text{—COOH}$  și  $\text{CH}_3\text{—COOH}$ .

În urma reacției rezultă 0,2 moli propionat de sodiu și 0,2 moli acetat de sodiu.

Compoziția procentuală va fi 46,06% acetat și 53,94% propionat.

62°. Formula generală a unui acid dicarboxilic saturat este:



iar cea a diclorurii sale acide este:



Calculînd procente de oxigen din cei doi compuși se obține:

$$\begin{array}{l}
 (14n + 90) \text{ g A} \dots\dots\dots 64 \text{ g O} \\
 100 \dots\dots\dots a
 \end{array}$$

$$a = \frac{6400}{14n + 90} \% \text{ O}$$

$$\begin{array}{l}
 (14n + 71 + 56) \text{ g B} \dots\dots\dots 32 \text{ g} \\
 100 \dots\dots\dots b
 \end{array}$$

$$b = \frac{3200}{14n + 127} \% \text{ O.}$$

Făcînd raportul procentelor de oxigen:

$$\frac{6400}{14n + 90} : \frac{3200}{14n + 127} = 2,71$$

$$\frac{(14n + 127) \cdot 2}{14n + 90} = 2,71$$

$$28n + 254 = 38n + 244$$

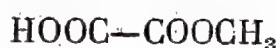
$$10n = 10$$

$$n = 1.$$

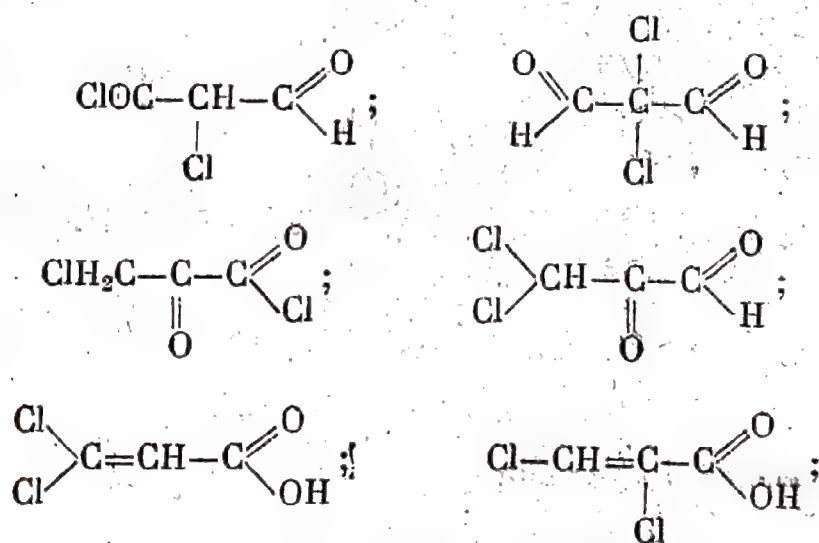
Deci formulele lui A și B sînt:



b) Formulele structurale ale izomerilor lui A și, respectiv, B sînt:  
Izomerii lui A:



Izomerii lui B:



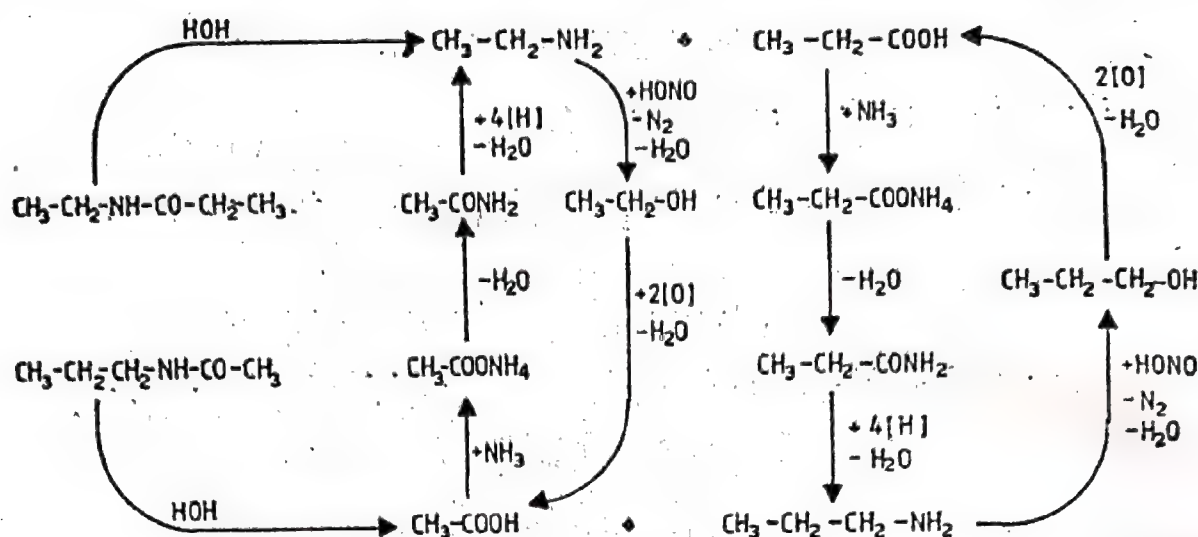
c) Din 104 kg A (1 kmol) ..... 2 kmoli HCl  
52 kg ..... x

$$x = 1 \text{ kmol HCl}.$$

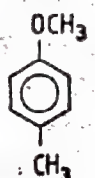
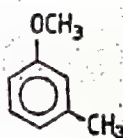
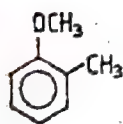
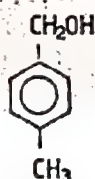
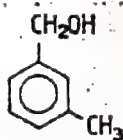
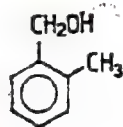
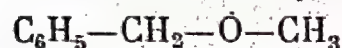
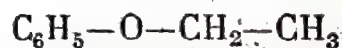
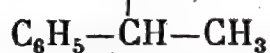
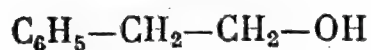
1 dm<sup>3</sup> soluție ..... 2 moli  
x ..... 1 000 moli

$$x = 500 \text{ dm}^3 \text{ soluție}.$$

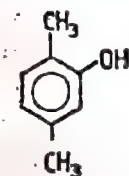
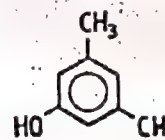
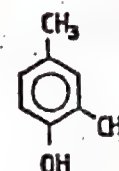
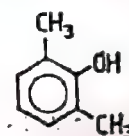
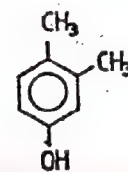
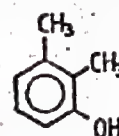
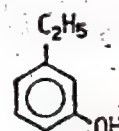
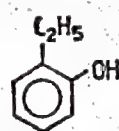
63°.



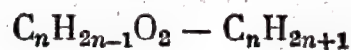
64°. Alcoolii și eteri



Fenoli



65°. Formula generală a esterului:



Se calculează procentul de hidrogen:

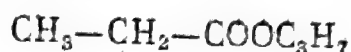
$$\frac{(12 \cdot 2n + 2n - 1 + 2n + 1 + 32) \text{ g ester} \dots \dots \dots 2n - 1 + 2n + 1}{100 \text{ g} \dots \dots \dots x_1}$$

$$x_1 = \frac{4n \cdot 100}{28n + 32} \% \text{ H.}$$

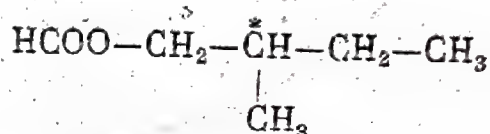
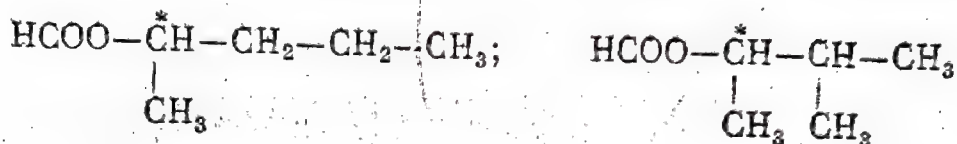
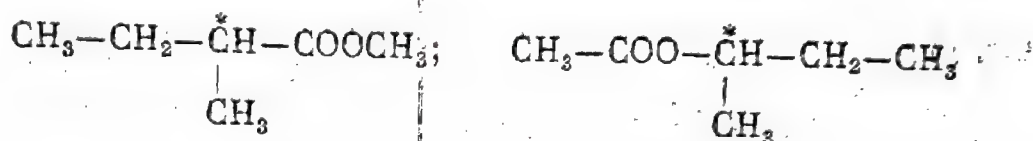
$$\frac{4n \cdot 100}{28n + 32} = 10,35 \Rightarrow n = 3$$



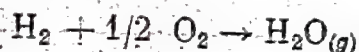
Deci formula moleculară a esterului va fi



Formulele esterilor optic activi:

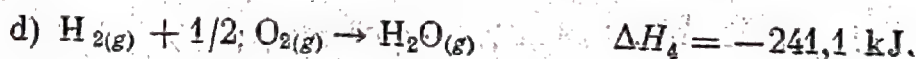
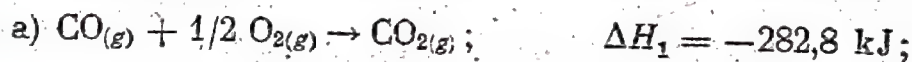


66°. a) Din energiile de legătură date se obține căldura de ardere a hidrogenului.

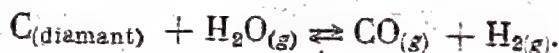


$$\Delta H_{\text{ardere H}_2}^0 = \varepsilon_{\text{H-H}} + 1/2 \varepsilon_{\text{O-O}} - 2\varepsilon_{\text{O-H}} = -241,1 \text{ kJ.}$$

Deci se dau următoarele reacții termochimice și efectele termice respective.



Se cere calculat efectul termic al reacției:



Aplicind metoda generală de rezolvare (metoda „coeficienților nedeterminați”) se găsește că înmulțind ecuațiile a), c) și d) cu  $-1$  și apoi adunându-le cu ecuația b) se obține chiar ecuația pentru care se cere calculat efectul termic. Deci:

$$\Delta^r H_{298}^0 = -\Delta H_1 + \Delta H_2 - \Delta H_3 - \Delta H_4 = 128,8 \text{ kJ.}$$

$$2) \Delta^r S_{298}^0 = S_{\text{CO}}^0 + S_{\text{H}_2}^0 - S_{(\text{diamant})}^0 - S_{\text{H}_2\text{O}_{(g)}}^0 = 137,2 \text{ J/mol} \cdot \text{K.}$$

$$3) \Delta^r G_T^0 = \Delta^r H_{298}^0 - T \Delta^r S_{298}^0.$$

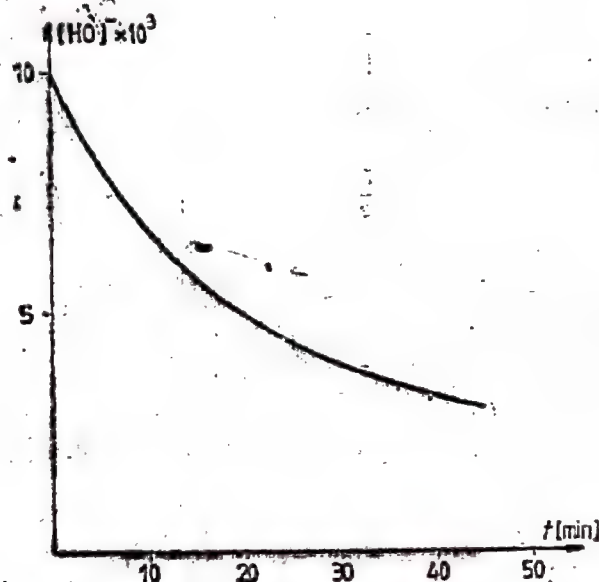
$$\text{Deci: } \Delta^r G_{1000}^0 = \Delta^r H_{298}^0 - 1000 \Delta^r S_{298}^0 = -8400 \text{ J.}$$

4)  $\Delta G_T^0 = -RT \ln K_p$ ; rezultă  $\ln K_p = \frac{-\Delta G_T^0}{RT} \simeq 1$ ;  $K_p = e$  (baza logaritmilor naturali).

$K_p = K_x \cdot P^{\Delta \nu}$ ;  $\Delta \nu$  este variația numărului de moli de gaz.

Rezultă:  $K_x = \frac{K_p}{P} = 1,359$ .

67°. a)



b) Se calculează viteza medie pe două intervale de timp, preferabil pe mijlocul intervalului, precum și concentrația medie pe aceleași intervale de timp:

$$\bar{v}_{5-9} = \frac{(8 - 6,9) \cdot 10^{-3}}{9 - 5} = 2,75 \cdot 10^{-4} \text{ mol/l} \cdot \text{min};$$

$$\bar{v}_{14-20} = \frac{(5,9 - 5,0) \cdot 10^{-3}}{20 - 14} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ mol/l} \cdot \text{min};$$

$$\bar{C}_{5-9} = \frac{8 + 6,9}{2} \cdot 10^{-3} = 7,45 \cdot 10^{-3} \text{ mol/l};$$

$$\bar{C}_{14-20} = \frac{5,9 + 5}{2} \cdot 10^{-3} = 5,45 \cdot 10^{-3} \text{ mol/l}.$$

Dacă  $n$  este ordinul parțial de reacție în raport cu hidroxidul, iar  $m$  cel în raport cu esterul, atunci concentrațiile inițiale ale reactanților fiind egale ele rămân egale în tot timpul și deci se poate scrie:

$$\bar{v}_{5-9} = k[\bar{C}_{5-9}]^{n+m}$$

și

$$\bar{v}_{14-20} = k[\bar{C}_{14-20}]^{n+m}.$$

Făcând raportul acestor două viteze medii se obține:

$$\frac{\bar{v}_{5-9}}{\bar{v}_{14-20}} = \left[ \frac{\bar{C}_{5-9}}{\bar{C}_{14-20}} \right]^{n+m} \text{ adică } \frac{2,75 \cdot 10^{-4}}{1,5 \cdot 10^{-4}} = \left[ \frac{7,45}{5,45} \right]^{n+m}$$

Efectuind calculele rezultă:

$$1,833 = (1,367)^{n+m}$$

de unde:

$$n + m = \frac{\ln 1,833}{\ln 1,367} \approx 2$$

adică ordinul total de reacție este 2.

c) Se calculează valorile constantei de viteză pentru cele două intervale de timp alese (eventual se mai fac calcule și pentru alte intervale de timp) și se ia valoarea medie obținută pentru constanta de viteză:

$$k_1 = \frac{\bar{v}_{5-9}}{(\bar{C}_{5-9})^2} = \frac{2,75 \cdot 10^{-4} \text{ mol/l} \cdot \text{min}}{(7,45 \cdot 10^{-3})^2 \text{ mol}^2/\text{l}^2} = 4,95 \text{ l/mol} \cdot \text{min}.$$

Analog avem:

$$k_2 = \frac{\bar{v}_{14-20}}{(\bar{C}_{14-20})^2} = 5,05 \text{ l/mol} \cdot \text{min}.$$

Rezultă astfel valoarea medie a constantei de viteză, la 27°C,  $k=5 \text{ l/mol} \cdot \text{min}$ .

Pentru a găsi valoarea acestei constante la 57°C, se folosește ecuația lui Arrhenius.

$$k = A \cdot e^{-E_a/RT}$$

în care  $E_a$  este energia de activare, iar  $A$ , factorul de frecvență, practic independent de temperatură. Aplicind relația pentru cele două temperaturi se obține:

$$k_{27^\circ\text{C}} = A \cdot e^{-E_a/R \cdot 300}$$

$$k_{57^\circ\text{C}} = A \cdot e^{-E_a/R \cdot 330}$$

Făcînd raportul rezultă:

$$\frac{k_{57^\circ\text{C}}}{k_{27^\circ\text{C}}} = e^{\frac{E_a}{R} \left( \frac{1}{300} - \frac{1}{330} \right)}$$

de unde înlocuind valorile numerice se obține:

$$k_{57^\circ\text{C}} = 64,2 \text{ l/mol} \cdot \text{min}.$$

68°. a) Formula moleculară a sării este:  $\text{Me}_2(\text{SO}_4)_3$  și dacă  $A$  este masa atomică a metalului atunci:  $2A + 3 \cdot 96 = 342$  de unde  $A = 27$ . Deci metalul este aluminiul.

Numărul de kmoli de aluminiu este  $\frac{810}{27} = 30$  kmoli.

În urma reacției:



vor rezulta 15 kmoli sulfat de aluminiu, adică 5 130 kg.



b) Gazul rezultat este hidrogenul. Vor rezulta 45 kmoli  $H_2$  adică

$$45 \cdot 22,4 = 1\,008 \text{ m}^3 \text{ (c.n.)}$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{2}{22,4} = 0,0893 \text{ g/l} = 0,0893 \text{ kg/m}^3$$

$$d_{\text{aer}} = \frac{M_{H_2}}{28,9} = 0,0692.$$

c) În reacție s-au consumat 45 kmoli  $H_2SO_4$ , adică 4 410 kg. Soluția utilizată conține  $9\,000 \cdot \frac{50}{100} = 4\,500$  kg acid. Deci cantitatea rămasă după reacție este  $4\,500 - 4\,410 = 90$  kg  $H_2SO_4$ .

d) Ecuația reacției de neutralizare:

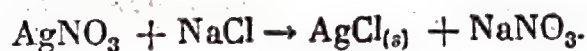


Numărul de moli de  $H_2SO_4$  ce se neutralizează este  $\frac{90\,000}{98} = 918,37$  moli și deci numărul de moli de  $NaOH$  necesar va fi  $2 \times 918,37 = 1\,836,74$  moli.

Soluția de  $NaOH$  conținând 2 mol/l, volumul ei va fi:

$$918,37 \text{ l} = 0,91837 \text{ m}^3.$$

69°. a) Ecuația reacției:



Fie  $m$  masa soluțiilor care se amestecă. Cantitatea de  $AgNO_3$  din soluție va fi:

$$m_1 = \frac{3,4 m}{100} \text{ g } AgNO_3.$$

Cantitatea de  $NaCl$  care reacționează cu această cantitate de  $AgNO_3$  este:

$$\begin{array}{rcl} 170 \text{ g } AgNO_3 & \dots\dots\dots & 58,5 \text{ g } NaCl \\ \frac{3,4 m}{100} \text{ g } AgNO_3 & \dots\dots\dots & m_2 \\ \hline & & m_2 = 1,17 \cdot 10^{-2} m \text{ g } NaCl. \end{array}$$

Deci concentrația soluției de  $NaCl$  este.

$$c\% = \frac{1,17 \cdot 10^{-2} m}{m} \cdot 100 = 1,17\%.$$

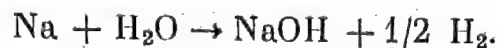
b) Din reacție rezultă  $\frac{3,4 m}{100} \cdot \frac{1}{170} \cdot 85 \text{ g } NaNO_3$ .

Neglijind masa cantității de AgCl care precipită față de masa soluțiilor amestecate, concentrația soluției de  $\text{NaNO}_3$  este:

$$c\% = \frac{1}{2} \cdot \frac{3,4}{m} \cdot \frac{85}{170} \cdot 100 = 0,85\% \text{ NaNO}_3.$$

70°. a) Soluția conține 20 g NaOH și 80 g apă.

Sodiul adăugat va reacționa cu apa și va forma o altă cantitate de hidroxid conform reacției:



Cantitatea de NaOH formată va fi:

$$\begin{array}{lcl} 23 \text{ g Na} & \dots\dots\dots & 40 \text{ g NaOH} \\ x \text{ g Na} & \dots\dots\dots & m_1 \text{ g NaOH} \end{array}$$

$$m_1 = \frac{40 x}{23} \text{ g NaOH.}$$

Masa de hidrogen degajată din reacție este:

$$\begin{array}{lcl} 23 \text{ g Na} & \dots\dots\dots & 1 \text{ g H}_2 \\ x \text{ g Na} & \dots\dots\dots & m_2 \text{ g H}_2 \end{array}$$

$$m_2 = \frac{x}{23} \text{ g H}_2 \text{ degajat.}$$

Deci masa soluției rezultate este:  $100 + X - \frac{X}{23}$ .

Această soluție conține  $\left(20 + \frac{40 X}{23}\right)$  g NaOH.

Punînd condiția ca soluția să aibă concentrația 40% se obține:

$$\frac{20 + \frac{40 X}{23}}{100 + X - \frac{X}{23}} = \frac{40}{100}.$$

Rezolvînd ecuația se obține:  $X = 17,74$  g Na, iar  $Y = 114,1$  g soluție.

b) Cantitatea de NaOH din soluția obținută este:

$$\frac{40 \cdot 17,74}{23} = 25,62 \text{ g NaOH} = 0,64 \text{ moli.}$$

Pentru neutralizarea acestei cantități de NaOH sînt necesari 0,32 moli de acid sulfuric care se vor găsi în 0,32 l soluție de concentrație 2 N (sau 1 M).

Deci volumul soluției de NaOH este  $\frac{0,32 \text{ l}}{7} = 45,7 \text{ cm}^3$ .

Molaritatea soluției de NaOH este:  $\frac{0,64 \text{ moli}}{45,7 \cdot 10^{-3} \text{ l}} = 14 \text{ mol/l.}$

Rezultă că soluția de NaOH de concentrație 40% are concentrația molară 14 M, iar normalitatea ei va fi tot 14 N.

71°. Formula moleculară a oxidului metalului tetravalent este  $\text{MeO}_2$ .

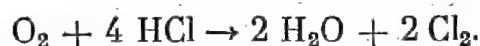
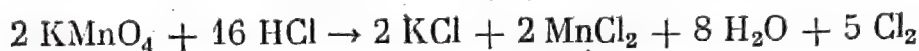
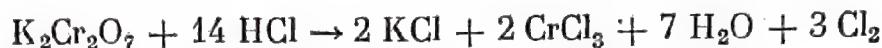
Fie A masa atomică a acestui metal.

Atunci:

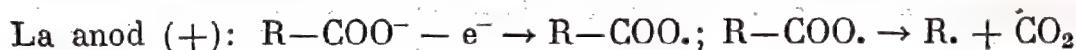
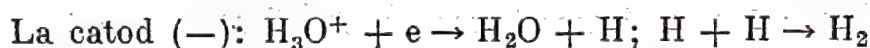
$$\begin{array}{rcl} (A + 32) \text{ g oxid} & \dots\dots\dots & A \text{ g metal} \\ 100 \text{ g oxid} & \dots\dots\dots & 63,22 \text{ g metal} \\ \hline 100 A = 63,22(A + 32), \text{ de unde } A = 55 \end{array}$$

deci metalul este manganul, iar D este  $\text{MnO}_2$ .

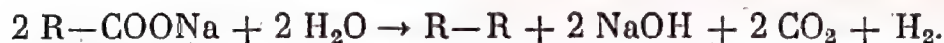
Reacțiile din schemă sint următoarele:



72°. a) La electroliza soluției sării de sodiu a unui acid monocarboxilic au loc reacțiile:



Reacția globală este:

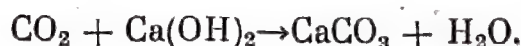


Deci la anod se degajă o hidrocarbură și  $\text{CO}_2$ , în raport molar 1 : 2. Notînd prin  $\bar{M}$  masa moleculară a hidrocarburii, a cărei fracție molară în amestecul de gaze degajat la anod este  $1/3$ , cea a dioxidului de carbon fiind  $2/3$ , masa moleculară medie a acestui amestec este:

$$\bar{M} = \frac{1}{3} M + \frac{2}{3} \cdot 44 = 39,33$$

de unde rezultă  $M = 30$  și deci hidrocarbura formată este etanul ( $\text{CH}_3-\text{CH}_3$ ), adică radicalul R este  $\text{CH}_3$ . Așadar, sarea electrolizată este acetatul de sodiu,  $\text{CH}_3\text{COONa}$ .

$\text{CO}_2$  este barbotat în apă de var în care este reținut



Deci creșterea masei soluției fiind 440 g, rezultă că la electroliză s-au format 440 g  $\text{CO}_2$ , adică 10 moli. Conform reacției globale a procesului de electroliză la un mol de sare rezultă 1 mol de  $\text{CO}_2$  și prin urmare au fost supuși electrolizei 10 moli de acetat de sodiu, adică  $10 \cdot 82 = 820$  g  $\text{CH}_3\text{COONa}$ .

b) La catod se degajă 5 moli de  $\text{H}_2$  adică 112 l (c.n.).



c) Randamentul de curent poate fi definit ca raportul dintre sarcina electrică consumată util ( $Q_u$ ) și sarcina electrică totală transferată prin sistem, adică  $Q_{\text{total}} = It$ .

$$\text{Deci } \eta = \frac{Q_u}{It} \cdot 100\%.$$

$Q_u$  se poate calcula din cantitatea de  $\text{CO}_2$  rezultată, un mol de  $\text{CO}_2$  fiind egal cu un echivalent, deoarece pentru formarea unei molecule de  $\text{CO}_2$  este necesar un singur electron.

Deci:

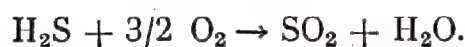
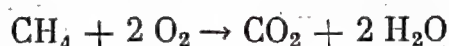
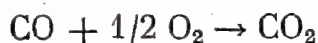
$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ mol } \text{CO}_2 & \dots\dots\dots & 96\,500 \text{ C} \\ 10 \text{ moli} & \dots\dots\dots & Q_u \\ \hline & & Q_u = 965\,000 \text{ C.} \end{array}$$

Rezultă:

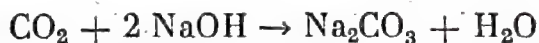
$$\eta = \frac{965\,000}{40 \cdot 500 \cdot 60} \cdot 100 = 80,4\%.$$

73°. a) Fie:  $x$  — numărul de moli de  $\text{CO}$ ,  $y$  — numărul de moli de  $\text{CH}_4$  și, respectiv,  $z$ , numărul de moli de  $\text{H}_2\text{S}$  din amestecul dat.

Reacțiile de ardere sînt:



La absorbția gazelor de ardere în soluția de  $\text{NaOH}$  vor avea loc reacțiile:



Numărul de moli de oxigen consumat la ardere va fi  $1/4$  din numărul de mol de azot rămas, adică  $\frac{1}{4} \cdot \frac{1043,84}{22,4} = 11,65$  moli  $\text{O}_2$ .

Pe baza acestor date se alcătuieste următorul sistem de ecuații:

$$28x + 16y + 34z = 167,4$$

$$\frac{1}{2}x + 2y + \frac{3}{2}z = 11,65$$

$$x + y = 80z$$

Rezolvînd sistemul se obține:

$$x = 3 \text{ moli } \text{CO};$$

$$y = 5 \text{ moli } \text{CH}_4;$$

$$z = 0,1 \text{ moli } \text{H}_2\text{S}.$$

b) Numărul de moli de  $\text{CO}_2$  rezultat la ardere este  $x + y = 8$  moli care vor reacționa cu 16 moli de  $\text{NaOH}$ . Deci în total se consumă 16,2 moli  $\text{NaOH} = 648$  g.

Masa soluției de  $\text{NaOH}$  utilizată este:

$$648 \cdot \frac{100}{32,4} = 2000 \text{ g soluție.}$$

Creșterea masei soluției este egală cu masa de  $\text{CO}_2$  și de  $\text{SO}_2$  absorbit, adică:

$$= 8,44 + 0,1 \cdot 64 = 358,4 \text{ g.}$$

În procente, această creștere va fi:

$$\frac{358,4}{2000} \cdot 100 = 17,92\%.$$

74°. Cele două reacții fiind de izomerizare, substanțele B și C sînt izomere, deci au aceeași masă moleculară și ca atare raportul de masă în care rezultă este raportul vitezelor cu care ele se formează. Fie, în caz general, acest raport egal cu  $r$ :

$$r = \frac{m_B}{m_C} = \frac{v_B}{v_C}$$

unde  $v_B$  și  $v_C$  reprezintă respectiv vitezele cu care se formează compuşii B și C din S. Conform ecuației lui Arrhenius:

$$v_B = k_1[S] = A_1 \cdot e^{-E_{a1}/RT} \cdot [S]$$

$$v_C = k_2[S] = A_2 \cdot e^{-E_{a2}/RT} \cdot [S]$$

în care  $[S]$  reprezintă concentrația substanței S care este, evident, aceeași pentru ambele reacții.

Făcînd raportul lor se obține:

$$r = \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{e^{-E_{a1}/RT}}{e^{-E_{a2}/RT}} = \frac{A_2}{A_1} \cdot e^{\frac{1}{RT}(E_{a2} - E_{a1})}$$

sau:

$$e^{\frac{1}{RT}(E_{a2} - E_{a1})} = r \cdot \frac{A_1}{A_2}$$

adică:

$$\frac{1}{RT}(E_{a2} - E_{a1}) = \ln \left( r \frac{A_2}{A_1} \right)$$

de unde:

$$T = \frac{E_{a2} - E_{a1}}{R \ln \left( r \frac{A_2}{A_1} \right)}$$

Înlocuind valorile numerice pentru cele două cazuri se obține:

$$a) \quad T = \frac{10^4 \text{ J/mol}}{8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \ln 4} = \frac{10^4}{8,31 \cdot 2 \ln 2} = 868 \text{ K};$$

$$b) \quad T = \frac{10^4 \text{ J/mol}}{8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \ln (8 \cdot 4)} = \frac{10^4}{8,31 \cdot 5 \ln 2} = 347 \text{ K}.$$

75°. a) Aplicând „metoda coeficienților nedeterminați” se găsește că reacția de formare a etenei din elemente:



se poate obține din ecuațiile date prin înmulțirea acestora cu câte un coeficient și apoi adunarea lor. Acești coeficienți sint:

- 1 pentru prima reacție;
- 0 pentru a doua reacție;
- +2 pentru a treia reacție;
- +2 pentru a patra reacție.

Rezultă că:

$$\Delta^f H_{298}(\text{C}_2\text{H}_4) = -1(\Delta H_1) + 2 \Delta H_3 + 2 \Delta H_4 = +52,1 \text{ kJ}.$$

b) Condiția de spontaneitate a unei reacții este:

$$\Delta^r G_T^0 < 0.$$

$$\text{Dar } \Delta^r G_T^0 = \Delta^r H_{298}^0 - T \Delta^r S_{298}^0.$$

Pentru reacția 2) variația de entropie va fi:

$$\Delta^r S_{298}^0 = S_{\text{C}_2\text{H}_4}^0 - S_{\text{H}_2\text{O}}^0 - S_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}}^0 = -128,8 \text{ J/mol K}$$

$$\Delta^r G_T^0 = -40,6 \cdot 10^3 - 323 (-128,8) \approx 1000 \text{ J} > 0$$

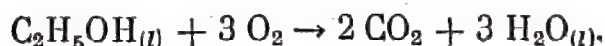
deci reacția 2) nu este spontană la 50°C.

c) Temperatura maximă până la care reacția 2) este spontană se determină din condiția  $\Delta^r G^0 = 0$  adică

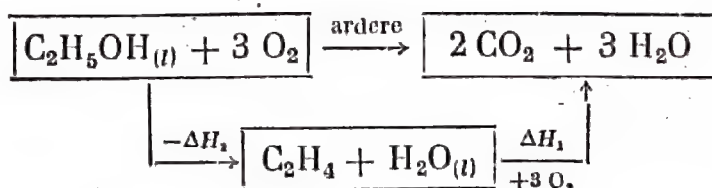
$$\Delta^r H_{298}^0 - T \Delta^r S_{298}^0 = 0 \text{ și } T = \frac{\Delta^r H_{298}^0}{\Delta^r S_{298}^0} = 315 \text{ K}.$$

Deci reacția (2) va fi spontană până la maximum 42°C.

d) Pentru a determina căldura de ardere a etanolului lichid se folosește reacția de ardere:



Aplicând legea lui Hess, se poate alcătui următorul ciclu:





Rezultă că  $\Delta H_{\text{ardere}}^0 = \Delta H_1 - \Delta H_2 = -1369,1 \text{ kJ}$ .

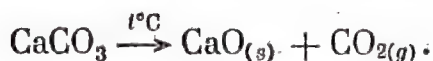
Așadar la arderea unui mol de etanol lichid se degajă 1369,1 kJ.

Masa celor 28,75 cm<sup>3</sup> etanol lichid este:

$$m = \rho \cdot V = 23 \text{ g} = 1/2 \text{ moli } C_2H_5OH.$$

Deci la arderea acestei cantități de etanol vor rezulta  $1/2 \Delta H_{\text{ardere}}^0 = 684,55 \text{ kJ}$ .

76°. a) La încălzirea puternică a  $CaCO_3$  va rezulta evident oxid de calciu solid:



Cum residuul solid conține o singură substanță, poate conține numai CaO. Aceasta înseamnă că proba inițială, pe lângă  $CaCO_3$  poate conține numai fie CaO fie un alt compus care prin încălzire formează tot CaO ca produs solid.

Din aceste date rezultă că proba inițială conține numai  $CaCO_3$  și CaO, deoarece se degajă numai  $CO_2$ .

Volumul de  $CO_2$  degajat la încălzire este  $\frac{0,352}{44} \cdot 22,4 \text{ l} = 0,1792 \text{ l (c.n.)}$  ceea ce reprezintă 0,008 moli. Deci proba inițială conținea 0,008 moli  $CaCO_3$ , care reprezintă 0,8 g  $CaCO_3$  și 0,2 g CaO.

Masa de calciu din probă va fi:  $\frac{0,8}{100} \cdot 40 + \frac{0,2}{56} \cdot 40 = 0,4629 \text{ g Ca}$ .

Masa carbonului va fi:  $\frac{0,8}{100} \cdot 12 = 0,096 \text{ g C}$ .

Masa oxigenului va fi:  $\frac{0,8}{100} \cdot 48 + \frac{0,2}{56} \cdot 16 = 0,4411 \text{ g O}$ .

Rezultă compoziția procentuală a elementelor din probă:

46,29% Ca; 9,60% C și 44,11% O.

77°. a) Din densitate se calculează masa molară medie a amestecului:

$$pV = \frac{m}{\bar{M}} RT; \quad \bar{M} = \frac{m}{V} \frac{RT}{p} = \rho \frac{RT}{p};$$

$$\bar{M} = 1,405 \frac{\text{g}}{\text{l}} \cdot \frac{0,082 \frac{\text{l} \cdot \text{atm}}{\text{mol K}} \cdot 300 \text{ K}}{1,2 \text{ atm}} = 28,8 \text{ g/mol}.$$

Fracția molară a azotului în amestec este 0,8, deci a celuilalt gaz este 0,2. Dacă  $\bar{M}$  este masa moleculară a gazului necunoscut avem:

$$\bar{M} = 0,8 \cdot 28 + 0,2 \bar{M} = 28,8.$$

Rezultă  $\bar{M} = 32 \text{ g/mol}$ .

Substanța fiind elementară, înseamnă că este oxigenul.

b) Compoziția amestecului în procente de volum este 80%  $N_2$  și 20%  $O_2$ .

Pentru a determina compoziția în procente de masă considerăm 100 l amestec și calculăm masa fiecărui component:

$$m_{N_2} = \frac{80}{22,4} \cdot 28 = 100 \text{ g } N_2;$$

$$m_{O_2} = \frac{20}{22,4} \cdot 32 = 28,57 \text{ g } O_2.$$

Masa totală a celor 100 l amestec este 128,57 g. Deci, amestecul conține în procente de masă:

$$\frac{100}{128,57} \cdot 100 = 77,78\% N_2;$$

$$\frac{28,57}{128,57} \cdot 100 = 22,22\% O_2.$$

78°. Masa protoxidului de azot format este:

$$m_1 = \frac{3,36}{22,4} \cdot 44 = 6,6 \text{ g.}$$

Masa apei rezultate la descompunere este deci:

$$m_2 = 12,00 - 6,6 = 5,4 \text{ g.}$$

Se calculează masa fiecărui element component al substanței descompuse:

$$m_N = \frac{6,6}{44} \cdot 28 = 4,2 \text{ g;}$$

$$m_O = \frac{6,6}{44} \cdot 16 + \frac{5,4}{18} \cdot 16 = 7,2 \text{ g;}$$

$$m_H = \frac{5,4}{18} \cdot 2 = 0,6 \text{ g.}$$

Numărul de atomi-gram din fiecare element este:

$$N : \frac{4,2}{14} = 0,3;$$

$$O : \frac{7,2}{16} = 0,45;$$

$$H : \frac{0,6}{1} = 0,6.$$

Împărțind prin cel mai mic dintre ei se obține formula brută:



Se amplifică toată formula cu 2 pentru a obține coeficienți întregi și a avea astfel o formulă moleculară posibilă:



Această formulă moleculară corespunde evident azotatului de amoniu:  $\text{NH}_4\text{NO}_3$ .

79°. a) Dacă  $X$  este procentul molar, spre exemplu al oxigenului, atunci fracția molară a acestuia va fi  $\frac{X}{100}$ , iar cea a heliului

$$\left(1 - \frac{X}{100}\right) = \frac{100 - X}{100}$$

Masa molară medie a unui asemenea amestec este:

$$\bar{M} = \frac{X}{100} \cdot 32 + \frac{100 - X}{100} \cdot 4 = \frac{28X + 400}{100}$$

Densitatea amestecului va fi:

$$\rho = \frac{\bar{M}}{V_M}$$

unde volumul molar trebuie calculat în condițiile problemei, adică la presiunea  $p$  și temperatura  $T$ .

$$\frac{p_0 V_{M_0}}{T_0} = \frac{p V_M}{T} \text{ de unde: } V_M = \frac{p_0 V_{M_0} T}{T_0 p} \text{ și înlocuind:}$$

$$p_0 = 1 \text{ atm; } V_{M_0} = 22,4 \text{ l și } T_0 = 273 \text{ K se obține:}$$

$$V_M = 0,082 \cdot \frac{T}{p}, \text{ iar densitatea va fi:}$$

$$\rho = \frac{(28X + 400)p}{100(0,082 T)} \text{ g/l}$$

pentru  $p$  în atm și  $T$  în K.

$$\text{b) } X = \frac{1}{28} \left[ \frac{100 \rho (0,082 T)}{p} - 400 \right] = 48,5.$$

Deci compoziția amestecului de densitate  $\rho = 0,72 \text{ g/l}$  la  $25^\circ\text{C}$  și  $1 \text{ atm}$  este: 48,55%  $\text{O}_2$  și 51,45%  $\text{He}$  (în procente molare sau procente de volum).

c) Punind  $\Delta\rho = \pm 0,005 \text{ g/l}$  și considerind  $p = 1 \text{ atm}$ , iar  $T = 298 \text{ K}$  rezultă.

$$X = 87,27(\rho \pm 0,005) - 14,29 = 87,27\rho - 14,25 \pm 0,44.$$

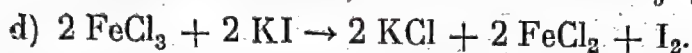
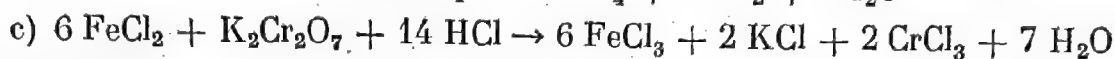
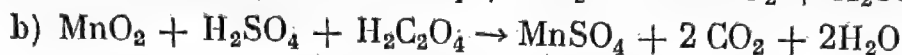
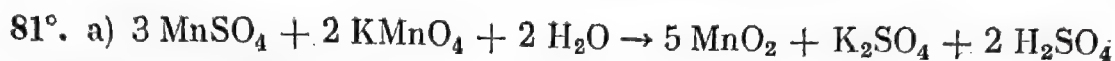
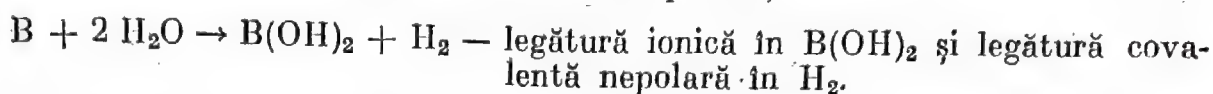
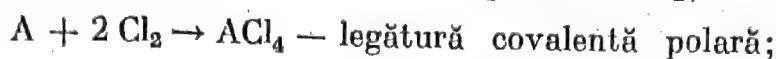
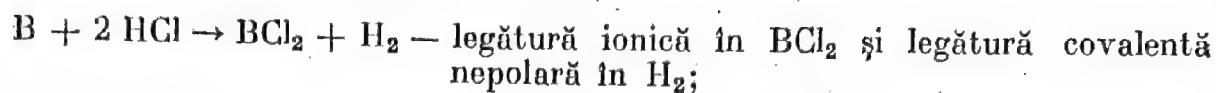
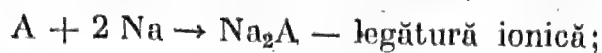
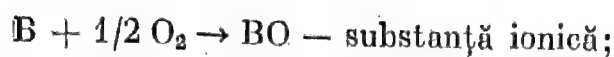
Deci precizia determinării în acest caz este  $\pm 0,44\%$ .

$$80^\circ. \text{ A: } Z = 16; 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$$

$$\text{B: } Z = 56; 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^6 6s^2.$$

$\text{A} + \text{O}_2 \rightarrow \text{AO}_2$  — legătură covalentă polară;





În reacția a) echivalentul  $KMnO_4$  este  $1/3$  moli deoarece manganul trece de la starea de oxidare  $+7$  la  $+4$ .

Numărul de moli de  $KMnO_4$  din soluția utilizată este:

$$\frac{2,5}{1\,000} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2,5}{3} \cdot 10^{-3} \text{ moli.}$$



$$X = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ moli de } MnSO_4 \text{ care conține } 1,25 \cdot 10^{-3} \cdot 55 = 6,875 \cdot 10^{-3} \text{ g Mn.}$$

Deci procentul de mangan în proba analizată este:

$$\%Mn = \frac{6,875 \cdot 10^{-3}}{0,2747} \cdot 100 = 25 \%.$$

Echivalentul  $K_2Cr_2O_7$  în reacția c) este  $1/6$  moli deoarece cromul trece de la starea de oxidare  $+6$  la  $+3$  și în moleculă sint doi atomi de crom care transferă împreună 6 electroni. Deci în soluția utilizată sint:

$$\frac{5}{1\,000} \cdot \frac{0,1}{6} = \frac{0,5}{6} \cdot 10^{-3} \text{ moli } K_2Cr_2O_7.$$

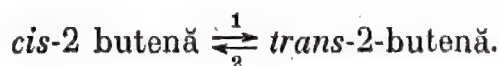


$$X = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ moli } FeCl_2 \text{ care conțin } 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 56 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ g Fe.}$$

Procentul de fier din proba analizată va fi:

$$\%Fe = \frac{28 \cdot 10^{-3}}{0,1117} \cdot 100 = 25 \%.$$

82°. Se consideră reacția de izomerizare:



Dacă se are în vedere reacția (1) și faptul că  $\Delta H^\circ_{\text{ardere}} = -Q_{\text{ardere}}$  variația de entalpie va fi:

$$\Delta^r H^\circ_{298} = \Delta H^\circ_{\text{ardere (cis-2-butenă)}} - \Delta H^\circ_{\text{ardere (trans-2-butenă)}} = -4,4 \text{ kJ.}$$

Pentru a stabili sensul spontan în condiții standard, se calculează variația de entropie și apoi de entalpie liberă:

$$\Delta^r S^\circ_{298} = S^\circ_{(\text{trans-2-butenă})} - S^\circ_{(\text{cis-2-butenă})} = -4,3 \text{ J/molK}$$

$$\Delta^r G^\circ_{298} = \Delta^r H^\circ_{298} - T \Delta^r S^\circ_{298}.$$

Punând  $T = 298 \text{ K}$  se obține:

$$\Delta^r G^\circ_{298} = -3,12 \cdot 10^3 \text{ J/mol} < 0.$$

Deci reacția (1) este spontană în condiții standard și ca atare poate avea loc spontan izomerizarea *cis*-2-butenei în *trans*-2-butenă.

b) Scăderea energiei de activare a reacției catalizate va modifica valoarea constantei de viteză

$$k_0 = Ae^{-E_a/RT} \text{ și } k_{\text{cat}} = Ae^{-(E_a - \Delta E_a)/RT}.$$

Rezultă:

$$\frac{v_{\text{cat}}}{v_0} = \frac{k_{\text{cat}}}{k_0} = \frac{Ae^{-(E_a - \Delta E_a)/RT}}{Ae^{-E_a/RT}} = e^{\Delta E_a/RT}.$$

Înlocuind valorile numerice se obține:

$$\frac{v_{\text{cat}}}{v_0} = e^{6,931} = (e^{\ln 2})^{10} = 2^{10} = 1024.$$

Deci viteza reacției catalizate este de 1024 de ori mai mare decât a celei necatalizate.

$$83^\circ. \text{ a) } \Delta H^\circ_{1000} = 35040 \text{ J;}$$

$$\Delta S^\circ_{1000} = 32,11 \text{ J/molK;}$$

$$\Delta G^\circ_{1000} = \Delta H^\circ - T \Delta S^\circ = 35040 - 1000 \cdot 32,11 = 2930 \text{ J.}$$

$$\text{b) } \Delta G^\circ_T = -RT \ln K_p$$

$$\ln K_p = -\frac{\Delta G^\circ_T}{RT} = -\frac{2930}{8314} = -0,352418.$$

$$K_p = 0,703.$$

c) Deoarece reacția are loc fără variația numărului de moli, rezultă:  $K_x = K_p = K_c$  (adimensionale).

d) Compoziția inițială a amestecului gazos este:

$$X_{0(\text{CO})} = 0,45; X_{0(\text{H}_2)} = 0,35; X_{0(\text{H}_2\text{O})} = 0,20; X_{0(\text{CO}_2)} = 0,00.$$

Notind cu  $X$  fracția molară a lui  $\text{CO}_2$  în starea de echilibru a sistemului, celelalte fracții molare devin:

$$X_{(\text{CO})} = 0,45 - X; X_{(\text{H}_2\text{O})} = 0,20 - X; X_{(\text{H}_2)} = 0,35 + X;$$

$$K_p = K_x = \frac{X_{(\text{CO})} \cdot X_{(\text{H}_2\text{O})}}{X_{(\text{CO}_2)} \cdot X_{(\text{H}_2)}} = \frac{(0,45 - X)(0,20 - X)}{X(0,35 + X)} = 0,703.$$

Rezolvând ecuația se obține:  $X = 0,104$ .

Deci la echilibru, compoziția în procente de volum va fi: 34,6%  $\text{CO}$ ; 9,6%  $\text{H}_2\text{O}$ ; 45,4%  $\text{H}_2$  și 10,4%  $\text{CO}_2$ .

(Procentele de volum pentru un amestec gazos se obțin prin înmulțirea fracțiilor molare cu 100.)

e) Conform legii lui Kirchhoff, efectul termic al unei reacții chimice la o anumită temperatură este dat de relația:

$$\Delta H_T^0 = \Delta H_{T_0}^0 + \int_{T_0}^T \Delta C_p \cdot dT$$

unde

$$\Delta C_p = \sum C_{p(\text{produs})} - \sum C_{p(\text{reactanți})}$$

este variația capacității calorice molare la presiune constantă în cursul reacției  
Deci:

$$\Delta H_{1400}^0 = \Delta H_{1000}^0 + \int_{1000}^{1400} \Delta C_p \cdot dT.$$

Calcularea lui  $\Delta C_p$  conduce la valoarea:

$$\Delta C_p = C_{p(\text{CO})} + C_{p(\text{H}_2\text{O})} - C_{p(\text{CO}_2)} - C_{p(\text{H}_2)} = -11,28 + 1,52 \cdot 10^{-3} T.$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} \Delta H_{1400}^0 &= H_{1000}^0 + \int_{1000}^{1400} (-11,28 + 1,52 \cdot 10^{-3} T) dT = \\ &= H_{1000}^0 - \int_{1000}^{1400} 11,28 dT + \int_{1000}^{1400} 1,52 \cdot 10^{-3} T dT. \end{aligned}$$

Calculând integralele și introducând valorile numerice se obține:

$$\Delta H_{1400}^0 = H_{1000}^0 - 4\,512 + 729,6 = 31\,257,6 \text{ J.}$$

Deci la 1 400 K reacția este mai slab endotermă, adică va consuma mai puțină energie decât la temperatura de 1 000 K.

f) Conform izobarei de reacție a lui Van't Hoff  $\frac{\partial \ln K_p}{\partial T} = \frac{\Delta H}{RT^2}$  sau prin integrare:

$$(\ln K_p)_{T_2} - (\ln K_p)_{T_1} = - \frac{\Delta H}{R} \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right).$$

Dacă  $T_2 > T_1$  și  $\Delta H > 0$  rezultă că  $\ln K_p$  la temperatura  $T_2$  este mai mare decât  $\ln K_p$  la temperatura  $T_1$ , adică la creșterea temperaturii crește și  $K_p$ , deci echilibrul se va deplasa în sensul formării produsilor de reacție CO și H<sub>2</sub>O (spre dreapta).

Aceeași concluzie rezultă aplicînd principiul Le Châtelier: creșterea temperaturii va favoriza reacția endotermă, adică formarea de CO și H<sub>2</sub>O.

84°. a) Substanța solidă conține elementele Na și I deoarece:

— culoarea galbenă pe care o capătă flacăra unui bec de gaz la introducerea substanței indică prezența sodiului;

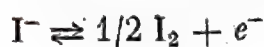
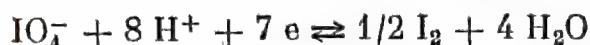
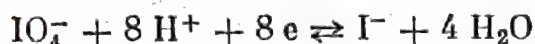
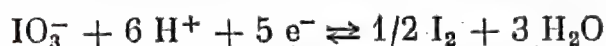
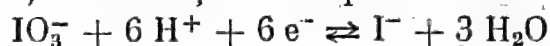
— sarea de argint de culoare galbenă care poate fi dizolvată cu agenți complexanți puternici ca CN<sup>-</sup> și S<sub>2</sub>O<sub>3</sub><sup>2-</sup> poate fi numai AgI.

b) Reacțiile de la punctele 1)–4) arată că este vorba de sarea de sodiu a unui acid oxigenat al iodului.

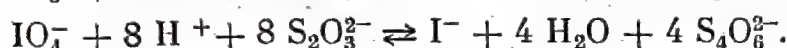
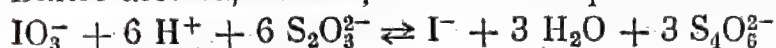
Atît SO<sub>2</sub> cit și I<sup>-</sup> sînt oxidați. În primul caz se formează I<sup>-</sup> prin intermediul moleculelor de I<sub>2</sub> (sau mai exact I<sub>3</sub><sup>-</sup>) de culoare brună intensă. Și în al doilea caz se formează I<sub>2</sub> (sau I<sub>3</sub><sup>-</sup>). Avînd în vedere faptul că soluția substanței analizate este neutră nu poate fi vorba decît de sarea de sodiu a unui acid tare, deci pot fi luate în considerare doar NaIO<sub>3</sub> și NaIO<sub>4</sub>. Masele moleculare ale acestor substanțe sînt: 197,90 pentru iodatul de sodiu și, respectiv, 213,90 pentru periodatul de sodiu.



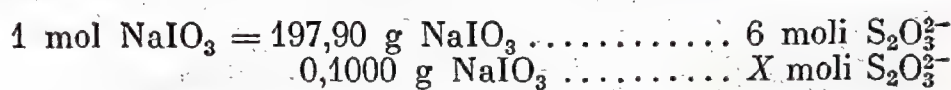
c) Semireacțiile care pot fi avute în vedere ar fi:



Dintre acestea, ca reacții redox ce ar putea avea loc, ar fi de exemplu:



d) Experiența arată că 0,1000 g compus reacționează cu  $3,74 \cdot 10^{-3}$  moli  $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ .  
Prima ipoteză: compusul este  $\text{NaIO}_3$ .



$$X = \frac{0,1 \cdot 6}{197,90} = 3,032 \cdot 10^{-3} \text{ moli S}_2\text{O}_3^{2-}$$

ceea ce nu corespunde datelor experimentale.

A doua ipoteză: compusul este  $\text{NaIO}_4$ .



$$Y = \frac{0,1 \cdot 8}{213,9} = 3,740 \cdot 10^{-3} \text{ moli S}_2\text{O}_3^{2-}$$

ceea ce corespunde datelor problemei.

Deci substanța solidă analizată este  $\text{NaIO}_4$ , adică periodatul de sodiu.

$$85^\circ. \text{ a) } [\text{Ca}^{2+}] \cdot [\text{C}_2\text{O}_4^{2-}] = K_s \text{ (1); } [\text{H}^+] \cdot [\text{OH}^-] = K_{\text{H}_2\text{O}} \quad (2)$$

$$\frac{[\text{H}^+] \cdot [\text{HC}_2\text{O}_4^-]}{[\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4]} = K_{a_1} \text{ (3); } \frac{[\text{H}^+] \cdot [\text{C}_2\text{O}_4^{2-}]}{[\text{HC}_2\text{O}_4^-]} = K_{a_2} \quad (4)$$

$$\text{b) } s = [\text{Ca}^{2+}] = [\text{C}_2\text{O}_4^{2-}] + [\text{HC}_2\text{O}_4^-] + [\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4] \quad (5)$$

$$C = [\text{H}^+] + [\text{HC}_2\text{O}_4^-] + 2[\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4] - [\text{OH}^-] \quad (6)$$

Una dintre ecuațiile (5) sau (6) poate fi înlocuită prin:

$$[\text{H}^+] + 2[\text{Ca}^{2+}] = [\text{HC}_2\text{O}_4^-] + 2[\text{C}_2\text{O}_4^{2-}] + [\text{HO}^-] + [C] \quad (7)$$

c) Solubilitatea oxalatului monohidrat este  $6,7 \cdot 10^{-3} \text{ g/dm}^3$  (calculată din ecuația (8)).

d) Prin eliminarea concentrațiilor speciilor oxalat cu ajutorul ecuațiilor (1), (3) și (4) și neglijând concentrația ionilor  $\text{HO}^-$  din (5) și (6) se obține:

$$s^2 = K_s + \frac{[\text{H}^+] \cdot K_s}{K_{a_1}} + \frac{[\text{H}^+]^2 \cdot K_s}{K_{a_1} \cdot K_{a_2}} \quad (8)$$

$$C = [\text{H}^+] + \frac{[\text{H}^+] \cdot K_s}{s \cdot K_{a_2}} + \frac{2[\text{H}^+]^2 \cdot K_s}{s \cdot K_{a_1} \cdot K_{a_2}} \quad (9)$$

Dacă se elimină  $s$  între ecuațiile (8) și (9) se obține ecuația de gradul patru. Este mult mai convenabil să se aplice o metodă iterativă.

Într-o primă aproximație, se poate considera

$[H^+] = C$  și cu această valoare a lui  $[H^+]$  se calculează:

—  $s$  din (8) și

— ultimii doi termeni din (9) care sunt termeni corectivi. Prin aceasta ecuația (9) conduce la o nouă valoare a lui  $[H^+]$ , care se utilizează pentru următoarea iterație.

După două iterații se obțin următoarele rezultate:

$$s = 6,6 \cdot 10^{-4} \text{ mol/dm}^3 \simeq 9,6 \cdot 10^{-2} \text{ g/dm}^3.$$

$$[H^+] = 9,3 \cdot 10^{-3} \text{ mol/dm}^3.$$

$$e) [Ca^{2+}] = 6,6 \cdot 10^{-4} \text{ mol/dm}^3;$$

$$[Cl^-] = 0,010 \text{ mol/dm}^3;$$

$$[HO^-] = 1,1 \cdot 10^{-12} \text{ mol/dm}^3;$$

$$[C_2O_4^{2-}] = 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ mol/dm}^3;$$

$$[HC_2O_4^-] = 5,7 \cdot 10^{-4} \text{ mol/dm}^3;$$

$$[H_2C_2O_4] = 9,0 \cdot 10^{-5} \text{ mol/dm}^3.$$

86°. 1. Pentru reacția de la punctul a) se poate determina ordinul:

— dacă presupunem reacția de ordinul I

$$k = \frac{1}{t} \ln \frac{a}{a-x}$$

$t$	$k \cdot 10^2$
10	1,625
20	1,505
30	1,436
45	1,288
60	1,189
80	1,084
100	1,022

$k$  nefiind constant, reacția nu este de ordinul I;

— dacă presupunem reacția de ordinul II (concentrațiile reactanților fiind egale la momentul inițial):

$$k = \frac{1}{t} \left( \frac{1}{a-x} - \frac{1}{a} \right)$$

$t$	$k$
10	0,176
20	0,176
30	0,179
45	0,175
60	0,173
80	0,173
100	0,178

$k$  avînd aproximativ o valoare constantă, reacția satisface ecuația cinetică pentru ordinul II, deci ordinul de reacție este 2.

Pentru reacția de la punctul b) timpul de înjumătățire fiind independent de concentrația inițială, înseamnă că reacția este de ordinul 1:

$$k = \frac{1}{t} \ln \frac{a}{a-x} = \frac{1}{t_{1/2}} \ln \frac{a}{a - \frac{a}{2}} = \frac{1}{t_{1/2}} \ln 2.$$

Deci reacția de la punctul b) este de ordinul 1.

Reacția de la punctul c) avind același mecanism va fi tot de ordinul 1.

2. Valoarea constantei de viteză a reacției de la punctul a) este media valorilor obținute la punctul precedent:

$$k = 0,176 \text{ dm}^3 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}.$$

3. Pentru determinarea energiilor de activare calculăm valoarea constanței de viteză,  $k'$  la 35°C.

Pentru reacții de ordinul II relația dintre constanta de viteză și timpul de înjumătățire este:

$$k = \frac{1}{t} \left( \frac{1}{a-x} - \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{t_{1/2}} \cdot \left( \frac{1}{a - \frac{a}{2}} - \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{t_{1/2}} \cdot \frac{1}{a}.$$

Cunoscând timpul de înjumătățire la 35°C și concentrația inițială  $a = 0,1 \text{ mol/dm}^3$  (prin amestecarea volumelor egale, din cele două soluții, concentrația fiecăreia se reduce la jumătate), calculăm constanta de viteză  $k'$  la 35°C:

$$k' = \frac{1}{21} \cdot \frac{1}{0,1} = 0,476 \text{ dm}^3 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}.$$

Deci energia de activare a reacției de la punctul a) va fi:

$$E_a = R \ln \frac{k'}{k} \cdot \frac{T' \cdot T}{T' - T} = 8\,314 \ln \frac{0,476}{0,176} \cdot \frac{308 \cdot 298}{308 - 298}$$

$$E_a = 7,592 \cdot 10^7 \text{ J} \cdot \text{kmol}^{-1} = 18,16 \text{ kcal} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Pentru reacția de la punctul b) care este de ordinul I, se determină valorile constantei de viteză la cele două temperaturi, din valorile timpului de înjumătățire:

$$k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}.$$

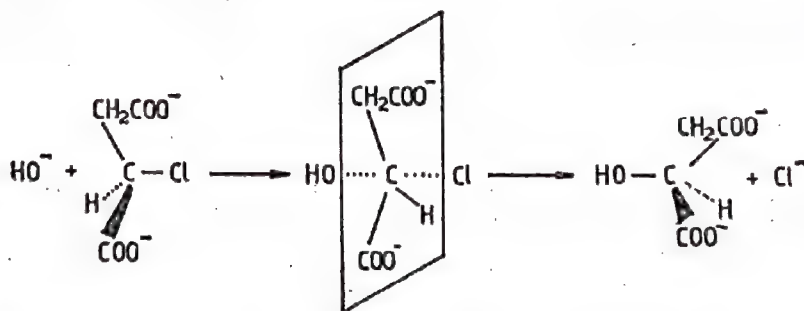
$$\text{La } 25^\circ\text{C: } k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{\ln 2}{32} = 2,166 \cdot 10^{-2} \text{ min}^{-1}.$$

$$\text{La } 35^\circ\text{C: } k' = \frac{\ln 2}{11} = 6,301 \cdot 10^{-2} \text{ min}^{-1}.$$

Deci energia de activare va fi:

$$E_{(b)} = 8\,314 \ln \frac{6,301 \cdot 10^{-2}}{2,166 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{308 \cdot 298}{308 - 298} = 8,149 \cdot 10^7 \text{ J/kmol} = 19,5 \text{ kcal/mol}.$$

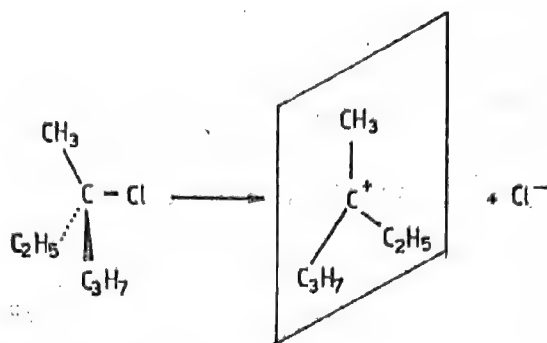
4. Produsul reacției de hidroliză, în cazul reacției de la punctul a) va deveni dextrogir datorită inversiei de configurație:



Reacția, fiind de tipul SN<sub>2</sub>, decurge prin intermediul stării de tranziție; la trecerea în stare finală se produce o inversie de configurație a atomului de carbon asimetric. Deci dacă reactantul este levogir, produsul reacției va deveni dextrogir.

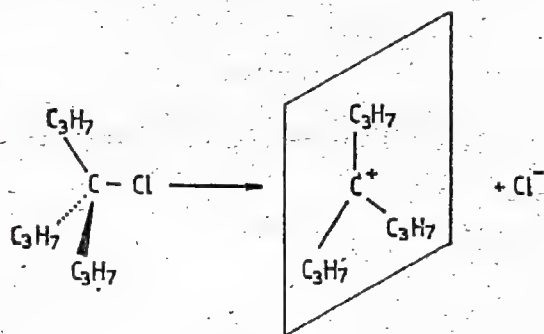


5. Reacția de la punctul b) este monomoleculară, SN-1; deci ea are loc prin intermediul formării unui carbocation relativ stabil, etapă care este determinantă de viteză:



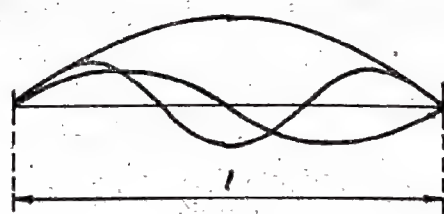
Structura cea mai probabilă a carbocationului este cea plană. Acest carbocation poate fi atacat de reactantul nucleofil (ionul  $\text{OH}^-$ ) din ambele părți ale planului cu aceeași probabilitate și, ca urmare, produsul reacției se va obține sub formă de amestec racemic, deci nu va poseda activitate optică, fiind inactiv prin compensație intermoleculară.

6. În cazul reacției de la punctul c) lucrurile se petrec în mod analog ca la punctul precedent, deosebirea constind însă în repulsia mai accentuată dintre substituenți care sînt mai voluminoși și deci tendința mai pronunțată de a trece sub forma carbocationului cu structură plană, în care repulsia este mai mică.



Aceasta duce la creșterea vitezei etapei de formare a carbocationului și deci a vitezei de ansamblu a reacției.

87°. 1.



$$2. \quad l = n \cdot \frac{1}{2} \lambda \quad \text{sau} \quad \lambda = 2l/n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$3. \quad E_k = \frac{1}{2} \cdot mv^2 = \frac{p^2}{2m}; \quad p = h/\lambda; \quad E_k = h^2 n^2 / 8ml^2.$$

4.  $k$  electroni, orbitale ocupate pînă la  $n_{\max} = 1/2 k$  ( $k$  par). Prima orbitală neocupată  $n_{\max} + 1 = 1/2 k + 1$ .

$$\begin{aligned} \Delta E = h\nu = E_k(1/2 k + 1) - E(1/2 k) &= \frac{h^2}{8ml^2} [(1/2 k + 1)^2 - (1/2 k)^2] = \\ &= \frac{h^2}{8ml^2} (k + 1); \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{8mcl^2}{k(k + 1)}. \end{aligned}$$

5. Pentru  $N$  (număr par), lungimea  $l = (N - 1) a$ ; numărul de electroni  $k = N$ .

$$\text{Înlocuind în 4) rezultă: } \lambda = \frac{8 mc (N - 1)^2 a^2}{h(N + 1)}.$$

6. Este necesar  $\lambda > 400 \text{ nm}$ ; de la  $\lambda > 4 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ .

I. Pentru  $N$  par avem:

$$\frac{8 mc (N - 1)^2 a^2}{h(N + 1)} > 4 \cdot 10^{-7}$$

$$\frac{(N - 1)^2}{(N + 1)} > \frac{4 \cdot 10^{-7} \cdot 6,63 \cdot 10^{-34}}{8 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 108 (1,42 \cdot 10^{-10})^2} > 6,02.$$

I<sub>1</sub>. Se încearcă

$N$	6	7	8	9
$\frac{(N - 1)^2}{N + 1}$	$\frac{25}{7}$	$\frac{36}{8}$	$\frac{49}{9}$	$\frac{81}{10}$

Primul număr care satisface este 9, dar s-a presupus  $N$  par. Din această cauză  $N = 10$ .

I<sub>2</sub>. Se calculează

$$N^2 - 2N + 1 > 6,02(N + 1)$$

$$N^2 - 8,02N - 5,02 > 0$$

$$N_{1,2} = \frac{8,02 \mp \sqrt{8,02^2 + 4 \cdot 5,02}}{2} = \frac{1}{2}(8,02 + 9,19) = 8,60$$

$$N > 8,60 \text{ și par, deci } N = 10.$$

II. Pentru  $N$  impar:

$$\text{II}_1. \frac{(N - 1)^2}{N} > 6,02 \text{ (vezi I)}$$

Se încearcă

$N$	7	8
$\frac{(N - 1)^2}{N}$	$\frac{36}{7}$	$\frac{49}{8}$

Primul număr care satisface este  $N = 8$ , dar am presupus impar și de aceea  $N = 9$ .

II<sub>2</sub>. Se calculează  $N^2 - 2N + 1 > 6,02N$

$$N^2 - 8,02N + 1 > 0$$

$$N = \frac{8,02 \mp \sqrt{8,02^2 - 4}}{2} = \frac{1}{2}(8,02 + 7,77) = 7,89;$$

$$N > 7,89 \text{ și impar de aceea } N = 9$$

$N = 9$  este răspunsul corect.

Dacă se ia în considerație și stabilitatea, răspunsul este  $N = 10$  deoarece pentru  $N = 9$  avem un radical care este foarte reactiv.

7. Pentru 5—6 și 7—8 unghiul este  $59^\circ$ , iar pentru 11—12 și 13—14 este  $39^\circ$ . Numai dacă acesta ar fi de  $90^\circ$  am putea neglija complet efectul dublelor legături între  $C_5$  și  $C_6$ ;  $C_{13}$  și  $C_{14}$ ;  $C_{15}$  și  $O$ . Cu cât  $l$  este mai mare cu atât mai mare este și  $\lambda$ . Unghiurile nefiind de  $90^\circ$  „cutia” va fi mai mare.

8. Numai atunci când  $C_5$  și  $C_6$  sînt forțate în același plan, lungimea „cutiei” devine:

$$l = 0,700 + 0,133 + 0,150 = 0,983 \text{ nm și } k = 8.$$

Pentru

$$\lambda = 3,30 \cdot 10^{12} \frac{l^2}{k+1} \dots = 3,30 \cdot 10^{12} \frac{(0,983 \cdot 10^{-9})^2}{9} = 354 \text{ nm.}$$

Dar nu este suficient și forțând  $C_{13}$  și  $C_{14}$  în plan rezultă același răspuns, adică insuficient. Atunci  $C_5$ ,  $C_6$ ,  $C_{13}$  și  $C_{14}$  în plan:

Atunci  $l = 0,70 + 0,133 + 0,155 + 0,148 + 0,135 = 1,27 \text{ nm}$  și  $k = 10$ .

$$\lambda = 3,30 \cdot 10^{12} \frac{(1,27 \cdot 10^{-9})^2}{11} = 484 \text{ nm.}$$

Dar tot nu este suficient. Deci  $C_{15}$  și O de asemenea în plan:

$$l = 1,27 + 0,148 = 1,418 \text{ nm}; k = 12$$

$$\lambda = 3,30 \cdot 10^{12} \frac{(1,418 \cdot 10^{-9})^2}{13} = 602 \text{ nm}$$

ceea ce se observă și experimental. Pe baza acestui model  $C_{15}$  și O sînt forțați în-

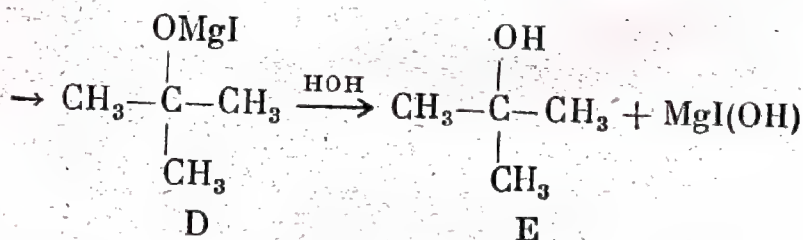
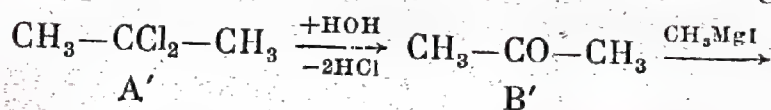
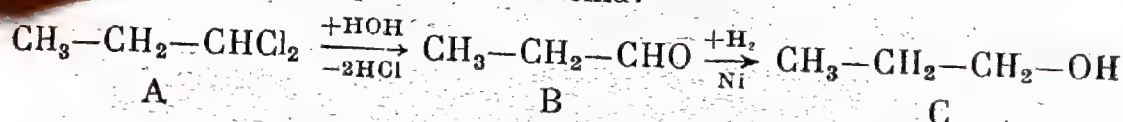
tr-un plan.

88°. Determinarea formulei moleculare:

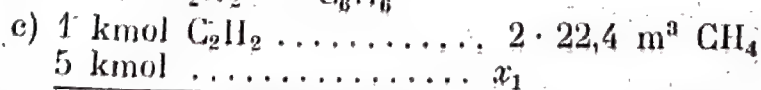
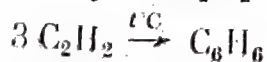
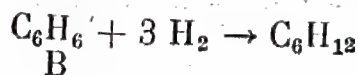
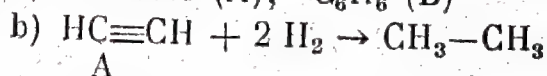
$$C : \frac{31,86}{12} = 2,655; \quad H : \frac{5,31}{1} = 5,31; \quad Cl : \frac{62,83}{35,5} = 1,769$$

$$C : H : Cl = 3 : 6 : 2; \quad C_3H_6Cl_2.$$

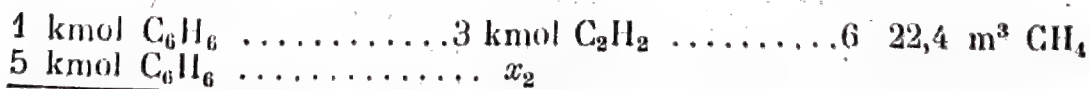
Ecuațiile reacțiilor cuprinse cu schemă:



89°. a)  $HC \equiv CH$  (A);  $C_6H_6$  (B)



$$x_1 = 224 \text{ m}^3 CH_4.$$



$$x_2 = 672 \text{ m}^3 CH_4.$$



Pentru

$$\lambda = 3,30 \cdot 10^{12} \frac{l^3}{k+1} \dots = 3,30 \cdot 10^{12} \frac{(0,983 \cdot 10^{-9})^3}{9} = 354 \text{ nm.}$$

Dar nu este suficient și forțând  $C_{13}$  și  $C_{14}$  în plan rezultă același răspuns, adică insuficient. Atunci  $C_5$ ,  $C_6$ ,  $C_{13}$  și  $C_{14}$  în plan:

$$l = 0,70 + 0,133 + 0,155 + 0,148 + 0,135 = 1,27 \text{ nm și } k = 10.$$

Atunci

$$\lambda = 3,30 \cdot 10^{12} \frac{(1,27 \cdot 10^{-9})^3}{11} = 484 \text{ nm.}$$

Dar tot nu este suficient. Deci  $C_{15}$  și O de asemenea în plan:

$$l = 1,27 + 0,148 = 1,418 \text{ nm; } k = 12$$

$$\lambda = 3,30 \cdot 10^{12} \frac{(1,418 \cdot 10^{-9})^3}{13} = 602 \text{ nm}$$

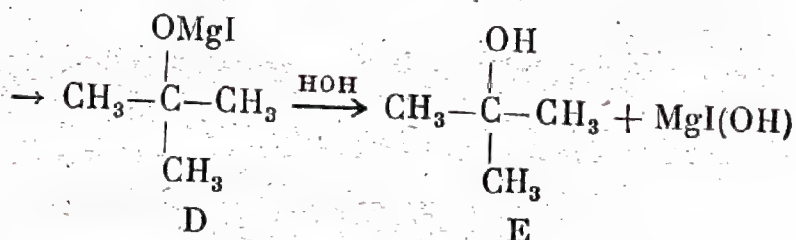
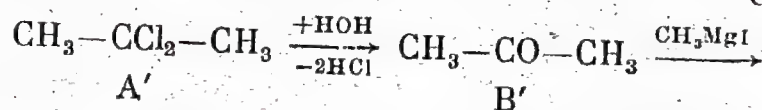
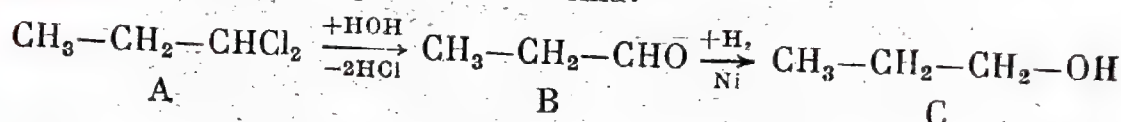
ceea ce se observă și experimental. Pe baza acestui model  $C_{15}$  și O sînt forțați într-un plan.

88°. Determinarea formulei moleculare:

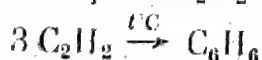
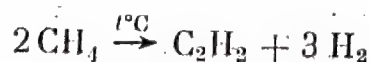
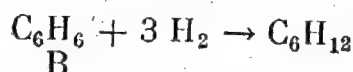
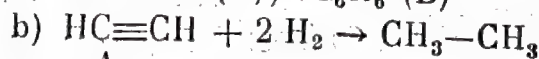
$$C : \frac{31,86}{12} = 2,655; \quad H : \frac{5,31}{1} = 5,31; \quad Cl : \frac{62,83}{35,5} = 1,769$$

$$C : H : Cl = 3 : 6 : 2; \quad C_3H_6Cl_2$$

Ecuatiile reacțiilor cuprinse cu schemă:

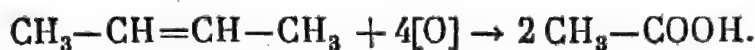
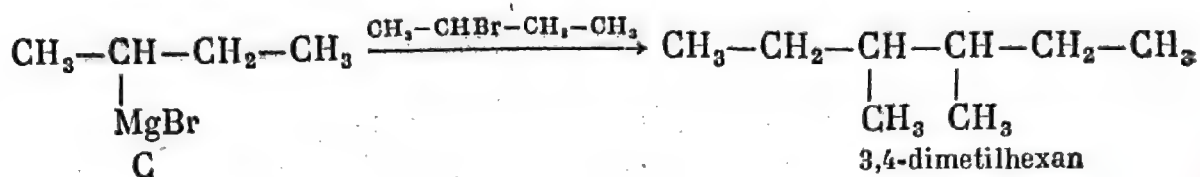
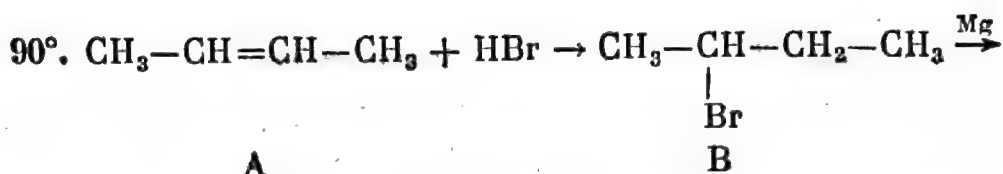


89°. a)  $HC \equiv CH$  (A);  $C_6H_6$  (B)



$$\begin{array}{lcl} c) & 1 \text{ kmol } C_2H_2 & \dots\dots\dots 2 \cdot 22,4 \text{ m}^3 CH_4 \\ & 5 \text{ kmol } & \dots\dots\dots x_1 \\ & \hline & x_1 = 224 \text{ m}^3 CH_4. \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} & 1 \text{ kmol } C_6H_6 & \dots\dots\dots 3 \text{ kmol } C_2H_2 \dots\dots\dots 6 \cdot 22,4 \text{ m}^3 CH_4 \\ & 5 \text{ kmol } C_6H_6 & \dots\dots\dots x_2 \\ & \hline & x_2 = 672 \text{ m}^3 CH_4. \end{array}$$



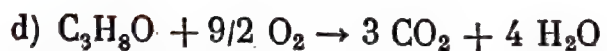
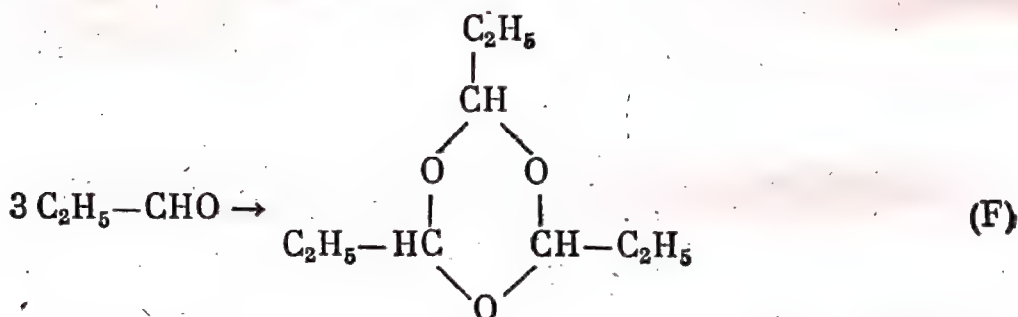
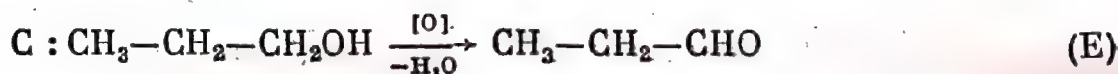
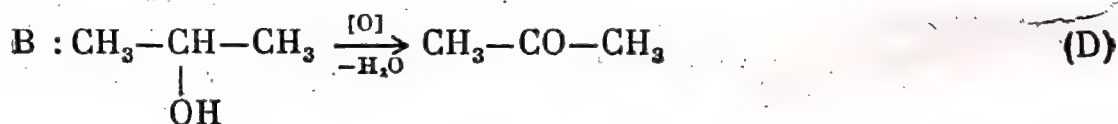
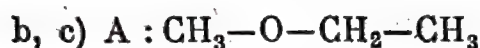
91°. a)  $12x + y + 16z = 60$

$$\frac{16z}{y} = \frac{2}{1}; \quad y = 8z$$

$$60(12x + 24z) = 1200x$$


---


$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 8 \\ z &= 1 \end{aligned} \quad \text{C}_3\text{H}_8\text{O}$$



60 g A ..... 100,8 l O<sub>2</sub>

24 g A ..... a<sub>1</sub>

---

a<sub>1</sub> = 40,32 l O<sub>2</sub> → 201,6 l aer

1 mol B ..... 1 mol D

$\frac{12}{60}$  mol B ..... a<sub>1</sub>

---

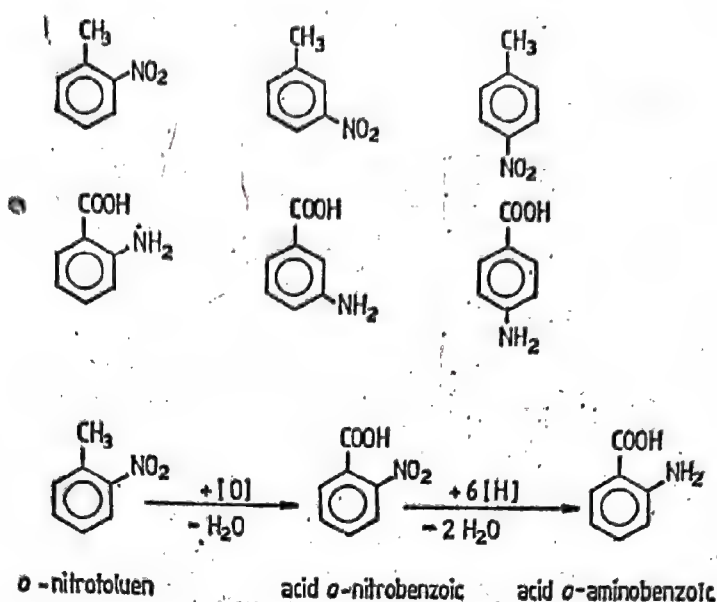
a<sub>1</sub> = 0,2 mol D = 0,2 · 58 g = 11,6 g D.

3 mol C ..... 1 mol F

$\frac{12}{60}$  mol C ..... a<sub>2</sub>

---

a<sub>2</sub> = 0,066 mol = 11,48 g F.



(La fel pentru derivații *meta* și *para*.)

*o*-, *m*- și *p* - Nitrotoluenii sint izomeri de poziție.

Acizii *o*-, *m*- și *p*-aminobenzoici sint izomeri de poziție.

Nitrotoluenii sint izomeri de funcțiune cu acizii aminobenzoici.

93°. Se consideră

$x$  moli  $C_nH_{2n+2}$  și  $y$  moli  $C_nH_{2n}$ .

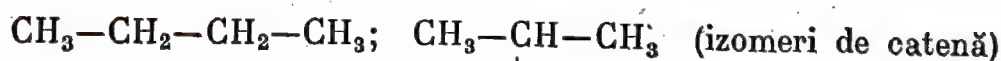
raportul molar = raportul presiunilor parțiale = 4 : 1

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{1} \quad x = 4y$$

$$d/H_2 = \frac{\bar{M}}{2}; \quad \bar{M} = \frac{x(14n+2) + y(14n)}{x+y}$$

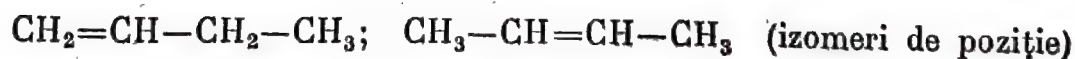
$$\bar{M} = \frac{14y(14n+2) + y(14n)}{5y} = \frac{70n+8}{5}$$

$$28,8 \cdot 2 = \frac{70n+8}{5}; \quad n = 4$$



*n*-butan

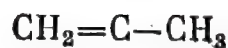
izobutan



1-butenă

2-butenă

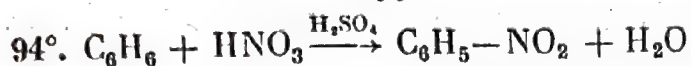
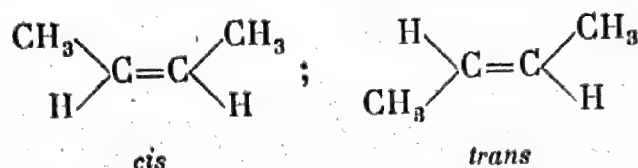
(*cis* + *trans*)



izobutenă



Izobutena este izomer de catenă cu 1-butena și, respectiv, 2-butena; 2-butena există sub forma a doi izomeri geometrici:



$$635 \cdot \frac{20}{100} = 127 \text{ kg HNO}_3$$

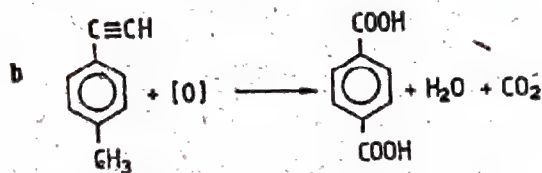
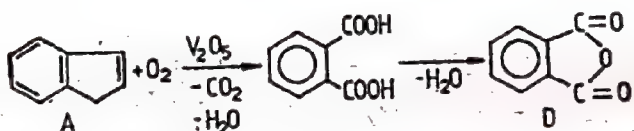
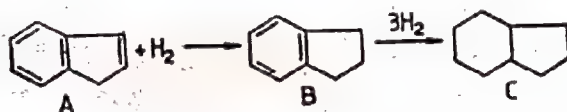
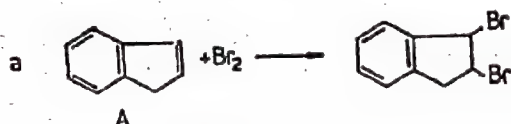
123 kg nitrobenzen .....	63 kg HNO <sub>3</sub> .....	18 kg H <sub>2</sub> O
x kg .....	a <sub>1</sub> .....	a <sub>2</sub>

$$a_1 = \frac{63x}{123} \text{ kg HNO}_3; \quad a_2 = \frac{18x}{123} \text{ kg H}_2\text{O};$$

$\left(635 - \frac{63x}{123} + \frac{18x}{123}\right) \text{ kg acid rezidual} \dots\dots$	$\left(127 - \frac{63x}{123}\right) \text{ kg HNO}_3$
100 .....	2

$$x = 224,75 \text{ kg nitrobenzen.}$$

95°.



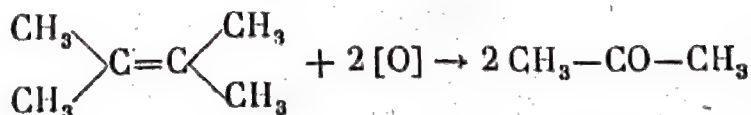
(14n + 1 + 80) g A ..... 80 g Br

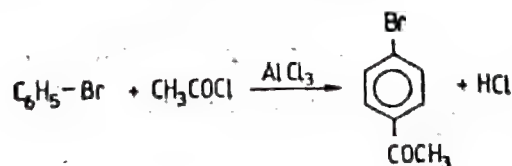
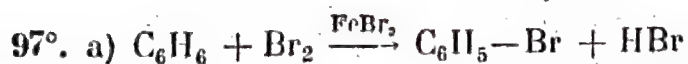
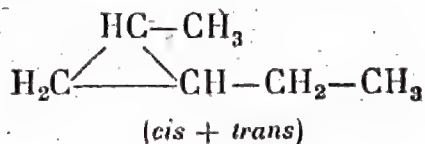
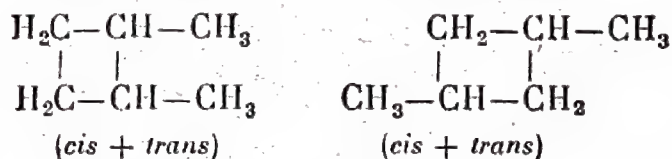
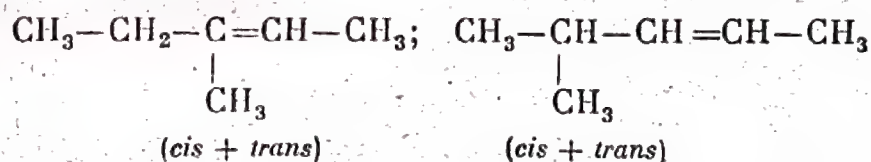
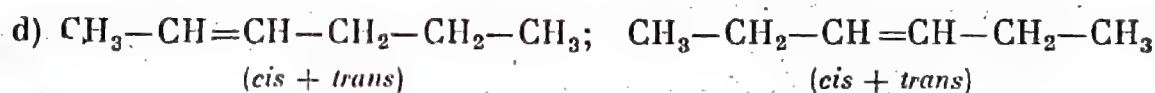
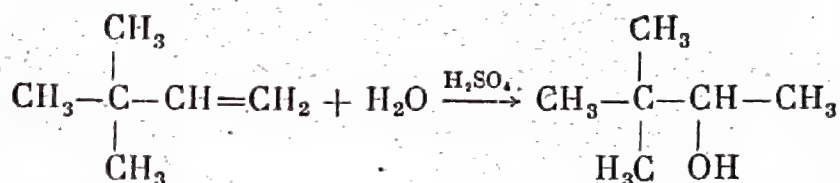
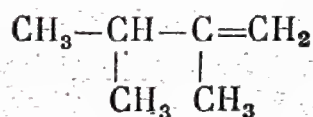
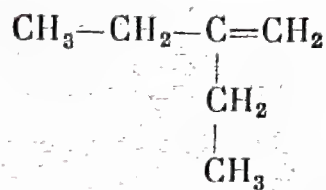
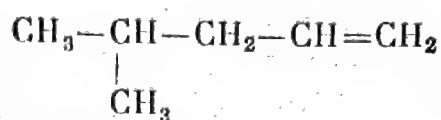
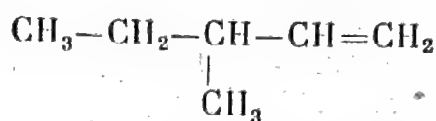
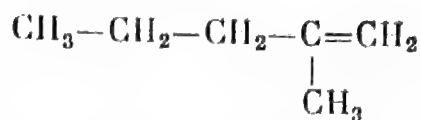
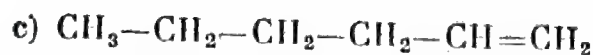
100 ..... 48,5

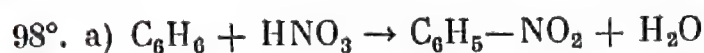
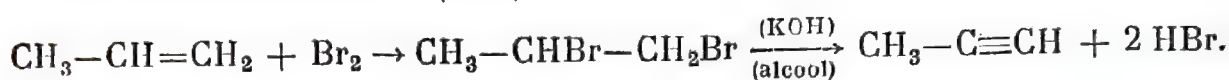
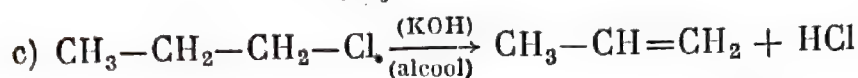
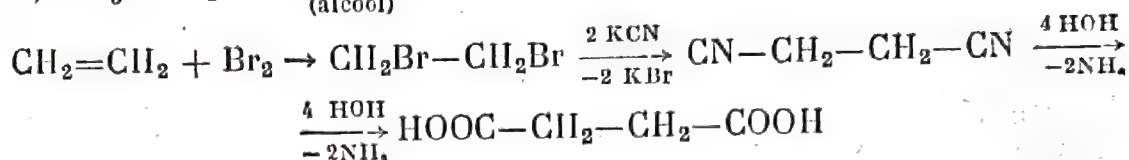
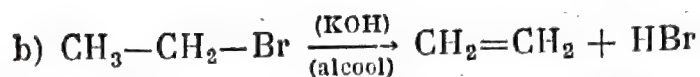
$$n = 6 \Rightarrow \text{C}_6\text{H}_{12}$$



sau







$$x \text{ k moli } \text{C}_6\text{H}_6 \rightarrow x \text{ k moli } \text{HNO}_3 \rightarrow 63 \cdot x \text{ kg } \text{HNO}_3 \rightarrow 63 x \frac{100}{80} \text{ kg soluție } 80\% = 78,75 x \text{ kg} \rightarrow 15,75 x \text{ kg } \text{H}_2\text{O (inițial);}$$

$$y \text{ kmoli } \text{H}_2\text{SO}_4 \text{ necesari; } \frac{15,75 x}{98 y} = \frac{1}{6}$$

$$6 \cdot 15,75 x = 98 y$$

(78,75 x + 6 · 15,75 x) kg amestec .....	63 x kg HNO <sub>3</sub>
100 .....	a <sub>1</sub>

$$a_1 = \frac{6300}{173,25} \% \text{ HNO}_3; a_1 = 36,36\%;$$

$$a_2 = \frac{9450}{173,25} \% \text{ H}_2\text{SO}_4; a_2 = 54,54\%;$$

$$a_3 = 9,1 \% \text{ H}_2\text{O.}$$

b) 78 x kg C <sub>6</sub> H <sub>6</sub> .....	173,25 x kg amestec nitrant
1 000 kg .....	b <sub>1</sub>

$$b_1 = 2221,15 \text{ kg amestec nitrant.}$$

$$c) 2221,15 \cdot \frac{36,36}{100} = 807,61 \text{ kg } \text{HNO}_3 \Rightarrow 807,61 \cdot \frac{100}{80} = 1009,51 \text{ kg sol. } \text{HNO}_3 \text{ } 80\%$$

$$2221,15 \cdot \frac{54,54}{100} = 1211,46 \text{ kg } \text{H}_2\text{SO}_4.$$

$$99^\circ. (14n + 32) \text{ g acid} \dots\dots\dots 12n \text{ g C}$$

$$100 \text{ g} \dots\dots\dots 40 \text{ g C}$$

$$560n + 1280 = 1200n \Rightarrow n = 2.$$

Formula esterului: CH<sub>3</sub>---COOC<sub>n</sub>H<sub>2n+1</sub>

$$(14n + 60) \text{ g} \dots\dots\dots (12n + 24) \text{ g C}$$

$$100 \text{ g} \dots\dots\dots X$$

$$X = \frac{1200n + 2400}{14n + 60} \% \text{ C}$$

$$\frac{1200n + 2400}{14n + 60} = 40 + 14,54 = 54,54 \Rightarrow n = 2$$

Deci formula esterului: CH<sub>3</sub>---COOCH<sub>2</sub>---CH<sub>3</sub>.

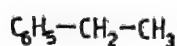


100°. a) Formula moleculară:

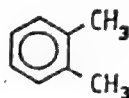
$$M = 28,9 \cdot 3,66 = 106$$

$$C : \frac{90,57 \cdot 106}{12 \cdot 100} = 8$$

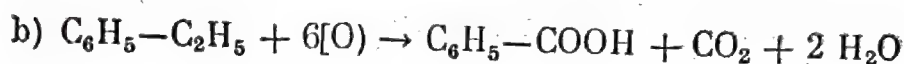
$$H : \frac{9,49 \cdot 106}{100} = 10$$



Etilbenzen



o-Xilen



$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ mol} & \dots\dots\dots & 122 \text{ g} \\ x_1 & \dots\dots\dots & 59,51 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{59,51}{122} \text{ moli etilbenzen}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ mol} & \dots\dots\dots & 166 \\ x_2 & \dots\dots\dots & 40,49 \end{array}$$

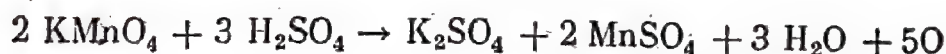
$$x_2 = \frac{40,49}{166} \text{ moli o-xilen}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{2}{1}$$

c)  $318 : 106 = 3$  moli amestec (2 moli etilbenzen + 1 mol o-xilen)

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ mol hidrocarbură} & \dots\dots\dots & 6 \cdot 16 \text{ g O} \\ 3 \text{ moli} & \dots\dots\dots & y \end{array}$$

$$y = 18 \cdot 16 \text{ g O.}$$

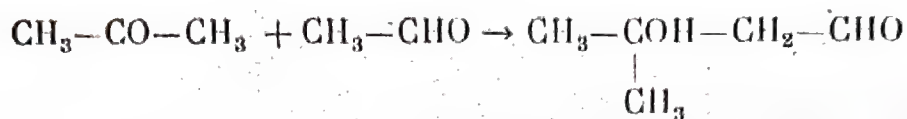
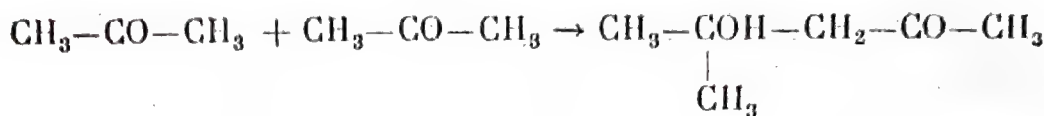
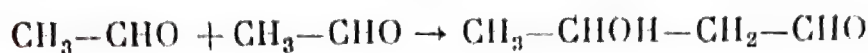
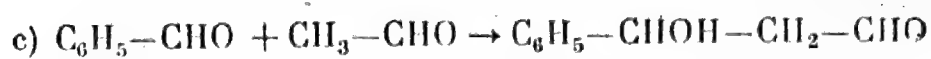


$$\begin{array}{rcl} 2 \text{ mol } KMnO_4 & \dots\dots\dots & 5 \cdot 16 \text{ g O} \\ z & \dots\dots\dots & 18 \cdot 16 \end{array}$$

$$z = \frac{2 \cdot 18}{5} = 7,2 \text{ moli } KMnO_4.$$

101°. a) Toți cei trei compuși carbonilici pot funcționa drept componentă carbonilică.

b) Aldehida acetică și acetona pot funcționa drept componentă metilenică.

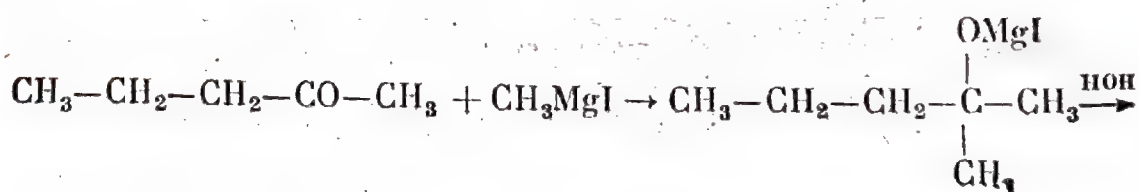
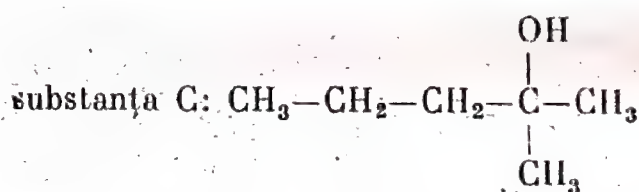
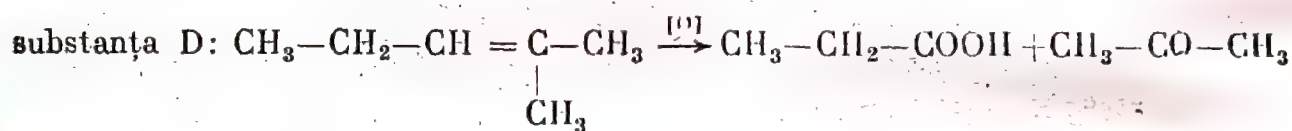


102°. Formula moleculară:

$$\text{C} : \frac{86 \cdot 69,8}{100 \cdot 12} = 5$$

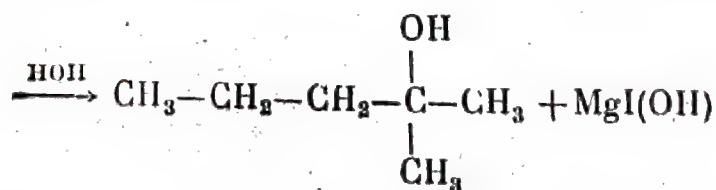
$$\text{H} : \frac{86 \cdot 11,6}{100} = 10$$

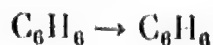
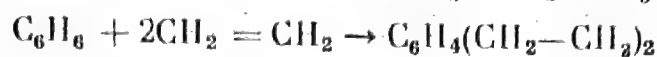
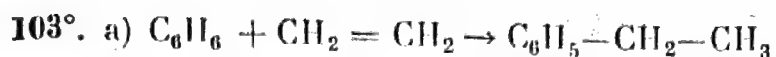
$$\text{O} : \frac{86 \cdot 18,6}{100 \cdot 16} = 1$$



A

B





78 kg $C_6H_6$ .....	106 kg etilbenzen .....	28 kg etenă
$x_1$ .....	35,1 .....	$y_1$

$x_1 = 25,83 \text{ kg } C_6H_6;$   $y_1 = 9,27 \text{ kg etenă.}$

78 kg $C_6H_6$ .....	134 kg dietilbenzen .....	56 kg etenă
$x_2$ .....	11,1 kg .....	$y_2$

$x_2 = 6,46 \text{ kg } C_6H_6;$   $y_2 = 4,64 \text{ kg etenă.}$

Total benzen =  $53,8 + 25,83 + 6,46 = 86,09 \text{ kg} \Rightarrow 1,1 \text{ kmoli}$

$C_u = \frac{25,83}{86,09} \cdot 100 = 30\%$

$\eta = \frac{C_u}{C_t} \cdot 100 = 80\%$

$C_t = \frac{32,29}{86,09} \cdot 100 = 37,5\%$

b) 2 moli  $C_6H_6$ : 1 mol etenă  $\Rightarrow 0,55 \text{ kmoli etenă} \Rightarrow 0,55 \cdot 28 = 15,4 \text{ kg etenă.}$

$C_u = \frac{9,27}{15,4} \cdot 100 = 60,2\%$

$\eta = \frac{C_u}{C_t} \cdot 100 = 66,65\%$

$C_t = \frac{13,91}{15,4} \cdot 100 = 90,32\%$

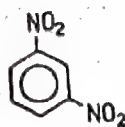
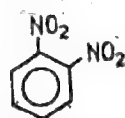
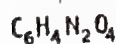
104°. Formula moleculară:

$C: \frac{168 \cdot 42,85}{12 \cdot 100} = 6$

$H: \frac{168 \cdot 2,38}{100} = 4$

$O: \frac{168 \cdot 38,06}{16 \cdot 100} = 4$

$N: \frac{168 \cdot 16,71}{14 \cdot 100} = 2$

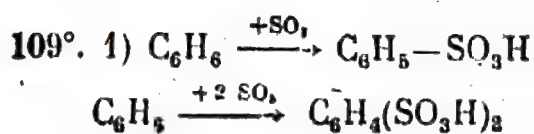
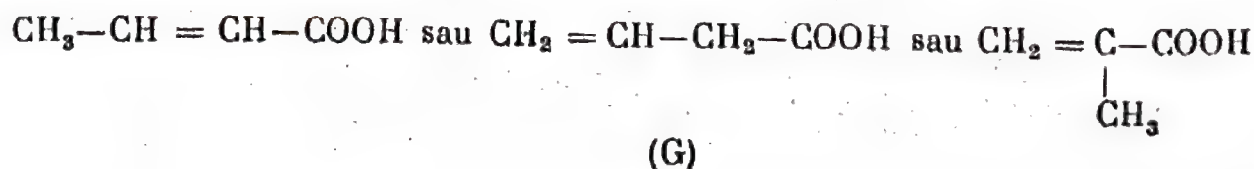
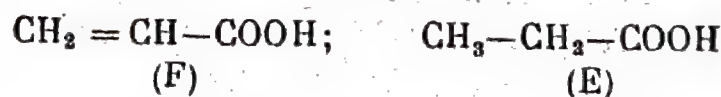
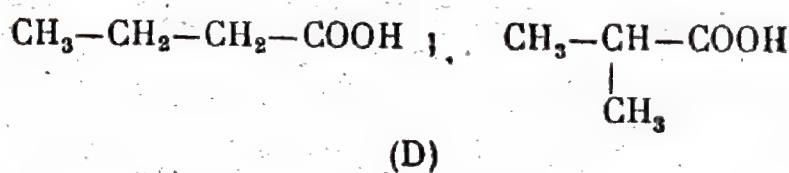
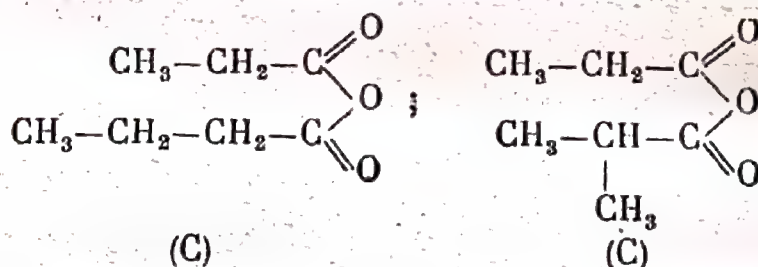
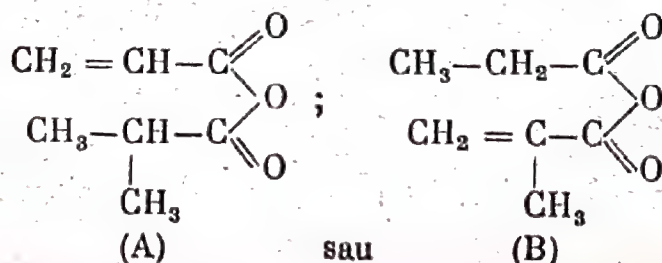
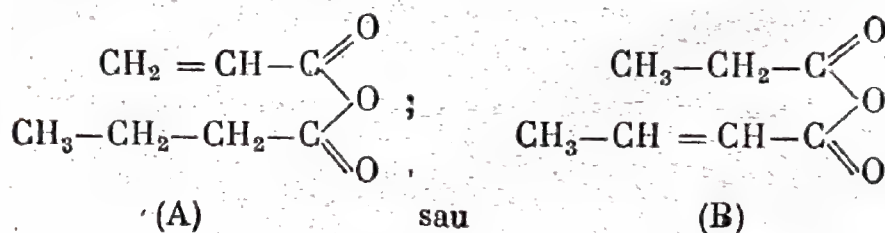
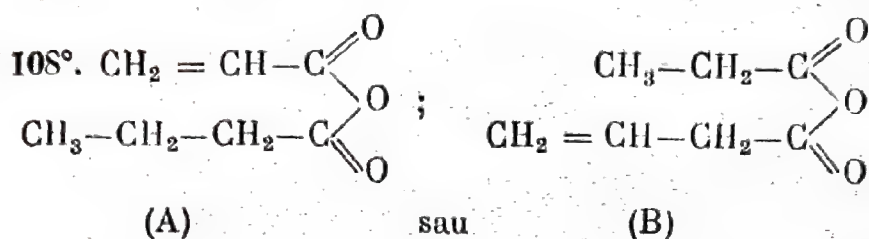
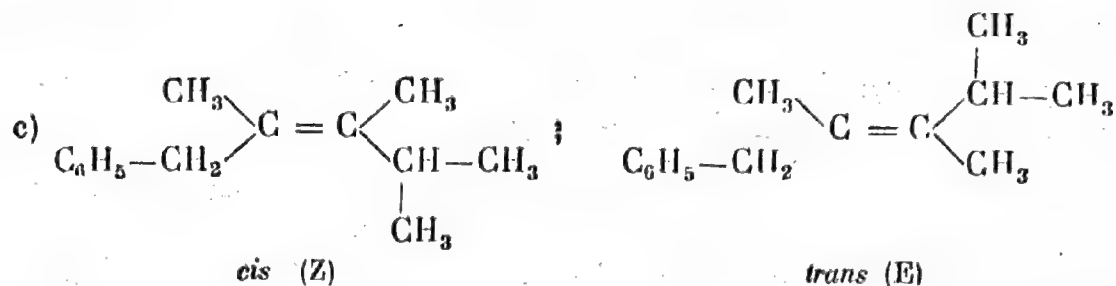


Substanța A poate fi *p*-dinitrobenzen sau *m*-dinitrobenzen. Cel mai ușor se poate sintetiza *m*-dinitrobenzen (prin nitrare directă).











Se consideră  $x$  kmoli acid benzensulfonic și  $y$  kmoli acidbenzendisulfonic din amestec:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{1}; x = 3y$$

$$x \cdot 158 + y \cdot 238 = 1424 \text{ kg}$$

$$3y \cdot 158 + y \cdot 238 = 1424$$

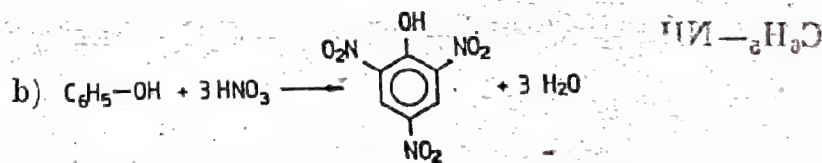
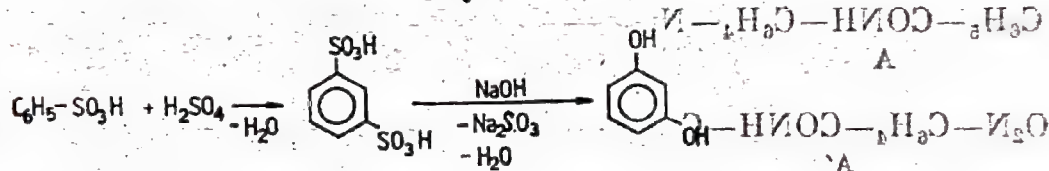
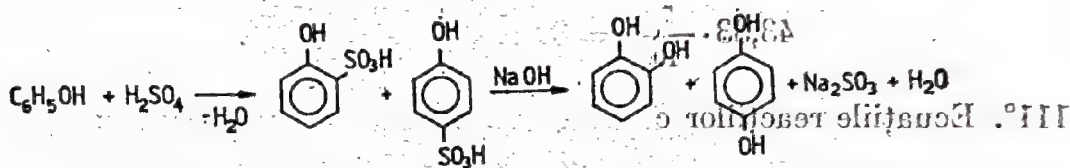
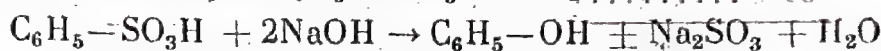
$$y = 2; x = 6$$

Cantitatea de  $\text{SO}_3$  consumată:

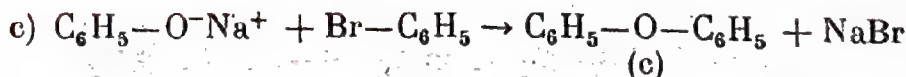
$$6 \cdot 80 + 2 \cdot 160 = 800 \text{ kg.}$$

Cantitatea de  $\text{H}_2\text{SO}_4$  (cu 20%  $\text{SO}_3$ ):

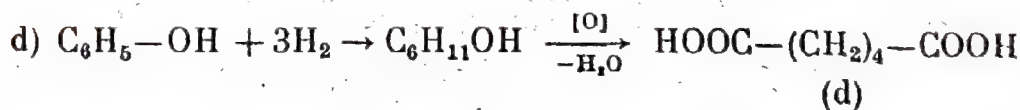
$$800 \cdot \frac{100}{20} = 4000 \text{ kg } \text{H}_2\text{SO}_4 \text{ oleum}$$



(b)

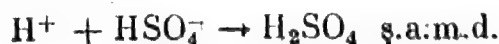
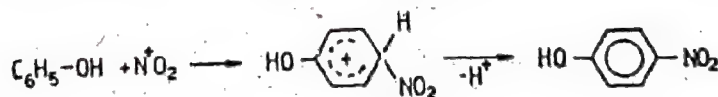
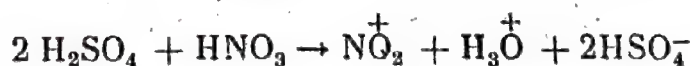
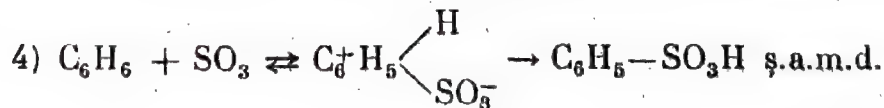


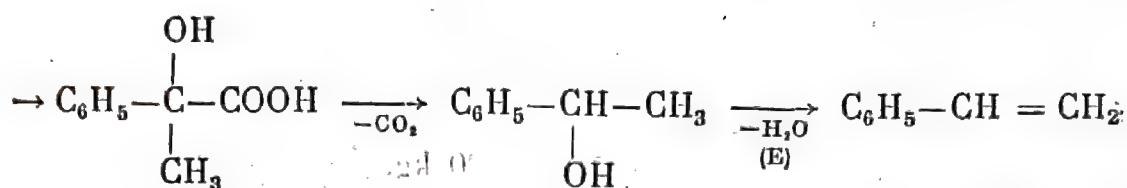
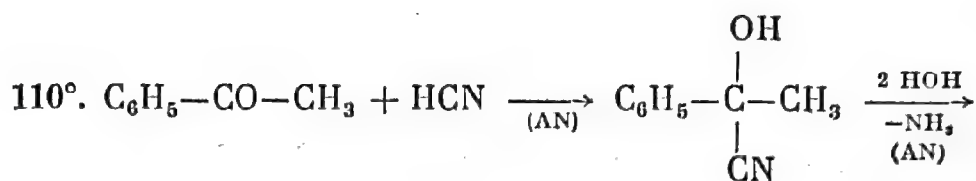
(c)



(d)

3)  $d > b > m\text{-dihidroxibenzen} > p\text{-dihidroxibenzen} > o\text{-dihidroxibenzen} > c$





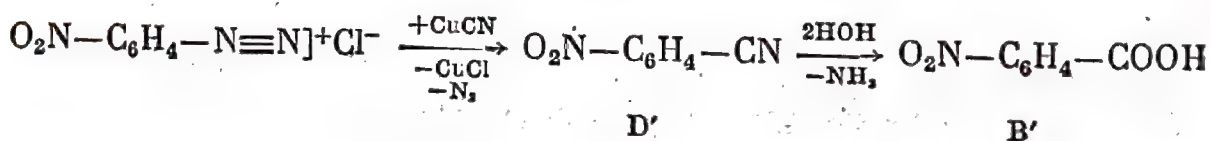
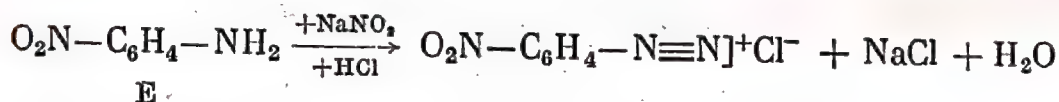
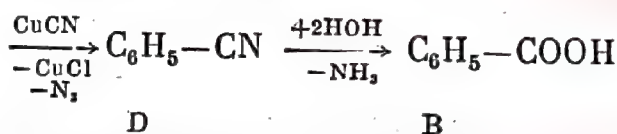
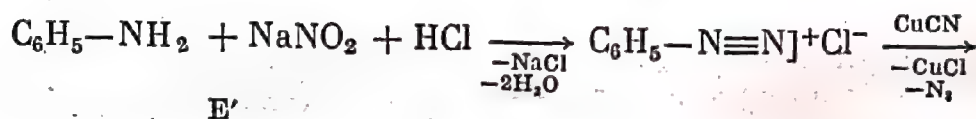
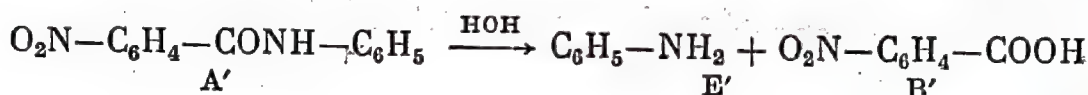
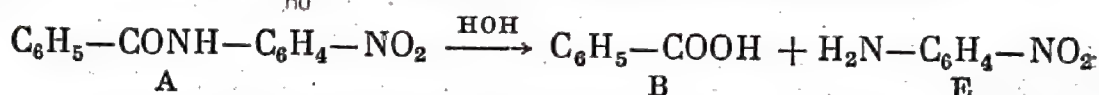
$$100 \cdot \frac{50}{100} = 50 \text{ kg acetofenonă transformată}$$

$$\begin{array}{rcl} 120 \text{ kg A} & \dots\dots\dots & 104 \text{ kg stiren} \\ 50 & \dots\dots\dots & x \end{array}$$

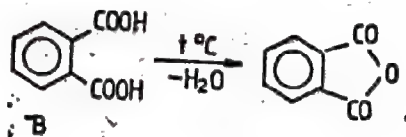
$$x = 43,33 \text{ kg } (\eta = 100\%)$$

$$43,33 \cdot \frac{70}{100} = 30,31 \text{ kg } (\eta = 70\%).$$

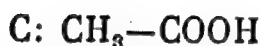
111°. Ecuatiile reactiilor cuprinse in schemă sint următoarele:



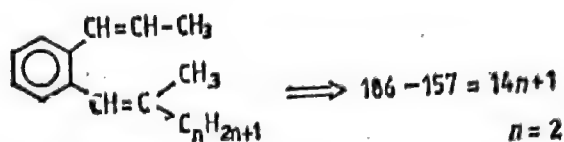
112°.



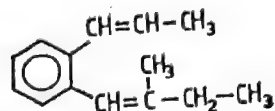
$$\begin{array}{rcl} \text{C}_n\text{H}_{2n}\text{O}_2: & (14n + 32) & \dots\dots\dots 12n \text{ g O} \\ 100 & \dots\dots\dots & 40 \\ \hline & 40(14n + 32) = 1200n & \Rightarrow n = 2 \end{array}$$



D este o cetonă

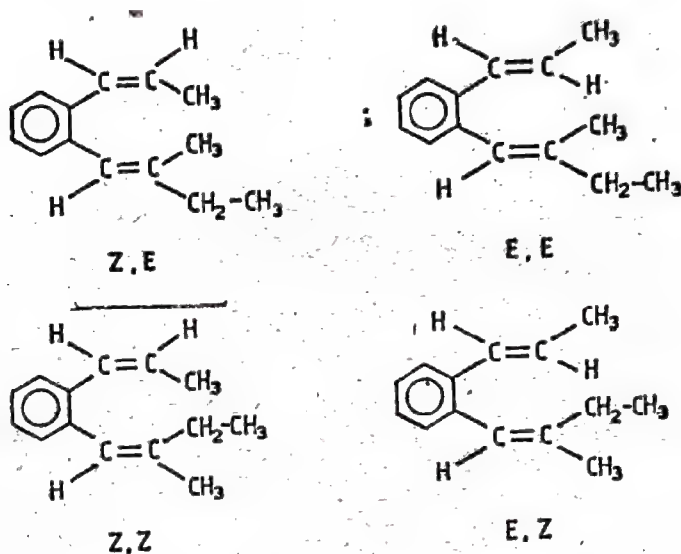


A:



b) Izomeri orto-, meta- și para.

c) Fiecare dintre izomerii de poziție prezintă 4 izomeri geometrici; de exemplu izomerul orto-:

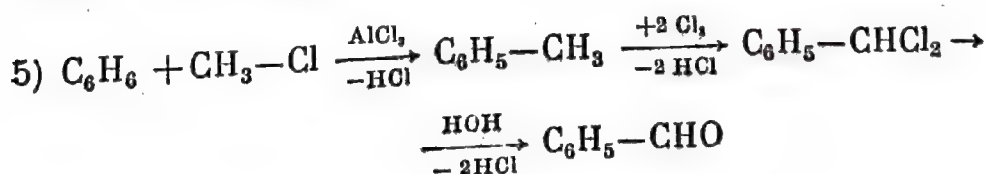
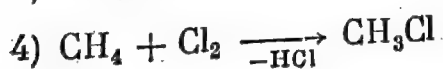
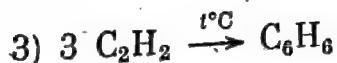
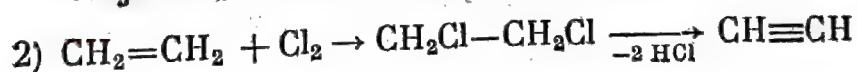
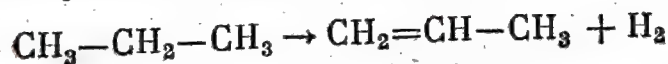
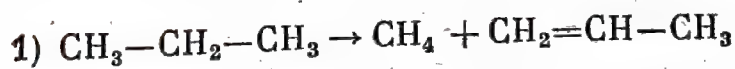


113°. s:  $\text{C}_x\text{H}_y\text{O}$

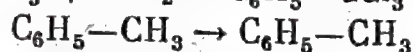
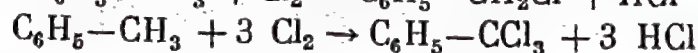
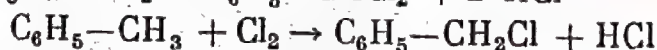
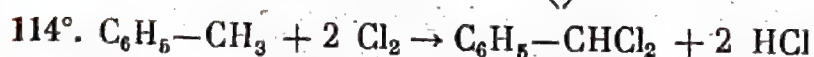
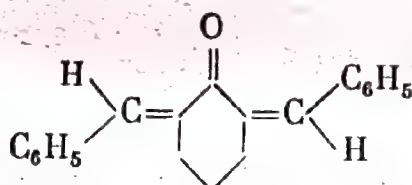
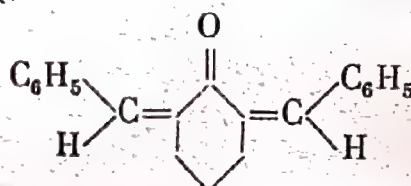
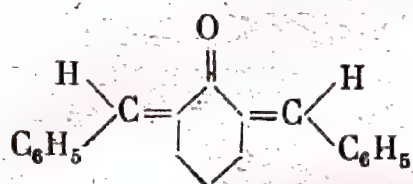
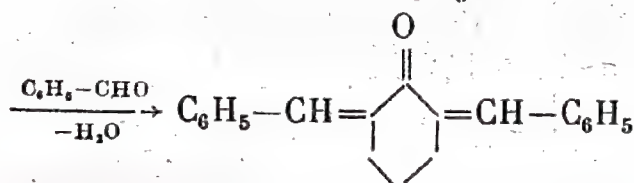
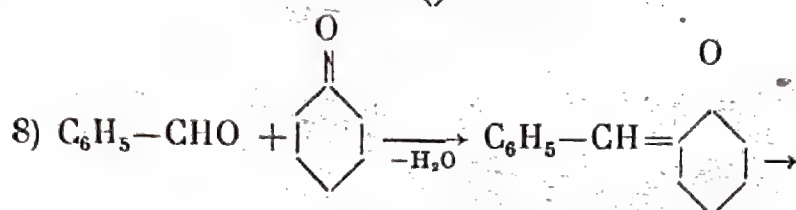
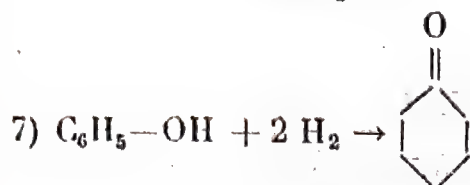
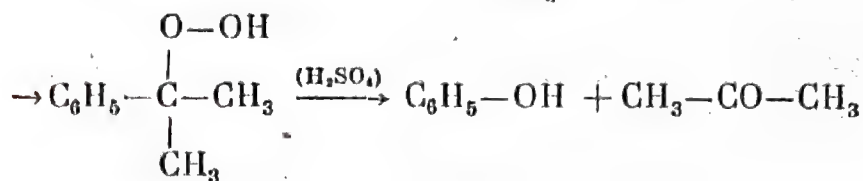
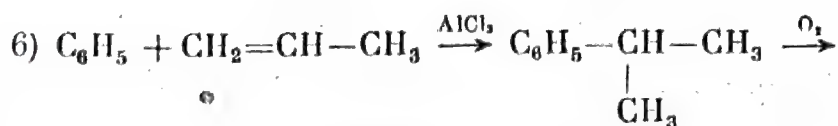
$$12x + y + 16 = 274$$

$$x = y + 2$$

$$12x + x - 2 + 16 = 247; \quad x = 20; \quad y = 18.$$







Pentru a obține 100 kg masă de reacție cu 64,4 kg (0,4 kmoli) clorură de benziliden, 12,65 kg (0,1 kmoli) clorură de benzil, 19,55 kg (0,1 kmoli) feniltriclorometan și 3,4 kg (0,037 kmoli) tolueen sunt necesari 0,637 kmoli tolueen și 1,2 kmoli clor.

a) raportul molar clor: tolueen =  $\frac{1,2}{0,637} = 1,88$ ;

b)  $\frac{0,037 \cdot 100}{0,637} = 5,80\%$ ;

c)  $C_u = \frac{0,4}{0,637} \cdot 100 = 62,80\%$ ;

$$C_t = \frac{0,6}{0,637} \cdot 100 = 94,19\%$$

$$\eta = \frac{0,4}{0,6} \cdot 100 = 66,66\%$$

d)  $322 : 161 = 2$  kmoli

$$\text{vol. Cl}_2 = \frac{2 \cdot 1,2 \cdot 22,4}{0,4} = 134,4 \text{ m}^3$$

$$\text{masa de toluen} = \frac{2 \cdot 0,637 \cdot 92}{0,4} = 293,02 \text{ kg}$$

$$\text{vol. toluen} = \frac{293,02}{0,86} = 340,72 \text{ l}$$

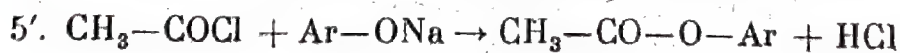
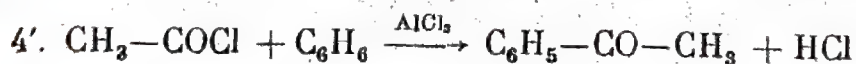
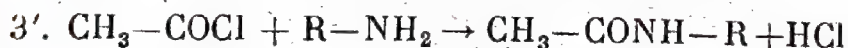
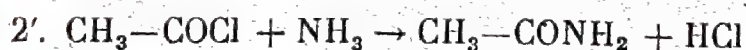
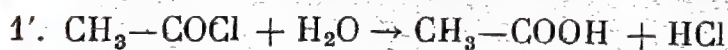
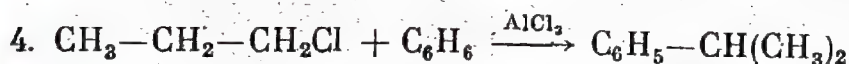
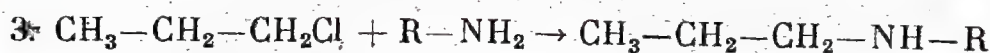
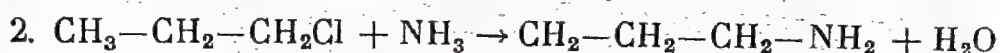
115°.	M g .....	35,5 g Cl
	<u>100 .....</u>	<u>45,22</u>

a:  $\text{R}-\text{Cl}$ ;  $M = 78,5$ ;  $M_R = 78,5 - 35,5 = 43$

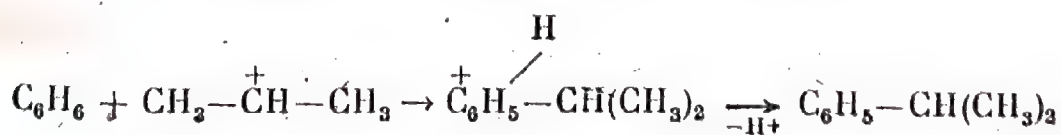
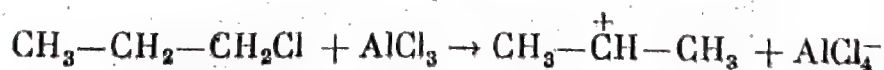
a':  $\text{R}'-\text{COCl}$ ;  $M'_R = 78,5 - 63,5 = 15$

a:  $\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_2\text{Cl}$  (sau  $\text{CH}_3-\text{CHCl}-\text{CH}_3$ )

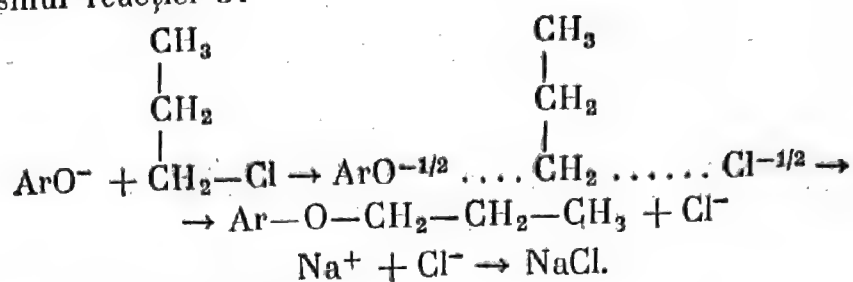
a':  $\text{CH}_3-\text{COCl}$



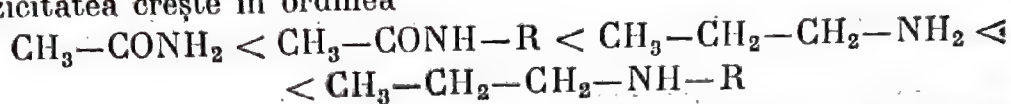
Mecanismul reacției 4:



Mecanismul reacției 5:

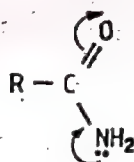


Bazicitatea crește în ordinea

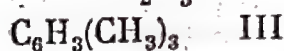
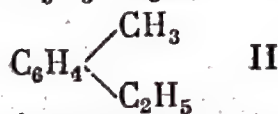


Aminele secundare sînt baze mai tari decît cele primare datorită efectului +I<sub>s</sub> a doi radicali alchil (care măresc densitatea de electroni la atomul de azot). Bazicitatea amidelor este foarte scăzută datorită efectului electromer — E<sub>s</sub> al

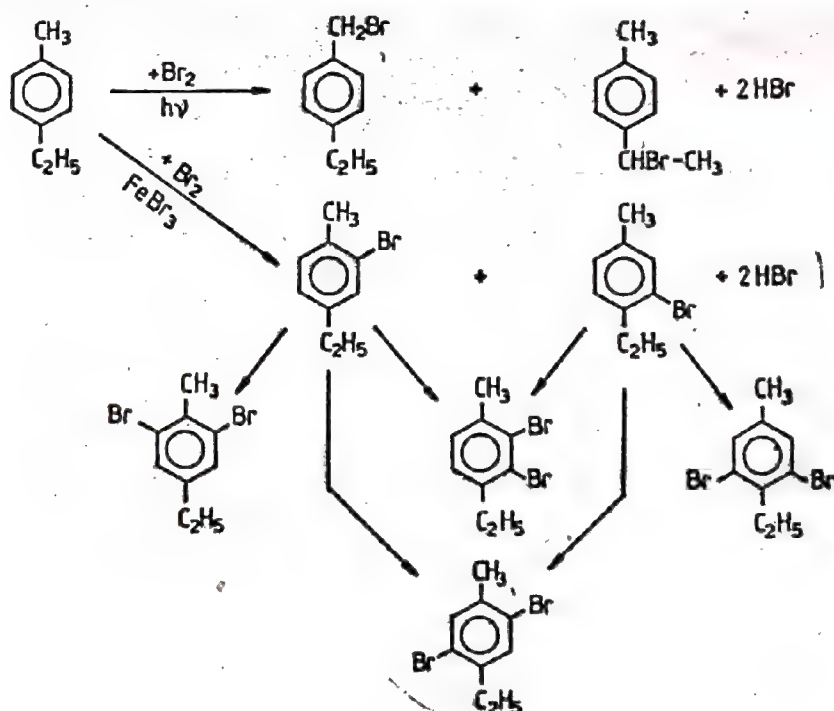
grupeii  $\text{>C=O}$ ;



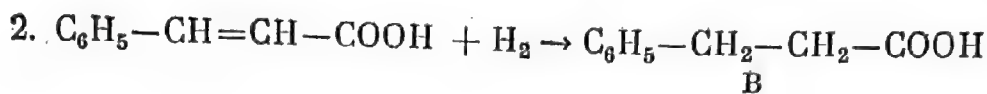
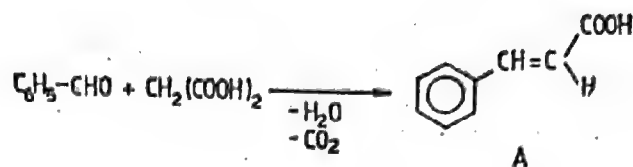
116°. Formulei moleculare C<sub>9</sub>H<sub>12</sub> îi poate corespunde unul dintre compușii



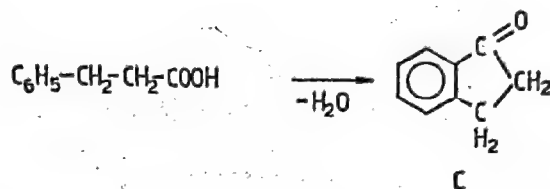
Ținînd cont de datele problemei numai *p*-etilmetilbenzenul poate conduce la derivații bromurați respectivi, după următoarea schemă:



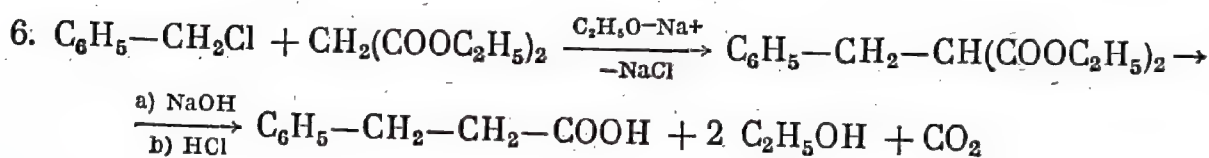
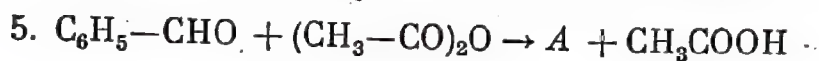
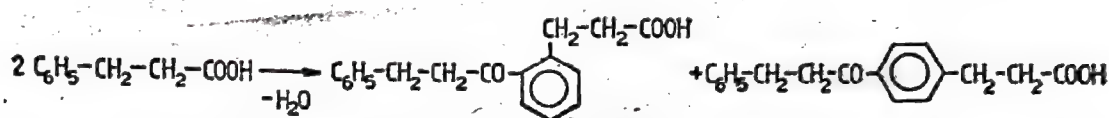




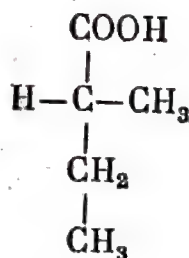
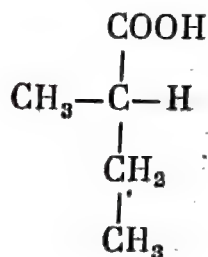
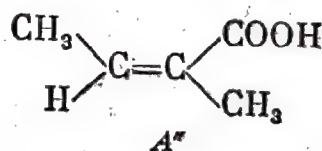
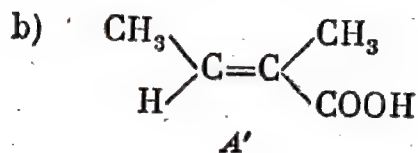
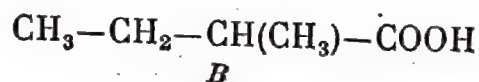
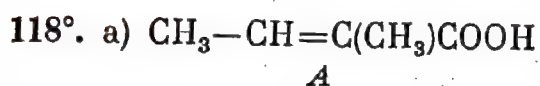
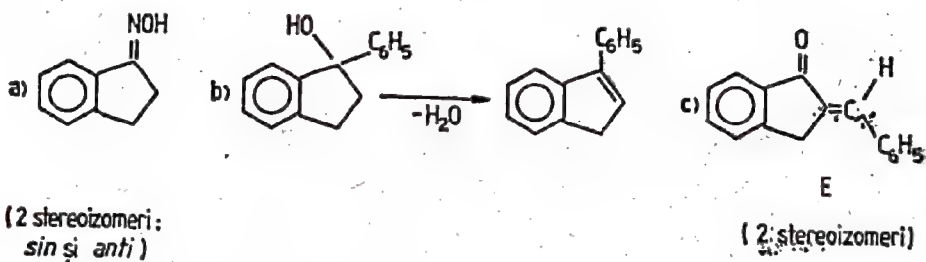
3.



4.



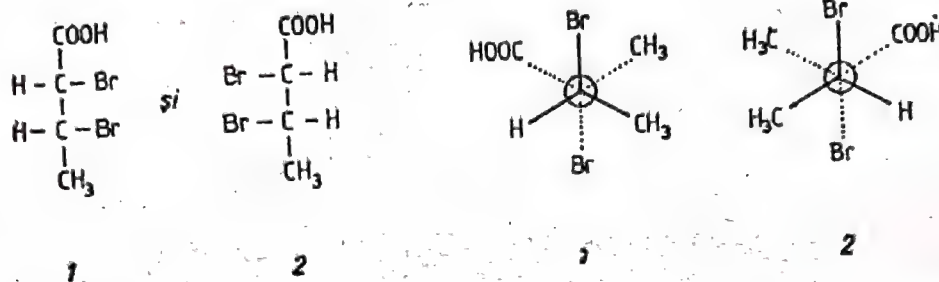
7.



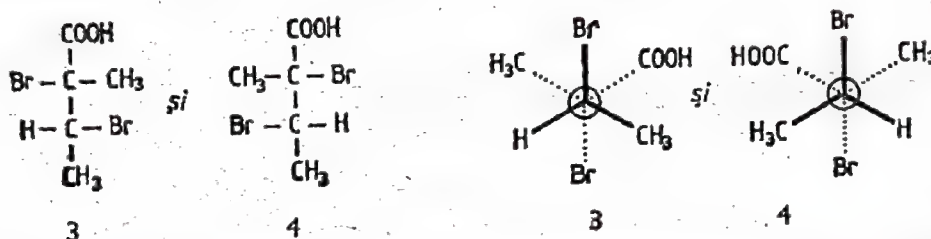
c) Intotdeauna doi (vezi e): 1 la 4.

d) Aditia bromului la alchene conduce la izomerul *trans* in conditiile date. Dacă in urma aditiei se formează doi atomi de carbon asimetrici (centri chirali) rezultă  $2^2 = 4$  stereozomeri (doi cîte doi enantiomeri).

e) Pentru *cis* — A':

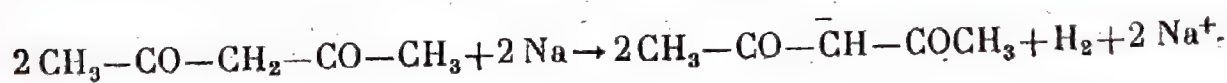
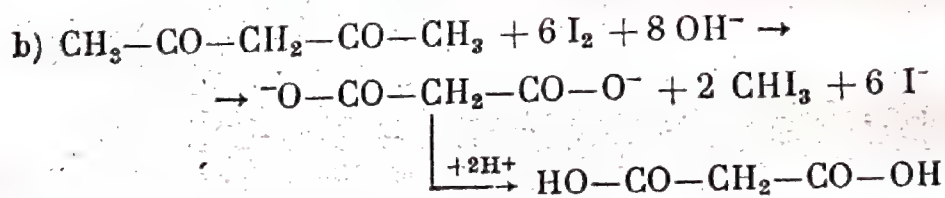
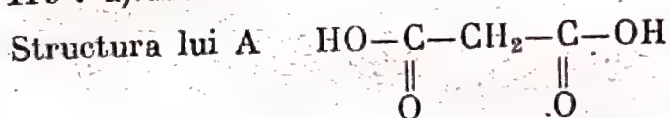


Pentru *trans* — A'':

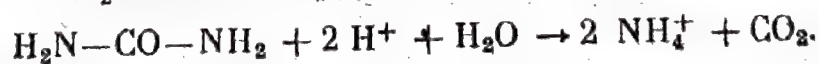
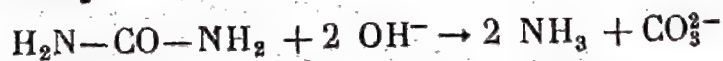


1 cu 2 sau 3 cu 4 sînt enantiomeri; 1 cu 3 și cu 4 și, respectiv, 2 cu 3 și cu 4 sînt diastereoizomeri.

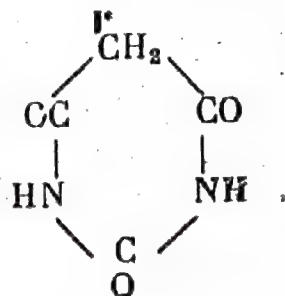
119°. a) Masa moleculară a lui A = 103 g/mol.



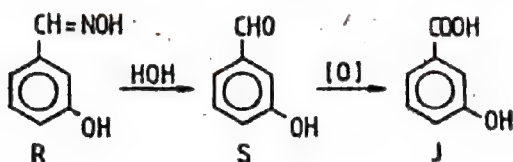
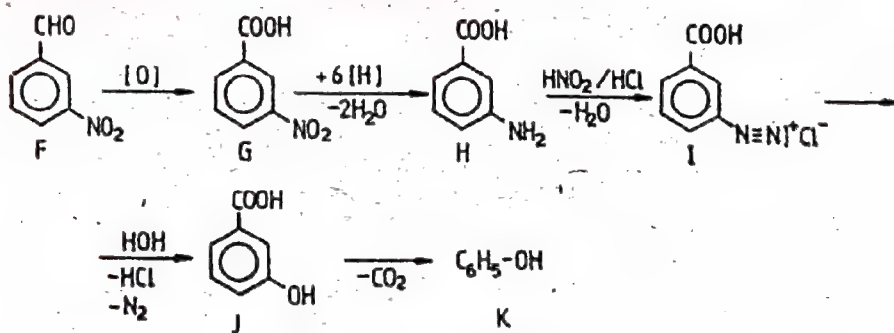
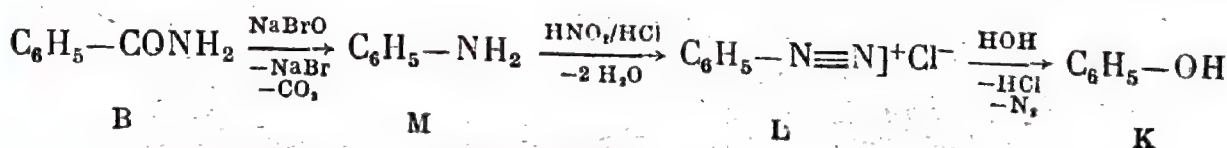
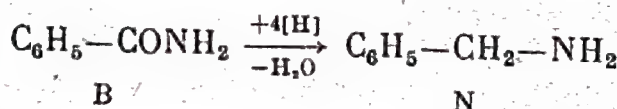
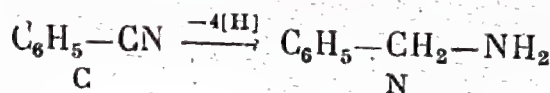
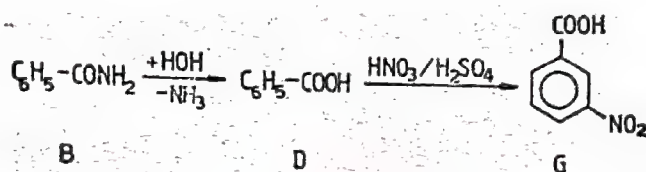
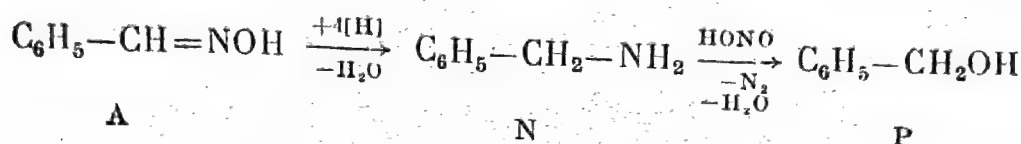
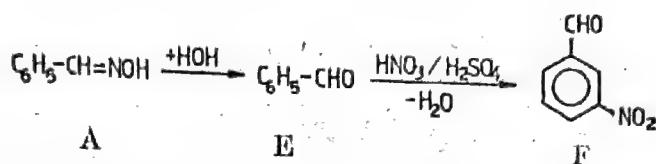
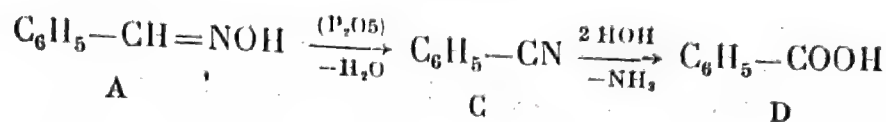
c)  $\text{H}_2\text{N}-\text{CO}-\text{NH}_2$



d)



120°. Structura compuşilor de la A la R şi ecuaţiile reacţiilor din schemă sint următoarele:



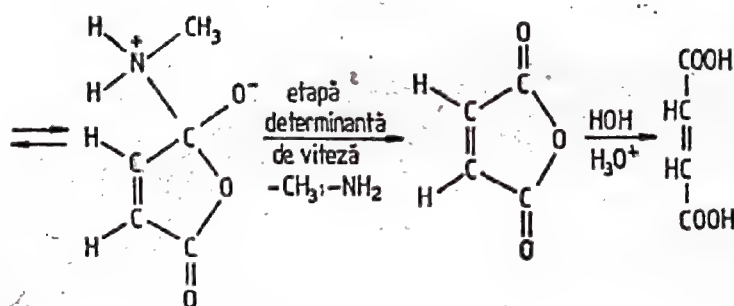
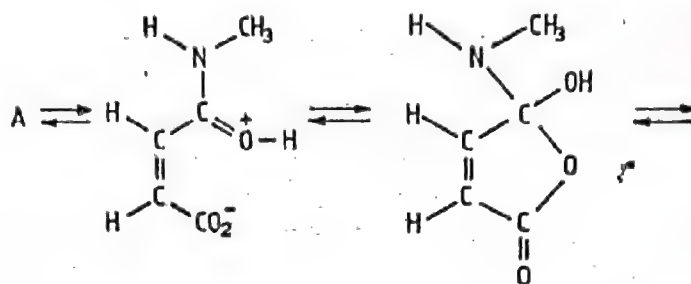
121°. 1. Viteza mare a reacţiei de hidroliză a lui A se datoreşte catalizei intramoleculare a grupei funcţionale carboxil situată în poziţia *cis*. În B grupa carboxil este situată în *trans* faţă de grupa amidă şi deci prea îndepărtat pentru a determina o cataliză acidă intramoleculară.



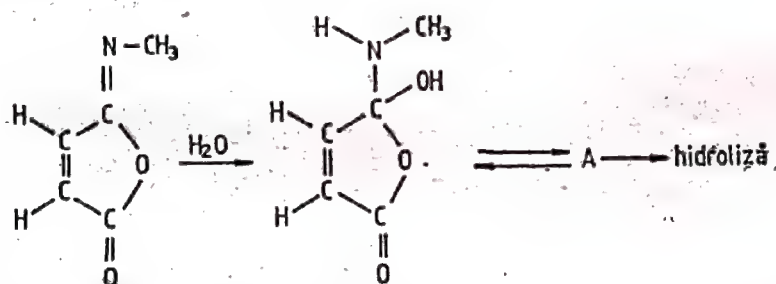
2. Între  $pH = 0$  și  $pH = 2$ , funcțiunea carboxil nu este ionizată și deci poate participa la cataliza intramoleculară. Hidroliza în acest interval de  $pH$  este numai un rezultat al catalizei efectuate de grupa carboxil (și deci nu ca o concurentă a catalizei prin  $H_3O^+$ ).

3. La  $pH > 3$  grupa carboxil este ionizată și deci cataliza intramoleculară acidă în care transferul protonului joacă un rol important nu mai este posibilă.

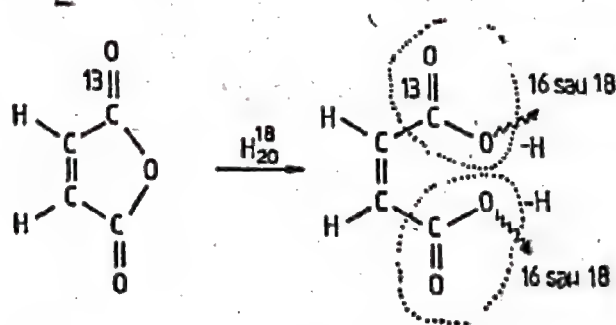
4.



5.



Cu observațiile date mai jos, etapa determinantă de viteză poate fi ușor identificată.



$M = 47$  când  $^{13}C$  și  $^{18}O$

$M = 45$  când  $^{13}C$  și  $^{16}O$

$M = 46$  când  $^{12}C$  și  $^{18}O$

$M = 44$  când  $^{12}C$  și  $^{16}O$ .

PREFATĂ .....	5
---------------	---

## MATEMATICĂ

A. BREVIAR .....	8
------------------	---

### § 1. ALGEBRĂ

1. Identități importante.....	8
2. Funcții și ecuații de gradul I și II.....	9
3. Rezolvarea unor sisteme de ecuații.....	10
4. Numere complexe .....	11
5. Inegalități, inecuații .....	13
6. Radicali, puteri, logaritmi.....	14
7. Analiză combinatorie.....	17
8. Elemente de teoria numerelor .....	18
9. Progresii .....	19
10. Polinoame și ecuații algebrice.....	20
11. Matrici și determinanți.....	22
12. Sisteme liniare de ecuații.....	25
13. Legi de compoziție; grupuri.....	28
14. Inele și corpuri.....	28

### § 2. GEOMETRIE PLANĂ

1. Elemente de geometria triunghiului.....	29
2. Cercul .....	32
3. Patrulater; poligoane. Aree.....	34

### § 3. TRIGONOMETRIE

1. Definiția funcțiilor trigonometrice.....	36
2. Relații între valorile funcțiilor trigonometrice ale aceluiași unghi.....	37
3. Funcțiile sumei și diferenței de unghiuri.....	38
4. Transformarea sumelor în produse și a produselor în sume.....	38
5. Funcțiile unghiului dublu, triplu și semiunghiului.....	39
6. Câteva ecuații trigonometrice.....	40
7. Funcții trigonometrice inverse.....	41
8. Elemente de trigonometria triunghiului .....	42

## § 4. GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

1. Puncte, drepte, plane; poziții relative.....	43
2. Paralelism în spațiu .....	44
3. Unghiuri în spațiu.....	44
4. Perpendicularitate în spațiu.....	45
5. Proiecții .....	46
6. Corpuri în spațiu.....	46

## § 5. GEOMETRIE ANALITICĂ

1. Geometrie pe o axă .....	47
2. Puncte și direcții în plan.....	48
3. Drepte în plan.....	49
4. Cercul în plan.....	50
5. Conice în plan.....	51

## § 6. ANALIZĂ MATEMATICĂ

1. Șiruri de numere reale; mărginire, monotonie.....	54
2. Șiruri convergente; limite de șiruri.....	54
3. Limite de funcții.....	56
4. Continuitate .....	58
5. Derivate .....	60
6. Reprezentarea grafică a funcțiilor.....	62
7. Primitive și integrale nedefinite.....	62
8. Integrale definite .....	63
9. Aplicații ale integralelor definite.....	65

## B. PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR

<b>ENUNȚURI 1984</b> .....	67
1. Învățământul tehnic .....	67
a. Profilul: electric, energetic, mecanic (numai specializarea <i>Aeronave</i> ), geologie (ingineri zi) .....	67
a. Algebră și elemente de analiză matematică .....	67
b. Geometrie plană și în spațiu și trigonometrie.....	67
b. Profilul: mecanic (fără specializarea <i>Aeronave</i> ), construcții, geodezie (ingineri zi) .....	68
a. Algebră și elemente de analiză matematică .....	68
b. Geometrie plană și în spațiu și trigonometrie.....	68
γ. Profilul: metalurgie, arhitectură și sistematizare, mine, chimie (ingineri zi și seral, toate profilurile) .....	69
a. Algebră și elemente de analiză matematică .....	69
b. Geometrie plană și în spațiu și trigonometrie.....	69
2. Învățământul universitar.....	70
a. Profilul matematică .....	70
a. Algebră .....	70
b. Elemente de analiză matematică.....	70
c. Geometrie plană și în spațiu, trigonometrie și geometrie analitică.....	71



β. Profilul matematică (3 ani) .....	71
Algebră (clasele IX—X), geometrie plană și în spațiu și trigonometrie .....	71
3. Alte profiluri .....	72
α. Profilul petrol .....	72
a. Algebră și elemente de analiză matematică .....	72
b. Geometrie plană și în spațiu și trigonometrie .....	72
β. Profilul electric (subingineri seral) .....	73
Algebră, geometrie plană și trigonometrie .....	73
γ. Profilul metalurgie (subingineri seral) .....	73
Algebră, geometrie plană și trigonometrie .....	73
δ. Profilul chimie (subingineri seral) .....	73
Algebră .....	73
e. Profilul tehnologia și chimia produselor alimentare și tehnică piscicolă .....	74
Algebră și trigonometrie .....	74
φ. Profilul forestier .....	75
Algebră .....	75
ψ. Profilul economic .....	76
Algebră și elemente de analiză matematică .....	76
 ENUNȚURI 1985 .....	 77
1. Învățământul tehnic .....	77
α. Profilul: electric, mecanic, construcții (ingineri zi) .....	77
a. Algebră și elemente de analiză matematică .....	77
b. Geometrie plană și în spațiu și trigonometrie .....	77
β. Profilul: electric, mecanic, construcții (ingineri seral) .....	77
a. Algebră și elemente de analiză matematică .....	78
b. Geometrie plană și în spațiu și trigonometrie .....	78
2. Învățământul universitar .....	79
α. Profilul matematică .....	79
a. Algebră .....	79
b. Elemente de analiză matematică .....	79
c. Geometrie plană și în spațiu, trigonometrie și geometrie analitică .....	80
β. Profilul matematică (3 ani) .....	80
Algebră (clasele IX—X), geometrie plană și în spațiu și trigonometrie .....	80
3. Alte profiluri .....	81
α. Profilul economic .....	81
Algebră și elemente de analiză matematică .....	81
β. Profilul geodezie (subingineri seral) .....	82
Algebră, geometrie plană și trigonometrie .....	82
γ. Profilul forestier .....	82
Algebră .....	82
δ. Profilul tehnologia și chimia produselor alimentare și tehnică piscicolă (subingineri seral) .....	83
Algebră .....	83

1. Învățământul tehnic .....	83
α. Profilul: electric, mecanic, construcții.....	83
a. Algebră și elemente de analiză matematică.....	83
b. Geometrie plană și în spațiu și trigonometrie.....	84
β. Profilul: mecanic, construcții, arhitectură și sistematizare, mine, petrol, geologie.....	84
a. Algebră și elemente de analiză matematică.....	84
b. Geometrie plană și în spațiu și trigonometrie .....	85
γ. Profilul: metalurgie, chimie .....	85
a. Algebră și elemente de analiză matematică .....	85
b. Geometrie plană și în spațiu și trigonometrie.....	86
δ. Profilul: electric, energetic, mecanic.....	86
a. Algebră și elemente de analiză matematică.....	86
b. Geometrie plană și în spațiu și trigonometrie .....	87
2. Învățământul universitar .....	87
α. Profilul matematică .....	87
a. Algebră .....	87
b. Elemente de analiză matematică.....	87
c. Geometrie plană și în spațiu, trigonometrie și geometrie analitică.....	88
β. Profilul matematică (3 ani).....	88
Algebră (clasele IX—X), geometrie plană și în spațiu și trigonometrie.....	88
3. Alte profiluri .....	89
α. Profilul geodezie (subingineri seral).....	89
Algebră, geometrie plană și trigonometrie .....	89
β. Profilul chimie (subingineri seral) .....	89
Algebră .....	89
γ. Profilul forestier.....	90
Algebră .....	90

1. Învățământul tehnic.....	90
α. Profilul: electric, energetic, mecanic, construcții.....	90
a. Algebră și elemente de analiză matematică.....	90
b. Geometrie plană și în spațiu și trigonometrie.....	91
β. Profilul: electric, mecanic, construcții.....	91
a. Algebră și elemente de analiză matematică .....	91
b. Geometrie plană și în spațiu și trigonometrie .....	92
γ. Profilul: metalurgie, chimie, arhitectură și sistematizare, mine, petrol, geologie..	92
a. Algebră și elemente de analiză matematică.....	92
b. Geometrie plană și în spațiu și trigonometrie.....	93
δ. Profilul mecanic .....	93
a. Algebră și elemente de analiză matematică.....	93
b. Geometrie plană și în spațiu și trigonometrie.....	94



2. Învățământul universitar.....	94
α. Profilul matematică .....	94
a. Algebră .....	94
b. Elemente de analiză matematică.....	95
c. Geometrie plană și în spațiu, trigonometrie și geometrie analitică.....	95
β. Profilul matematică (3 ani).....	96
Algebră (clasele IX—X), geometrie plană și în spațiu și trigonometrie .....	96
3. Alte profiluri .....	96
α. Profilul: forestier, tehnologia și chimia produselor alimentare și tehnică piscicolă	96
Algebră .....	96
β. Toate profilurile (subingineri seral) .....	97
Algebră, geometrie plană și trigonometrie.....	97
γ. Profilul: chimie, tehnologia și chimia produselor alimentare și tehnică piscicolă	97
(subingineri seral) .....	97
Algebră .....	97
δ. Profilul economic .....	98
Algebră și elemente de analiză matematică.....	98
<b>REZOLVĂRI</b> .....	100

<b>C. PROBLEME PROPUSE</b> .....	236
----------------------------------	-----

<b>ENUNȚURI</b> .....	236
-----------------------	-----

1. Algebră .....	236
2. Geometrie .....	238
3. Analiză matematică.....	241

<b>REZOLVĂRI</b> .....	244
------------------------	-----

## FIZICĂ

<b>A. BREVIAR</b> .....	276
-------------------------	-----

1. Mecanică .....	277
2. Fizică moleculară și căldură. Termodinamică.....	289
3. Electricitate .....	297
4. Optică .....	306
5. Fizică atomică și nucleară .....	314

<b>B. PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR</b> .....	319
--	-----

<b>ENUNȚURI 1984</b> .....	319
----------------------------	-----

1. Învățământul tehnic .....	319
α. Profilurile: mecanic, electric, energetic, mine, petrol, metalurgie, construcții,	
geodezie, tehnologia și chimia textilelor, tehnologia și chimia produselor alimentare,	
forestier (specializarea industrializarea lemnului), geologie.....	319
β. Profilurile: chimie, mecano-chimic.....	323



γ. Învățământul de subingineri (3 ani) — toate profilurile; specializările din învățământul pedagogic de chimie-fizică (3 ani) și matematică-fizică (3 ani).....	324
2. Învățământul universitar (profilul fizică).....	328
3. Învățământul medico-farmaceutic (profilurile: medicină, stomatologie).....	329

## ENUNȚURI 1985 ..... 330

1. Învățământul tehnic .....	330
α. Profilurile: mecanic, electric, energetic, mine, petrol, metalurgie, construcții, geodezie, tehnologia și chimia textilelor, tehnologia și chimia produselor alimentare, forestier (specializarea industrializarea lemnului), geologie .....	330
β. Profilurile: chimie, mecano-chimic .....	335
2. Învățământul universitar (profilul fizică).....	335
3. Învățământul medico-farmaceutic (profilurile: medicină, stomatologie).....	336

## ENUNȚURI 1986 ..... 338

1. Învățământul tehnic .....	338
α. Profilurile: mecanic, electric, energetic, mine, petrol, metalurgie, construcții, geodezie, tehnologia și chimia textilelor, tehnologia și chimia produselor alimentare, forestier (specializarea industrializarea lemnului), geologie .....	338
β. Profilurile: chimie, mecano-chimic .....	343
γ. Învățământul de subingineri (3 ani) — toate profilurile; specializările din învățământul pedagogic de chimie-fizică (3 ani) și matematică-fizică (3 ani).....	345
2. Învățământul universitar (profilul fizică) .....	346
3. Învățământul medico-farmaceutic (profilurile: medicină, stomatologie).....	347

## ENUNȚURI 1987 ..... 349

1. Învățământul tehnic .....	349
α. Profilurile: mecanic, electric, energetic, mine, petrol, metalurgie, construcții, geodezie, tehnologia și chimia textilelor, tehnologia și chimia produselor alimentare, forestier (specializarea industrializarea lemnului), geologie .....	349
β. Profilurile: chimie, mecano-chimic .....	353
γ. Învățământul de subingineri (3 ani) — toate profilurile; specializările din învățământul pedagogic de chimie-fizică (3 ani) și matematică-fizică (3 ani).....	355
2. Învățământul universitar (profilul fizică).....	357
3. Învățământul medico-farmaceutic (profilurile: medicină, stomatologie).....	358

## REZOLVĂRI ..... 361



<b>C. PROBLEME PROPUSE</b> .....	546
<b>ENUNȚURI</b> .....	546
1. Mecanică .....	546
2. Fizică moleculară și căldură. Termodinamică .....	549
3. Electricitate .....	553
4. Optică.....	560
5. Fizică atomică și nucleară .....	564
<b>REZOLVĂRI</b> .....	570

## CHIMIE

<b>A. BREVIAR</b> .....	650
<b>B. PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR</b> .....	664
<b>ENUNȚURI 1984</b> .....	664
1. Învățămîntul tehnic și universitar.....	664
α. Profilurile chimie, biochimie, chimie fizică.....	664
β. Profilul mecano-chimic .....	665
γ. Profilul chimie alimentară.....	666
2. Învățămîntul medico-farmaceutic și universitar (biologie) .....	666
<b>ENUNȚURI 1985</b> .....	667
1. Învățămîntul tehnic și universitar.....	667
α. Profilurile chimie, biochimie, chimie fizică.....	667
β. Profilul chimie alimentară.....	668
2. Învățămîntul medico-farmaceutic și universitar (biologie) .....	668
<b>ENUNȚURI 1986</b> .....	669
1. Învățămîntul tehnic și universitar.....	669
α. Profilurile chimie, biochimie, chimie fizică.....	669
2. Învățămîntul medico-farmaceutic universitar (biologie).....	670
	877

<b>ENUNȚURI 1987</b> .....	671
<b>1. Învățământul tehnic și universitar</b> .....	671
α. Profilurile chimie, biochimie, chimie fizică .....	671
β. Profilul chimie alimentară.....	674
<b>2. Învățământul medico-farmaceutic și universitar (biologie)</b> .....	675
<b>REZOLVĂRI</b> .....	679
 <b>C. PROBLEME PROPUSE</b> .....	744
<b>ENUNȚURI</b> .....	744
<b>REZOLVĂRI</b> .....	775